

Doble Grado en Informática y Matemáticas – Ejercicios y cuestiones teóricas

1. Estudia la convergencia absoluta y la convergencia de las siguientes series.

$$a) \sum_{n \geq 1} \frac{6^n n!}{\sqrt[3]{n} \cdot 11 \cdot 17 \cdot 23 \cdots (5 + 6n)}; \quad b) \sum_{n \geq 2} (-1)^{n+1} \log \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 1}$$

2. Estudia la convergencia absoluta y la convergencia de las siguientes series.

$$a) \sum_{n \geq 1} \frac{5^n n!}{\sqrt[3]{n} \cdot 9 \cdot 14 \cdot 19 \cdots (4 + 5n)}; \quad b) \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})$$

3. Sea $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua verificando que $-1 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in [-1, 1]$. Prueba que hay algún $c \in [-1, 1]$ tal que $f(c) = c^3$.
4. Sea $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua verificando que $-1 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in [-1, 1]$. Prueba que hay algún $c \in [-1, 1]$ para el que se verifica la igualdad $f(c) = \frac{1}{4}(c^3 + 3c)$.
5. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función creciente y continua en $[a, b]$ tal que $a \leq f(x) \leq b$ para todo $x \in [a, b]$. Prueba que la sucesión $\{x_n\}$ definida por:

$$x_1 = f(a), \quad x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

converge a un punto $u \in [a, b]$ tal que $f(u) = u$.

6. Sea $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ la función definida para todo $x \in]0, 1[$ por $f(x) = \frac{2x-1}{x(x-1)}$. Calcula el conjunto imagen $f(]0, 1[)$.

7. Sea $f :]-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada para todo $x \in]-1, 1]$ por $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

a) Calcula, haciendo uso del teorema del valor intermedio que debes enunciar, el conjunto $f(]-1, 1])$.

b) Calcula, usando un resultado sobre continuidad y monotonía que debes enunciar, el conjunto $f([-1/2, 1/2])$.

8. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, pongamos $M = \max f([a, b])$, $m = \min f([a, b])$ y supongamos que $f(a) = f(b)$ y que $m < f(a) < M$. Prueba que f toma todo valor de $]m, M[$ en al menos dos puntos de $[a, b]$.
9. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y creciente. Prueba que para todo conjunto acotado y no vacío, $A \subset \mathbb{R}$, se verifica que $\sup f(A) = f(\sup A)$.
10. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente verificando que $a < f(x) < b$ para todo $x \in [a, b]$. Definamos $x_1 = a$, y $x_{n+1} = f(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prueba que $\{x_n\}$ converge a un número $\beta \in]a, b]$ tal que $\beta = \sup f([a, \beta])$. Además $\beta \leq f(\beta)$. Si suponemos que f es continua en β entonces $\beta = f(\beta)$.
11. Explica si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas, indicando el resultado de teoría que lo justifica, o proporcionando una prueba o un contraejemplo.
- 1) Hay un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ que no es vacío y cuyo conjunto de minorantes es un intervalo del tipo $] -\infty, a[$.

- ?? 2) Una sucesión monótona no acotada no tiene ninguna sucesión parcial convergente.
- 3) Una sucesión no acotada no puede tener una sucesión parcial convergente.
- 4) Una sucesión monótona que tenga una parcial convergente es convergente.
- 5) Existe una sucesión de números reales $\{x_n\}$ acotada y que verifica que $|x_n - x_m| \geq 10^{-10}$ siempre que $n \neq m$.
- ?? 6) Sea $\{x_n\}$ una sucesión tal que $\{x_{n+1} - x_n\}$ es convergente. Entonces la sucesión $\{x_n/n\}$ es convergente.
- 7) Si una sucesión $\{x_n\}$ es tal que $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \rightarrow 1$ entonces $\{x_n\} \rightarrow 1$.
- ?? 8) Una sucesión de números reales está acotada si, y sólo si, tiene una sucesión parcial convergente.
- 2x 9) Una sucesión que no tiene ninguna sucesión parcial convergente tampoco tiene ninguna sucesión parcial acotada.
- 10) Toda función definida en un intervalo cuya imagen es un intervalo es continua.
- 11) Toda función inyectiva cuya imagen es un intervalo es continua.
- ?? 12) La función inversa de una función estrictamente monótona definida en un intervalo es continua.
- ?? 13) La función inversa de una función continua e inyectiva es continua. F
- 14) Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es una función inyectiva y continua en un intervalo no vacío I entonces f^{-1} es continua en $J = f(I)$.
- 15) Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es una función inyectiva, I es un intervalo y $J = f(I)$ es un intervalo entonces su función inversa f^{-1} es continua en J .
- ?? 16) Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es una función inyectiva, $f(A)$ un intervalo, y f^{-1} es continua, entonces f es continua.
- ?? 17) Si $\sum_{n \geq 1} x_n$ es una serie convergente de términos positivos, entonces la sucesión $\{x_n\}$ es decreciente.
- 18) Toda serie de términos positivos mayorada es convergente.
- ?? 19) Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua que no está mayorada ni minorada, entonces $f(A) = \mathbb{R}$.
- 20) Toda función polinómica o se anula en algún punto o alcanza un máximo o un mínimo absolutos en \mathbb{R} .
- 21) Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y verifica que $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{Q}$ entonces f es constante. V
- 22) Hay una función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ que es continua y verifica que $f[0, 1] = [2, 3[$. F
- 23) Toda función continua en un intervalo alcanza en algún punto de dicho intervalo un valor mínimo. V
- 24) Si $\{x_n\}$ es una sucesión estrictamente creciente y se verifica que la sucesión $\{x_n - x_{n-1}\}$ converge a 0 entonces $\{x_n\}$ es convergente.
- 25) Toda sucesión estrictamente creciente verifica la condición de Cauchy.
- 26) Toda serie convergente es una sucesión acotada.
- ?? 27) Si $\{x_n\}$ es una sucesión acotada, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existen términos x_p y x_q de dicha sucesión tales que $|x_p - x_q| < \varepsilon$.
- ?? 28) Si $f : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y estrictamente creciente verificando que $f(0) = 0$ y que $\{f(1 - (1/n))\} \rightarrow 1$, entonces $f([0, 1]) = [0, 1]$.