7. Explica si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas. Cuando sean ciertas indica el resultado de teoría que lo justifica o proporciona una prueba y, cuando sean falsas indica un contraejemplo.

1. Si una sucesión monótona $\{x_n\}$ tiene una sucesión parcial convergente entonces $\{x_n\}$ es convergente.

   Verdadero. Supongamos que $\{x_n\}$ es creciente y sea $\{x_{\sigma(n)}\}$ una sucesión parcial convergente. Entonces la sucesión $\{x_{\sigma(n)}\}$ debe estar mayorada, es decir, existe $M > 0$ tal que $x_{\sigma(n)} \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pero sabemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $n \leqslant \sigma(n)$, por lo que $x_n \leqslant x_{\sigma(n)} \leqslant M$, lo que prueba que $\{x_n\}$ está mayorada y, por tanto, es convergente. Análogamente se razona si suponemos que $\{x_n\}$ es decreciente.

2. Si $\{x_n\}$ es una sucesión acotada de números reales, entonces $\{x_n\}$ tiene la siguiente propiedad: para cada $\delta > 0$, pueden encontrarse $m, n \in \mathbb{N}$, con $m \neq n$, tales que $|x_n - x_m| < \delta$.

   Verdadero. Por el teorema de Bolzano–Weierstrass, toda sucesión acotada tiene alguna sucesión parcial, $\{x_{\sigma(n)}\}$, convergente. Por tanto, la sucesión $\{x_{\sigma(n)}\}$ debe verificar la condición de Cauchy, es decir, dado $\delta > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todos $p, q \geqslant n_0$ se verifica que $\left|x_{\sigma(p)} - x_{\sigma(q)}\right| < \delta$. Poniendo $m = \sigma(n_0)$ y $n = \sigma(n_0 + 1)$ tenemos que $m \neq n$ (porque σ es estrictamente creciente) y $|x_n - x_m| < \delta$.

3. Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas tales que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{Q}$, entonces $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   Verdadero. Como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, dado $y \in \mathbb{R}$ existe una sucesión de números racionales, $\{x_n\}$, con $x_n \in \mathbb{Q}$, tal que $\lim\{x_n\} = y$. Por la continuidad de f y de g debe ser $f(y) = \lim\{f(x_n)\}$ y $g(y) = \lim\{g(x_n)\}$, pero como, por la hipótesis hecha, para todo $n \in \mathbb{N}$ es $f(x_n) = g(x_n)$, deducimos que $f(y) = \lim\{f(x_n)\} = \lim\{g(x_n)\} = g(y)$, esto es, $f(y) = g(y)$. Concluimos que f y g coinciden en todo $\mathbb{R}$.

4. Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es continua y $f(x) > 0$ para todo $x \in [0,1]$ entonces existe $\alpha > 0$ tal que $f(x) > \alpha$ para todo $x \in [0,1]$.

   Verdadero. Por el teorema de Weierstrass de valores máximos y mínimos, sabemos que una función continua en un intervalo cerrado y acotado alcanza un mínimo absoluto (y también un máximo absoluto pero eso ahora no interesa), es decir hay algún $x_0 \in [0,1]$ tal que $f(x_0) \leqslant f(x)$ para todo $x \in [0,1]$. Y como es $f(x) > 0$ para todo $x \in [0,1]$ debe ser $f(x_0) > 0$. Tomando $\alpha = f(x_0)/2$ (vale cualquier número que esté en el intervalo $]0, f(x_0)[$) tenemos que $f(x) > \alpha$ para todo $x \in [0,1]$. ☺