Aplicaciones Teorema del Valor Medio

1. Monotonía y derivabilidad

Proposición. Sea $I$ un intervalo y sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función derivable. Se tiene que.

1. $f$ es creciente (respectivamente decreciente) si, y solo si, $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) para todo $x \in I$.
2. $f$ es constante si, y solo si, $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$.
3. Si $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) para todo $x \in I$, entonces $f$ es estrictamente creciente (resp. estrictamente decreciente).

Corolario. Sea $f: ]a,b[ \to \mathbb{R}$ una función derivable y sea $c \in ]a,b[$. Supongamos que $f'(x) \geq 0$ para cualquier $x \in ]a,c[$ y que $f'(x) \leq 0$ para cualquier $x \in ]c,b[$. Entonces $f$ tiene un máximo absoluto en $c$.

Proposición. Sea $I$ un intervalo y $f: I \to \mathbb{R}$ una función derivable con $f'(x) \neq 0$, para cualquier $x \in I$. Entonces $f$ es estrictamente monótona y se cumple que $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$ o que $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$.

Dem. Si $x, y \in I$, $x \neq y$, entonces existe $c$ entre $x$ e $y$ tal que $f(x) - f(y) = f'(c)(x-y)$. Como $f'(c) \neq 0$, se cumple que $f(x) \neq f(y)$. Por tanto, $f$ es inyectiva. Sabemos que una función continua, inyectiva y cuyo dominio es un intervalo es estrictamente monótona. Si es estr. creciente su derivada tiene que ser mayor o igual que cero, pero esta última posibilidad no puede darse. De forma análoga se razona si es estrictamente decreciente.

## 2. Propiedades de la derivada

Teorema. Teorema del valor intermedio para las derivadas. Sea $I$ un intervalo y sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función derivable. Entonces $f'(I)$ es un intervalo.

De lo anterior tenemos la siguiente definición:

Propiedad de Darboux. Sea $I$ un intervalo. Una función $f: I \to \mathbb{R}$ verifica la propiedad de Darboux o del valor intermedio si para cualesquiera $a$ y $b$ en $I$ con $a \leq b$ y para cualquier número $y$ entre $f(a)$ y $f(b)$ existe $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = y$, lo que es lo mismo, $f([a,b])$ es un intervalo.

Ejemplos.

1) Las funciones continuas verifican la propiedad de Darboux. Eso es exactamente lo que dice el teorema del valor intermedio.

2) Una función que no lleva intervalos en intervalos como la función parte entera, no puede ser ni continua ni la derivada de nadie.

### Funciones con la propiedad de Darboux.

En el siglo XIX, se pensaba que el teorema del valor intermedio era una propiedad que caracterizaba a las funciones continuas. Pero Darboux demostró que:

1) Todas las derivadas verifican el teorema del valor intermedio, y

2) existen derivadas que son discontinuas.

## Discontinuidades de la derivada.

Proposición. Sea $I$ un intervalo, $a \in I$ y sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función continua en $I$ y derivable en $I \setminus \{a\}$.

1) Si $f'$ tiene límite en $a$, entonces $f$ es derivable en $a$ y $f'(a) = \lim_{x \to a} f'(x)$.

2) Si $\lim_{x \to a} f'(x) = +\infty$, entonces $f$ no es derivable en $a$.

3) Si $f'$ tiene laterales en $a$ distintos, entonces $f$ no es derivable en $a$.

Como consecuencia, la derivada de una función en un intervalo no tiene discontinuidades de salto. No tiene discontinuidades evitables ni discontinuidades esenciales.

## Función inversa.

Teorema. (Teorema de la función inversa (versión global)). Sea $I$ un intervalo y sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función derivable con $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in I$. Entonces $f$ es inyectiva y su función inversa, $f^{-1}$, es derivable en $f(I)$ con

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \quad \forall y \in f(I)$$

Dem. Como la derivada es distinta de cero, la función es estrictamente monótona y, por tanto, inyectiva. Su inversa es continua (es monótona y su imagen, $I$, es un intervalo). El teorema de derivación de la función inversa nos da lo pedido.

Ejemplo. Conocida que la derivada de la exponencial es ella misma, podemos calcular la derivada del logaritmo natural si $f(x) = e^x$

$$(f^{-1})'(e^x) = \frac{1}{e^x}$$ , notando $y = e^x$, tenemos que

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{y}$$

## Reglas de L'Hôpital

Teorema. (Teorema del valor intermedio generalizado). Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $]a,b[$. Entonces existe $c \in ]a,b[$ tal $(f(b)-f(a))g'(c) = (g(b)-g(a))f'(c)$

Dem: Consideramos $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \det \begin{pmatrix} 1 & f(x) & g(x) \\ 1 & f(a) & g(a) \\ 1 & f(b) & g(b) \end{pmatrix} =$$

$$= f(a)g(b) + f(b)g(x) + f(x)g(a) - f(a)g(x) - f(b)g(a) - f(x)g(b)$$

$$= (f(b)-f(a))g(x) - (g(b)-g(a))f(x) + f(a)g(b) - f(b)g(a)$$

La función $h$ es continua en $[a,b]$, derivable en $]a,b[$ y $h(a) = h(b) = 0$. Por tanto, el teorema de Rolle nos dice que $\exists c \in ]a,b[$ tal que $h'(c) = 0$, o equivalentemente

$$(f(b)-f(a))g'(c) - (g(b)-g(a))f'(c) = 0$$

Proposición. (Primera regla de L'Hôpital). Sea $I$ un intervalo, $a \in I$ y sean $f, g : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ funciones derivables. Supongamos que

1) $g'(x) \neq 0, \ \forall x \in I \setminus \{a\}$
2) $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$

Entonces, la función $g$ no se anula en $I \setminus \{a\}$ y se cumple que:

1) Si $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, se tiene que $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.
2) Si $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$, se tiene que $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$.
3) Si $\lim_{x \to a} \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} \right| = +\infty$, se tiene que $\lim_{x \to a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = +\infty$.

Proposición. (Segunda regla de L'Hôpital). Sea $I$ un intervalo, $a \in I$ y sean $f, g : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ funciones derivables. Supongamos que

1) $g'(x) \neq 0, \ \forall x \in I \setminus \{a\}$
2) $\lim_{x \to a} |g(x)| = +\infty$.

Entonces, $g$ no se anula en un entorno de $a$ y se cumple:

1) Si $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, se tiene que $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$
2) Si $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$, se tiene que $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$
3) Si $\lim_{x \to a} \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} \right| = +\infty$, se tiene que $\lim_{x \to a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = +\infty$

Ejemplo. Para finalizar, voy a mostrar un ejemplo de la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen}(x)}$$ Tenemos la indeterminación "$\frac{0}{0}$"

Aplicamos L'Hôpital

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos(x)} = 2$$