Cálculo I – Grupo B

Soluciones evaluación 31/10/2013

Ejercicio 1. Calcula los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los que se verifica la desigualdad:

$$\frac{x^3 - 33}{x^2 - 2x - 4} \geqslant 6. \tag{1}$$

Solución. Las raíces de la ecuación $x^2 - 2x - 4 = 0$ son $\alpha = 1 - \sqrt{5}$ y $\beta = 1 + \sqrt{5}$. Como la función racional en (1) no está definida en los ceros del denominador, en lo que sigue se supondrá que $x \neq \alpha$ y $x \neq \beta$. La desigualdad (1) puede escribirse en la forma:

$$\frac{x^3 - 33}{x^2 - 2x - 4} - 6 = \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 9}{x^2 - 2x - 4} \geqslant 0 \tag{2}$$

Esta desigualdad es equivalente a:

$$(x^3 - 6x^2 + 12x - 9)(x^2 - 2x - 4) \geqslant 0. \tag{3}$$

Como el polinomio $x^3 - 6x^2 + 12x - 9$ tiene la raíz 3, obtenemos fácilmente:

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 9 = (x - 3)(x^2 - 3x + 3)$$

Como $x^2 - 3x + 3$ no tiene raíces reales, se verifica que $x^2 - 3x + 3 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por tanto, para estudiar la desigualdad (3) podemos prescindir de este factor. Hemos obtenido que la desigualdad (1) es equivalente a:

$$h(x) = (x - 3)(x - \alpha)(x - \beta) \geqslant 0.$$

Como $\alpha < 3 < \beta$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
x < \alpha \quad &\Longrightarrow \quad h(x) < 0 \text{ porque es producto de tres números negativos.}\\
\alpha < x < 3 \quad &\Longrightarrow \quad h(x) > 0 \text{ porque es producto de un número positivo y dos negativos.}\\
3 < x < \beta \quad &\Longrightarrow \quad h(x) < 0 \text{ porque es producto de dos números positivos y uno negativo.}\\
\beta < x \quad &\Longrightarrow \quad h(x) > 0 \text{ porque es producto de tres números positivos.}
\end{aligned}$$

Como, además, $h(3) = 0$, concluimos que:

$$\left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^3 - 33}{x^2 - 2x - 4} \geqslant 6 \right\} =]1 - \sqrt{5}, 3] \cup]1 + \sqrt{5}, +\infty[.$$

☺

Comentario. Principal fallo: no simplificar la desigualdad (1) expresándola como en (2). Segundo fallo, multiplicar ambos lados de la desigualdad (1) por el denominador y afirmar que dicha desigualdad equivale a $x^3 - 33 \geqslant 6(x^2 - 2x - 4)$. Esto será así solamente cuando $x^2 - 2x - 4 > 0$, lo que no siempre es cierto. Tercer fallo: errores en cálculos elementales.

No es buena estrategia en este tipo de ejercicios estudiar por separado los intervalos en donde el numerador o el denominador son positivos o negativos. Esa forma de proceder complica innecesariamente las cosas. Hay quienes distinguen los casos en que el denominador es positivo o negativo para transformar, en cada caso, la desigualdad (1) en otra equivalente. Es un buen método para equivocarse.

En este tipo de ejercicios hay que transformar la desigualdad dada en otras *equivalentes* a ella.

El signo de $h(x) = (x - \alpha)(x - 3)(x - \beta)$ en cada intervalo puede estudiarse de muchas formas. La forma en que lo hemos hecho es la más cómoda porque, una vez situado x en uno de los cuatro intervalos determinados por los números α, 3 y β, se sabe cuales de los números $x - \alpha$, $x - 3$ y $x - \beta$ son positivos o negativos por lo que también sabemos si su producto es positivo o negativo. Algunos evalúan $h(x)$ en un punto de cada intervalo eso lleva más tiempo y puede dar lugar a errores. También podemos observar que $h(x)$ es un polinomio con coeficiente líder positivo, por lo que para valores de x positivos y muy grandes será $h(x) > 0$, lo que nos dice que para $x > \beta$ es $h(x) > 0$. Ahora, como las raíces de $h(x)$ son simples, se produce un cambio de signo en cada una de ellas y volvemos a obtener los mismos resultados.

Varios afirman que *todo* polinomio de segundo grado es siempre positivo ¿cómo se les habrá ocurrido semejante disparate?

Algunos usan números decimales. Lo repito: en esta asignatura no se permite usar números decimales.

Ejercicio 2. Sean A y B conjuntos no vacíos de números reales tales que $B \subset \mathbb{R}^+$ y A está mayorado. Sea $\alpha = \sup(A)$ y $\beta = \text{ínf}(B)$. Supongamos que $\alpha < \beta^2$. Definamos:

$$C = \left\{ \frac{1}{b^2 - a} : \, b \in B, \, a \in A \right\}$$

Prueba que $\sup(C) = \dfrac{1}{\beta^2 - \alpha}$.

Solución. Como $B \subset \mathbb{R}^+$ se tiene que 0 es un minorante de B por lo que $0 \leqslant \beta$ ya que β es, por definición, el máximo minorante de B. Para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$ se verifica que:

$$\left. \begin{array}{c} a \leqslant \alpha \\ 0 \leqslant \beta \leqslant b \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{c} -\alpha \leqslant -a \\ \beta^2 \leqslant b^2 \end{array} \right\} \implies 0 < \beta^2 - \alpha \leqslant b^2 - a \implies \frac{1}{b^2 - a} \leqslant \frac{1}{\beta^2 - \alpha}$$

Hemos probado así que $\dfrac{1}{\beta^2 - \alpha}$ es un mayorante de C. Sea $\gamma = \sup(C)$. Como γ es el mínimo mayorante de C, tenemos que $\gamma \leqslant \dfrac{1}{\beta^2 - \alpha}$.

Por otra parte, para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$ se verifica que:

$$0 < \frac{1}{b^2 - a} \leqslant \gamma \implies \frac{1}{\gamma} \leqslant b^2 - a \implies a \leqslant b^2 - \frac{1}{\gamma}$$

Esta última desigualdad nos dice que para cada $b \in B$ el número $b^2 - \dfrac{1}{\gamma}$ es un mayorante de A y como α es el mínimo mayorante de A se verifica que $\alpha \leqslant b^2 - \dfrac{1}{\gamma}$.

Deducimos que para todo $b \in B$ se verifica que $\alpha + \dfrac{1}{\gamma} \leqslant b^2$. Como $\alpha + \dfrac{1}{\gamma} \geqslant \alpha + \beta^2 - \alpha = \beta^2 \geqslant 0$, deducimos que $\sqrt{\alpha + \dfrac{1}{\gamma}} \leqslant b$. Lo que nos dice que el número $\sqrt{\alpha + \dfrac{1}{\gamma}}$ es un minorante de B y como β

es el máximo minorante de B ha de de ser $\sqrt{\alpha+\dfrac{1}{\gamma}}\leqslant\beta$, es decir, $\alpha+\dfrac{1}{\gamma}\leqslant\beta^2$. Hemos probado así que $\dfrac{1}{\gamma}\leqslant\beta^2-\alpha$, es decir, $\gamma\geqslant\dfrac{1}{\beta^2-\alpha}$. Esta desigualdad y la anterior prueban la igualdad del enunciado. ☺

Comentario. Nadie ha hecho la observación de que $0\leqslant\beta$ necesaria para justificar que $\beta^2\leqslant b^2$. Igualmente, para pasar a inversos hace falta indicar que $0<\beta^2-\alpha$. Las hipótesis que se hacen en el enunciado de un ejercicio deben ser usadas en algún momento en su solución. Si no las usas es que estás haciendo algo mal o dando por supuesto algo que debes explicar. Hay muchos, demasiados, errores al trabajar con desigualdades. Algunos deben creer que los símbolos $<$ y $\leqslant$ son intercambiables, que da igual poner uno u otro. Pues no da igual y es importante usarlos correctamente.

Algunos afirman que la desigualdad $a+\dfrac{1}{\gamma}\leqslant b^2$ nos dice que $a+\dfrac{1}{\gamma}$ es un minorante de B. Pues no, no dice eso. Y no es correcto usar la desigualdad $\sqrt{\dfrac{1}{\gamma}+a}\leqslant b$ porque no puede asegurarse que $\dfrac{1}{\gamma}+a\geqslant 0$ para todo $a\in A$. Cuando uses una raíz cuadrada debes asegurarte siempre de que lo que hay dentro de la raíz es un número mayor o igual que cero.

Ejercicio 3. Prueba, usando el principio de inducción matemática, que para todo $n\in\mathbb{N}$ se verifica la desigualdad:

$$\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}{5\cdot 7\cdot 9\cdots(2n+3)}<\frac{2}{(n+1)\sqrt{2n+4}} \tag{4}$$

Solución. Sea A el conjunto de los números naturales, $n\in\mathbb{N}$, para los que se verifica la desigualdad (4). Probaremos que A es inductivo.

Para $n=1$ la desigualdad (4) se expresa:

$$\frac{2}{5}\leqslant\frac{2}{2\sqrt{6}}\iff\frac{2}{5}\leqslant\frac{1}{\sqrt{6}}\iff 2\sqrt{6}<5\iff 24<25$$

Desigualdad que, evidentemente, es cierta. Luego $1\in A$.

Supongamos que un número $n\in A$ y probemos que entonces también $n+1\in A$. Nuestra hipótesis es que para un cierto número $n\in\mathbb{N}$ se verifica la desigualdad (4) y queremos probar que en tal caso también se verifica la desigualdad

$$\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)(2n+2)}{5\cdot 7\cdot 9\cdots(2n+3)(2n+5)}<\frac{2}{(n+2)\sqrt{2n+6}} \tag{5}$$

En efecto, como estamos suponiendo que $n\in A$, tenemos que:

$$\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}{5\cdot 7\cdot 9\cdots(2n+3)}<\frac{2}{(n+1)\sqrt{2n+4}}$$

Por lo que para probar la desigualdad (5) bastará probar que:

$$\frac{2}{(n+1)\sqrt{2n+4}}\,\frac{2n+2}{2n+5}\leqslant\frac{2}{(n+2)\sqrt{2n+6}} \tag{6}$$

Tenemos que:

$$\frac{2}{(n+1)\sqrt{2n+4}}\frac{2n+2}{2n+5} \leqslant \frac{2}{(n+2)\sqrt{2n+6}} \iff \frac{2}{\sqrt{2n+4}}\frac{1}{2n+5} \leqslant \frac{1}{(n+2)\sqrt{2n+6}} \iff$$

$$\iff \frac{1}{\sqrt{2n+4}}\frac{1}{2n+5} \leqslant \frac{1}{(2n+4)\sqrt{2n+6}} \iff \frac{1}{2n+5} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2n+4}\sqrt{2n+6}} \iff$$

$$\iff \sqrt{2n+4}\sqrt{2n+6} \leqslant 2n+5 \iff (2n+4)(2n+6) \leqslant (2n+5)^2 \iff$$

$$\iff 4n^2+20n+24 \leqslant 4n^2+20n+25 \iff 0 \leqslant 1$$

Pero esta última desigualdad es, evidentemente, cierta. Queda probada así la desigualdad (6) y por tanto la (5), es decir, que $n+1 \in A$. Hemos probado así que A es un conjunto inductivo de números naturales y, por el principio de inducción matemática, concluimos que $A=\mathbb{N}$, es decir, la desigualdad (4) se verifica para todo $n \in \mathbb{N}$. ☺

Comentario. Algunos no entienden el principio de inducción matemática porque no entienden lo que significa una expresión lógica del tipo $A \Longrightarrow B$ ni en qué consiste probar que dicha expresión es siempre verdadera. Quizás lo aprendan el curso próximo. Aparte de esto, los fallos principales se deben a no entender el significado de la desigualdad del enunciado. Claro, eso se debe a que leéis algo así como "producto de $2, 4, 6, \dots, 2n$ dividido por producto de $5, 7, 9, \dots, 2n+3$". Quien lee así está leyendo los símbolos no su significado. Esto se pone de manifiesto porque para algunos la desigualdad (4) para $n=1$ es:

$$¡¡\ \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\dots\cdot(2)}{5\cdot 7\cdot 9\cdots(2+3)} < \frac{2}{(1+1)\sqrt{2+4}}\ !!$$

Hay que leer "producto de los primeros n números pares dividido por el producto de dichos números aumentados cada uno en tres unidades".

El gran problema es que, salvo excepciones, no sabéis simplificar y eso os lleva a realizar cálculos largos e innecesarios en los que acabáis cometiendo errores o dejándolos a medias sin terminar.

Curiosidad: todos dais por evidente la desigualdad $\frac{2}{5} \leqslant \frac{1}{\sqrt{6}}$ y nadie se toma el trabajo de justificarla. Pues evidente, evidente, no es y justificarla no lleva más de diez segundos.

Algunos intentan demostrar la desigualdad directamente, sin usar el principio de inducción matemática ni nada.

Finalmente, hay quien afirma que la desigualdad es falsa. Debe pensar que me estoy burlando de él al proponerle que pruebe algo falso. En fin.