Examen de Geometría I

Convocatoria Ordinaria - 15 de enero de 2020

1. **[3 puntos].** Razónese si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes:

   a) Dado $p(x) \in \mathbb{R}_4[x]$ distinto del polinomio nulo, existe una base ordenada B de $\mathbb{R}_4[x]$ tal que las coordenadas de $p(x)$ en B son: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

   b) Una aplicación lineal $f : V \to V'$ es inyectiva si y sólo si f^t es inyectiva.

2. **[4 puntos].** Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, se considera el endomorfismo $f_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada en la base usual es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & \lambda - 1 \\ 0 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1 - \lambda^2/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (i) Hallar $\mathrm{Im}(f_\lambda)$ y $\mathrm{Ker}(f_\lambda)$, según los valores del parámetro λ. Decidir si f_λ es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

   (ii) Obtener, según los valores de λ, una base de $\mathrm{Ker}(f_\lambda) \bigcap \mathrm{Im}(f_\lambda)$ y de $\mathrm{Ker}(f_\lambda) + \mathrm{Im}(f_\lambda)$. ¿Para qué valores $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f_\lambda) \bigoplus \mathrm{Im}(f_\lambda)$?.

   (iii) Para los valores de λ que sea posible, encontrar bases de $\mathbb{R}^3$ tales que la matriz asociada a f_λ en esas bases sea la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. **[3 puntos].** Calcúlese un endomorfismo f de $M_2(\mathbb{R})$ que verifique las siguientes tres propiedades:

   - $f \circ f = f$,
   - $\mathrm{Im}\ f^t = \mathrm{an}(S_2(\mathbb{R}))$, y
   - $\mathrm{Ker}\ f^t = \mathrm{an}(A_2(\mathbb{R}))$,

   donde $S_2(\mathbb{R})$ y $A_2(\mathbb{R})$ son los subespacios de matrices simétricas y antisimétricas, respectivamente, del espacio vectorial real $M_2(\mathbb{R})$ de las matrices cuadradas 2×2.

Duración: 3 horas.

1. Razónese si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes:

   a) Dado $p(x) \in \mathbb{R}_4[x]$ distinto del polinomio nulo, existe una base ordenada B de $\mathbb{R}_4[x]$ tal que las coordenadas de $p(x)$ en B son: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

   b) Una aplicación lineal $f : V \to V'$ es inyectiva si y sólo si f^t es inyectiva.

Solución.

a) VERDADERO. De hecho, es cierto en dimensión finita con más generalidad (para cualquier vector y n-úpla no nulos). Daremos dos razonamientos, el primero más heurístico usando matrices y el segundo formulado de manera general y con elementos más básicos.

Razonamiento 1. Al ser $p(x)$ no nulo, el conjunto $\{p(x)\}$ es linealmente independiente y podemos ampliarlo hasta un base $\bar{B} = (p(x), p_2(x), \ldots, p_5(x))$ de $\mathbb{R}_4[x]$. Buscamos una nueva base B en la que se obtengan las coordenadas pedidas. Esto equivale a que la matriz de cambio de base satisfaga:

$$M(I, B \leftarrow \bar{B}) = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 1 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 2 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 3 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ 4 & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

(obsérvese que las coordenadas de $p(x)$ en $\bar{B}$ son $(1, 0, 0, 0, 0)^t$). Basta entonces con escoger las columnas restantes de modo que se obtenga una matriz regular. Así, por ejemplo, escogemos:

$$M(I, B \leftarrow \bar{B}) = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

la cual es claramente regular[1]. La base pedida B queda entonces unívocamente determinada a partir de $\bar{B}$ y esta matriz. De hecho, si se quisiera construir explícitamente B a partir de $\bar{B}$, bastaría con calcular la matriz inversa de la anterior (sus columnas proporcionarán las coordenadas de los vectores de B en la base $\bar{B}$).

Nota. Es de remarcar que este razonamiento es fácilmente generalizable a cualquier espacio vectorial de dimensión finita $V(K)$, ya que si se sitúa en la primera columna cualquier n-úpla no nula, se puede obtener una matriz regular ampliando esa columna hasta una base de K^n.

[1] Es inmediato que su determinante es $-1 \neq 0$ porque, al ser la caja 2×3 superior derecha igual a 0, basta con tomar el producto de los determinantes de las dos cajas diagonales.

Razonamiento 2. Sea $V(K)$ un espacio vectorial de dimensión n, sea $v \in V$ no nulo y $(a_1, \ldots, a_n) \in K^n$ no nula. Demostraremos que existe una base B tal que $(a_1, \ldots, a_n)^t$ sean las coordenadas de v en B. (Obsérvese que el caso particular $V = \mathbb{R}_4[x]$, $v = p(x)$, $(a_1, \ldots, a_n) = (0, 1, 2, 3, 4)$ es el resultado buscado.)

Para ello, sea i un índice tal que $a_i \neq 0$, y ampliemos v hasta una base de $V(K)$,

$$\bar{B} = (v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_n)$$

en la cual el vector v original se ha ubicado en la posición i-ésima. Observemos que existe un vector $v_i \in V$ que hace que se verifique la igualdad:

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_{i-1} v_{i-1} + a_i v_i + a_{i+1} v_{i+1} \ldots a_n v_n. \tag{1}$$

De hecho, como $a_i \neq 0$, el vector v_i queda determinado unívocamente suponiendo que se verifica la igualdad anterior y despejando en ella, esto es, se toma v_i como:

$$v_i = a_i^{-1} \left(v - a_1 v_1 + \cdots - a_{i-1} v_{i-1} - a_{i+1} v_{i+1} \cdots - a_n v_n \right).$$

En esta expresión se observa que, al escribir v_i como combinación lineal de la base $\bar{B}$, la coordenada correspondiente a v es a_i^{-1}. Por ser este escalar distinto de 0, al reemplazar en $\bar{B}$ el vector v por v_i se obtiene una nueva base[2],

$$B = (v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n).$$

Como, por la elección de v_i, se verifica (1), ésta es la base requerida.

b) FALSO. Si $f : V \to V'$ es inyectiva y dim $V <$ dim V' entonces $f^t : (V')^* \to V^*$ no puede ser inyectiva, porque la dimensión de su dominio (que es igual a dim V') es mayor que la de su codominio (igual a dim V).

Así, cualquier aplicación inyectiva que no sea biyectiva sirve de contraejemplo (por ejemplo, la única aplicación lineal de $\{0\}$ a $\mathbb{R}$, cuya traspuesta es la aplicación nula con dominio $\mathbb{R}^*$).

Nota. Es de señalar que se verifican las siguientes propiedades relacionadas, que se pueden comprobar como ejercicio:

- f es inyectiva si y sólo si f^t es suprayectiva.
- f es suprayectiva si y sólo si f^t es inyectiva.
- En el caso dim$V$= dim V', se cumple: f es inyectiva si y sólo si f^t es inyectiva.

[2] Éste es un resultado básico y conocido, aunque no del todo trivial ¡compruébese directamente!

2. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, se considera el endomorfismo $f_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada en la base usual es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & \lambda - 1 \\ 0 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1 - \lambda^2/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Hallar $\mathrm{Im}(f_\lambda)$ y $\mathrm{Ker}(f_\lambda)$, según los valores del parámetro λ. Decidir si f_λ es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

(ii) Obtener, segúnn los valores de λ, una base de $\mathrm{Ker}(f_\lambda) \bigcap \mathrm{Im}(f_\lambda)$ y de $\mathrm{Ker}(f_\lambda) + \mathrm{Im}(f_\lambda)$. ¿Para qué valores $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f_\lambda) \bigoplus \mathrm{Im}(f_\lambda)$?.

(iii) Para los valores de λ que sea posible, encontrar bases de $\mathbb{R}^3$ tales que la matriz asociada a f_λ en esas bases sea la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solución.

(i) Como la dimensión del conjunto imagen es el rango de la matriz asociada en cuaquier base, comenzaremos calculando el rango de $M = M(f_\lambda, B_u)$ $(= M(f_\lambda, B_u \leftarrow B_u))$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3/2 & \lambda - 1 \\ 0 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1 - \lambda^2/2 & 1 \end{vmatrix} = (1 - \lambda^2)/2,$$

por lo tanto el rango de M es 3 para todo $\lambda \neq \pm 1$ y rango de M igual a 2 para $\lambda = 1$ y $\lambda = -1$ (es de notar que siempre podemos encontrar una submatriz 2×2 con determinante distinto de cero, por ejemplo, la formada por las dos primeras filas y columnas). Distinguimos pues los siguientes casos:

- Caso 1: si $\lambda \neq \pm 1$, $\dim(\mathrm{Im}(f_\lambda)) = rg(M) = 3$ y por tanto $\mathrm{Im}(f_\lambda) = \mathbb{R}^3$ y $\mathrm{Ker}(f_\lambda) = \{(0,0,0)\}$ ya que $\dim(\mathrm{Ker}(f_\lambda)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathrm{Im}(f_\lambda)) = 3 - 3 = 0$. La aplicación f_λ es inyectiva y sobreyectiva, luego es un isomorfismo.

- Caso 2: si $\lambda = 1$, $\dim(\mathrm{Im}(f_1)) = rg(M) = 2$ y una base de $\mathrm{Im}(f_1)$ es la formada por dos de las columnas de M que no sean proporcionales. Es decir,

$$\mathrm{Im}(f_1) = L((1,0,0),\ (3/2,-1/2,1/2),\ (0,-1,1)) = L((1,0,0),\ (0,-1,1)),$$

  y $\{(1,0,0),\ (0,-1,1)\}$ es una base de $\mathrm{Im}(f_1)$.

  Usando la fórmula de las dimensiones $\dim(\mathrm{Ker}(f_1)) = 3 - 2 = 1$. Para obtener una base del núcleo resolvemos el SEL,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

  ya que el núcleo está formado por los vectores de $\mathbb{R}^3$ con imagen nula. Las soluciones del SEL son $z = \mu$, $y = -2\mu$, $x = 3\mu$ con $\mu \in \mathbb{R}$ y, por tanto,

$$\mathrm{Ker}(f_1) = L\{(3,-2,1)\},$$

  esto es, $\{(3,\text{-}2,1)\}$ es una base de $\mathrm{Ker}(f_1)$.

  Como $\mathrm{Ker}(f_1) \neq \{(0,0,0)\}$ y $\mathrm{Im}(f_1) \neq \mathbb{R}^3$, f_1 no es inyectiva ni sobreyectiva.

- Caso 3: si $\lambda = -1$, razonando como en el caso anterior $\mathrm{Im}(f_{-1}) = L((1,0,0), (-2,-1,1))$, lo que proporciona la base, y $\mathrm{Ker}(f_{-1})$ está formado por las soluciones del SEL
$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -2 \\ 0 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
que son $z = \mu$, $y = -2\mu$, $x = 5\mu$. Luego $\mathrm{Ker}(f_{-1}) = L\{(5,-2,1)\}$ y se obtiene la base. La aplicación f_{-1} no es inyectiva ni sobreyectiva.

(ii) Para $\lambda \neq \pm 1$, como el núcleo está formado sólo por el vector nulo, entonces $\mathrm{Ker}(f_\lambda) \bigcap \mathrm{Im}(f_\lambda) = \{(0,0,0)\}$. Usando la fórmula de Grassman

$$\dim(\mathrm{Ker}(f_\lambda) + \mathrm{Im}(f_\lambda)) = \dim(\mathrm{Ker}(f_\lambda)) + \dim(\mathrm{Im}(f_\lambda)) - \dim(\mathrm{Ker}(f_\lambda) \bigcap \mathrm{Im}(f_\lambda)) = 3,$$

por lo que $\mathrm{Ker}(f_\lambda) + \mathrm{Im}(f_\lambda) = \mathbb{R}^3$ y como la intersección es nula, la suma es directa.

Para $\lambda = 1$ sabemos que $\mathrm{Ker}(f_1) + \mathrm{Im}(f_1) = L((3,-2,1), (1,0,0), (0,-1,1))$ ya que un sistema de generadores de la suma se obtiene al unir las bases de cada uno de los subespacios vectoriales involucrados. Además podemos comprobar inmediatamente que los tres vectores son linealmente independientes (el determinante de la matriz formada con ellos es $\neq 0$). Por tanto, los tres vectores forman base y $\mathrm{Ker}(f_1) + \mathrm{Im}(f_1) = \mathbb{R}^3$. Por la fórmula de Grassmann, $\mathrm{Ker}(f_1) \bigcap \mathrm{Im}(f_1) = \{(0,0,0)\}$ y la suma es también directa.

Finalmente para $\lambda = -1$, $\mathrm{Ker}(f_{-1}) + \mathrm{Im}(f_{-1}) = L((5,-2,1), (1,0,0), (-2,-1,1))$ y los tres vectores son linealmente independientes. Así, $\mathrm{Ker}(f_{-1}) + \mathrm{Im}(f_{-1}) = \mathbb{R}^3$ y $\mathrm{Ker}(f_{-1}) \bigcap \mathrm{Im}(f_{-1}) = \{(0,0,0)\}$, por lo que la suma es directa.

Resumiendo, $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f_\lambda) \bigoplus \mathrm{Im}(f_\lambda)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

(iii) Como el rango de la matriz que nos dan en este apartado tiene rango 2, la matriz M será equivalente a la nueva matriz sólo para $\lambda = \pm 1$. Para estos valores de λ vamos a encontrar bases B y B' de $\mathbb{R}^3$ para las cuales

$$M(f_\lambda, B' \leftarrow B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda = 1$, construimos la base B en el dominio cogiendo la base de $\mathrm{Ker}(f_1)$ y ampliando hasta una base de $\mathbb{R}^3$. Por ejemplo,

$$B = \{(0,1,0), (0,0,1), (3,-2,1)\}.$$

Es de remarcar que la base del núcleo se ha incluido al final de la base B porque la columna nula aparece también al final de la matriz.

Una vez fijada la base B, para que la matriz asociada a la aplicación tenga la forma deseada, la base B' debe estar formada por las imágenes de $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$ (los vectores que hemos añadido a la base del núcleo para formar la base B) y ampliarla a una base de $\mathbb{R}^3$. Luego,

$$B' = \{(3/2,-1/2,1/2), (0,-1,1)\,(0,0,1)\}.$$

Comprobemos que la matriz asociada a f_1 en B y B' tiene la forma requerida. Para ello, la primera columna de la matriz asociada será las coordenadas de $f_1(0,1,0) = (3/2, -1/2, 1/2)$ en la base B', las cuales son (1,0,0). La segunda columna estará compuesta por las coordenadas de $f_1(0,0,1) = (0,-1,1)$ en B' que son $(0,1,0)$, y la tercera columna es $f(3,-2,1)_{B'} = (0,0,0)$.

Para $\lambda = -1$, razonando de la misma forma obtenemos $B = \{(0,1,0),\, (0,0,1),\, (5,-2,1)\}$ y $B' = \{(3/2,-1/2,1/2),\, (-2,-1,1)\, (0,0,1)\}$.

3. Calcúlese un endomorfismo f de $M_2(\mathbb{R})$ que verifique las siguientes tres propiedades:

   - $f \circ f = f$,
   - Im $f^t = \text{an}(S_2(\mathbb{R}))$, y
   - Ker f^t= an$(A_2(\mathbb{R}))$,

   donde $S_2(\mathbb{R})$ y $A_2(\mathbb{R})$ son los subespacios de matrices simétricas y antisimétricas, respectivamente, del espacio vectorial real $M_2(\mathbb{R})$ de las matrices cuadradas 2×2.

Solución. Recordemos que, para cualquier aplicación lineal:

$$\text{Im}f^t = \text{an}(\text{Ker } f), \qquad \text{Ker}f^t = \text{an}(\text{Im } f).$$

Por tanto, las condiciones segunda y tercera que se imponen a f equivalen a:

$$\text{an}(\text{Ker } f) = \text{an}(S_2(\mathbb{R})), \qquad \text{an}(\text{Im } f) = \text{an}(A_2(\mathbb{R})).$$

Como dos subespacios vectoriales son iguales si y sólo si sus anuladores coinciden, esto equivale a:

$$\text{Nuc}f = S_2(\mathbb{R}), \qquad \text{Im } f = A_2(\mathbb{R}). \tag{2}$$

Recordemos también que son bases de $S_2(\mathbb{R}), A_2(\mathbb{R})$, resp., los conjuntos B_S y B_A definidos por:

$$B_S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \qquad B_A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Como, además, $M_2(\mathbb{R}) = S_2(\mathbb{R}) \oplus A_2(\mathbb{R})$, el conjunto

$$B = B_S \cup B_A$$

es una base de $M_2(\mathbb{R})$, la cual supondremos ordenada de manera natural.

Para determinar f, basta con especificar las imágenes de los elementos de B y extender por linealidad. Para que se verifiquen las propiedades (2) basta con imponer:

$$f(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

y

$$f(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

De hecho, es inmediato de estas igualdades que $S_2(\mathbb{R}) \subset \text{Ker}(f)$ (pues una base de $S_2(\mathbb{R})$ se aplica en 0) y que Im $f = A_2(\mathbb{R})$ (ya que $f(B)$ es un sistema de generadores de $A_2(\mathbb{R})$). En particular, rango$(f) = 1$ por lo que dim(Ker f)=3 y, como dim$(S_2(\mathbb{R}))$= 3 se da la igualdad $S_2(\mathbb{R}) = \text{Ker}(f)$.

Más aún, la condición $f \circ f = f$ también se verifica. De hecho, para que se verifique esta igualdad es suficiente (por la linealidad de f) con que se cumpla para los vectores de una base, y resulta inmediato de (3) y (4) que se verifica para los vectores de[3] B.

En consecuencia, la aplicación lineal f buscada es la que se obtiene extendiendo por linealidad las igualdades (3) y (4).

[3]Es de señalar que, si en lugar de la igualdad (4) se hubiera impuesto, por ejemplo, $f(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, también habríamos construido una aplicación lineal f que verificaría (2). Sin embargo, esta aplicación no verificaría $f \circ f = f$. La elección (4) realmente está forzada porque la igualdad $f \circ f = f$ significa que f es un *proyector* y, por tanto, debe cumplir: (a) $V =$ Ker $f \oplus$ Im f y (b) $f(v) = v$ para todo $v \in$ Im f.

Aunque lo obtenido ya es suficiente para terminar el ejercicio, conviene especificar f de manera más precisa. De (3) y (4) resulta inmediato:

$$M(f,B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si queremos obtener explícitamente $f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})$, podemos hacerlo cambiando de esta base a la usual de las matrices, esto es, $B_u = (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$ (¡compruébese!).

Alternativamente, podemos calcular $f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})$ con facilidad teniendo en cuenta que cualquier matriz cuadrada A se puede escribir como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica:

$$A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t)$$

Así, se tiene:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & b-c \\ -b+c & 0 \end{pmatrix} \\ &= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}(b+c)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}(b-c)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Usando (3) y (4) se tiene entonces:

$$f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = 0 + 0 + 0 + \frac{1}{2}(b-c) f(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}) = \frac{1}{2}(b-c)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

esto es:

$$\boxed{f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & b-c \\ -b+c & 0 \end{pmatrix}, \qquad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).}$$