GEOMETRÍA I
(Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas)
Examen final (10/02/2019)

1. **[2 puntos]**. Sea $V(K)$ un espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{N}$ y sean $\phi, \psi \in V^*$ dos formas lineales. Demuéstrese:

   $\{\phi, \psi\}$ es linealmente independiente si sólo si la dimensión de (Nuc ϕ) $\cap$ (Nuc ψ) es $n-2$.

2. **[2 puntos]**. Sean $V(K), V'(K)$ espacios vectoriales de dimensiones $n, m \in \mathbb{N}$, respectivamente. Razónese si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

   a) Si f es un endomorfismo de $V(K)$ tal que $\mathrm{Im}(f \circ f) = \mathrm{Im}(f)$, entonces se verifica: Nuc $(f \circ f) =$ Nuc (f)

   b) Si $h : V \to V'$ es una aplicación lineal suprayectiva, entonces h^t es inyectiva.

3. **[3 puntos]**. Se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ de los polinomios de grado menor o igual a 2. Constrúyase un endomorfismo f de $\mathbb{R}_2[x]$ que verifique:

$$f \circ f = f \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Im}(f) = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] : p(0) + p'(0) = 0, p'(0) + p''(0) = 0\}$$

   (donde $p'(0), p''(0)$ denotan, resp., la primera y segunda derivada del polinomio en 0). Determínese la matriz de f en la base usual de $\mathbb{R}_2[x]$ y, caso de ser posible, determínese una base B tal que $M(f, B) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, para algún $r \in \mathbb{N}$.

4. **[3 puntos]**. Se considera en el espacio vectorial de las matrices cuadradas $M_2(\mathbb{R})$ el subespacio U_k definido, para cada $k \in \mathbb{R}$, por:

$$U_k = L\{\begin{pmatrix} k & k-1 \\ k+1 & k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k+2 & 2 \\ 0 & k+2 \end{pmatrix}\}$$

   Se pide calcular, para cada $k \in \mathbb{R}$:

   - Unas ecuaciones implícitas de U_k en la base usual de $M_2(\mathbb{R})$.
   - La dimensión del anulador de $U_k \cap W$ para $k = 1, 2, -1, -2$, donde $W := \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a - d = 0, c = 0\}$.

Duración: 3:30 min.

- **Sea $V(K)$ un espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{N}$ y sean $\phi, \psi \in V^*$ dos formas lineales. Demuéstrese:**

  $\{\phi, \psi\}$ es linealmente independiente si sólo si la dimensión de (Nuc ϕ) $\cap$ (Nuc ψ) es $n-2$.

Solución. Para la implicación ($\Rightarrow$) es suficiente cualquiera de los siguientes dos razonamientos.

1. Como $\{\phi, \psi\}$ es linealmente independiente, ninguna de las dos formas es la formal lineal nula, por lo que sus núcleos Nuc(ϕ), Nuc(ψ) son dos hiperplanos. Se sabe además que la independencia lineal obliga a que estos hiperplanos sean distintos (y, al tener la misma dimensión, no puede estar incluido uno en el otro). Así, Nuc(ϕ)+ Nuc(ψ) $= V$, ya que esta suma tiene que ser un subespacio vectorial de V que incluya estrictamente a Nuc(ϕ) y, como la dimensión del hiperplano Nuc(ϕ) es $n-1$, el único subespacio vectorial de mayor dimensión que lo contiene es todo V. En consecuencia:

   dim (Nuc(ϕ) $\cap$ Nuc(ψ))= dim(Nuc(ϕ)) + dim (Nuc(ψ)) $-$ dim(Nuc(ϕ)+ Nuc(ψ))

   $= (n-1) + (n-1) -$ dim $V = n-2$.

2. Es inmediato de la definición de anulador que an$\{\phi, \psi\}$ = (Nuc ϕ) $\cap$ (Nuc ψ). Por tanto,

   dim (Nuc(ϕ) $\cap$ Nuc(ψ))= dim(an$\{\phi, \psi\}$)= dim$V$-dim ($L\{\phi, \psi\}$) $= n-2$

   (la última igualdad porque, al ser $\{\phi, \psi\}$ linealmente independente, dim($L\{\phi, \psi\}$) $= 2$).

Para la implicación ($\Leftarrow$), razonando por el contrarrecíproco se sigue que, si $\{\phi, \psi\}$ es linealmente dependiente, entonces una de las formas lineales se puede escribir somo combinación lineal de la otra. Suponiendo sin pérdida de generalidad $\psi = a\phi$ para algún $a \in K$, se obtiene directamente Nuc(ϕ) $\subset$ Nuc(ψ) por lo que (Nuc ϕ) $\cap$ (Nuc ψ)= Nuc(ψ). Como la dimensión de este núcleo es o bien n o bien $n-1$ (dependiendo de si ψ es la forma lineal nula o no), se sigue dim((Nuc ϕ) $\cap$ (Nuc ψ))$\geq n-1$ y, por tanto, distinta de $n-2$.

Nota. Vale la pena observar que, en particular, se obtiene:
En el caso $n = 2$, $\{\phi, \psi\}$ es linealmente independiente si sólo si (Nuc ϕ) $\cap$ (Nuc ψ) $= \{0\}$.
En el caso $n = 1$, $\{\phi, \psi\}$ es siempre linealmente dependiente.

- **Sean $V(K), V'(K)$ espacios vectoriales de dimensiones $n, m \in \mathbb{N}$, respectivamente. Razónese si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:**

  a) Si f es un endomorfismo de $V(K)$ tal que $\mathbf{Im}(f \circ f) = \mathbf{Im}(f)$, entonces se verifica: $\mathbf{Nuc}\ (f \circ f) = \mathbf{Nuc}\ (f)$

  b) Si $h : V \to V'$ es una aplicación lineal suprayectiva, entonces h^t es inyectiva.

Solución.

a) VERDADERA. Obsérvese que la inclusión $\mathrm{Nuc}(f) \subset \mathrm{Nuc}(f \circ f)$ ocurre para todo endomorfismo (pues si $v \in \mathrm{Nuc}(f)$ entonces[1] $(f \circ f)(v) = f(f(v)) = f(0) = 0$). Por tanto, basta con demostrar $\dim\ (\mathrm{Nuc}(f \circ f)) = \dim(\mathrm{Nuc}(f))$. Esto se deduce de:

$$\dim\ (\mathrm{Nuc}\ (f \circ f)) = \dim V\ -\ \dim\ (\mathrm{Im}(f \circ f)) = \dim V\ -\ \dim\ (\mathrm{Im}\ (f)) = \dim\ (\mathrm{Nuc}\ f),$$

donde en la primera y la última igualdad se ha aplicado el teorema del rango (a la aplicación lineal $f \circ f$ y a f, resp.), y en la segunda la hipótesis sobre[2] f.

Nota. La implicación recíproca también es verdadera (¡compruébese!)

b) VERDADERA. Cualquiera de los siguientes dos razonamientos lo demuestra:

1. Basta con tener en cuenta las siguientes equivalencias:

   $$h \text{ es suprayectiva} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(h) = V' \Leftrightarrow \mathrm{an}(\mathrm{Im}(h)) = \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{Nuc}(h^t) = \{0\} \Leftrightarrow h^t \text{ es inyectiva},$$

   donde en la segunda equivalencia se usa que, claramente, $\mathrm{an}(V') = \{0\}(\subset (V')^*)$ y en la tercera la igualdad conocida (y fácil de demostrar directamente, ¡hágase!) $\mathrm{an}(\mathrm{Im}(h)) = \mathrm{Nuc}(h^t)$.

2. Eligiendo bases B y B' de V y V' resp., se tiene:

   h es sobre $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{rango}(h) = m \Longleftrightarrow \mathrm{rango}(M(h, B' \leftarrow B)) = m \Longleftrightarrow$

   $\mathrm{rango}(M(h^t, B^* \leftarrow (B')^*)) = m \Longleftrightarrow \dim(\mathrm{Nuc}(h^t))= 0 \Longleftrightarrow h^t$ es inyectiva

   donde, para pasar de la primera línea a la siguiente, se usa que el rango de una matriz coincide con el de la traspuesta y, para la primera equivalencia de la segunda línea:

   $\dim(\mathrm{Nuc}(h^t))= \dim(V')^*\text{-}\ \mathrm{rango}(h^t) = m-\ \mathrm{rango}(M(h^t, B^* \leftarrow (B')^*))$.

Nota. Ambos razonamientos demuestran a la vez la implicación recíproca.

[1] Aplicando, resp., la definición de composición, que $v \in \mathrm{Nuc}(f)$, y que f es lineal.

[2] Es de señalar que esta hipótesis, $\mathrm{Im}(f \circ f) = \mathrm{Im}(f)$, **no implica** $f \circ f = f$. De hecho, cualquier automorfismo distinto de la aplicación identidad es un contraejemplo a esa implicación **(¡compruébese!)**.

- **Se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ de los polinomios de grado menor o igual a 2. Constrúyase un endomorfismo f de $\mathbb{R}_2[x]$ que verifique:**

$$f \circ f = f \qquad \textbf{y} \qquad \textbf{Im}(f) = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] : p(0) + p'(0) = 0, p'(0) + p''(0) = 0\}$$

(donde $p'(0), p''(0)$ denotan, resp., la primera y segunda derivada del polinomio en 0). Determínese la matriz de f en la base usual de $\mathbb{R}_2[x]$ y, caso de ser posible, determínese una base B tal que $M(f, B) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, para algún $r \in \mathbb{N}$.

Solución. Obsérvese que un polinomio cualquiera $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ de $\mathbb{R}_2[x]$ verifica $p(0) = a_0, p'(0) = a_1, p''(0) = 2a_2$ y, por tanto, pertenece a $\mathrm{Im}(f)$ si y sólo si verifica el SEL:

$$\left.\begin{array}{ll} a_0 + a_1 & = 0 \\ a_1 + 2a_2 & = 0 \end{array}\right\} \qquad \text{o (tomando } a_1 \text{ como incógnita principal)} \qquad \begin{array}{lcl} a_0 & = & -a_1 \\ a_2 & = & -\frac{1}{2}a_1. \end{array}$$

Así, se considera a_1 como parámetro y, escogiendo $a_1 = -2$, se obtiene la solución $a_0 = 2, a_1 = -2, a_2 = 1$, que nos produce la base de $\mathrm{Im}(f)$:

$$B_{Imf} = \{2 - 2x + x^2\}.$$

Para definir f, ampliemos B_{Imf} hasta una base $\bar{B}$ de $\mathbb{R}_2[x]$. Para ello, podemos tomar la base usual $B_u = (1, x, x^2)$ y reemplazar uno de sus vectores, por ejemplo, el tercero, por $2 - 2x + x^2$, obteniendo así la base:

$$\boxed{\bar{B} = (1, x, 2 - 2x + x^2)} \tag{1}$$

(el hecho de que $\bar{B}$ siga siendo una base está garantizado porque la tercera coordenada de $2-2x+x^2$ en B_u es distinta de 0). Para asegurar también la condición $f \circ f = f$, basta entonces con definir f imponiendo:

$$\boxed{f(1) = f(x) = 0, \qquad\qquad f(2 - 2x + x^2) = 2 - 2x + x^2} \tag{2}$$

y extendiendo por linealidad estas igualdades. De hecho, es inmediato de ellas $\dim(\mathrm{Nuc}(f)) \geq 2$, $\dim(\mathrm{Im}(f)) \geq 1$, y que en ambos casos se debe dar la igualdad (pues por el teorema del rango $\dim(\mathrm{Nuc}(f)) + \dim(\mathrm{Nuc}(f)) = 3$). También es inmediato de la última igualdad en (2) que $\mathrm{Im}(f)$ incluye el subespacio pedido y que, de hecho, es igual a él (pues la dimensión de este subespacio y la de $\mathrm{Im}(f)$ es la misma, igual a 1). La condición $f \circ f = f$ se satisface porque basta con que se cumpla sobra una base y, efectivamente, se tiene:

$$f(f(1)) = f(0) = 0 = f(1), \qquad f(f(x)) = f(0) = 0 = f(x), \qquad f(f(2-2x+x^2)) = f(2-2x+x^2).$$

Obsérvese que la aplicación f así definida es la que verifica:

$$\boxed{M(f, \bar{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Por tanto, esta matriz, junto con expresión de $\bar{B}$ en (1), también define f.

Cálculo de la matriz de f en B_u. Para calcular $M(f, B_u)$, obsérvese que (2) proporciona directamente $f(1)$ y $f(x)$, por lo que basta con calcular $f(x^2)$. Para ello, podemos escribir x^2 como combinación lineal de $\bar{B}$ y aplicar (2), esto es:

$$x^2 = 1 \cdot (2 - 2x + x^2) + 2 \cdot x - 2 \cdot 1, \quad \text{luego} \quad f(x^2) = 1 \cdot f(2 - 2x + x^2) + 2 \cdot f(x) - 2 \cdot f(1) = 2 - 2x + x^2.$$

Usando esta expresión de $f(x^2)$ y (2), se tiene:

$$\boxed{M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Alternativamente, también se puede calcular $M(f, B_u)$ a partir de $M(f, \bar{B})$ usando un cambio de base. En efecto, $P := M(I, B_u \leftarrow \bar{B})$ se calcula directamente de (1) y su inversa P^{-1} por cualquiera de los algoritmos de cálculo (Gauss-Jordan o adjuntos):

$$P = M(I, B_u \leftarrow \bar{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = M(I, \bar{B} \leftarrow B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Usamos entonces $M(f, B_u) = M(I, B_u \leftarrow \bar{B}) \cdot M(f, \bar{B}) \cdot M(I, \bar{B} \leftarrow B_u)$, esto es:

$$M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cálculo de la base B requerida. Esta base tiene que existir pues, como se estudió en la asignatura, un endomorfismo verifica la igualdad $f \circ f = f$ (que define los *proyectores*) si y sólo si su matriz en alguna base es del tipo $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, donde $r = \text{rango}(f)$.

De hecho, se sabe que $f \circ f = f$ implica $\mathbb{R}_2[x] = \text{Im}(f) \oplus \text{Nuc}(f)$. Basta entonces con tomar como B cualquier base cuyos primeros elementos formen una base de $\text{Im}(f)$ y los restantes una base de $\text{Nuc}(f)$. Teniendo en cuenta la construcción de $\bar{B}$ y de f, es suficiente reordenar los elementos de $\bar{B}$ en (1). Esto es, definimos:

$$\boxed{B = (2 - 2x + x^2, 1, x)}$$

y, directamente de (2), se sigue:

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. **Se considera en el espacio vectorial de las matrices cuadradas $M_2(\mathbb{R})$ el subespacio U_k definido, para cada $k \in \mathbb{R}$, por:**

$$U_k = L\{\begin{pmatrix} k & k-1 \\ k+1 & k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k+2 & 2 \\ 0 & k+2 \end{pmatrix}\}$$

Se pide calcular, para cada $k \in \mathbb{R}$:

- **Unas ecuaciones implícitas de U_k en la base usual de $M_2(\mathbb{R})$.**
- **La dimensión del anulador de $U_k \cap W$ para $k = 1, 2, -1, -2$, donde** $W := \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a - d = 0, c = 0\}$.

Como un cálculo previo, hallemos una base y la dimensión de U_k, según los valores de k. Puesto que se nos proporciona un sistema de generadores con dos elementos, basta con discutir el rango de la matriz de las correspondientes coordenadas en la base usual de $M_2(\mathbb{R})$, esto es, de

$$\begin{pmatrix} k & k+2 \\ k-1 & 2 \\ k+1 & 0 \\ k & k+2 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Como su elemento $(2, 2)$ es 2 ($\neq 0$), el rango es siempre al menos 1 (el segundo vector del sistema de generadores es siempre distinto de 0). Orlando este elemento mediante la tercera fila, se obtiene el menor:

$$\begin{vmatrix} k-1 & 2 \\ k+1 & 0 \end{vmatrix} = -2(k+1). \tag{4}$$

Para $k \neq -1$ este menor es distinto de 0, por lo que los dos vectores son linealmente independientes. Para $k = -1$ la matriz resulta ser:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Su rango es 1, puesto que las dos columnas son claramente proporcionales[3]. En resumen:

$$\boxed{\dim(U_k) = \begin{cases} 2 & \text{si } k \neq -1 \\ 1 & \text{si } k = -1 \end{cases}}$$

[3]También se puede comprobar que el rango es 1 porque se anulan los tres menores que se obtienen orlando el elemento (2,2), esto es, el menor (4) y los menores $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Apartado 1. Para calcular las ecuaciones implícitas distinguimos entonces los casos:

- *Caso $k \neq -1$*. Debemos obtener 2 (=dim $M_2(\mathbb{R})$ −dim U_k) ecuaciones implícitas, asegurando[4]

$$\text{rango}\begin{pmatrix} a & k & k+2 \\ b & k-1 & 2 \\ c & k+1 & 0 \\ d & k & k+2 \end{pmatrix} = 2.$$

Así, se obtienen las ecuaciones requeridas orlando el menor de orden 2 no nulo (4):

$$\begin{vmatrix} a & k & k+2 \\ b & k-1 & 2 \\ c & k+1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} b & k-1 & 2 \\ c & k+1 & 0 \\ d & k & k+2 \end{vmatrix} = 0$$

Explícitamente, se obtiene fácilmente (desarrollando por los adjuntos de la primera columna y usando $2k - (k+2)(k-1) = -k^2 + k + 2 = -(k+1)(k-2)$):

$$\begin{array}{rrrrl} -2(k+1)a & +(k+1)(k+2)b & -(k+1)(k-2)c & & =0 \\ & (k+1)(k+2)b & -(k+1)(k-2)c & -2(k+1)d & =0 \end{array}$$

o, simplificando ambas ecuaciones el factor $(k+1)$ ($\neq 0$ en el presente caso)[5] ,

$$\boxed{\begin{array}{rrrrl} -2a & +(k+2)b & -(k-2)c & & =0 \\ & (k+2)b & -(k-2)c & -2d & =0 \end{array}} \tag{6}$$

- *Caso $k = -1$*. Debemos obtener 3 (=dim($M_2(\mathbb{R})$−dim(U_k)) ecuaciones implícitas, asegurando

$$\text{rango}\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \\ c & 0 \\ d & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Considerando el elemento $(1,1)$ como un menor de orden 1 distinto de 0, se obtienen las ecuaciones requeridas orlándolo:

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a & 1 \\ d & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

Esto es,

$$\boxed{\begin{array}{rrrrl} 2a & -b & & & =0 \\ & & c & & =0 \\ a & & & -d & =0 \end{array}} \tag{7}$$

[4]Obsérvese que, siguiendo el procedimiento general para calcular ecuaciones implicitas, la siguiente matriz se obtiene añadiéndole a la matriz de la fórmula (3) (que tiene rango 2 al ser $k \neq -1$) como primera columna las coordenadas de un elemento arbitrario de $M_2(\mathbb{R})$ en la base usual de $M_2(\mathbb{R})$.

[5]Además es posible seguir simplificando estas ecuaciones usando transformaciones elementales. De hecho, restando la primera a la segunda (y dividiendo por 2) se obtiene el sistema equivalente:

$$\boxed{\begin{array}{rrrrl} -2a & +(k+2)b & -(k-2)c & & =0 \\ a & & & -d & =0 \end{array}}$$

Trabajaremos con (6) sólo para ilustrar el método general pero, por supuesto, se puede proseguir con estas ecuaciones simplificadas.

Apartado 2. Para cualquier subespacio Z de un espacio vectorial V, se sabe dim $(\text{an}(Z)) = \dim(V) - \dim(Z)$ por lo que esta dimensión coincide con el número de ecuaciones implícitas (independientes) necesarias para determinar[6] Z. Puesto que el enunciado nos proporciona las ecuaciones implícitas de W

$$\begin{array}{rrrrl} a & & & -d & = 0 \\ & & c & & = 0 \end{array} \tag{8}$$

y en el apartado anterior calculamos unas para U_k, la intersección $U_k \cap W$ coincide con el conjunto de soluciones del SEL formado por la **reunión de ambos sistemas de ecuaciones implícitas**. En consecuencia, basta con calcular el número máximo de ecuaciones independientes de este SEL.

- Caso $k \neq -1$. $U_k \cap W$ viene dado como solución del SEL formado por (6) y (8), de matriz:

$$M_k := \begin{pmatrix} -2 & (k+2) & -(k-2) & 0 \\ 0 & (k+2) & -(k-2) & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Es suficiente calcular el rango de M_k. Aunque se puede hacer sólo para los valores pedidos $k = 1, \pm 2$, lo estudiaremos en general. El procedimiento usual consiste en calcular en primer lugar para qué valores de k se anula el determinante: para los que no se anule el rango de la matriz (y, por tanto, la dimensión pedida del anulador) sería igual a 4, y para los que se anule será inferior. Desarrollando por los adjuntos de la última fila el cálculo se reduce a estudiar si se anula:

$$\begin{vmatrix} -2 & (k+2) & 0 \\ 0 & (k+2) & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & (k+2) & -2 \\ 0 & (k+2) & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (k+2) & -2 \\ (k+2) & -2 \end{vmatrix}$$

(la primera igualdad sumando la primera columna a la última). Claramente, el último determinante es 0 independientemente de k, por lo que rango$(M_k) < 4$. Por otra parte, M_k contiene el menor

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

por lo que rango$(M_k) \geq 2$. Para determinar los valores para los que el rango de M_k es 3, orlaremos este menor. Orlando con la primera columna (en la cual no aparece k) se tiene el menor:

$$\begin{vmatrix} 0 & -(k-2) & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -(k-2) & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Así, rango$(M_k) = 3$ para todo k y, por tanto, también $\boxed{\dim(\text{an}(U_k \cap W)) = 3 \text{ para } k \neq -1.}$

- Caso $k = -1$. $U_{k=-1} \cap W$ viene dado como solución del SEL formado por (7) y (8), de matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Claramente las dos últimas filas coinciden con las anteriores, mientras que las tres primeras son independientes (de hecho, se corresponden con las ecuaciones implícitas de $U_{k=-1}$, por lo que $U_{k=-1} \subset W$ y $U_{k=-1} \cap W = U_{k=-1}$). En consecuencia, el rango de la matriz es 3 y también $\boxed{\dim(\text{an}(U_k \cap W)) = 3 \text{ para } k = -1}$.

[6] De hecho, estas ecuaciones implícitas generan de un modo natural una base de an(Z).

Nota. Vale la pena recapitular las distintas posibilidades obtenidas en los casos anteriores:

- Caso $k \neq -1$: $\dim(U_k) = 2$ y $\dim(U_k \cap W)= 1$ (al venir determinado por tres ecuaciones independientes); en consecuencia, $\dim(U_k + W)= 2 + 2 - 1 = 3$.

- Caso $k = -1$: $\dim(U_k) = 1$ y $\dim(U_k \cap W)= 1$; en consecuencia, $U_k \subset W$ y, trivialmente: $U_k \cap W = U_k$ así como $U_k + W = W$.

Como en ambos casos $\dim(U_k \cap W)= 1$, se tiene siempre $\boxed{\dim(\text{an}(U_k \cap W))= 3,\ \forall k \in \mathbb{R}.}$