Tema 1

Límite Funcional

Estudiamos en este tema el concepto de límite para funciones reales de variable real, que guarda una estrecha relación con la continuidad.

1.1. Puntos de acumulación

Pretendemos estudiar el comportamiento de una función al acercarnos a un punto de la recta real. A diferencia de lo que ocurría con la continuidad, no será preciso trabajar en un punto donde la función esté definida y, aunque lo esté, no tendremos en cuenta el valor que toma la función en el punto considerado. Sí será necesario que, desde el conjunto de definición de la función, podamos acercarnos al punto en el que pretendemos estudiarla, sin pasar por él. Esto motiva la siguiente definición.

Si A es un subconjunto de $\mathbb{R}$, decimos que $\alpha \in \mathbb{R}$ es un *punto de acumulación* de A, o que el conjunto A *se acumula en el punto* α, cuando existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A, distintos de α, que converge a α, es decir, $x_n \in A \setminus \{\alpha\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\} \to \alpha$. Es costumbre denotar por A' al *conjunto de todos los puntos de acumulación* de A.

Es claro que, si $\alpha \in A'$, tenemos puntos de A tan próximos a α como se quiera, pero distintos de α. Más concretamente, para cada $\delta > 0$ existe $x \in A$ tal que $0 < |x - \alpha| < \delta$, es decir, $]\alpha - \delta, \alpha + \delta[\cap (A \setminus \{\alpha\}) \neq \emptyset$. En efecto, si $\{x_n\} \to \alpha$ con $x_n \in A \setminus \{\alpha\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - \alpha| < \delta$ para $n \geqslant m$, en particular $x_m \in A$ y $0 < |x_m - \alpha| < \delta$. Recíprocamente, si para todo $\delta > 0$ se tiene que $]\alpha - \delta, \alpha + \delta[\cap (A \setminus \{\alpha\}) \neq \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos tomar $\delta = 1/n$ y existirá $x_n \in A$ tal que $0 < |x_n - \alpha| < 1/n$. Obtenemos así una sucesión $\{x_n\}$ que evidentemente verifica $\{x_n\} \to \alpha$, con $x_n \in A \setminus \{\alpha\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $\alpha \in A'$. Simbólicamente, para $A \subset \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ hemos visto que

$$\alpha \in A' \iff]\alpha - \delta, \alpha + \delta[\cap (A \setminus \{\alpha\}) \neq \emptyset \quad \forall \delta > 0$$

Conviene resaltar que basta comprobar la condición anterior para δ suficientemente pequeño. Más concretamente, dado $\eta > 0$, si se cumple que $]\alpha - \delta, \alpha + \delta[\cap (A \setminus \{\alpha\}) \neq \emptyset$ para todo δ que verifique $0 < \delta < \eta$, con más razón se cumplirá cuando sea $\delta \geqslant \eta$ y tendremos $\alpha \in A'$.

Consideremos por ejemplo el caso de un intervalo I. Tanto si $I=\emptyset$, como si I se reduce a un punto, es obvio que I no tiene puntos de acumulación, es decir, $I'=\emptyset$.

Suponiendo que I es un intervalo no trivial, veremos enseguida que $I\subset I'$. Dado $x\in I$, existirá $y\in I$ tal que $y\neq x$. Entonces, para $0<\delta<|y-x|$ vamos a comprobar fácilmente que $]x-\delta,x+\delta[\,\cap\,(I\setminus\{x\})\neq\emptyset$, con lo que $x\in I'$. En efecto, si $x<y$, será $x+\delta<y$, y usando que I es un intervalo tenemos $]x,x+\delta[\,\subset[x,y]\subset I$, luego $]x-\delta,x+\delta[\,\cap\,(I\setminus\{x\})\supset\,]x,x+\delta[\,\neq\emptyset$. Análogamente, si $y<x$ se obtiene que $]x-\delta,x+\delta[\,\cap\,(I\setminus\{x\})\supset\,]x-\delta,x[\,\neq\emptyset$. Así pues, $I\subset I'$. En particular, tenemos $\mathbb{R}'=\mathbb{R}$, cosa bastante obvia, pero veamos el resto de casos.

Supongamos que I está acotado, sean $\alpha=\inf I<\sup I=\beta$, y veamos que $I'=[\alpha,\beta]$. Puesto que $]\alpha,\beta[\,\subset I$, para $0<\delta<\beta-\alpha$ vemos que $]\alpha-\delta,\alpha+\delta[\,\cap\,(I\setminus\{\alpha\})\supset\,]\alpha,\alpha+\delta[\,\neq\emptyset$ y también $]\beta-\delta,\beta+\delta[\,\cap\,(I\setminus\{\beta\})\supset\,]\beta-\delta,\beta[\,\neq\emptyset$, luego $\alpha,\beta\in I'$. Junto con $I\subset I'$, esto nos dice ya que $[\alpha,\beta]\subset I'$. Recíprocamente, si $x\in I'$ y $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de $I\setminus\{x\}$ tal que $\{x_n\}\to x$, puesto que $\alpha\leqslant x_n\leqslant\beta$ para todo $n\in\mathbb{N}$, deducimos que $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$. Así pues, si I es un intervalo acotado no trivial, I' es el correspondiente intervalo cerrado.

Cuando I es una semirrecta, un razonamiento análogo al anterior demuestra que I' es la correspondiente semirrecta cerrada. Más concretamente, para cualesquiera $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ se tiene que $\big(]\alpha,+\infty[\big)'=\big([\alpha,+\infty[\big)'=[\alpha,+\infty[$ y $\big(]-\infty,\beta[\big)'=\big(]-\infty,\beta]\big)'=]-\infty,\beta]$.

Queda claro en los ejemplos anteriores que los puntos de acumulación de un conjunto no siempre pertenecen a dicho conjunto. En el caso de un intervalo reducido a un punto, $I=\{a\}$, hemos visto que $I'=\emptyset$, luego los puntos de un conjunto pueden no ser puntos de acumulación. Vemos pues que, en general, no existe relación entre ser punto de acumulación de un conjunto y pertenecer al mismo.

Dado un conjunto cualquiera $A\subset\mathbb{R}$, los puntos de A que no sean puntos de acumulación de A reciben el nombre de puntos aislados. Así pues, a es un *punto aislado* de un conjunto $A\subset\mathbb{R}$ cuando $a\in A\setminus A'$. La caracterización de los puntos de acumulación comentada anteriormente nos da un fácil criterio para detectar los puntos aislados. Concretamente, a es un punto aislado de un conjunto A cuando existe $\delta>0$ tal que $]a-\delta,a+\delta[\,\cap A=\{a\}$.

Para encontrar los puntos de acumulación de un conjunto, frecuentemente es útil la siguiente observación:

- *Para cualesquiera conjuntos $A,B\subset\mathbb{R}$ se tiene:* $(A\cup B)'=A'\cup B'$

La comprobación no ofrece dificultad. Por ser $A\subset A\cup B$, es evidente que $A'\subset(A\cup B)'$, y análogamente $B'\subset(A\cup B)'$, luego $A'\cup B'\subset(A\cup B)'$. Recíprocamente, si $x\notin A'\cup B'$, existen $\delta_1,\delta_2>0$ tales que $]x-\delta_1,x+\delta_1[\,\cap\,(A\setminus\{x\})=\emptyset=]x-\delta_2,x+\delta_2[\,\cap\,(B\setminus\{x\})$. Tomando entonces $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ tenemos $]x-\delta,x+\delta[\,\cap\,\big((A\cup B)\setminus\{x\}\big)=\emptyset$, luego $x\notin(A\cup B)'$. ■

Una obvia inducción permite extender el resultado anterior, considerando uniones finitas: si $n\in\mathbb{N}$ y $A_1,A_2,\ldots,A_n$ son subconjuntos cualesquiera de $\mathbb{R}$, se tendrá:

$$\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)'=\bigcup_{k=1}^{n}A_k'$$

En particular, para un conjunto finito $F\subset\mathbb{R}$, será $F'=\emptyset$. De hecho tenemos claramente que $(A\cup F)'=(A\setminus F)'=A'$ para cualquier conjunto $A\subset\mathbb{R}$.

1.2. Concepto de límite funcional

Recordemos que siempre que hablamos de una función, nos referimos a una función real de variable real, es decir, una aplicación $f : A \to \mathbb{R}$ donde A es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$.

Pues bien, dado $\alpha \in A'$, se dice que f *tiene límite en el punto* α cuando existe $L \in \mathbb{R}$ con la siguiente propiedad: para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A distintos de α, que converja a α, se tiene que $\{f(x_n)\} \to L$. En tal caso, podemos claramente asegurar que L es único, decimos que L es el *límite de la función* f *en el punto* α y escribimos $\lim_{x\to\alpha} f(x) = L$. En ocasiones también es útil escribir $f(x) \to L \ (x \to \alpha)$ y decir que $f(x)$ *tiende a* L *cuando* x *tiende a* α. Así pues, simbólicamente,

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = L \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\, x_n \in A \setminus \{\alpha\} \ \ \forall n \in \mathbb{N}\,, \quad \{x_n\} \to \alpha \ \Longrightarrow \ \{f(x_n)\} \to L \,\right]$$

Nótese que la condición $\alpha \in A'$ es justo la que hace que la definición anterior tenga sentido.

Como puede ser $\alpha \in A' \setminus A$, resaltamos que puede tener sentido discutir la existencia de límite de una función en puntos que no pertenezcan a su conjunto de definición. Por otra parte, cuando $\alpha \in A \cap A'$, el valor de $f(\alpha)$ no afecta para nada a la existencia de límite de la función f en el punto α ni al valor de dicho límite, caso de que exista. Finalmente, está claro que no tiene sentido hablar de la existencia de límite de una función en los puntos aislados de su conjunto de definición.

Seguidamente enunciamos una caracterización $(\varepsilon - \delta)$ del límite funcional. Omitimos la demostración, que es análoga a la que se hizo en su momento para la continuidad.

- *Sea* $f : A \to \mathbb{R}$ *una función,* $\alpha \in A'$ *y* $L \in \mathbb{R}$. *Las siguientes afirmaciones equivalen:*
  - (i) $\lim_{x\to\alpha} f(x) = L$.
  - (ii) *Para toda sucesión monótona* $\{x_n\}$ *de puntos de* $A \setminus \{\alpha\}$ *tal que* $\{x_n\} \to \alpha$, *se tiene que* $\{f(x_n)\} \to L$.
  - (iii) $\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \delta > 0 \ : \ x \in A, \ \ 0 < |x - \alpha| < \delta \ \Longrightarrow \ |f(x) - L| < \varepsilon$

1.3. Relación con la continuidad

La similitud entre la definición de límite de una función y la de continuidad no ha podido pasar desapercibida. Vamos a aclarar la relación entre ambas nociones, empezando por ponernos en situación de que ambas tengan sentido:

- *Una función* $f : A \to \mathbb{R}$ *es continua en un punto* $a \in A \cap A'$ *si, y sólo si,* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

La comprobación es inmediata. Si f es continua en a, para cualquier sucesión $\{x_n\}$ de puntos de $A \setminus \{a\}$ tal que $\{x_n\} \to a$, tenemos que $\{f(x_n)\} \to f(a)$. Para la otra implicación, basta usar la caracterización $(\varepsilon - \delta)$ de ambas afirmaciones. Si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $x \in A$ verifica que $0 < |x - a| < \delta$, se tiene $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Pero si $x = a$ la última desigualdad es obvia, y tenemos la continuidad de f en a. ■

La equivalencia anterior nos permite distinguir un primer tipo de discontinuidad. Si una función $f : A \to \mathbb{R}$ tiene límite en un punto $a \in A \cap A'$ pero ocurre que $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, decimos que f tiene una *discontinuidad evitable* en el punto a. La razón de esta nomenclatura es clara: f hubiera sido continua en a si hubiésemos definido $f(a)$ de forma adecuada. Por ejemplo, la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$ y $f(0) = 1$, tiene una discontinuidad evitable en el origen.

Queda pues aclarada la relación entre las nociones de límite y continuidad de una función en un punto, cuando ambas nociones tienen sentido, es decir, cuando para una función $f : A \to \mathbb{R}$ trabajamos en un punto $a \in A \cap A'$. Merece la pena pensar lo que ocurre cuando sólo una de esas nociones tiene sentido, porque trabajamos en punto $a \in A \setminus A'$, o bien en un punto $\alpha \in A' \setminus A$.

En el primer caso, es decir, cuando a es un punto aislado del conjunto A, no tiene sentido hablar de límite de la función f en el punto a, pero comprobamos inmediatamente que la continuidad es automática:

- *Toda función $f : A \to \mathbb{R}$ es continua en los puntos aislados de A.*

La comprobación de este hecho es inmediata usando, por ejemplo, la caracterización $(\varepsilon - \delta)$ de la continuidad. Sea $a \in A \setminus A'$ y tomemos $\delta > 0$ de forma que $]a-\delta, a+\delta[\cap A = \{a\}$. Entonces, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, para $x \in A$ con $|x-a| < \delta$, se tiene obviamente $x = a$, luego $|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$. Nótese que δ ni siquiera depende de ε. ■

Queda comentar lo que ocurre cuando, para una función $f : A \to \mathbb{R}$, trabajamos en un punto $\alpha \in A' \setminus A$, con lo que tiene sentido hablar de límite, pero no de continuidad de f en α. En este caso la noción de límite también se puede interpretar en términos de continuidad. Concretamente, la existencia del límite de f en α equivale a la posibilidad de extender f, dándole un valor apropiado en el punto α, para obtener una función continua en dicho punto:

- *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función y $\alpha \in A' \setminus A$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
  - (i) *La función f tiene límite en el punto α.*
  - (ii) *Existe una función $\widetilde{f} : A \cup \{\alpha\} \to \mathbb{R}$, continua en el punto α, que es una extensión de f, es decir, $\widetilde{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in A$.*

  Además, caso de que se verifiquen (i) y (ii), se tiene $\widetilde{f}(\alpha) = \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$.

De nuevo la demostración es inmediata. Para ver que $(i) \Rightarrow (ii)$ basta definir $\widetilde{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in A$ y $\widetilde{f}(\alpha) = \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$. Entonces, la continuidad de $\widetilde{f}$ en el punto α es evidente, ya que $\lim\limits_{x\to\alpha} \widetilde{f}(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \widetilde{f}(\alpha)$. Por tanto, $\widetilde{f}$ es la extensión requerida en (ii). La implicación recíproca es aún más clara: si $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de A tal que $\{x_n\} \to \alpha$, se tiene evidentemente que $\{f(x_n)\} = \{\widetilde{f}(x_n)\} \to \widetilde{f}(\alpha)$, luego $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \widetilde{f}(\alpha)$. La última afirmación del enunciado ha quedado claramente de manifiesto. ■

1.4. Carácter local

A la vista de la íntima relación con la continuidad en un punto, no resultará sorprendente que el límite de una función en un punto sea también una propiedad local, como vamos a ver. El siguiente resultado, que relaciona el límite de una función con el de su restricción a ciertos conjuntos, es enteramente análogo al obtenido en su momento para la continuidad.

- *Sea* $f : A \to \mathbb{R}$ *una función,* $B \subset A$ *y* $\beta \in B'$.
  - (i) *Si* f *tiene límite en el punto* β*, entonces* $f|_B$ *también tiene límite en* β *y ambos límites coinciden:* $\lim\limits_{x\to\beta} f|_B(x) = \lim\limits_{x\to\beta} f(x)$.
  - (ii) *Si existe* $r > 0$ *tal que* $]\beta - r, \beta + r[\, \cap (A \setminus \{\beta\}) \subset B$*, y* $f|_B$ *tiene límite en el punto* β*, entonces* f *tiene límite en* β.

La afirmación (i) es completamente obvia y (ii) se comprueba fácilmente, usando por ejemplo la caracterización $(\varepsilon - \delta)$ de ambos límites. Dado $\varepsilon > 0$, por hipótesis existe un $\eta > 0$ tal que, para $x \in B$ con $0 < |x - \beta| < \eta$, se tiene $\left| f|_B(x) - L \right| < \varepsilon$, donde $L = \lim\limits_{x\to\beta} f|_B(x)$. Si tomamos ahora $\delta = \text{mín}\{\eta, r\}$ es claro que, para $x \in A$ con $0 < |x - \beta| < \delta$, se tiene $x \in B$ y $\left| f(x) - L \right| = \left| f|_B(x) - L \right| < \varepsilon$. ■

Queda de manifiesto el carácter local del límite de una función en un punto. Para una función $f : A \to \mathbb{R}$ y $\alpha \in A'$, siempre podemos tomar $B =]\alpha - r, \alpha + r[\, \cap (A \setminus \{\alpha\})$, con $r > 0$ arbitrario, y obtenemos que f tiene límite en el punto α si, y sólo si, $f|_B$ tiene límite en el punto α, en cuyo caso ambos límites coinciden. Por tanto, por muy pequeño que sea $r > 0$, la existencia del límite de la función f en el punto α, y el valor de dicho límite caso de que exista, sólo dependen de los valores de f en el conjunto $]\alpha - r, \alpha + r[\, \cap (A \setminus \{\alpha\})$.

1.5. Límites laterales

Intuitivamente, para estudiar el comportamiento de una función al acercarnos a un punto de la recta real, podemos analizar solamente lo que ocurre cuando nos acercamos a dicho punto por la izquierda o cuando nos acercamos por la derecha, lo que nos lleva a la noción de límite lateral. En realidad, veremos que esta noción es caso particular del concepto de límite que hasta ahora hemos considerado al que, cuando sea necesario, nos referiremos como *límite ordinario*. Para definir los límites laterales conviene introducir una notación adecuada, aunque pueda parecer algo engorrosa.

Dados un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, consideraremos los conjuntos

$$A_\alpha^- = \{x \in A : x < \alpha\} \qquad \text{y} \qquad A_\alpha^+ = \{x \in A : x > \alpha\}$$

Si $\alpha \in (A_\alpha^-)'$, es decir, si existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A, tal que $x_n < \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\} \to \alpha$, podemos decir que el conjunto A *se acumula a la izquierda* del punto α. Ello equivale a que, para todo $\delta > 0$, se tenga $]\alpha - \delta, \alpha[\, \cap A \neq \emptyset$.

Pues bien, si el conjunto A se acumula a la izquierda de un punto α, decimos que una función $f : A \to \mathbb{R}$ *tiene límite por la izquierda* en el punto α cuando existe $L \in \mathbb{R}$ con la siguiente propiedad: para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A, verificando que $x_n < \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\} \to \alpha$, se tiene que $\{f(x_n)\} \to L$. En tal caso, L es único, le llamamos *límite por la izquierda* de f en α y escribimos $\lim\limits_{x\to\alpha-} f(x) = L$. También podemos escribir $f(x) \to L\ (x \to \alpha-)$ y decir que $f(x)$ *tiende a* L *cuando* x *tiende a* α *por la izquierda*. Simbólicamente:

$$\lim_{x\to\alpha-} f(x) = L \quad \iff \quad \Big[\, x_n \in A\,,\ x_n < \alpha\ \ \forall n \in \mathbb{N}\,, \quad \{x_n\} \to \alpha \implies \{f(x_n)\} \to L \,\Big]$$

Análogamente, si $\alpha \in (A_\alpha^+)'$, es decir, si existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A tal que $x_n > \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\} \to \alpha$, podemos decir que el conjunto A *se acumula a la derecha* del punto α y ello equivale a que, para todo $\delta > 0$, se tenga $]\alpha, \alpha+\delta[\, \cap A \neq \emptyset$. Diremos entonces que una función $f : A \to \mathbb{R}$ *tiene límite por la derecha* en el punto α cuando exista $L \in \mathbb{R}$ con la siguiente propiedad: para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A, verificando que $x_n > \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\} \to \alpha$, se tiene que $\{f(x_n)\} \to L$. De nuevo L es único, le llamamos *límite por la derecha* de f en α y escribimos $L = \lim\limits_{x\to\alpha+} f(x)$. También escribimos $f(x) \to L\ (x \to \alpha+)$ y decimos que $f(x)$ *tiende a* L *cuando* x *tiende a* α *por la derecha*. En símbolos:

$$\lim_{x\to\alpha+} f(x) = L \quad \iff \quad \Big[\, x_n \in A\,,\ x_n > \alpha\ \ \forall n \in \mathbb{N}\,, \quad \{x_n\} \to \alpha \implies \{f(x_n)\} \to L \,\Big]$$

Observemos que los *límites laterales* que acabamos de definir son casos particulares del límite ordinario que hasta ahora veníamos manejando. En efecto, si $\alpha \in (A_\alpha^-)'$ y llamamos g a la restricción de f al conjunto A_α^-, se deduce directamente de las definiciones que, para cualquier $L \in \mathbb{R}$, se tiene: $\lim\limits_{x\to\alpha-} f(x) = L \ \Leftrightarrow\ \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = L$. Análogamente, si $\alpha \in (A_\alpha^+)'$ y h es la restricción de f al conjunto A_α^+, para $L \in \mathbb{R}$, se tiene: $\lim\limits_{x\to\alpha+} f(x) = L \ \Leftrightarrow\ \lim\limits_{x\to\alpha} h(x) = L$.

Así pues, cada concepto de límite lateral de una función equivale al de límite ordinario para una conveniente restricción de dicha función. Por tanto, las propiedades que hasta ahora conocemos para el límite ordinario, y cualesquiera otras que podamos obtener más adelante, se aplican automáticamente a los límites laterales, prestando la debida atención al cambio de función que se requiere para pasar de un tipo de límite a otro. Ejemplificamos este hecho con una caracterización $(\varepsilon - \delta)$ de los límites laterales.

- *Para* $f : A \to \mathbb{R}$, $\alpha \in (A_\alpha^-)'$ *y* $L \in \mathbb{R}$, *las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
  - (i) $\lim\limits_{x\to\alpha-} f(x) = L$
  - (ii) *Para toda sucesión creciente* $\{x_n\}$ *de puntos de* A *distintos de* α, *tal que* $\{x_n\} \to \alpha$, *se tiene que* $\{f(x_n)\} \to L$
  - (iii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : x \in A,\ \ \alpha - \delta < x < \alpha \implies |f(x) - L| < \varepsilon$

La caracterización análoga del límite por la derecha se consigue obviamente usando en (ii) sucesiones decrecientes en vez de crecientes y sustituyendo en (iii) la condición $\alpha - \delta < x < \alpha$ por $\alpha < x < \alpha + \delta$.

Pero la principal utilidad de los límites laterales de una función estriba en su relación con el límite ordinario de *la misma* función. Para explicarla, empezaremos aclarando la relación entre las condiciones que permiten hablar de los tres tipos de límite. Basta observar que para cualquier conjunto $A \subset \mathbb{R}$ y cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$A' = \big(A \setminus \{\alpha\}\big)' = \big(A_\alpha^+ \cup A_\alpha^-\big)' = (A_\alpha^+)' \cup (A_\alpha^-)'$$

Así pues, el conjunto A se acumula en un punto α si, y sólo si, se acumula a la izquierda o a la derecha de α. Deducimos que tiene sentido hablar del límite ordinario de una función en un punto si, y sólo si, tiene sentido hablar de al menos uno de los límites laterales. Cabe por tanto considerar tres casos y, en cualquiera de ellos, la relación entre el límite ordinario y los laterales será bastante clara:

- *Sean* $f : A \to \mathbb{R}$ *una función,* $\alpha \in A'$ *y* $L \in \mathbb{R}$.

  (a) *Si* A *se acumula a la izquierda pero no a la derecha de* α*, entonces:*

  $$\lim_{x \to \alpha} f(x) = L \iff \lim_{x \to \alpha-} f(x) = L$$

  (b) *Si* A *se acumula a la derecha pero no a la izquierda de* α*, entonces:*

  $$\lim_{x \to \alpha} f(x) = L \iff \lim_{x \to \alpha+} f(x) = L$$

  (c) *Finalmente, si* A *se acumula a la izquierda y también a la derecha de* α*, entonces:*

  $$\lim_{x \to \alpha} f(x) = L \iff \lim_{x \to \alpha-} f(x) = \lim_{x \to \alpha+} f(x) = L$$

La comprobación de las tres afirmaciones anteriores es inmediata. Observamos primeramente que las tres implicaciones hacia la derecha son obvias: siempre pasamos del límite ordinario de f al límite ordinario de una restricción. Para la implicaciones hacia la izquierda bastará usar la caracterización del límite ordinario mediante sucesiones monótonas. Sea pues $\{x_n\}$ una sucesión monótona de puntos de A distintos de α con $\{x_n\} \to \alpha$.

En el caso (a), la sucesión $\{x_n\}$ no puede ser decreciente, pues entonces A se acumularía a la derecha de α, contra la hipótesis, luego $\{x_n\}$ es creciente, en particular $x_n < \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y la definición de límite por la izquierda nos dice que $\{f(x_n)\} \to L$. Análogamente, en el caso (b) tenemos que $\{x_n\}$ es decreciente y usamos la definición de límite por la derecha para llegar a la misma conclusión. En el caso (c), si $\{x_n\}$ es creciente usamos el límite por la izquierda, y si es decreciente, el límite por la derecha, obteniendo en ambos casos que $\{f(x_n)\} \to L$. ■

En los casos (a) y (b) del resultado anterior, las nociones de límite lateral no aportan nada nuevo, la única noción de límite lateral que en cada caso tiene sentido considerar, coincide con la noción de límite ordinario de nuestra función. Así pues, sólo tiene interés estudiar los límites laterales de una función en un punto, cuando el conjunto de definición de la función se acumule tanto a la izquierda como a la derecha de dicho punto. Entonces, el apartado (c) del resultado anterior nos dice que existe el límite ordinario de la función si, y sólo si, existen ambos límites laterales y coinciden. Esto sugiere claramente la posibilidad de considerar un nuevo tipo de discontinuidad.

Supongamos que un conjunto A se acumula a la izquierda y también a la derecha de un punto $a \in A$. Si $f : A \to \mathbb{R}$ tiene límite por la izquierda y por la derecha en el punto a, pero ocurre que $\lim\limits_{x \to a-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a+} f(x)$, decimos que f tiene una *discontinuidad de salto* en el punto a. Esta nomenclatura tiene un significado muy intuitivo: si recorremos la recta real de izquierda a derecha, al "pasar" por el punto a, la función "salta" desde el valor de su límite por la izquierda en a hasta el valor de su límite por la derecha. Nótese también que el valor de $f(a)$ no juega ningún papel.

Como ejemplo ilustrativo tenemos las discontinuidades de la función parte entera. Sabemos que dicha función es continua en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ pero no es continua en ningún punto de $\mathbb{Z}$. De hecho, fijado $k \in \mathbb{Z}$, es claro que para $k < x < k+1$ se tiene $E(x) = k$, luego $\lim\limits_{x \to k+} E(x) = k$. Por otra parte, para $k-1 < x < k$ tenemos $E(x) = k-1$, luego $\lim\limits_{x \to k-} E(x) = k-1$. Por tanto, la función parte entera tiene una discontinuidad de salto en cada punto $k \in \mathbb{Z}$.

1.6. Ejercicios

1. Determinar los puntos de acumulación de cada uno de los siguientes conjuntos:

$$\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q}, \quad \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x| < 1\}, \quad \left\{ \frac{1}{p} : p \in \mathbb{N} \right\}, \quad \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} : p, q \in \mathbb{N} \right\}$$

2. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función y $\alpha \in A'$. Supongamos que, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para cualesquiera $x, y \in A$ que verifiquen $0 < |x - \alpha| < \delta$ y $0 < |y - \alpha| < \delta$, se tiene $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Probar que f tiene límite en el punto α.

3. Sea $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ una función verificando que

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \quad \forall x \in]-1, 0[\qquad \text{y} \qquad f(x) = 1 + x^2 \quad \forall x \in]0, 1[$$

Estudiar la existencia de límite y la continuidad de f en 0. ¿Puede extenderse f para obtener una función continua en el intervalo $]-1, 1]$, o incluso en el intervalo $[-1, 1]$?

4. Sea $A =]-2, -1] \cup \{0\} \cup [1, 2[\cup [3, 5]$ y $f : A \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)^{-1} & \text{si } \ -2 < x < -1 \\ 0 & \text{si } \ x = -1 \\ 1 & \text{si } \ x = 0 \\ \sqrt{x-1} & \text{si } \ 1 \leqslant x < 2 \\ E(x) & \text{si } \ 3 \leqslant x \leqslant 5 \end{cases}$$

Estudiar la existencia de límite ordinario y de límites laterales de la función f en todos los puntos donde ello tenga sentido. Estudiar también la continuidad de f y clasificar sus discontinuidades.

Tema 2

Límites en el infinito, funciones divergentes

Nuestro próximo objetivo es usar las sucesiones divergentes para ampliar la noción de límite funcional en dos sentidos. Por una parte, analizaremos el tipo de comportamiento que puede tener una función cuando la variable crece o decrece indefinidamente, mediante la noción de límite en el infinito. Por otra, en claro paralelismo con las sucesiones divergentes, estudiaremos también la divergencia de funciones, explicando este nuevo tipo de comportamiento que una función puede presentar, tanto en un punto de la recta real como en el infinito. Veremos también algunas reglas básicas para estudiar la existencia de límite o la divergencia de funciones.

2.1. Límites en el infinito

Dicho de forma intuitiva, vamos a analizar el comportamiento de una función cuando nos alejamos indefinidamente sobre la recta real, hacia la derecha o hacia la izquierda.

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función y supongamos que A no está mayorado, es decir, que existen sucesiones de puntos de A que divergen positivamente. Decimos que f *tiene límite en* $+\infty$ cuando existe $L \in \mathbb{R}$ con la siguiente propiedad: para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A tal que $\{x_n\} \to +\infty$, se tiene que $\{f(x_n)\} \to L$. Naturalmente L es único, le llamamos *límite en* $+\infty$ de la función f y escribimos $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$. También podemos escribir $f(x) \to L \ (x \to +\infty)$ y decir que $f(x)$ *tiende a* L *cuando* x *tiende a* $+\infty$. Simbólicamente:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \iff \big[\, x_n \in A \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ \{x_n\} \to +\infty \ \Rightarrow \ \{f(x_n)\} \to L \,\big]$$

Nótese que, en la definición anterior, puede ser $A = \mathbb{N}$, un conjunto no mayorado, y entonces f es una sucesión de números reales. Comprobaremos que la noción de límite en $+\infty$ para tal función coincide con la noción de límite de una sucesión. Más concretamente, para cualquier función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ y $L \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \iff \{f(n)\} \to L$$

La implicación hacia la derecha es evidente, puesto que $\{n\}$ es un sucesión de puntos de $\mathbb{N}$ que diverge positivamente.

Recíprocamente, si $\{f(n)\} \to L$ y $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de $\mathbb{N}$ que diverge positivamente, deberemos comprobar que $\{f(x_n)\} \to L$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $|f(k) - L| < \varepsilon$ para $k \geqslant p$. Como $\{x_n\} \to +\infty$, existirá $m \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geqslant m$ se tenga $x_n > p$ y por tanto $|f(x_n) - L| < \varepsilon$.

Queda claro que la noción de límite en $+\infty$ de una función es mucho más general que la de límite de una sucesión.

La noción de límite en $-\infty$ se define de forma análoga: si A es un conjunto no minorado, se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ *tiene límite en* $-\infty$ cuando existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\{f(x_n)\} \to L$ para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A que diverja negativamente. Entonces L es único, le llamamos *límite en* $-\infty$ de la función f y escribimos $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$. También escribimos $f(x) \to L \ (x \to -\infty)$ y decimos que $f(x)$ *tiende a* L *cuando* x *tiende a* $-\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \iff \left[\, x_n \in A \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ \{x_n\} \to -\infty \ \Rightarrow \ \{f(x_n)\} \to L \,\right]$$

Las dos nociones de límite en el infinito se transforman una en otra fácilmente:

- *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función y supongamos que A no está minorado. Consideremos el conjunto $B = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$ (que no está mayorado) y la función $g : B \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(-x)$, para todo $x \in B$. Entonces, para $L \in \mathbb{R}$ se tiene*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \iff \lim_{x \to +\infty} g(x) = L$$

Veamos la implicación hacia la derecha. Si $\{x_n\}$ es cualquier sucesión de puntos de B que diverja positivamente, entonces $\{-x_n\}$ es una sucesión de puntos de A y $\{-x_n\} \to -\infty$, luego $\{f(-x_n)\} \to L$, es decir $\{g(x_n)\} \to L$. La otra implicación es idéntica, dada la simetría de la situación: si $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de A con $\{x_n\} \to -\infty$, entonces $\{-x_n\}$ es una sucesión de puntos de B y $\{-x_n\} \to +\infty$, luego $\{g(-x_n)\} \to L$, es decir, $\{f(x_n)\} \to L$. ■

La equivalencia recién probada puede escribirse de forma que sólo aparezca la función f:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \iff \lim_{x \to +\infty} f(-x) = L$$

Formalmente, el resultado queda así como una regla fácil de recordar: sustituyendo x por $-x$, convertimos un límite en $-\infty$ en un límite en $+\infty$ y viceversa. También podemos escribir la equivalencia anterior en la forma

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \iff \lim_{y \to +\infty} f(-y) = L$$

que puede ser aún más intuitiva, pues se interpreta como un *cambio de variable*: $x = -y$.

Con una idea similar, que también puede interpretarse como un cambio de variable, vamos a ver que el estudio de un límite en $+\infty$ equivale al estudio de un límite en el origen:

- *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función y supongamos que A no está mayorado. Consideremos el conjunto $B = \{y \in \mathbb{R}^+ : 1/y \in A\}$ y la función $h : B \to \mathbb{R}$ definida por $h(y) = f(1/y)$ para todo $y \in B$. Entonces $0 \in B'$ y, para $L \in \mathbb{R}$, se tiene*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \iff \lim_{y \to 0} h(y) = L$$

La demostración no ofrece dificultad. Tomamos una sucesión $\{a_n\}$ de puntos de A que diverja positivamente y $p \in \mathbb{N}$ de forma que para $n > p$ se tenga $a_n > 0$. Entonces $\{b_n\} = \{1/a_{p+n}\}$ es una sucesión de puntos de B que converge a cero. Esto prueba que $0 \in B'$, pero además, suponiendo que $\lim\limits_{y \to 0} h(y) = L$, tendremos $\{h(b_n)\} \to L$, es decir, $\{f(a_{p+n})\} \to L$, con lo que $\{f(a_n)\} \to L$ y hemos probado que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.

Para la otra implicación, si $\{y_n\} \to 0$ con $y_n \in B$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es claro que la sucesión $\{x_n\} = \{1/y_n\}$ diverge, pero como $y_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos asegurar que $\{x_n\} \to +\infty$. Entonces, por ser $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$, deducimos que $\{f(x_n)\} \to L$, es decir, $\{h(y_n)\} \to L$. ■

Nótese que la forma de definir el conjunto B, más concretamente el hecho de que $B \subset \mathbb{R}^+$, ha jugado un papel clave en la demostración anterior. Si queremos escribir la equivalencia recién probada omitiendo la función h, para que sólo aparezca f, debemos hacerlo como sigue

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \iff \lim_{y \to 0+} f(1/y) = L$$

De nuevo podemos entender que un límite en $+\infty$ se ha convertido en un límite en 0 mediante el cambio de variable $x = 1/y$, pero ha quedado claro que la nueva variable debe estar sujeta a la restricción $y > 0$, de ahí que nos aparezca un límite por la derecha.

Queda claro en cualquier caso que los resultados sobre el límite de una función en un punto pueden aplicarse a los límites en el infinito, prestando atención al cambio de función requerido. Por ejemplo, usando esta idea, junto con la caracterización $(\varepsilon - \delta)$ del límite en un punto, se consigue una caracterización análoga para el límite en el infinito. El enunciado es el que sigue y se puede probar también usando directamente la definición de límite en $+\infty$.

- *Sea A un conjunto no mayorado de números reales, $f : A \to \mathbb{R}$ una función y $L \in \mathbb{R}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
  - (i) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$
  - (ii) *Para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A, creciente y no mayorada, se tiene que $\{f(x_n)\} \to L$*
  - (iii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists K \in \mathbb{R} : x \in A,\ x > K \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Comentemos finalmente que el carácter local del límite de una función en un punto de la recta, también se traduce en una propiedad de los límites en el infinito: para estudiar la existencia de límite una función f en $+\infty$, basta conocer los valores de $f(x)$ para x suficientemente grande. La comprobación del siguiente enunciado es inmediata.

- *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función y supongamos que A no está mayorado. Sea $\rho > 0$ arbitrario y sea $B = \{x \in A : x > \rho\}$. Entonces, para cualquier $L \in \mathbb{R}$, se tiene*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \iff \lim_{x \to +\infty} f|_B(x) = L$$

2.2. Funciones divergentes en un punto

Vamos ahora a estudiar la noción de divergencia para funciones reales de variable real. Haremos primero este estudio en un punto de la recta real, para después hablar de divergencia lateral y de divergencia en el infinito. Para evitar repeticiones, en lo que sigue fijamos una función $f: A \to \mathbb{R}$ y un punto $\alpha \in A'$.

Diremos que f *diverge positivamente en* α cuando, para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de $A \setminus \{\alpha\}$ con $\{x_n\} \to \alpha$, se tenga que $\{f(x_n)\} \to +\infty$. Podemos decir también que $f(x)$ *tiende a* $+\infty$ *cuando* x *tiende a* α y escribir: $f(x) \to +\infty \ (x \to \alpha)$. Así pues:

$$f(x) \to +\infty \ (x \to \alpha) \iff \left[\, x_n \in A \setminus \{\alpha\} \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \{x_n\} \to \alpha \ \Rightarrow \ \{f(x_n)\} \to +\infty \,\right]$$

Análogamente escribimos:

$$f(x) \to -\infty \ (x \to \alpha) \iff \left[\, x_n \in A \setminus \{\alpha\} \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \{x_n\} \to \alpha \ \Rightarrow \ \{f(x_n)\} \to -\infty \,\right]$$

y en este caso decimos que f *diverge negativamente en* α, o que $f(x)$ *tiende a* $-\infty$ *cuando* x *tiende a* α. Obviamente esto equivale a que la función $-f$ diverja positivamente en α.

Finalmente, diremos que f *diverge en* α cuando la función $|f|$ diverja positivamente en α, es decir, $|f(x)| \to +\infty \ \ (x \to \alpha)$. En tal caso podemos decir también que $f(x)$ *tiende a* ∞ *cuando* x *tiende a* α y escribir $f(x) \to \infty \ (x \to \alpha)$:

$$f(x) \to \infty \ (x \to \alpha) \iff \left[\, x_n \in A \setminus \{\alpha\} \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \{x_n\} \to \alpha \ \Rightarrow \ \{f(x_n)\} \to \infty \,\right]$$

Cabe hacer aquí el mismo comentario que hicimos para sucesiones: una función que diverge en un punto está muy lejos de tener límite en dicho punto. No es aconsejable decir que una función "tiene límite $+\infty$" en un punto, ni usar notaciones como $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = +\infty$.

La divergencia, de cualquier tipo, de una función en un punto, admite dos reformulaciones equivalentes, en clara analogía con la caracterización $(\varepsilon - \delta)$ del límite funcional. Damos el enunciado para la divergencia positiva, a la que se reducen las otras dos. La demostración a estas alturas debería ser un ejercicio bien sencillo.

- *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
  - (i) $f(x) \to +\infty \ \ (x \to \alpha)$
  - (ii) *Si* $\{x_n\}$ *es una sucesión monótona de puntos de* $A \setminus \{\alpha\}$*, con* $\{x_n\} \to \alpha$*, entonces* $\{f(x_n)\} \to +\infty$
  - (iii) $\forall K \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0 : x \in A, \ 0 < |x - \alpha| < \delta \ \Rightarrow \ f(x) > K$

Finalmente, también es claro que la divergencia en un punto es una propiedad local. Fijado $r > 0$ arbitrario, podemos considerar el conjunto $B = \{x \in A : |x - \alpha| < r\}$. Entonces f diverge positivamente, diverge negativamente o simplemente diverge, en el punto α si, y sólo si, lo mismo le ocurre, respectivamente, a $f|_B$.

2.3. Divergencia lateral

En paralelismo con las nociones de límite lateral, podemos considerar la posibilidad de que una función diverja al aproximarnos a un punto de la recta real, por la izquierda o por la derecha. De nuevo las definiciones se adivinan fácilmente. Mantenemos fijada una función $f : A \to \mathbb{R}$.

Suponiendo que A se acumula a la izquierda de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$, diremos que *f diverge positivamente por la izquierda en* α cuando, para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A, tal que $x_n < \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\} \to \alpha$, se tenga $\{f(x_n)\} \to +\infty$. En tal caso decimos también que *$f(x)$ tiende a $+\infty$ cuando x tiende a α por la izquierda* y escribimos $f(x) \to +\infty \ (x \to \alpha-)$. Se comprueba fácilmente que la definición anterior no cambia si se exige que la sucesión $\{x_n\}$ sea creciente, así como la siguiente caracterización:

$$f(x) \to +\infty \ \ (x \to \alpha-) \iff \big[\forall K \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0 : x \in A, \ \alpha - \delta < x < \alpha \Rightarrow f(x) > K\big]$$

Para los otros tipos de divergencia por la izquierda, la definición y notación son análogas, y se pueden fácilmente adivinar. Baste mencionar las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} f(x) \to -\infty \ (x \to \alpha-) &\iff -f(x) \to +\infty \ (x \to \alpha-) \\ f(x) \to \infty \ (x \to \alpha-) &\iff |f(x)| \to +\infty \ (x \to \alpha-) \end{aligned}$$

Cuando el conjunto A se acumula a la derecha del punto α, definimos análogamente las tres nociones de *divergencia por la derecha*. Para ello se usan lógicamente sucesiones $\{x_n\}$ de puntos de A que verifiquen $x_n > \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\} \to \alpha$ o, si se quiere, solamente las que sean decrecientes. La caracterización, sin usar sucesiones, sería:

$$f(x) \to +\infty \ \ (x \to \alpha+) \iff \big[\forall K \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0 : x \in A, \ \alpha < x < \alpha + \delta \Rightarrow f(x) > K\big]$$

Al igual que ocurría con los límites laterales, cada tipo de divergencia lateral equivale a la divergencia (ordinaria), del mismo tipo, para una conveniente restricción de la función, más concretamente, la restricción al conjunto $A_\alpha^- = \{x \in A : x < \alpha\}$ cuando estamos trabajando con divergencias por la izquierda, o a $A_\alpha^+ = \{x \in A : x > \alpha\}$ cuando trabajamos por la derecha.

La relación entre divergencia ordinaria y divergencia lateral, para una misma función, sigue un esquema análogo al que vimos en su momento para la relación entre límite ordinario y límites laterales. En primer lugar, el estudio de la divergencia lateral en un punto $\alpha \in A'$ sólo tiene interés cuando el conjunto A se acumula tanto a la izquierda como a la derecha de α, pues en otro caso, la única divergencia lateral que tendría sentido considerar equivale a la divergencia ordinaria. En el caso interesante, empezando por la divergencia positiva, la relación buscada es la que cabe esperar, y se comprueba sin dificultad:

- *Si A se acumula a la izquierda y a la derecha de un punto α, entonces:*

$$f(x) \to +\infty \ \ (x \to \alpha) \iff \begin{cases} f(x) \to +\infty \ \ (x \to \alpha-) \quad \text{y} \\ f(x) \to +\infty \ \ (x \to \alpha+) \end{cases}$$

Naturalmente, podemos sustituir $+\infty$ por $-\infty$ o por ∞ en el resultado anterior, sin más que aplicarlo a la función $-f$ o $|f|$, respectivamente.

Merece la pena comentar que puede ser $f(x) \to -\infty$ $(x \to \alpha-)$ y $f(x) \to +\infty$ $(x \to \alpha+)$, o viceversa, en cuyo caso f diverge en el punto α, pero no lo hace positiva ni negativamente. Para tener un ejemplo concreto, basta definir $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ por $f(x) = 1/x$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$. Es claro que $1/x \to +\infty$ $(x \to 0+)$ y $1/x \to -\infty$ $(x \to 0-)$.

2.4. Divergencia en el infinito

Para completar todo el esquema que hemos venido desarrollando, discutimos brevemente la divergencia de una función en $+\infty$ o en $-\infty$. Fijamos como siempre una función $f : A \to \mathbb{R}$.

Si A no está mayorado, f *diverge positivamente en* $+\infty$ cuando, para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A tal que $\{x_n\} \to +\infty$, se tiene que $\{f(x_n)\} \to +\infty$. En tal caso escribimos $f(x) \to +\infty$ $(x \to +\infty)$, y podemos decir que $f(x)$ *tiende a* $+\infty$ *cuando* x *tiende a* $+\infty$. Simbólicamente:

$$f(x) \to +\infty \ (x \to +\infty) \iff \left[\, x_n \in A \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \{x_n\} \to +\infty \ \Rightarrow \ \{f(x_n)\} \to +\infty \,\right]$$

Si $-f$ diverge positivamente en $+\infty$ decimos que f *diverge negativamente en* $+\infty$, o que $f(x)$ *tiende a* $-\infty$ *cuando* x *tiende a* $+\infty$, y escribimos $f(x) \to -\infty$ $(x \to +\infty)$. Finalmente, si ocurre que $|f(x)| \to +\infty$ $(x \to +\infty)$, diremos simplemente que f *diverge en* $+\infty$, o que $f(x)$ *tiende a* ∞ *cuando* x *tiende a* $+\infty$ y escribiremos $f(x) \to \infty$ $(x \to +\infty)$.

Para la divergencia en $-\infty$ las definiciones son análogas. Si A no está minorado, f *diverge positivamente en* $-\infty$ cuando, para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A tal que $\{x_n\} \to -\infty$, se tiene que $\{f(x_n)\} \to +\infty$. Escribimos $f(x) \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ y decimos que $f(x)$ *tiende a* $+\infty$ *cuando* x *tiende a* $-\infty$. Si $-f$ diverge positivamente en $-\infty$ decimos que f *diverge negativamente en* $-\infty$ y escribimos $f(x) \to -\infty$ $(x \to -\infty)$. Si $|f(x)| \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ decimos que f *diverge en* $-\infty$ y escribimos $f(x) \to \infty$ $(x \to -\infty)$.

En lo que sigue discutimos sólo la divergencia positiva de f. Los resultados se aplican a los otros dos tipos de divergencia, sin más que sustituir f por $-f$ o por $|f|$.

Como ocurría con los límites en el infinito, la divergencia en $-\infty$ se reduce a la divergencia en $+\infty$ mediante el apropiado cambio de variable: $x = -y$.

- *Supongamos que* A *no está minorado. Consideremos el conjunto* $B = \{y \in \mathbb{R} : -y \in A\}$ *y la función* $g : B \to \mathbb{R}$ *dada por* $g(y) = f(-y)$ *para todo* $y \in B$*. Entonces,* f *diverge positivamente en* $-\infty$ *si, y sólo si,* g *diverge positivamente en* $+\infty$.

Este resultado puede resumirse como sigue, resaltando el cambio de variable usado:

$$f(x) \to +\infty \ \ (x \to -\infty) \iff f(-y) \to +\infty \ \ (y \to +\infty)$$

A su vez, la divergencia en $+\infty$ de una función equivale a la divergencia en 0 de otra, que también se obtiene mediante un cambio de variable. La comprobación del siguiente enunciado, al igual que la del anterior, es idéntica a la que hicimos para límites.

- *Supongamos que* A *no está mayorado, sea* $B = \{y \in \mathbb{R}^+ : 1/y \in A\}$ *(que verifica* $0 \in B'$*), y* $h : B \to \mathbb{R}$ *la función definida por* $h(y) = f(1/y)$ *para todo* $y \in B$. *Entonces,* f *diverge positivamente en* $+\infty$ *si, y sólo si* h *diverge positivamente en* 0.

Explicitando el cambio de variable, pero sin olvidar la inclusión $B \subset \mathbb{R}^+$, podemos escribir

$$f(x) \to +\infty \ \ (x \to +\infty) \iff f(1/y) \to +\infty \ \ (y \to 0+)$$

Esta idea puede usarse por ejemplo, para obtener caracterizaciones de la divergencia en el infinito mediante sucesiones monótonas, o sin usar sucesiones. Enunciamos una caracterización de este tipo que también puede probarse directamente:

- *Si* A *no está mayorado, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
  (i) $f(x) \to +\infty \ \ (x \to +\infty)$
  (ii) *Para toda sucesión* $\{x_n\}$ *de puntos de A, creciente y no mayorada, se tiene que* $\{f(x_n)\} \to +\infty$
  (iii) $\forall K \in \mathbb{R} \ \exists M \in \mathbb{R} : x \in A, \ x > M \Rightarrow f(x) > K$

2.5. Cálculo de límites

Veamos ahora algunas reglas básicas para el estudio de límites o divergencia para sumas, productos o cocientes de funciones. Se obtienen trasladando de forma rutinaria las reglas ya conocidas sobre sumas, productos o cocientes de sucesiones convergentes o divergentes y, como es lógico, volverán a aparecer las indeterminaciones que ya conocemos.

Trabajaremos solamente con límites o divergencias en un punto de la recta real, por ser el caso más general. Los resultados se trasladan automáticamente a los demás casos, límites o divergencias laterales y límites o divergencias en el infinito, prestando la debida atención al cambio de función que en cada caso se requiera. Para evitar repeticiones, en todo lo que sigue fijamos dos funciones $f, g : A \to \mathbb{R}$ y un punto $\alpha \in A'$.

Empezamos estudiando el comportamiento de la suma $f + g$, dependiendo de los de f y g, con dos observaciones clave:

- *Si* f *y* g *tienen límite en* α, *entonces* $f + g$ *tiene límite en* α, *verificándose que*

$$\lim_{x \to \alpha} \big(f + g\big)(x) = \lim_{x \to \alpha} f(x) + \lim_{x \to \alpha} g(x)$$

- *Supongamos que* $f(x) \to +\infty \ (x \to \alpha)$ *y que* g *verifica la siguiente condición:*

$$\exists \delta > 0 \ \exists M \in \mathbb{R} \ : \ x \in A, \ 0 < |x - \alpha| < \delta \implies g(x) \geqslant M \tag{1}$$

  Entonces: $\big(f + g\big)(x) \to +\infty \ \ (x \to \alpha)$.

Para probarlo, sea $\{x_n\} \to \alpha$, con $x_n \in A \setminus \{\alpha\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En el primer caso tenemos $\{f(x_n)\} \to \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ y $\{g(x_n)\} \to \lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$, luego $\{(f+g)(x_n)\} \to \lim\limits_{x\to\alpha} f(x) + \lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$.

En el segundo caso será $\{f(x_n)\} \to +\infty$ y usando (1) vemos que $\{g(x_n)\}$ está minorada, puesto que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$, se tiene $0 < |x_n - \alpha| < \delta$, luego $g(x_n) \geqslant M$. Deducimos que $\{(f+g)(x_n)\} \to +\infty$, como se quería. ■

La condición (1) exige que g esté minorada en la intersección de $A \setminus \{\alpha\}$ con un intervalo abierto de centro α, intuitivamente podríamos decir que g se mantiene minorada "cerca" de α. Es claro que esta condición se cumple cuando g tiene límite en α, digamos $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = L$. En efecto, sabemos que existe $\delta > 0$ tal que, para $x \in A$ con $0 < |x-\alpha| < \delta$, se tiene $|g(x) - L| < 1$, luego $g(x) > L - 1$ y basta tomar $M = L - 1$. Cuando $g(x) \to +\infty$ $(x \to \alpha)$, para cualquier $M \in \mathbb{R}$ podemos encontrar $\delta > 0$ de forma que se verifique (1). Podemos así obtener:

- *Si $f(x) \to +\infty$ $(x \to \alpha)$ y g tiene límite o diverge positivamente en α, entonces $f+g$ diverge positivamente en α.*
- *Si $f(x) \to -\infty$ $(x \to \alpha)$ y g tiene límite o diverge negativamente en α, entonces $f+g$ diverge negativamente en α.*
- *Si f diverge en el punto α y g tiene límite en α, entonces $f+g$ diverge en α.*

Nada se puede afirmar sobre el comportamiento en un punto de la suma de dos funciones, cuando una diverge positivamente y otra negativamente en dicho punto. Por tanto, tampoco podemos afirmar nada, si solo sabemos que ambas funciones divergen en el punto en cuestión. Reaparece aquí, para funciones, la indeterminación del tipo $[\infty - \infty]$.

Con respecto al producto de funciones, las observaciones básicas son tres:

- *Si f y g tienen límite en el punto α, entonces fg tiene límite en α, dado por*

  $$\lim_{x\to\alpha} (fg)(x) = \lim_{x\to\alpha} f(x) \cdot \lim_{x\to\alpha} g(x)$$

- *Supongamos que $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = 0$ y que g verifica la siguiente condición:*

  $$\exists\, \delta > 0 \ \exists\, M > 0 \ : \ x \in A,\ 0 < |x-\alpha| < \delta \implies |g(x)| \leqslant M \tag{2}$$

  Entonces: $\lim\limits_{x\to\alpha} (fg)(x) = 0$.

- *Supongamos que $f(x) \to +\infty$ $(x \to \alpha)$ y que g verifica (1) con $M > 0$, es decir:*

  $$\exists\, \delta > 0 \ \exists\, M > 0 \ : \ x \in A,\ 0 < |x-\alpha| < \delta \implies g(x) \geqslant M \tag{3}$$

  Entonces: $(fg)(x) \to +\infty$ $(x \to \alpha)$.

Para comprobar estas afirmaciones, tomamos una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A distintos de α, con $\{x_n\} \to \alpha$. En el primer caso tenemos $\{f(x_n)\} \to \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ y $\{g(x_n)\} \to \lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$, luego $\{(fg)(x_n)\} \to \lim\limits_{x\to\alpha} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$.

En el segundo caso tenemos que $\{f(x_n)\} \to 0$, y usando (2) vemos que $\{g(x_n)\}$ está acotada, puesto que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$, será $0 < |x_n - \alpha| < \delta$, luego $|g(x_n)| \leqslant M$. Por tanto, $\{(fg)(x_n)\} \to 0$. Finalmente, en el tercer caso tenemos $\{f(x_n)\} \to +\infty$ y, si δ, M vienen dados por (3), existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$ es $0 < |x_n - \alpha| < \delta$, luego $g(x_n) \geqslant M$. Entonces, $\{(fg)(x_n)\} \to +\infty$, como se quería. ■

La condición (2) significa que g se mantiene acotada cerca de α, y está claro que, si g tiene límite en α, verificará dicha condición. La condición (3) exige que g esté minorada cerca del punto α por una constante positiva. Esta condición se cumple cuando g tiene un límite positivo o diverge positivamente en α. Teniendo en cuenta esta última observación, y aplicando los resultados anteriores, pero sustituyendo f por $-f$ o por $|f|$ y g por $-g$ o $|g|$, según convenga en cada caso, obtenemos las siguientes consecuencias:

- *Si f y g divergen en el punto α, entonces fg diverge en α. Además, si ambas divergen positivamente o ambas negativamente tenemos $(fg)(x) \to +\infty \ (x \to \alpha)$, mientras que si una diverge positivamente y otra negativamente, entonces $(fg)(x) \to -\infty \ (x \to \alpha)$.*

- *Si f diverge en el punto α y g tiene límite no nulo en α, digamos $\lim_{x\to\alpha} g(x) = \lambda \in \mathbb{R}^*$, entonces fg diverge en α. Además, si f diverge positivamente y $\lambda > 0$, o bien f diverge negativamente y $\lambda < 0$, entonces fg diverge positivamente. Si f diverge positivamente y $\lambda < 0$, o bien f diverge negativamente y $\lambda > 0$, entonces fg diverge negativamente.*

Nada se puede afirmar sobre el comportamiento en un punto del producto de dos funciones, cuando una tiene límite 0 y la otra diverge en dicho punto. Reaparece aquí, para funciones, la indeterminación del tipo $[0 \cdot \infty]$.

Para estudiar el cociente g/f, bastará ahora ver lo que ocurre con la función $1/f$, según sea el comportamiento de f. Suponemos pues que f no es constantemente nula y consideramos el conjunto $B = \{x \in A : f(x) \neq 0\} \neq \emptyset$ en el que definimos la función $1/f$. Con respecto al punto $\alpha \in A'$ en el que venimos trabajando, en unos casos podremos asegurar que de hecho $\alpha \in B'$, en otro tendremos que suponerlo.

- *Si $\lim_{x\to\alpha} f(x) = L \in \mathbb{R}^*$, entonces $\alpha \in B'$ y $\lim_{x\to\alpha} (1/f)(x) = 1/L$.*

- *Si f diverge en el punto α, entonces también $\alpha \in B'$ y $\lim_{x\to\alpha} (1/f)(x) = 0$.*

- *Si $\lim_{x\to\alpha} f(x) = 0$ y $\alpha \in B'$, entonces $1/f$ diverge en el punto α.*

La comprobación de las tres afirmaciones es inmediata. En el primer caso podemos asegurar que existe $\delta > 0$ tal que, para $x \in A$ con $0 < |x - \alpha| < \delta$ se tiene $|f(x) - L| < |L|$ y, en particular, $f(x) \neq 0$. Esto prueba ya que $\alpha \in B'$. Si ahora tomamos una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de B distintos de α, con $\{x_n\} \to \alpha$, se tendrá $\{f(x_n)\} \to L$, luego $\{1/f(x_n)\} \to 1/L$. En el segundo caso el razonamiento es muy similar, existe $\delta > 0$ tal que, para $x \in A$ con $0 < |x - \alpha| < \delta$, se tiene $|f(x)| > 1$, luego $f(x) \neq 0$ y $\alpha \in B'$. Tomando la sucesión $\{x_n\}$ como antes, tenemos que $\{f(x_n)\}$ es divergente, luego $\{1/f(x_n)\} \to 0$. En el tercer caso, tomando la sucesión $\{x_n\}$ como antes, tenemos $\{f(x_n)\} \to 0$, luego $\{1/f(x_n)\}$ es divergente. ■

2.6. Ejemplo: funciones racionales

Las reglas básicas desarrolladas hasta ahora permiten estudiar fácilmente los límites y la divergencia de cualquier función racional, lo que nos da la oportunidad de ilustrar muy bien dichas reglas. Para evitar repeticiones introducimos una notación que se mantendrá fija en toda la presente sección.

Notación. En lo que sigue P,Q serán dos polinomios no idénticamente nulos de grados respectivos $p,q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Puesto que pretendemos estudiar el cociente P/Q, supondremos sin pérdida de generalidad que P y Q no tienen divisores comunes. Consideramos entonces el conjunto $Z = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) = 0\}$ de los ceros del polinomio Q, y sabemos que $P(x) \neq 0$ para todo $x \in Z$. Tomamos $A = \mathbb{R} \setminus Z$ y, puesto que Z es finito, tenemos $A' = \mathbb{R}$ y A no está mayorado ni minorado. Pretendemos estudiar la función racional $f : A \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \forall x \in A$$

Cuando $q = 0$, tenemos $A = \mathbb{R}$ y f es una función polinómica. En general, debe quedar claro que *toda* función racional es restricción de una función f del tipo que aquí estudiamos.

Estudiemos el comportamiento de f en $+\infty$ y $-\infty$, que parece plantear indeterminaciones. Empezando por algunos casos fáciles, para $n \in \mathbb{N}$ tenemos evidentemente

$$x^n \to +\infty \ (x \to +\infty)\,; \qquad x^n \to +\infty \ (x \to -\infty) \quad \text{si } n \text{ es par}$$

$$x^n \to -\infty \ (x \to -\infty) \quad \text{si } n \text{ es impar}\,; \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

Para el caso general, destacamos los coeficientes principales de P y Q escribiendo

$$P(x) = a x^p + R(x)\,, \qquad Q(x) = b x^q + S(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

donde $a,b \in \mathbb{R}^*$ y R,S son polinomios de grados menores que p y q respectivamente. Puede ocurrir que R sea idénticamente nulo, por ejemplo cuando P es constante. Igualmente puede ocurrir que S sea idénticamente nulo.

La observación clave es la siguiente:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{R(x)}{x^p} = \lim_{x\to-\infty} \frac{R(x)}{x^p} = \lim_{x\to+\infty} \frac{S(x)}{x^q} = \lim_{x\to-\infty} \frac{S(x)}{x^q} = 0 \tag{4}$$

Basta comprobar las dos afirmaciones sobre R, las referentes a S son análogas. Suponemos $p > 0$, pues en otro caso no hay nada que comprobar, y escribimos

$$\frac{R(x)}{x^p} = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{a_k}{x^{p-k}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1} \in \mathbb{R}$ son los coeficientes de R, luego basta usar que, para $0 \leqslant k \leqslant p-1$ se tiene $\lim\limits_{x\to+\infty} 1/x^{p-k} = \lim\limits_{x\to-\infty} 1/x^{p-k} = 0$.

Finalmente escribimos
$$f(x) = \frac{x^p}{x^q}\,\frac{a + (R(x)/x^p)}{b + (S(x)/x^q)} = \frac{x^p}{x^q}\,g(x) \qquad \forall x \in A \setminus \{0\}$$
donde la función racional $g : A \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ se define por esta misma igualdad y, en vista de (4), verifica que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = a/b$. Hemos evitado así cualquier indeterminación y la descripción del comportamiento de f en $+\infty$ y $-\infty$ queda como sigue:

- *Si $p < q$, se tiene* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$
- *Si $p = q$, tenemos* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a/b$
- *Si $p > q$, entonces f diverge tanto en $+\infty$ como en $-\infty$. Más concretamente diverge:*
  (a) *Positivamente en $+\infty$ y en $-\infty$, cuando $p - q$ es par y $a/b > 0$*
  (b) *Negativamente en $+\infty$ y en $-\infty$, cuando $p - q$ es par y $a/b < 0$*
  (c) *Positivamente en $+\infty$ y negativamente en $-\infty$, cuando $p - q$ es impar y $a/b > 0$*
  (d) *Negativamente en $+\infty$ y positivamente en $-\infty$, cuando $p - q$ es impar y $a/b < 0$*

Conviene observar que, para estudiar el comportamiento de f en $+\infty$ y $-\infty$, no se ha usado la hipótesis de que los polinomios P y Q sean primos relativos. En cuanto al comportamiento de f en puntos de recta, empezamos resaltando que f es continua, es decir:

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) \qquad \forall a \in A$

Veamos finalmente el comportamiento de f en cualquiera de los ceros de Q. Sea pues $\alpha \in \mathbb{R}$ con $Q(\alpha) = 0$ y escribamos
$$Q(x) = (x - \alpha)^m Q_\alpha(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
donde $m \in \mathbb{N}$ es el orden del cero de Q en el punto α y el polinomio Q_α verifica $Q_\alpha(\alpha) \neq 0$. Tenemos entonces
$$f(x) = \frac{1}{(x-\alpha)^m}\,\frac{P(x)}{Q_\alpha(x)} \quad \forall x \in A$$
y existe el límite
$$y_\alpha = \lim_{x\to\alpha} (x-\alpha)^m f(x) = \lim_{x\to\alpha} \frac{P(x)}{Q_\alpha(x)} = \frac{P(\alpha)}{Q_\alpha(\alpha)}$$
Por ser $P(\alpha) \neq 0$, tenemos $y_\alpha \neq 0$, mientras que el comportamiento en el punto α de la función $x \mapsto 1/(x-\alpha)^m$ no ofrece dificultad. Podemos por tanto enunciar:

- *La función racional $f = P/Q$, donde los polinomios P y Q son primos relativos, diverge en todo punto $\alpha \in \mathbb{R}$ que verifique $Q(\alpha) = 0$ (y por tanto $P(\alpha) \neq 0$).*

  Más concretamente, si Q tiene un cero de orden m en el punto α, entonces existe el límite $y_\alpha = \lim\limits_{x\to\alpha}(x-\alpha)^m f(x) \in \mathbb{R}^*$ y pueden darse cuatro casos:
  (a) *$y_\alpha > 0$ y m par: $f(x) \to +\infty \ (x \to \alpha)$*
  (b) *$y_\alpha < 0$ y m par: $f(x) \to -\infty \ (x \to \alpha)$*
  (c) *$y_\alpha > 0$ y m impar: $f(x) \to -\infty \ (x \to \alpha-)$ y $f(x) \to +\infty \ (x \to \alpha+)$*
  (d) *$y_\alpha < 0$ y m impar: $f(x) \to +\infty \ (x \to \alpha-)$ y $f(x) \to -\infty \ (x \to \alpha+)$*

2.7. Composición de funciones

Para completar las reglas básicas sobre cálculo de límites, conviene pensar lo que ocurre con una composición de dos funciones, sabiendo cómo se comportan ambas. Las demostraciones serán casi inmediatas, así que se trata en realidad de observaciones muy sencillas que facilitan el estudio de límites o divergencia de funciones.

Así pues, en lo que sigue fijamos dos funciones $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ verificando que $f(A) \subset B$, lo que permite considerar la composición $g \circ f : A \to \mathbb{R}$. Para trabajar como siempre en el caso más general, fijamos también $\alpha \in A'$ y buscamos condiciones sobre f y g que nos permitan decidir si $g \circ f$ tiene límite o diverge en el punto α.

Aunque resulte sorprendente, el caso más sencillo se presenta cuando f diverge positiva o negativamente en el punto α. Supongamos primero que $f(x) \to +\infty \ (x \to \alpha)$. Dada una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de $A \setminus \{\alpha\}$ con $\{x_n\} \to \alpha$, sabemos que $\{y_n\} = \{f(x_n)\} \to +\infty$. Como $y_n \in B$ para todo $n \in \mathbb{N}$, el conjunto B no está mayorado y el comportamiento de la función g en $+\infty$ nos dará la información que buscamos sobre la sucesión $\big\{\big(g \circ f\big)(x_n)\big\} = \{g(y_n)\}$. Concretamente, si $g(y) \to L \ (y \to +\infty)$ con $L \in \mathbb{R}$, tendremos $\{g(y_n)\} \to L$. Análogamente, si g diverge en $+\infty$, la sucesión $\{g(y_n)\}$ divergerá de la misma forma. Hemos probado:

- *Supongamos que $f(x) \to +\infty \ (x \to \alpha)$. Entonces B no está mayorado, se verifica que*

$$g(y) \to L \in \mathbb{R} \ \ (y \to +\infty) \quad \Longrightarrow \quad g\big(f(x)\big) \to L \ \ (x \to \alpha)$$

  y la misma implicación es cierta sustituyendo en ambos miembros L por $+\infty$, $-\infty$ o ∞.

Con un razonamiento enteramente análogo, cuando $f(x) \to -\infty \ (x \to \alpha)$, obtenemos que B no está minorado y del comportamiento (existencia de límite o divergencia) de g en $-\infty$ deducimos el mismo tipo de comportamiento para $g \circ f$ en el punto α.

Para el caso en que f tiene límite en el punto α, obtenemos un resultado análogo, pero el razonamiento es un poco más delicado y necesitamos una hipótesis adicional. Supongamos que $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \beta \in \mathbb{R}$ y sea de nuevo $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de $A \setminus \{\alpha\}$ con $\{x_n\} \to \alpha$. Cierto que $\{y_n\} = \{f(x_n)\}$ es una sucesión de puntos de B con $\{y_n\} \to \beta$, pero el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : y_n \neq \beta\}$ podría ser finito. Entonces no podemos asegurar que $\beta \in B'$ y, aunque así fuera, el comportamiento de g en el punto β poco nos dice sobre la sucesión $\{g(y_n)\}$.

Hay varias posibilidades para salvar esta dificultad. La más inmediata consiste en suponer que $f\big(A \setminus \{\alpha\}\big) \subset B \setminus \{\beta\}$, cosa que ocurre en particular cuando $\beta \notin B$. Entonces tenemos $y_n \neq \beta$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $\beta \in B'$ y el comportamiento de g en el punto β nos da la información que buscamos sobre la sucesión $\{g(y_n)\}$. Deducimos que $g \circ f$ se comporta en el punto α como lo haga g en el punto β. Hemos probado:

- *Supongamos que $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \beta \in \mathbb{R}$ y que $f(x) \neq \beta$ para todo $x \in A \setminus \{\alpha\}$. Entonces $\beta \in B'$, se verifica que*

$$g(y) \to L \in \mathbb{R} \ \ (y \to \beta) \quad \Longrightarrow \quad g\big(f(x)\big) \to L \ \ (x \to \alpha)$$

  y la misma implicación es cierta sustituyendo L por $+\infty$, $-\infty$ o ∞.

En la práctica, la hipótesis $f\big(A\setminus\{\alpha\}\big)\subset B\setminus\{\beta\}$ puede ser incómoda. Como la dificultad planteada sólo aparece cuando $\beta\in B$, parece lógico suponer en tal caso que g es continua en el punto β. Entonces se consigue fácilmente el resultado esperado:

- *Si* $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\beta\in B$ *y* g *es continua en el punto* β*, se tiene* $\lim\limits_{x\to\alpha}\big(g\circ f\big)(x)=g(\beta)$.

En efecto, si $\{x_n\}\to\alpha$ con $x_n\in A\setminus\{\alpha\}$ para todo $n\in\mathbb{N}$, tenemos que $\{y_n\}=\{f(x_n)\}\to\beta$ con $y_n\in B$ para todo $n\in\mathbb{N}$ y la continuidad de g en β nos dice que $\{g(y_n)\}\to g(\beta)$. ■

Para poner algún ejemplo en el que podemos aplicar los resultados anteriores, comentemos previamente el comportamiento de la función raíz q-ésima con $q\in\mathbb{N}$ fijo, que ya conocemos:

- *Si* $q\in\mathbb{N}$ *es impar, se tiene*

$$\lim_{x\to a}\sqrt[q]{x}=\sqrt[q]{a}\quad\forall a\in\mathbb{R},\qquad \sqrt[q]{x}\to+\infty\ (x\to+\infty)\quad y\quad \sqrt[q]{x}\to-\infty\ (x\to-\infty)$$

mientras que si q *es par, entonces*

$$\lim_{x\to a}\sqrt[q]{x}=\sqrt[q]{a}\quad\forall a\in\mathbb{R}_0^+\quad\text{y}\quad \sqrt[q]{x}\to+\infty\ (x\to+\infty).$$

Podemos ya fácilmente, estudiar el comportamiento de funciones que aparecen al componer funciones racionales con raíces, o viceversa. Por ejemplo, veremos fácilmente que

$$\lim_{x\to 1}\sqrt[5]{x^2-3x+2}=0\qquad\text{y}\qquad \lim_{x\to 1}\frac{\big(\sqrt[3]{1/(x-1)^2}\big)^2}{\big(\sqrt[3]{1/(x-1)^2}\big)^4+2}=0$$

Nótese que, como es bastante habitual, no indicamos explícitamente las funciones cuyos límites en el punto 1 estamos calculando, sin que ello produzca confusión o ambigüedad alguna. En el primer caso, nos referimos a una función $h_1:A\to\mathbb{R}$ definida por $h_1(x)=\sqrt[5]{x^2-3x+2}$ para todo $x\in A$, y del conjunto A sólo sabemos que $1\in A'$. Obviamente basta considerar el caso $A=\mathbb{R}$, pues en otro caso tendríamos una restricción de la función considerada. Análogamente, en el segundo caso trabajamos con una función $h_2:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, cuya definición está clara. Ambos resultados se deducen directamente de la definición de límite, pero también podemos usar las reglas recién obtenidas para la composición de funciones.

En el primer ejemplo tenemos $h_1=g\circ f$ donde $f(x)=x^2-3x+2$ y $g(y)=\sqrt[3]{y}$ para cualesquiera $x,y\in\mathbb{R}$. Como $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$ y g es continua en 0 con $g(0)=0$, deducimos que $\lim\limits_{x\to 1}h_1(x)=0$. Para el segundo ejemplo tenemos $h_2=g\circ f$ donde $f(x)=\sqrt[3]{1/(x-1)^2}$ para todo $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ y $g(y)=y^2/(y^4+2)$ para todo $y\in\mathbb{R}$. Como $f(x)\to+\infty$ $(x\to 1)$ y $\lim\limits_{y\to+\infty}g(y)=0$, concluimos que $\lim\limits_{x\to 1}h_2(x)=0$.

Comentemos finalmente que las reglas obtenidas sobre composición de funciones pueden también aplicarse para estudiar el comportamiento lateral en un punto, o el comportamiento en el infinito de una composición de funciones, pues ambas situaciones son casos particulares del comportamiento ordinario en un punto, caso que hemos discutido con detalle.

2.8. Cambios de variable

Los resultados anteriores sobre composición de funciones admiten una interpretación que merece la pena resaltar: conociendo el comportamiento de una función g, podemos deducir el de otras muchas que se obtienen a partir de ella mediante cambios de variable, puesto que todas esas funciones son de la forma $g \circ f$ donde f es la función que en cada caso estemos usando para hacer el cambio de variable. Para explicar mejor esta interpretación, y la forma de usarla en la práctica, nos concentramos en el caso particular más frecuente.

Supongamos que, para una función $g : B \to \mathbb{R}$ y $\beta \in B'$, sabemos que $\lim_{y \to \beta} g(y) = L \in \mathbb{R}$. Podemos entonces usar cualquier función $f : A \to B$ que, para $\alpha \in A'$ conveniente, verifique $\lim_{x \to \alpha} f(x) = \beta$ y $f(x) \neq \beta$ para todo $x \in A \setminus \{\alpha\}$. Deducimos entonces que $\lim_{x \to \alpha} \big(g \circ f\big)(x) = L$. Así pues, para cualquier función f que cumpla las condiciones indicadas, tenemos la siguiente implicación:

$$\lim_{y \to \beta} g(y) = L \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to \alpha} g\big(f(x)\big) = L$$

Podemos pensar que pasamos de un límite a otro mediante el cambio de variable $y = f(x)$, teniendo en cuenta que y tiende a β cuando x tiende a α.

Un ejemplo de cambio de variable que se usa con frecuencia consiste en hacer una *traslación*. Concretamente podemos tomar $A = \{y - \beta : y \in B\} = \{x \in \mathbb{R} : \beta + x \in B\}$ y $f(x) = \beta + x$ para todo $x \in A$. Nótese que f es una traslación que transforma A en B. Es claro que $\lim_{x \to 0} f(x) = \beta$ y $f(x) \neq \beta$ para todo $x \in A \setminus \{0\}$. En este caso tenemos de hecho la equivalencia

$$\lim_{y \to \beta} g(y) = L \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to 0} g(\beta + x) = L$$

La implicación hacia la derecha se deduce del cambio de variable $y = \beta + x$ teniendo en cuenta que $y \to \beta$ cuando $x \to 0$. Pero la implicación hacia la izquierda es enteramente análoga, se obtiene usando la traslación inversa, es decir, el cambio de variable $x = y - \beta$ y teniendo en cuenta que $x \to 0$ cuando $y \to \beta$. Así pues, la noción de límite ordinario de una función en un punto cualquiera de la recta es equivalente a la de límite en el origen de otra función, que se obtiene de ella mediante una traslación. Podríamos decir que el concepto de límite funcional es *invariante por traslaciones*.

Veamos otro ejemplo de cambio de variable que usaremos en alguna ocasión. Dado $\varepsilon > 0$, sea $B = \{y \in \mathbb{R} : 0 < |y| < \varepsilon\}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ una función. Fijado $q \in \mathbb{N}$, podemos entonces tomar $A = \{x \in \mathbb{R} : x^q \in B\} = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x| < \sqrt[q]{\varepsilon}\}$ y $f(x) = x^q$ para todo $x \in A$. Es claro que $f(A) \subset B$, que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ y que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in A$. Tenemos por tanto la implicación

$$\lim_{y \to 0} g(y) = L \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to 0} g(x^q) = L$$

deducida del cambio de variable $y = x^q$, teniendo en cuenta que $y \to 0$ cuando $x \to 0$.

Finalmente, merece la pena comentar que algunos resultados obtenidos anteriormente, que se interpretaron mediante cambios de variable, son casos particulares del esquema general que ahora hemos explicado.

Recordemos por ejemplo que, para cualquier función $g : B \to \mathbb{R}$, donde B es un conjunto no minorado, se tiene

$$\lim_{y\to-\infty} g(y) = L \iff \lim_{x\to+\infty} g(-x) = L$$

La implicación hacia la derecha se interpreta mediante el cambio de variable $y = -x$ y la recíproca mediante $x = -y$, teniendo en cuenta que $y \to -\infty$ cuando $x \to +\infty$, y viceversa.

Igualmente, para una función $g : B \to \mathbb{R}$, donde B es un conjunto no mayorado y $B \subset \mathbb{R}^+$, vimos en su momento la equivalencia

$$\lim_{y\to+\infty} g(y) = L \iff \lim_{x\to 0} g(1/x) = L$$

Nótese que, para evitar que aparezca un límite por la derecha en el origen, hemos supuesto, sin perder generalidad, que $B \subset \mathbb{R}^+$. La implicación hacia la derecha se deduce del cambio de variable $y = 1/x$ teniendo en cuenta que $y \to +\infty$ cuando $x \to 0$. Para el recíproco basta usar el cambio $x = 1/y$, teniendo en cuenta que $x \to 0$ cuando $y \to +\infty$.

2.9. Ejercicios

1. Estudiar la existencia de límite en $+\infty$ de las siguientes funciones y, en su caso, calcular dicho límite:

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \sqrt{x - E(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{\sqrt[6]{x^5} + \sqrt[3]{x^2+1}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt[3]{x}+2)} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

2. Dado $c \in \mathbb{R}$, estudiar el comportamiento en 0 de la función $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{E(x)+c}{x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

3. En cada uno de los siguientes casos, estudiar el comportamiento en el punto α de la función $f : A \to \mathbb{R}$ que se indica:

(a) $\alpha = 0$, $A = \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{x^2+c}{\sqrt{|x|}}$ $\forall x \in A$, con $c \in \mathbb{R}$ constante

(b) $\alpha = 1$, $A = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{|x-1|^3}$ $\forall x \in A$

(c) $\alpha = 0$, $A = \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{|1+x| - |1-x|}{x}$ $\forall x \in A$

4. Sea $A =]-\infty, -1[\cup [0,1] \cup [2, +\infty[$ y $f : A \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+1}\left(\sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt[3]{x^2-1}\right) & \text{si} \quad x < -1 \\ \dfrac{x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{si} \quad 0 \leqslant x < 1 \\ 1 \quad \text{si} \quad x = 1 \quad \text{o} \quad x = 2 \\ \dfrac{x - E(x)}{x-2} \quad \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Estudiar el comportamiento de f (existencia de límite o divergencia) en $-\infty$, en $+\infty$ y en todos los puntos de la recta donde ello tenga sentido. Estudiar también la continuidad de f y clasificar sus discontinuidades si las tiene.

5. Dado $p \in \mathbb{N}$, probar que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^p - 1}{x - 1} = p \quad \text{ y que } \quad \lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1}\left(\sum_{k=1}^{p} x^k - p\right) = \frac{p(p+1)}{2}$$

6. Dadas dos funciones $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, supongamos que f diverge en un punto $\alpha \in A'$ y que $\lim\limits_{y \to -\infty} g(y) = \lim\limits_{y \to +\infty} g(y) = L \in \mathbb{R}$. Probar que $\lim\limits_{x \to \alpha} (g \circ f)(x) = L$.

7. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones y supongamos que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. Mostrar con ejemplos que:

   (a) De $\lim\limits_{y \to 0} g(y) = 0$ no puede deducirse que $\lim\limits_{x \to 0} g\big(f(x)\big) = 0$.

   (b) De $g(y) \to +\infty$ $(y \to 0)$ no puede deducirse que $g\big(f(x)\big) \to +\infty$ $(x \to 0)$.

   ¿Por qué no puede usarse en ambos casos el cambio de variable $y = f(x)$?

Tema 3

Derivación

Iniciamos el estudio del Cálculo Diferencial, introduciendo el concepto de *derivada* para funciones reales de variable real, un límite funcional muy concreto. Analizamos la relación entre derivabilidad y continuidad, y constatamos el carácter local del concepto de derivada, prestando también atención a las derivadas laterales.

Interpretaremos el concepto de derivada desde tres puntos de vista: analítico (aproximación por polinomios), geométrico (pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función) y físico (velocidad o razón de cambio). También comentaremos el origen histórico de este concepto.

3.1. Concepto de derivada

Fijada una función $f : A \to \mathbb{R}$ y dado un punto $a \in A \cap A'$, sea $f_a : A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \forall x \in A \setminus \{a\}$$

Puesto que $a \in \big(A \setminus \{a\}\big)'$, podemos preguntarnos si f_a tiene límite en a. Pues bien, se dice que f es *derivable* en el punto a cuando la función f_a tiene límite en a. Dicho límite recibe el nombre de *derivada* de la función f en el punto a y se denota por $f'(a)$. Simbólicamente:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} f_a(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Dado un conjunto $B \subset A \cap A'$, diremos que f es derivable en B cuando sea derivable en todos los puntos de B.

Sea ahora A_1 el conjunto de puntos de $A \cap A'$ en los que f sea derivable. Si A_1 no es vacío, podemos considerar la función $x \mapsto f'(x)$ que a cada punto de A_1 hace corresponder la derivada de f en dicho punto. Se obtiene así la *función derivada* de f, que se denota por f'. Simbólicamente:

$$f' : A_1 \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \qquad \forall x \in A_1$$

Obsérvese que, con la notación usada para la derivada en un punto, no hacíamos otra cosa que anticipar la definición de la función derivada. Debemos siempre distinguir claramente entre la derivada de una función en un punto, que es un número real, y la función derivada.

Resaltamos que no tiene sentido discutir la derivabilidad de una función en puntos donde no esté definida, ni en puntos aislados de su conjunto de definición. El caso más interesante se presenta cuando el conjunto de definición es un intervalo no trivial $I \subset \mathbb{R}$. Sabemos que $I \subset I'$, luego para funciones definidas en I tiene sentido discutir su derivabilidad en todo punto de I. Vamos con la primera observación importante sobre el concepto de derivada:

- *Si $f : A \to \mathbb{R}$ es derivable en un punto $a \in A \cap A'$, entonces f es continua en a.*

En efecto, basta observar que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} \left[f(a) + \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) \right] = f(a).$ ■

El carácter local del concepto de límite funcional se transmite a la noción de derivada. La comprobación del siguiente enunciado es inmediata.

- *Sean $f : A \to \mathbb{R}$ una función, $B \subset A$ y $b \in B \cap B' \subset A \cap A'$.*
  - (i) *Si f es derivable en b, entonces $f|_B$ es derivable en b, con $(f|_B)'(b) = f'(b)$.*
  - (ii) *Si $f|_B$ es derivable en b y existe $\delta > 0$ tal que $]b - \delta, b + \delta[\cap A \subset B$, entonces f es derivable en b.*

Como en otras situaciones previas, el carácter local del concepto de derivada suele aplicarse fijando un $r > 0$ conveniente y tomando $B =]b - r, b + r[\cap A$, con lo que f es derivable en b si, y sólo si, lo es $f|_B$, en cuyo caso ambas derivadas coinciden.

3.2. Derivadas laterales

Usando límites laterales llegamos lógicamente a las derivadas laterales. Recordemos que el estudio de los límites laterales de una función en un punto sólo tiene interés cuando el conjunto de definición de la función se acumula a la derecha y también a la izquierda del punto en cuestión. Por tanto, para estudiar las derivadas laterales nos limitamos al único caso que interesa.

Notación. Para evitar repeticiones, en la presente sección, fijamos una función $f : A \to \mathbb{R}$, un punto $a \in A$ y suponemos que el conjunto A se acumula a la izquierda y también a la derecha del punto a. Seguiremos usando la función f_a que apareció en la definición de derivada.

Diremos que f es *derivable por la izquierda* en a cuando la función f_a tenga límite por la izquierda en a, límite que recibe el nombre de *derivada por la izquierda* de f en a y se denota por $f'(a-)$. Análogamente, f será *derivable por la derecha* en a cuando f_a tenga límite por la derecha en a, que será la *derivada por la derecha* de f en a y se denotará por $f'(a+)$. Simbólicamente:

$$f'(a-) = \lim_{x \to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{y} \quad f'(a+) = \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Para enunciar con brevedad los resultados que siguen, sin riesgo de confusión, debemos tener presente que si, para un $L \in \mathbb{R}$, escribimos $f'(a) = L$, estaremos afirmando que f es derivable en el punto a con derivada L. El mismo criterio se aplica a las derivadas laterales.

La relación entre el límite ordinario y los límites laterales nos da directamente la relación entre derivada y derivadas laterales. La recogemos en el siguiente resultado, cuya demostración es evidente.

- *Para $L \in \mathbb{R}$ se tiene: $f'(a) = L \iff f'(a-) = f'(a+) = L$.*

Las derivadas laterales permiten precisar mejor la relación entre derivabilidad y continuidad, como muestra el siguiente enunciado, cuya demostración también es evidente:

- *Si f es derivable por la izquierda en a, entonces $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = f(a)$. Análogamente, si f es derivable por la derecha en a, se tendrá $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a)$. Por tanto, si f es derivable por la izquierda y por la derecha en a, entonces f es continua en a (aunque las derivadas laterales no coincidan).*

3.3. Primeros ejemplos

Veamos ya algunos ejemplos muy sencillos de funciones derivables y no derivables. Fijados $a, b, c \in \mathbb{R}$, consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Para $x, y \in \mathbb{R}$, con $y \neq x$, tenemos claramente

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{a(y^2 - x^2) + b(y - x)}{y - x} = a(y + x) + b$$

luego f es derivable en $\mathbb{R}$ con $f'(x) = 2ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$. En particular:

- *Toda función constante en $\mathbb{R}$ es derivable en $\mathbb{R}$ con derivada idénticamente nula. La función identidad es derivable en $\mathbb{R}$ con derivada constantemente igual a 1.*

Obviamente, para tener ejemplos de funciones no derivables basta pensar en funciones que no sean continuas. Veamos un ejemplo de una función que admite derivadas laterales, y en particular es continua en un punto, pero no es derivable en ese punto.

Consideremos la función valor absoluto, $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $V(x) = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. El carácter local del concepto de derivada nos dice claramente que $V'(a) = 1$ para todo $a \in \mathbb{R}^+$, y que $V'(a) = -1$ para todo $a \in \mathbb{R}^-$. Para $a = 0$ tenemos

$$\lim_{x \to 0-} V_0(x) = \lim_{x \to 0-} \frac{|x|}{x} = -1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0+} V_0(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{|x|}{x} = 1$$

luego $V'(0-) = -1$, $V'(0+) = 1$ y V no es derivable en 0. La función derivada de V es la función *signo*:

$$\operatorname{sgn} = V' : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \quad \operatorname{sgn} x = V'(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

3.4. Aproximación por polinomios

Vamos a caracterizar el concepto de derivada de una forma que clarifica su significado y resulta útil para futuras generalizaciones.

Si una función $f : A \to \mathbb{R}$ es derivable en un punto $a \in A \cap A'$, tenemos evidentemente

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} = 0 \tag{1}$$

Así pues, la función $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

verifica que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{x-a} = 0 \tag{3}$$

Observamos que P viene definida por un polinomio de grado 1 si $f'(a) \neq 0$, y es constante cuando $f'(a) = 0$. Para englobar ambos casos diremos que P es una función polinómica, o simplemente un polinomio, *de primer orden*.

Así pues, intuitivamente podemos decir que una función derivable en un punto admite una "buena" aproximación, cerca de dicho punto, por un polinomio de primer orden. La "bondad" de dicha aproximación se refleja en la igualdad (3), que se puede interpretar diciendo que la diferencia $f - P$ tiende a cero "rápidamente" al acercarnos al punto a.

De hecho veremos enseguida que ningún otro polinomio de primer orden puede cumplir la condición (3), luego podemos decir que P es el único polinomio de primer orden que aproxima "bien" a la función f cerca del punto a.

Sea pues Q un polinomio de primer orden verificando que $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - Q(x)}{x-a} = 0$, y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $Q(x) = \alpha + \beta(x-a)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Suponiendo sólo que f es continua en a, probaremos que f es derivable en a y que $Q = P$, es decir, $\alpha = f(a)$ y $\beta = f'(a)$.

De la hipótesis sobre Q se sigue claramente que $\displaystyle\lim_{x \to a} \big(f(x) - Q(x)\big) = 0$, con lo que la continuidad de f en a nos da directamente $f(a) = \alpha$. Para $x \in A \setminus \{a\}$, tenemos entonces

$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \frac{f(x) - f(a) - \beta(x-a)}{x-a} + \beta = \frac{f(x) - Q(x)}{x-a} + \beta$$

y aplicando de nuevo la hipótesis sobre Q obtenemos que f es derivable en el punto a con $f'(a) = \beta$, de donde $Q = P$, como se quería. Resumimos los razonamientos anteriores:

- *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función continua en un punto $a \in A \cap A'$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

  (i) La función f es derivable en a.
  (ii) Existe un polinomio de primer orden P que verifica (3).

  En caso de que se cumplan (i) y (ii), el polinomio P es único y viene dado por (2), equivalentemente, verifica que $P(a) = f(a)$ y $P'(a) = f'(a)$.

3.5. La diferencial de una función

Volvemos a la igualdad (1), que verificaba la derivada de una función en un punto. Usando la caracterización $(\varepsilon-\delta)$ del límite que en ella aparece, la reformulamos como sigue:

- *Sea* $f: A \to \mathbb{R}$ *una función derivable en un punto* $a \in A \cap A'$. *Para cada* $\varepsilon > 0$, *puede encontrarse un* $\delta > 0$ *que verifica lo siguiente:*

$$x \in A\,, \quad |x-a| < \delta \implies |f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)| \leqslant \varepsilon\,|x-a| \tag{4}$$

Obsérvese que usamos una desigualdad no estricta para admitir el caso $x = a$. Tenemos así una caracterización $(\varepsilon-\delta)$ de la derivada. Su interpretación no es ninguna sorpresa: el número $f'(a)(x-a)$ nos da una buena aproximación de la diferencia $f(x)-f(a)$ cuando x esté muy cerca de a. Lo interesante es que $f'(a)(x-a)$ depende *linealmente* de $x-a$.

Recordemos algunas ideas sobre aplicaciones lineales de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que son bien conocidas. Fijado $\alpha \in \mathbb{R}$, definiendo $\varphi(x) = \alpha x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ obtenemos una función $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que es una aplicación *lineal* cuando vemos a $\mathbb{R}$ como espacio vectorial (de dimensión 1) sobre sí mismo, puesto que evidentemente se tiene $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$ y $\varphi(x+y) = \varphi(x)+\varphi(y)$ para cualesquiera $\lambda, x, y \in \mathbb{R}$. Recíprocamente, si $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una aplicación lineal, basta tomar $\alpha = \varphi(1)$ para tener $\varphi(x) = \alpha x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Podemos por tanto ver cada número real como aplicación lineal de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, consistente en multiplicar por él, y obtenemos así todas las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Al usar esta idea para la derivada de una función en un punto aparece el concepto de diferencial.

Si una función $f: A \to \mathbb{R}$ es derivable en un punto $a \in A \cap A'$, decimos también que f es *diferenciable* en a y llamamos *diferencial* de f en a a la aplicación lineal $df(a): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$df(a)(h) = f'(a)\,h \quad \forall\, h \in \mathbb{R}$$

Por ejemplo, tomando $f(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$, sabemos que f es diferenciable en todo punto $a \in \mathbb{R}$ con $df(a)(h) = 2ah$ para todo $h \in \mathbb{R}$.

Así pues, decir que una función es diferenciable equivale a decir que es derivable, pero hay un matiz: la derivada de una función en un punto es un número real, mientras que la diferencial en ese punto es la aplicación lineal de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que consiste en multiplicar por dicho número. Al hablar de la diferencial, simplemente estamos resaltando que al aplicarla a la diferencia $x-a$ obtenemos $df(a)(x-a)$ que aproxima la diferencia $f(x)-f(a)$; podríamos decir que la diferencial controla, aproximadamente, la relación entre esas diferencias, de ahí su nombre. De hecho, vamos a ver que controla diferencias más generales, con la misma aproximación.

Siempre bajo la hipótesis de que $f: A \to \mathbb{R}$ sea diferenciable en $a \in A \cap A'$, dado $\varepsilon > 0$ tenemos $\delta > 0$ verificando (4). Para $x, y \in A$, con $a - \delta < x \leqslant a \leqslant y < a + \delta$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\big|f(y) - f(x) - df(a)(y-x)\big| &= \big|f(y) - f(x) - df(a)[(y-a)-(x-a)]\big| \\
&= \big|\big(f(y) - f(a) - df(a)(y-a)\big) - \big(f(x) - f(a) - df(a)(x-a)\big)\big| \\
&\leqslant \varepsilon\,|y-a| + \varepsilon\,|x-a| = \varepsilon\,(y-x)
\end{aligned}$$

donde hemos resaltado la linealidad de la diferencial. Hemos probado lo siguiente:

- *Sea* $f: A \to \mathbb{R}$ *una función diferenciable en un punto* $a \in A \cap A'$*. Entonces, para cada* $\varepsilon > 0$ *puede encontrarse* $\delta > 0$ *tal que:*

$$x, y \in A\,, \;\; a - \delta < x \leqslant a \leqslant y < a + \delta \;\Longrightarrow\; |f(y) - f(x) - df(a)(y - x)| \leqslant \varepsilon\,(y - x)$$

De nuevo la diferencia $f(y) - f(x)$ se aproxima por $df(a)(y - x)$ pero ahora puede ser $x \neq a$ e $y \neq a$, siempre que el conjunto A lo permita. En el caso no trivial $y - x \neq 0$ podemos dividir ambos miembros de la última desigualdad por $y - x$ y escribir

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} - f'(a) \right| \leqslant \varepsilon$$

Expliquemos una notación que clásicamente se usaba, y aún se usa en algunos contextos, para trabajar con la diferencial o la derivada. Partimos de la definición de la diferencial de una función $f: A \to \mathbb{R}$ en un punto $a \in A \cap A'$ donde f sea diferenciable:

$$df(a)(h) \,=\, f'(a)\,h \quad \forall\, h \in \mathbb{R} \tag{5}$$

Cuando f es la función identidad en $\mathbb{R}$, esta definición tiene sentido en cualquier punto $x \in \mathbb{R}$ y, como tenemos $f(x) = x$, $f'(x) = 1$, la igualdad anterior toma la forma

$$dx(h) \,=\, h \quad \forall\, h \in \mathbb{R} \tag{6}$$

que no nos debe sorprender, dx (léase diferencial de x) es la diferencial de la función identidad en cualquier punto $x \in \mathbb{R}$, que obviamente es siempre la propia función identidad: $h \mapsto h$.

Volviendo ahora al caso general, podemos sustituir (6) en el segundo miembro de (5) para obtener que $df(a)(h) \,=\, f'(a)\,dx(h)$ para todo $h \in \mathbb{R}$, es decir,

$$df(a) \,=\, f'(a)\,dx$$

Obsérvese que esta es una igualdad entre funciones: la función $df(a)$ es el producto del número real $f'(a)$ por la función dx. De manera ya puramente formal, podemos escribir

$$f'(a) \,=\, \frac{df(a)}{dx}$$

que es la notación clásica para la derivada de una función en un punto. Se suele leer diciendo que $f'(a)$ es la derivada de la función f con respecto a la variable x en el punto a, lo que no es ninguna novedad. Llevando el formalismo aún más lejos, como la igualdad anterior será válida en todo punto a donde f sea derivable, obtenemos la notación clásica para la función derivada:

$$f' \,=\, \frac{df}{dx}$$

Ambas notaciones proceden de las ideas intuitivas que llevaron a descubrir el concepto de derivada y que más adelante comentaremos.

3.6. Interpretación geométrica de la derivada

Para hacer esta interpretación nos pondremos en una situación más intuitiva que la que hasta ahora venimos manejando. Consideramos un intervalo no trivial $I \subset \mathbb{R}$ y una función $f : I \to \mathbb{R}$ que suponemos continua, con lo que su gráfica, $\mathrm{Gr} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I,\ y = f(x)\}$, se interpreta como una curva en el plano. En Geometría se dice que $\mathrm{Gr} f$ es la *curva en forma explícita*, definida por la ecuación $y = f(x)$, con $x \in I$.

Dado un punto $x_0 \in I$, sabemos que la derivabilidad de f en x_0 equivale a la existencia de un único polinomio de primer orden P que verifica

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P(x)}{x - x_0} = 0 \tag{7}$$

De hecho, escribiendo $y_0 = f(x_0)$, sabemos que $P(x) = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por tanto, la gráfica de P es la recta de ecuación

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \tag{8}$$

única recta que pasa por el punto $p_0 = (x_0, y_0)$ y tiene *pendiente* $f'(x_0)$.

La igualdad (7) se interpretó diciendo que P es el único polinomio de primer orden que aproxima "bien" a la función f cerca del punto x_0. Geométricamente, podemos interpretar dicha igualdad diciendo que, de todas las rectas que pasan por el punto p_0, la de ecuación (8) es la única que aproxima o se ajusta "bien" a la gráfica de f cerca del punto p_0.

Pues bien, la recta de ecuación (8), es decir, la única recta que pasa por el punto p_0 y tiene pendiente $f'(x_0)$, recibe el nombre de *recta tangente* a la gráfica de f en el punto p_0. Tenemos así la interpretación geométrica de la derivada: $f'(x_0)$ es la *pendiente de la recta tangente* a la gráfica de f en el punto $p_0 = \big(x_0, f(x_0)\big)$.

Esta definición de recta tangente enfatiza su principal característica: se ajusta a la gráfica de f de una forma muy concreta. Pero conviene poner de manifiesto que esta definición está de acuerdo con la idea intuitiva de recta tangente. Los resultados relacionados con la diferencial de la función f nos permitirán hacerlo de forma muy general.

Consideremos dos puntos distintos $x_1, x_2 \in I$ tales que $x_1 \leqslant x_0 \leqslant x_2$ y pongamos $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$. La recta que pasa por los puntos $p_1 = (x_1, y_1)$ y $p_2 = (x_2, y_2)$ tiene ecuación

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

y es la recta *secante* a la gráfica de f que pasa por p_1 y p_2. Ahora bien, podemos conseguir que la pendiente de esta recta esté tan cerca como queramos de $f'(x_0)$, sin más que tomar x_1 y x_2 suficientemente cerca de x_0. Más concretamente, sabemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, si $x_0 - \delta < x_1$ y $x_2 < x_0 + \delta$ se tiene

$$\left| \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - f'(x_0) \right| = \left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$$

Esta afirmación se corresponde perfectamente con la intuición geométrica: cuando los puntos p_1 y p_2 se acercan a p_0, la recta secante a la gráfica de f, que pasa por p_1 y p_2, tiende a coincidir con la recta tangente a dicha gráfica en el punto p_0.

La situación es muy sencilla cuando $y_0 = x_0 = 0$, pues entonces la recta tangente pasa por el origen de coordenadas y su ecuación es simplemente $y = f'(0)x$, luego es la gráfica de la diferencial de f en 0. Geométricamente, la hipótesis $y_0 = x_0 = 0$ no resta generalidad, pues siempre podemos conseguirla tomando el punto (x_0, y_0) como origen de coordenadas o, lo que es lo mismo, llevando el punto (x_0, y_0) al origen, mediante la traslación $(x,y) \mapsto (x - x_0, y - y_0)$. Se intuye claramente que el concepto de derivada debe conservarse por traslaciones, pues la tangente a una curva no debe depender del punto del plano que hayamos elegido como origen de coordenadas. Tiene interés comprobar que efectivamente es así, y lo haremos en general, sin suponer que nuestra función esté definida en un intervalo, ni sea continua.

Para una función $f : A \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in A \cap A'$, tomamos $B = \{x - x_0 : x \in A\}$ y definimos $g : B \to \mathbb{R}$ por $g(h) = f(x_0 + h) - f(x_0)$ para todo $h \in B$, con lo que $0 \in B \cap B'$ y $g(0) = 0$. Vemos que $\operatorname{Gr} g = \{(x - x_0, y - y_0) : (x,y) \in \operatorname{Gr} f\}$ donde $y_0 = f(x_0)$, es decir, la traslación $(x,y) \mapsto (x - x_0, y - y_0)$ nos lleva de la gráfica de f a la de g. Queremos comprobar que la derivada de f en x_0 coincide con la de g en 0, como la intuición geométrica indicaba.

Para ello aprovechamos lógicamente que el concepto de limite es invariante por traslaciones. Más concretamente, para $L \in \mathbb{R}$ tenemos:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L \iff \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L \iff \lim_{h \to 0} \frac{g(h)}{h} = L$$

La segunda equivalencia es obvia, teniendo en cuenta la definición de g. Para la primera hemos usado el cambio de variable $x = x_0 + h$ en una dirección, y $h = x - x_0$ en la otra, teniendo en cuenta que $x \to x_0$ equivale a $h \to 0$, así como que $x \neq x_0$ equivale a $h \neq 0$. Así pues, vemos que f es derivable en x_0 si, y sólo si, g es derivable en 0, en cuyo caso se tiene $f(x_0) = g'(0)$, como queríamos. Destacamos finalmente la igualdad $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, que a veces resulta útil para calcular derivadas.

3.7. Interpretación física de la derivada

Razonamos de forma similar a como lo hemos hecho para la interpretación geométrica. Consideramos un intervalo no trivial $I \subset \mathbb{R}$ y una función $f : I \to \mathbb{R}$, que ahora suponemos derivable en I. Podemos pensar que f describe un movimiento sobre la recta, así que I es un intervalo de tiempo y, para cada $t \in I$, $f(t)$ nos da la posición del móvil en el instante t. En Física se dice que la igualdad $x = f(t)$ es la *ecuación del movimiento*.

Pues bien, vamos a ver que, para cada $t \in I$, la derivada $f'(t)$ puede interpretarse como la *velocidad* del móvil en el instante t, una velocidad *instantánea*. Por tanto, la función derivada, $f' : I \to \mathbb{R}$, describe la velocidad del móvil como función del tiempo: $v = f'(t)$.

Para justificar esta afirmación, fijado $t \in I$ tomamos dos instantes distintos $t_0, t_1 \in I$, tales que $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, es decir $t \in [t_0, t_1] \subset I$. Entonces el cociente $\frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$ se interpreta como la velocidad media del móvil durante el intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$. Pero sabemos que este cociente tiende a coincidir con $f'(t)$ cuando t_0 y t_1 se acercan a t y esto explica que $f'(t)$ pueda y deba entenderse como la velocidad en el instante t.

La forma en que la velocidad media en el intervalo $[t_0,t_1]$ tiende a $f'(t)$ cuando la longitud del intervalo tiende a cero, pero siempre con la condición $t \in [t_0,t_1]$, se expresa como ya hemos hecho antes: para cada $\varepsilon > 0$, sabemos que existe $\delta > 0$ tal que

$$t_0,t_1 \in I,\ t_0 \neq t_1,\ t-\delta < t_0 \leqslant t \leqslant t_1 < t+\delta \implies \left| \frac{f(t_1)-f(t_0)}{t_1-t_0} - f'(t) \right| < \varepsilon$$

Naturalmente, se puede hacer una interpretación análoga cuando la función f describe la variación de cualquier magnitud física Q durante un intervalo de tiempo I, de forma que, en cada instante $t \in I$ la magnitud Q tiene el valor $f(t)$. Entonces $f'(t)$ será la velocidad de variación de Q en el instante t.

En general, f puede describir la dependencia entre dos magnitudes físicas P y Q, es decir, el intervalo I nos da los posibles valores de la magnitud *independiente* P y, para cada $x \in I$, $f(x)$ es el valor que toma la magnitud *dependiente* Q, cuando P toma el valor x. Entonces $f'(x)$ se interpreta como la rapidez con la que cambiará el valor de Q cuando P varíe a partir del valor x. Suele decirse que $f'(x)$ es la *razón de cambio* de Q con respecto a P, para el valor x de esta última.

Aprovechando la interpretación que acabamos de hacer, veamos ahora la forma en que históricamente se llegó al concepto de derivada y su interpretación física como velocidad o razón de cambio. Tras no poca controversia histórica sobre a quién habría que dar prioridad, hoy se considera que tales ideas fueron descubiertas independientemente por dos eminentes científicos: el inglés Isaac Newton (1643-1727) y el alemán Gottfried Leibniz (1646-1716).

En lo que sigue, olvidamos las magnitudes físicas P y Q y nos quedamos simplemente con una variable x, que toma valores en el intervalo I, y otra variable y, ligada a x por la ecuación $y = f(x)$. Esto entronca perfectamente con la interpretación geométrica, puesto que $y = f(x)$ es también la ecuación que describe la gráfica de f como una curva en el plano.

Representemos por Δx, la diferencia entre dos valores $x_0, x \in I$ de la variable independiente, con $x \neq x_0$, es decir, $\Delta x = x - x_0$. Aunque la expresión Δx se lee "incremento" de x, no se excluye la posibilidad de que sea $\Delta x < 0$. Sean $y_0 = f(x_0)$ e $y = f(x)$ los correspondientes valores de la variable dependiente y pongamos también $\Delta y = y - y_0$. Entonces, la razón de cambio media será el cociente de incrementos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \quad \text{de donde} \quad f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Esta igualdad no es más que la definición de derivada con una notación intuitiva, pero no muy conveniente, pues en el límite no se especifica el punto x_0 en el que se calcula la derivada. Con esta notación, la continuidad de f se expresaría diciendo que $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, lo cual tiene el mismo inconveniente.

Cuando nacía el cálculo diferencial, la noción de límite no estaba disponible y se acudía a la idea de "infinitésimo", hoy en desuso, aunque quede cierta nostalgia. Un infinitésimo sería algo así como un "número" no nulo, cuyo valor absoluto es "infinitamente pequeño", menor que cualquier número real positivo, pero esto es claramente incompatible con el concepto actual de número real y su interpretación como punto de una recta.

Newton y Leibniz consideraban un cambio “infinitesimal” en la variable x, denotado por dx, y denominado “diferencial” de x. Ello produce un cambio también “infinitesimal” dy en la variable y (nótese que aquí está implícita la continuidad de y como función de x). Puesto que dx es “infinitamente pequeño”, cabe pensar en la razón de cambio como una constante, que vendrá dada por el cociente $dy/dx = df(x)/dx$.

Así pues, Newton y Leibniz no podían entender la derivada como límite de un cociente, la veían como un “cociente de infinitésimos”, no era el límite de un cociente entre diferencias, sino un “cociente de diferenciales”. El Cálculo Infinitesimal era puro formalismo, sólo los expertos podían practicarlo sin cometer errores. Veamos por ejemplo la derivada de la función $y = x^2$:

$$y + dy = (x + dx)^2 = x^2 + 2x\,dx + (dx)^2 \;\Rightarrow\; dy/dx = 2x + dx \sim 2x$$

Obsérvese que dx se desprecia unas veces sí y otras no, sin un criterio claro.

De lo dicho se conserva hoy la idea intuitiva, acorde con las interpretaciones geométrica y física. En ocasiones se sigue usando la notación de Leibniz: $df(a)/dx$ para la derivada en un punto, o df/dx para la función derivada. Con la actual noción de diferencial, las igualdades $f'(a) = df(a)/dx$ y $f' = df/dx$ tienen perfecto sentido. La nueva notación, $f'(a)$ o f', se debe a J. L. de Lagrange (1736-1813), que hizo brillantes aportaciones al Cálculo Diferencial. El camino hacia la formalización definitiva de los conceptos de límite y derivada, fue iniciado por el matemático francés A. L. Cauchy (1789-1857).

3.8. Ejercicios

1. Para una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$, se considera la función $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ dada por
$$g(h) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$
Probar que, si f es derivable en a, g tiene límite en 0. ¿Es cierto el recíproco?

2. Probar que, si $f : A \to \mathbb{R}$ es derivable en $a \in A \cap A'$, existen $M, \delta \in \mathbb{R}^+$ tales que
$$x \in A\,,\;\; |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| \leqslant M\,|x - a|$$
¿Es cierta esta afirmación suponiendo solamente que f es continua en el punto a?

3. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por
$$f(x) = x^2 + ax + b\,, \quad g(x) = x^3 - c \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
Determinar los valores de a, b, c que hacen que las gráficas de f y g pasen por el punto $(1, 2)$ y tengan la misma recta tangente en dicho punto.

4. Estudiar la derivabilidad de la función parte entera.

5. Si $f, g :\to \mathbb{R}$ son dos funciones derivables en $\mathbb{R}$, estudiar la derivabilidad de las funciones $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por
$$\varphi(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+\,, \qquad \varphi(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^-$$
$$\psi(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{Q}\,, \qquad \psi(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

Tema 4

Reglas de derivación

Aclarado el concepto de derivada, pasamos a desarrollar las reglas básicas para el cálculo de derivadas o, lo que viene a ser lo mismo, a analizar la estabilidad de las funciones derivables por las operaciones usuales con funciones reales de variable real.

4.1. Sumas, productos y cocientes

Empezamos calculando la derivada de una suma o producto de funciones derivables:

- *Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$ funciones derivables en un punto $a \in A \cap A'$. Entonces:*
  (i) *La función $f+g$ es derivable en a, con $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.*
  (ii) *La función fg es derivable en a con $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.*
  (iii) *Para $\lambda \in \mathbb{R}$, la función λf es derivable en a con $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.*

(i). Para $x \in A \setminus \{a\}$ tenemos claramente

$$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \qquad \text{de donde}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} = f'(a) + g'(a)$$

(ii). De nuevo para $x \in A \setminus \{a\}$ tenemos

$$\frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\, g(x) + f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

Puesto que g es continua en a sabemos que $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$, luego

$$\lim_{x \to a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x-a} = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

(iii). Basta aplicar (ii), tomando $g(x) = \lambda$ para todo $x \in A$, que sabemos verifica $g'(a) = 0$. ■

El resultado anterior tiene una interpretación algebraica que merece la pena resaltar. Para mayor comodidad, lo hacemos para funciones definidas en un conjunto A que no tenga puntos aislados, es decir, $A \subset A'$. Es lo que ocurre, por ejemplo, cuando A es un intervalo no trivial.

Recordemos que, para un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$, denotábamos por $\mathcal{F}(A)$ al conjunto de todas las funciones de A en $\mathbb{R}$ que, con las operaciones suma y producto bien conocidas, tiene estructura de anillo conmutativo con unidad y también puede verse como un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. En su momento usábamos también el conjunto $C(A)$ formado por todas las funciones continuas de A en $\mathbb{R}$, que era un subanillo y también un subespacio vectorial de $\mathcal{F}(A)$. Pues bien, cuando $A \subset A'$ podemos considerar el conjunto $D(A)$ formado por todas las funciones derivables en A. Sabemos que

$$D(A) \subset C(A) \subset \mathcal{F}(A)$$

y el resultado anterior nos dice que $D(A)$ también es subanillo y subespacio vectorial de $\mathcal{F}(A)$.

Fijado $a \in A$, a cada $f \in D(A)$ podemos asociar su derivada en el punto a, obteniendo la aplicación $f \mapsto f'(a)$, definida en $D(A)$ y con valores en $\mathbb{R}$. El resultado anterior nos dice que tenemos una aplicación *lineal* del espacio vectorial $D(A)$ en el cuerpo $\mathbb{R}$ sobre el que está construido, es decir, una *forma lineal* en $D(A)$. En vista de la regla para la derivada del producto de dos funciones, observamos que esta forma lineal no es un homomorfismo de anillos.

A cada función $f \in D(A)$ podemos también asociar su función derivada $f' \in \mathcal{F}(A)$, con lo que obtenemos la aplicación $f \mapsto f'$ de $D(A)$ en $\mathcal{F}(A)$. De nuevo tenemos una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$, pero no un homomorfismo de anillos.

Pasamos ahora a calcular la derivada de un cociente:

- *Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables en un punto $a \in A \cap A'$. Supongamos que $g(a) \neq 0$ y sea $B = \{x \in A : g(x) \neq 0\}$. Entonces $a \in B'$ y la función $f/g : B \to \mathbb{R}$ es derivable en a con*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\,g(a) - f(a)\,g'(a)}{g(a)^2}$$

Para demostrarlo, observamos primeramente que por ser g continua en a y $g(a) \neq 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para $x \in A$ con $|x-a| < \delta$, se tiene $|g(x) - g(a)| < |g(a)|$, y en particular $g(x) \neq 0$. Así pues $]a-\delta, a+\delta[\cap A \subset B$, lo que implica claramente que $a \in B'$. Para $x \in B \setminus \{a\}$ escribimos entonces

$$\frac{\big(f/g\big)(x) - \big(f/g\big)(a)}{x-a} = \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)(x-a)} = \frac{\big(f(x)-f(a)\big)g(a) - f(a)\big(g(x)-g(a)\big)}{g(x)g(a)(x-a)}$$

Usando que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$, junto con la derivabilidad de f y g en el punto a, concluimos:

$$\lim_{x\to a} \frac{\big(f/g\big)(x) - \big(f/g\big)(a)}{x-a} = \frac{f'(a)\,g(a) - f(a)\,g'(a)}{g(a)^2} \qquad \blacksquare$$

Podemos ya calcular la derivada de cualquier función racional. Fijado $k \in \mathbb{N}$, empezamos con la función potencia de exponente k, es decir

$$f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_k(x) = x^k \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Probaremos por inducción que $f_k \in D(\mathbb{R})$, con

$$f_k'(x) = k x^{k-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Para $k = 1$ esto ya es conocido y, supuesto cierto para $k \in \mathbb{N}$, la regla para la derivación de un producto nos dice que $f_{k+1} = f_k f_1 \in D(\mathbb{R})$, con

$$f_{k+1}'(x) = f_k'(x) f_1(x) + f_k(x) f_1'(x) = k x^{k-1} x + x^k = (k+1) x^k \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Sea ya P una función polinómica de grado $p \in \mathbb{N}$, es decir, existen $a_0, a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}$, con $a_p \neq 0$, tales que $P(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Los resultados anteriores nos dicen que P es derivable en $\mathbb{R}$ con

$$P'(x) = \sum_{k=1}^{p} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{p-1} (k+1) a_k x^k \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

así que P' vuelve a ser una función polinómica, pero de grado $p-1$.

Sea finalmente $f : A \to \mathbb{R}$ una función racional, es decir

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \forall x \in A$$

donde P y Q son polinomios y $Q(x) \neq 0$ para todo $x \in A$. Suponiendo $A \cap A' \neq \emptyset$, la regla de derivación de un cociente nos dice que f es derivable en $A \cap A'$ con

$$f'(x) = \frac{P'(x) Q(x) - P(x) Q'(x)}{Q(x)^2} \quad \forall x \in A \cap A'$$

Por ejemplo, fijado $n \in \mathbb{N}$, la función $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/x^n$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$, es derivable en $\mathbb{R}^*$ con $f'(x) = -n/x^{n+1}$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$. En general, podemos enunciar:

- *Sea $A \subset \mathbb{R}$ tal que $A \cap A' \neq \emptyset$, y $f : A \to \mathbb{R}$ una función racional. Entonces f es derivable en $A \cap A'$ y su derivada $f' : A \cap A' \to \mathbb{R}$ también es una función racional.*

4.2. Regla de la cadena

Antes de presentar nuevos ejemplos de funciones derivables, estudiamos la derivabilidad de una composición de dos funciones:

- *Sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ dos funciones verificando que $f(A) \subset B$. Sean $a \in A \cap A'$, $b = f(a)$ y supongamos que $b \in B'$. Si f es derivable en a y g es derivable en b, entonces la composición $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ es derivable en a con*

$$\big(g \circ f\big)'(a) = g'(b) f'(a) = g'\big(f(a)\big) f'(a)$$

Para la demostración, consideramos la función $\Phi : B \to \mathbb{R}$ dada por

$$\Phi(y) = \frac{g(y) - g(b)}{y - b} \quad \forall y \in B \setminus \{b\}, \quad \Phi(b) = g'(b)$$

La derivabilidad de g en el punto b, además de permitir la definición anterior, nos asegura que Φ es continua en b. Además tenemos evidentemente

$$g(y) - g(b) = \Phi(y)\,(y - b) \quad \forall y \in B$$

igualdad que se deduce de la definición de Φ cuando $y \neq b$, y es evidente cuando $y = b$.

Para $x \in A \setminus \{a\}$, tomando $y = f(x) \in f(A) \subset B$, tenemos

$$\frac{\big(g \circ f\big)(x) - \big(g \circ f\big)(a)}{x - a} = \frac{g(y) - g(b)}{x - a} = \Phi(y)\,\frac{y - b}{x - a} = \big(\Phi \circ f\big)(x)\,\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Como f es continua en a y Φ es continua en $b = f(a)$, tenemos que $\Phi \circ f$ es continua en a, es decir, $\lim\limits_{x \to a} \big(\Phi \circ f\big)(x) = \big(\Phi \circ f\big)(a) = \Phi(b) = g'(b)$. Deducimos claramente que

$$\lim_{x \to a} \frac{\big(g \circ f\big)(x) - \big(g \circ f\big)(a)}{x - a} = g'(b)\,f'(a) \qquad \blacksquare$$

Las hipótesis del resultado anterior son muy naturales, salvo exigir que $b = f(a)$ sea punto de acumulación de B. Aunque en la práctica esta hipótesis se suele verificar sin problema, conviene aclarar lo que ocurre cuando b es un punto aislado de B, con lo que no tiene sentido hablar de la derivabilidad de g en b. En tal caso, existe un $\varepsilon > 0$ tal que $]b - \varepsilon, b + \varepsilon[\, \cap B = \{b\}$. Entonces, suponiendo solamente que f es continua en a, tenemos

$$\exists \delta > 0 : x \in A, \ |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon \implies f(x) = b$$

Así pues, f es constante en el conjunto $]a - \delta, a + \delta[\, \cap A$ y, como consecuencia, lo mismo le ocurre a $g \circ f$. El carácter local del concepto de derivada nos dice que, sin hipótesis sobre g, la composición $g \circ f$ es derivable en a con $\big(g \circ f\big)'(a) = 0$. Este hecho no merece ser destacado, pues en esencia estamos calculando la derivada de una función constante.

La regla obtenida para la derivación de una composición de dos funciones se conoce como *regla de la cadena*, lo que se comprende muy bien si, con las hipótesis adecuadas que son fáciles de adivinar, escribimos la derivada de una composición de tres funciones, que claramente indica un proceso de derivación "en cadena":

$$\big(h \circ g \circ f\big)'(a) = h'\Big(g\big(f(a)\big)\Big) \cdot g'\big(f(a)\big) \cdot f'(a)$$

La regla de la cadena tiene una interpretación interesante, en términos de diferenciales. Recordemos que $df(a)$ es la aplicación lineal de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que consiste en multiplicar por $f'(a)$, y análogamente, $dg(b)$ consiste en multiplicar por $g'(b)$. Cuando componemos ambas aplicaciones, estamos multiplicando por el producto $g'(b)\,f'(a)$, y en eso consiste precisamente la aplicación lineal $d(g \circ f)(a)$. Por tanto, podemos escribir

$$d\big(g \circ f\big)(a) = dg(b) \circ df(a)$$

Así pues, la regla de la cadena nos dice que la diferencial de la composición de dos funciones es la composición de sus diferenciales, en los puntos adecuados.

4.3. Derivación de la función inversa

Veamos la última regla básica para el cálculo de derivadas:

- *Sea* $f : A \to \mathbb{R}$ *una función inyectiva, sea* $B = f(A)$ *y consideremos la función inversa* $f^{-1} : B \to \mathbb{R}$. *Supongamos que* f *es derivable en un punto* $a \in A \cap A'$ *y sea* $b = f(a)$. *Entonces* $b \in B'$ *y las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

  (i) $f'(a) \neq 0$ *y* f^{-1} *es continua en* b.

  (ii) f^{-1} *es derivable en* b.

  En caso de que se cumplan (i) *y* (ii), *se tiene:*

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(b)\big)} \tag{1}$$

Para comprobar que $b \in B'$ tomamos una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de $A \setminus \{a\}$ tal que $\{x_n\} \to a$. Por la continuidad de f en a tenemos que $\{f(x_n)\} \to b$ y por su inyectividad podemos asegurar que $f(x_n) \neq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego tenemos una sucesión de puntos de B distintos de b que converge a b, es decir, $b \in B'$. Pasamos a probar la equivalencia del enunciado.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Sea $\{b_n\}$ una sucesión de puntos de B distintos de b, con $\{b_n\} \to b$. Tomando $a_n = f^{-1}(b_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, obtenemos una sucesión $\{a_n\}$ de puntos de A distintos de a y la continuidad de f^{-1} en el punto b nos dice que $\{a_n\} \to f^{-1}(b) = a$. Por la derivabilidad de f en a obtenemos que

$$\left\{\frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a}\right\} \to f'(a), \quad \text{es decir,} \quad \left\{\frac{b_n - b}{f^{-1}(b_n) - f^{-1}(b)}\right\} \to f'(a)$$

Puesto que $f'(a) \neq 0$, tenemos

$$\left\{\frac{f^{-1}(b_n) - f^{-1}(b)}{b_n - b}\right\} \to \frac{1}{f'(a)}, \quad \text{de donde} \quad \lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{1}{f'(a)}$$

$(ii) \Rightarrow (i)$. Desde luego, si f^{-1} es derivable en b, también será continua. Para probar que $f'(a) \neq 0$, usamos la regla de la cadena, teniendo en cuenta la igualdad $\big(f^{-1} \circ f\big)(x) = x$ para todo $x \in A$. Obtenemos $1 = \big(f^{-1} \circ f\big)'(a) = \big(f^{-1}\big)'(b)\, f'(a)$, lo que claramente implica que $f'(a) \neq 0$, como queríamos. ■

Nótese que, como ha podido verse en la demostración, la igualdad (1) que relaciona las derivadas de f en a y de f^{-1} en b, cuando ambas derivadas existen, se puede siempre deducir directamente de la regla de la cadena:

$$x = f^{-1}\big(f(x)\big) \quad \forall x \in A \quad \Longrightarrow \quad 1 = \big(f^{-1} \circ f\big)'(a) = \big(f^{-1}\big)'\big(f(a)\big) \cdot f'(a)$$

También podemos usar la composición en el orden contrario:

$$y = f\big(f^{-1}(y)\big) \quad \forall y \in B \quad \Longrightarrow \quad 1 = \big(f \circ f^{-1}\big)'(b) = f'\big(f^{-1}(b)\big) \cdot \big(f^{-1}\big)'(b)$$

De nuevo, el resultado recién obtenido tiene un significado muy natural si lo leemos en términos de diferenciales. Sabemos que $df(a)$ es la aplicación lineal de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que consiste en multiplicar por $f'(a)$. La condición $f'(a) \neq 0$ hace que dicha aplicación sea biyectiva y su inversa consistirá en dividir por $f'(a)$, pero en eso consiste exactamente la diferencial $df^{-1}(b)$. Así pues, podemos escribir $df^{-1}(b) = df(a)^{-1}$, y decir que, en los puntos apropiados, la diferencial de la función inversa es la función inversa de la diferencial.

4.4. Ejemplos

Como ejemplo de aplicación de la regla de derivación de la función inversa, estudiemos la derivabilidad de la *función raíz q-ésima*, para $q \in \mathbb{N}$ fijo, con $q > 1$. Debemos distinguir dos casos, según que q sea par o impar.

Cuando q es impar, consideramos la función biyectiva

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ f(x) = x^q \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

cuya inversa es precisamente la función raíz q-ésima:

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ g(y) = f^{-1}(y) = \sqrt[q]{y} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Por una parte, sabemos que g es continua. Por otra, f es derivable en $\mathbb{R}$ con $f'(x) = qx^{q-1}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, así que la condición $f'(x) \neq 0$ se cumple si, y sólo si, $x \neq 0$. Aplicando la regla de derivación de la función inversa, obtenemos en primer lugar que g no es derivable en cero, porque $0 = f(0)$ y $f'(0) = 0$. Para $y \in \mathbb{R}^*$ tenemos $y = f(x)$ con $x \in \mathbb{R}^*$, luego $f'(x) \neq 0$ y la misma regla nos dice que g es derivable en y, con derivada bien fácil de calcular:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{qx^{q-1}} = \frac{1}{q\left(\sqrt[q]{y}\right)^{q-1}} = \frac{\sqrt[q]{y}}{qy} \quad \forall y \in \mathbb{R}^*$$

En resumen, hemos demostrado:

- *Si $q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ es impar, la función raíz q-ésima $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en $\mathbb{R}^*$ pero no es derivable en cero. Su función derivada $g' : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ viene dada por*

$$g'(x) = \frac{\sqrt[q]{x}}{qx} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

Cuando q es par, razonamos de forma análoga. Concretamente, trabajamos con la función

$$f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, \ \ f(x) = x^q \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$

De nuevo f es biyectiva y su inversa es la función raíz q-ésima:

$$g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, \ \ g(y) = f^{-1}(y) = \sqrt[q]{y} \quad \forall y \in \mathbb{R}_0^+$$

Aplicando la regla de derivación de la función inversa, exactamente igual que hicimos cuando q era impar, obtenemos que g no es derivable en el origen, pero sí es derivable en $\mathbb{R}^+$, con la misma expresión para la derivada:

- *Si* $q \in \mathbb{N}$ *es par, la función raíz q-ésima* $g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ *es derivable en* $\mathbb{R}^+$ *pero no es derivable en cero. Su función derivada* $g' : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *viene dada por*

$$g'(x) = \frac{\sqrt[q]{x}}{q\,x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Usando la regla de la cadena, podemos ahora estudiar la derivabilidad de funciones que se obtienen componiendo, por ejemplo, funciones racionales con raíces. Consideremos la función

$$f : [-1,1] \to \mathbb{R}, \;\; f(x) = \sqrt{1-x^2} \;\; \forall x \in [-1,1]$$

Tenemos claramente $f = g \circ h$ donde $h(x) = 1 - x^2$ para todo $x \in [-1,1]$ y g es la función raíz cuadrada. Para $x \in]-1,1[$ la función h es derivable en x y g es derivable en el punto $h(x) = 1 - x^2 \in \mathbb{R}^+$. Por la regla de la cadena, f es derivable en $]-1,1[$ con

$$f'(x) = g'\big(1-x^2\big)\,h'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1,1[$$

En los puntos 1 y -1 el razonamiento anterior no es válido, ya que $h(1) = h(-1) = 0$ y g no es derivable en el origen. De hecho vamos a ver que f no es derivable en esos puntos. En efecto para $x \in [-1,1[$ tenemos claramente

$$\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1} = -\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

luego $\dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} \to -\infty \;\; (x \to 1)$ y f no es derivable en el punto 1. De forma similar se comprueba que $\dfrac{f(x) - f(-1)}{x-(-1)} \to +\infty \;\; (x \to -1)$, luego f tampoco es derivable en -1.

Conviene interpretar geométricamente el resultado obtenido: la gráfica de la función f es una semicircunferencia centrada en el origen con radio 1. Hablando en términos geométricos, las rectas tangentes a dicha curva en los puntos $(-1,0)$ y $(1,0)$ serían rectas verticales y esto explica que la función f no sea derivable en los puntos -1 y 1.

Como segundo ejemplo, consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. La regla de la cadena nos dice que f es derivable en $\mathbb{R}^*$ con

$$f'(x) = \frac{\sqrt[3]{x^4}}{3x^4} \cdot 4x^3 = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

En el origen este razonamiento no es válido, porque la función raíz cúbica no es derivable en 0. Sin embargo, para $x \in \mathbb{R}^*$ tenemos claramente

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt[3]{x^4}}{x} = \sqrt[3]{x}$$

de donde deducimos que f es derivable en 0 con $f'(0) = 0$.

4.5. Ejercicios

1. Estudiar la derivabilidad de la función $f : A \to \mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos:

   (a) $A = [0,1]\,,\ f(x) = \sqrt{2x - x^2} \quad \forall x \in A$

   (b) $A = \mathbb{R}\,,\ f(x) = (x^2 - 3x + 2)\sqrt[3]{|x-2|} \quad \forall x \in A$

   (c) $A = \mathbb{R}\,,\ f(x) = \dfrac{2x}{1 + |x|} \quad \forall x \in A$

   (d) $A = \mathbb{R}\,,\ f(x) = x\sqrt[n]{|x|} \quad \forall x \in A$, donde $n \in \mathbb{N}$

   (e) $A = [0,1]\,,\ f(x) = \text{máx}\,\{x,\, 1 - x\} \quad \forall x \in A$

2. Dar un ejemplo de una función inyectiva $f : A \to \mathbb{R}$, derivable en un punto $a \in A \cap A'$ con $f'(a) \neq 0$, y tal que f^{-1} no sea derivable en el punto $f(a)$.

3. Probar que, para cada $x \in \mathbb{R}_0^+$ la ecuación $y + y^3 + y^4 = x$ tiene una única solución $y \in \mathbb{R}_0^+$. Definiendo $f(x) = y$, obtenemos una función $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$. Probar que f es derivable en $\mathbb{R}_0^+$ y calcular $f'(0)$ y $f'(3)$.

Tema 5

Teorema del Valor Medio

Abordamos en este tema el estudio del resultado más importante del cálculo diferencial en una variable, el Teorema del Valor Medio, debido al matemático italo-francés Joseph Louis de Lagrange (1736-1813), aunque se deduce fácilmente de un caso particular descubierto, sin dar una demostración, por el matemático francés Michel Rolle (1652-1719). Analizamos las primeras consecuencias directas del teorema del valor medio, que permiten obtener diversas propiedades de una función a partir de su derivada, y viceversa.

5.1. Extremos absolutos y relativos

De ahora en adelante, decimos que una función $f : A \to \mathbb{R}$ tiene un *máximo absoluto* en un punto $a \in A$, cuando $f(a)$ es el máximo del conjunto $f(A)$, es decir, $f(a) \geqslant f(x)$ para todo $x \in A$. Análogamente, cuando $f(a) \leqslant f(x)$ para todo $x \in A$, decimos que f tiene un *mínimo absoluto* en el punto a, lo que obviamente equivale a que la función $-f$ tenga un máximo absoluto en a. La expresión *extremo absoluto* se usa para referirse indistintamente a un máximo absoluto o un mínimo absoluto. Los extremos relativos aparecerán al restringir la función a un intervalo abierto contenido en su conjunto de definición.

Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, decimos que $a \in \mathbb{R}$ es un *punto interior* de A cuando existe $r > 0$ tal que $]a-r, a+r[\subset A$. Llamaremos *interior* de A y denotaremos por A° al conjunto de los puntos interiores de A, que obviamente verifica $A^\circ \subset A$, pudiendo no darse la igualdad. Para un intervalo I, observamos que I° es el correspondiente intervalo abierto. Más concretamente, si I es un intervalo no vacío y acotado, es claro que $I^\circ =]\inf I, \sup I[$; si I es una semirrecta a la derecha será $I^\circ =]\inf I, +\infty[$ y si I es una semirrecta a la izquierda, $I^\circ =]-\infty, \sup I[$. Finalmente es obvio que $\emptyset^\circ = \emptyset$, $\mathbb{R}^\circ = \mathbb{R}$.

Pues bien, decimos que la función $f : A \to \mathbb{R}$ tiene un *máximo relativo* en un punto $a \in A$ cuando existe $\delta > 0$ tal que $]a-\delta, a+\delta[\subset A$ y $f(a) \geqslant f(x)$ para todo $x \in]a-\delta, a+\delta[$. Análogamente, diremos que f tiene en a un *mínimo relativo* cuando exista $\delta > 0$ tal que $]a-\delta, a+\delta[\subset A$ y $f(a) \leqslant f(x)$ para todo $x \in]a-\delta, a+\delta[$. Se tiene en ambos casos que $a \in A^\circ$ y que la restricción de f al intervalo $]a-\delta, a+\delta[$ tiene un extremo absoluto en a.

Obviamente, f tendrá un mínimo relativo en a si, y sólo si, $-f$ tiene un máximo relativo en a. De nuevo, la expresión *extremo relativo* se usa para referirse indistintamente a un máximo o un mínimo relativo.

Para aclarar la diferencia entre extremos absolutos y relativos, consideremos por ejemplo la función $f:[0,3]\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si } 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2-x & \text{si } 1<x\leqslant 2\\ 2x-4 & \text{si } 2<x\leqslant 3\end{cases}$$

Es fácil ver que f tiene un mínimo absoluto en 0 que no es un mínimo relativo, y un máximo absoluto en 3 que tampoco es máximo relativo. Por otra parte, f tiene en 2 un mínimo absoluto que también es relativo y en 1 un máximo relativo que no es absoluto.

Queda claro por tanto que, si una función $f:A\to\mathbb{R}$ tiene un extremo absoluto en un punto $a\in A$, entonces a puede no ser un extremo relativo de f. Lo será si, y sólo si, $a\in A^\circ$. En sentido contrario, si f tiene un extremo relativo en un punto $a\in A$, puede ocurrir que f no tenga en a un extremo absoluto. De hecho, la existencia de extremos relativos de una función no implica siquiera que la función esté acotada.

Intuitivamente, es claro que si una función tiene un extremo relativo en un punto donde es derivable, la recta tangente a la gráfica de la función en el punto correspondiente debe ser horizontal. Esta idea nos lleva a la siguiente condición necesaria para que una función derivable en un punto tenga un extremo relativo en dicho punto:

- *Si una función $f:A\to\mathbb{R}$ tiene un extremo relativo en un punto $a\in A$, y f es derivable en a, entonces $f'(a)=0$.*

Para comprobarlo, suponemos primeramente que f tiene un máximo relativo en el punto a: existe $\delta>0$ tal que $]a-\delta,a+\delta[\subset A$ y $f(a)\geqslant f(x)$ para todo $x\in]a-\delta,a+\delta[$. Por tanto,

$$a-\delta<x<a \implies \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\geqslant 0 \quad \text{y} \quad a<x<a+\delta \implies \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leqslant 0$$

De la primera implicación deducimos claramente que $f'(a)\geqslant 0$, y de la segunda que $f'(a)\leqslant 0$, luego $f'(a)=0$, como se quería. En el caso de que f tenga un mínimo relativo en el punto a, usamos que $-f$ tiene un máximo relativo en a y es también derivable en a, obteniendo que $0=(-f)'(a)=-f'(a)$, es decir, $f'(a)=0$. ■

Aunque el resultado anterior se refiere solamente a extremos relativos, nos proporciona una regla práctica para optimizar una función, es decir, encontrar sus extremos absolutos, si es que los tiene. Concretamente, supongamos que una función $f:A\to\mathbb{R}$ tiene un extremo absoluto en un punto $a\in A$. Entonces a debe encontrarse en una de las tres situaciones siguientes:

(a) $a\in A\setminus A^\circ$.
(b) $a\in A^\circ$ y f no es derivable en a.
(c) $a\in A^\circ$ y f es derivable en a con $f'(a)=0$.

Pues bien, sea B el conjunto de los puntos de A que cumplan una de esas tres condiciones. Como hemos dicho, si f tiene un máximo absoluto en un punto $a \in A$, entonces $a \in B$, luego el conjunto $f(B)$ también tiene máximo y $\text{máx}\, f(B) = \text{máx}\, f(A) = f(a)$. Análogamente, si $f(A)$ tiene mínimo, también lo tendrá $f(B)$ y será $\text{mín}\, f(A) = \text{mín}\, f(B)$. En ambos casos, optimizar la función f en el conjunto A equivale a optimizarla en B. Ocurre frecuentemente en la práctica que el conjunto B es finito, con lo que el conjunto $f(B)$ también es finito y resulta bien fácil encontrar su máximo o su mínimo.

5.2. Teorema del Valor Medio

Notación. En lo que sigue van a aparecer diversas hipótesis de continuidad y derivabilidad de ciertas funciones, por lo que conviene usar una notación cómoda que abrevie los enunciados.

Recordemos que, para un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$, tal que $A \subset A'$, tenemos $D(A) \subset C(A)$ donde $C(A)$ es el conjunto de todas las funciones continuas de A en $\mathbb{R}$ y $D(A)$ el subconjunto formado por las funciones derivables en A. Si A es un intervalo cerrado y acotado, $A = [a,b]$ con $a < b$, es usual ahorrar paréntesis, escribiendo $C[a,b]$ y $D[a,b]$ en lugar de $C\big([a,b]\big)$ y $D\big([a,b]\big)$, respectivamente.

En general, cuando $A^\circ \neq \emptyset$, por ejemplo cuando A es un intervalo no trivial, para una función $f \in C(A)$ es frecuente suponer solamente que f es derivable A°. En tal caso, se suele escribir $f \in C(A) \cap D(A^\circ)$, notación que conviene explicar. Es claro que A° no tiene puntos aislados: dado $a \in A^\circ$, existe $\delta > 0$ tal que $]a-\delta, a+\delta[\subset A$, de donde se deduce fácilmente que $]a-\delta, a+\delta[\subset A^\circ$. Así pues, el conjunto $D(A^\circ)$ tiene perfecto sentido, pero sus elementos son funciones definidas en A°, mientras que los de $C(A)$ son funciones definidas en A. Ahora bien, el carácter local del concepto de derivada nos asegura que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es derivable en A° si, y sólo si, lo es su restricción a A°. Por tanto, al escribir $f \in C(A) \cap D(A^\circ)$, simplemente debemos entender que $f \in C(A)$ y que $f|_{A^\circ} \in D(A^\circ)$, cosa que tiene perfecto sentido.

Así pues, si para un intervalo no trivial I, escribimos $f \in C(I) \cap D(I^\circ)$, queremos decir que $f : I \to \mathbb{R}$ es continua en I y derivable en I°.

Para sacar provecho a la condición necesaria de extremo relativo obtenida anteriormente, basta ponerse en una situación sencilla que implica la existencia de extremos. Ello se consigue de la siguiente forma:

Teorema de Rolle. *Sean $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, y $f \in C[a,b] \cap D\big(]a,b[\big)$ tal que $f(a) = f(b)$. Entonces existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demostración. Aplicando el teorema de Weierstrass, por ser f una función continua en un intervalo cerrado y acotado, el conjunto $f\big([a,b]\big)$ tiene máximo y mínimo. Sean $c_1, c_2 \in [a,b]$ tales que $f(c_1) = \text{mín}\, f\big([a,b]\big)$ y $f(c_2) = \text{máx}\, f\big([a,b]\big)$. Si $c_1 \in]a,b[$, f tiene un mínimo relativo en c_1 y es derivable en c_1, luego $f'(c_1) = 0$ y basta tomar $c = c_1$. Análogamente, si $c_2 \in]a,b[$ bastará tomar $c = c_2$. Finalmente, si $c_1, c_2 \in \{a,b\}$, la hipótesis $f(a) = f(b)$ implica que $f(c_1) = f(c_2)$, es decir, $\text{mín}\, f\big([a,b]\big) = \text{máx}\, f\big([a,b]\big)$, pero entonces f es constante, luego $f'(c) = 0$ para todo $c \in]a,b[$. ■

Podemos ya obtener sin dificultad el principal resultado de este tema:

Teorema del Valor Medio. *Sean $a,b \in \mathbb{R}$ con $a<b$ y $f \in C[a,b] \cap D\big(]a,b[\big)$. Entonces existe $c \in]a,b[$ tal que $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$.*

Demostración. Basta considerar la función $g:[a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \big(f(b)-f(a)\big)x - (b-a)f(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

Claramente $g \in C\big([a,b]\big) \cap D\big(]a,b[\big)$ con

$$g'(x) = f(b) - f(a) - (b-a)f'(x) \qquad \forall x \in]a,b[$$

luego el problema es encontrar $c \in]a,b[$ tal que $g'(c)=0$. Pero también tenemos claramente

$$g(b) - g(a) = \big(f(b)-f(a)\big)(b-a) - (b-a)\big(f(b)-f(a)\big) = 0$$

con lo que basta aplicar a g el teorema de Rolle. ■

Los dos resultados anteriores son en realidad equivalentes, el teorema del valor medio es, como se ha visto, consecuencia inmediata del de Rolle, pero lo incluye como caso particular: si se supone $f(b)=f(a)$, la igualdad $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ implica que $f'(c)=0$.

Merece la pena comentar que las hipótesis de los dos teoremas anteriores se presentan con frecuencia, exactamente en la forma en que las hemos enunciado. Por ejemplo, si tomamos $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ para $x \in [-1,1]$, tenemos $f \in C[-1,1] \cap D\big(]-1,1[\big)$, pero $f \notin D[-1,1]$.

El teorema del valor medio tiene una clara interpretación geométrica: existe $c \in]a,b[$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $\big(c,f(c)\big)$ tiene la misma pendiente que la recta (secante a dicha gráfica) que pasa por los puntos $\big(a,f(a)\big)$ y $\big(b,f(b)\big)$, es decir, tales rectas son paralelas.

Comentemos finalmente que es frecuente aplicar al teorema del valor medio en un intervalo no trivial I, que no tiene por qué ser cerrado y acotado, usando una función $f \in C(I) \cap D(I^\circ)$. Entonces el teorema relaciona los valores de la función en dos puntos distintos cualesquiera de I con la derivada en un punto *intermedio*:

- *Sea I un intervalo no trivial y $f \in C(I) \cap D(I^\circ)$. Entonces, para cualesquiera $x,y \in I$, con $x \neq y$, podemos encontrar $c \in]\min\{x,y\}, \max\{x,y\}[$ tal que*

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y-x) \tag{1}$$

En efecto, si $x<y$, aplicamos el teorema del valor medio a la restricción de f al intervalo $[x,y]$, que es continua en dicho intervalo y derivable en su interior, ya que $]x,y[\subset I^\circ$. Obtenemos directamente $c \in]x,y[$ verificando (1). Si $x>y$, usamos la restricción de f al intervalo $[y,x]$ y obtenemos $c \in]y,x[$ tal que $f(x) - f(y) = f'(c)(x-y)$, que es la misma igualdad (1). ■

Conviene resaltar que el punto c que aparece en (1) depende obviamente de los puntos $x,y \in I$ que estemos usando. Si queremos hacer más explícita dicha dependencia, en la igualdad (1) podemos por ejemplo escribir $c_{x,y}$ en lugar de c.

5.3. Monotonía

En el resto del tema obtenemos consecuencias muy útiles del teorema del valor medio. Empezamos viendo que la derivada de una función permite caracterizar su monotonía.

- *Sea I un intervalo no trivial y $f \in C(I) \cap D(I^\circ)$. Entonces:*

$$\begin{array}{lll} f'(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in I^\circ & \Longleftrightarrow & f \text{ es creciente} \\ f'(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in I^\circ & \Longleftrightarrow & f \text{ es decreciente} \end{array}$$

Si f es creciente, para $x \in I^\circ$ e $y \in I \setminus \{x\}$ se tiene $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \geqslant 0$, de donde deducimos claramente que $f'(x) \geqslant 0$. Recíprocamente, fijamos $y,z \in I$ con $y < z$, y aplicamos el teorema del valor medio para escribir $f(z)-f(y) = f'(x)(z-y)$, donde $x \in]y,z[\subset I^\circ$. Como $f'(x) \geqslant 0$, concluimos que $f(y) \leqslant f(z)$, luego f es creciente. Queda así probada la primera equivalencia, que aplicada a la función $-f$ nos da la segunda. ■

Frecuentemente, al estudiar la monotonía de una función, podemos detectar sus extremos absolutos o relativos:

- *Consideremos un intervalo abierto $J =]a-\delta, a+\delta[$ con $a \in \mathbb{R}, \delta > 0$, y sea $f : J \to \mathbb{R}$ una función continua en J y derivable en $J \setminus \{a\}$. Si $f'(x) \geqslant 0$ para todo $x \in]a-\delta, a[$ y $f'(x) \leqslant 0$ para todo $x \in]a, a+\delta[$, entonces f tiene un máximo absoluto en el punto a. Como consecuencia, cualquier extensión de f tiene un máximo relativo en a.*

Fijamos $x \in J$ y se pueden dar dos casos. Si $x \leqslant a$, usamos que f es creciente en el intervalo $]a-\delta, a]$, para obtener $f(x) \leqslant f(a)$. Si $a \leqslant x$ usamos que f es decreciente en $[a, a+\delta[$ y llegamos a la misma conclusión. ■

Desde luego, tenemos un criterio análogo para detectar mínimos absolutos o relativos: de haber supuesto $f'(x) \leqslant 0$ para $a-\delta < x < a$ y $f'(x) \geqslant 0$ para $a < x < a+\delta$, habríamos obtenido que f tiene un mínimo absoluto, y cualquier extensión suya un mínimo relativo, en el punto a. Pero esto es tanto como aplicar el resultado anterior a la función $-f$.

Consideremos por ejemplo la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Es claro que $f \in D(\mathbb{R})$ con

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Para $x \in \mathbb{R}$ tenemos $f'(x) = 0$ si, y sólo si, $x^2 = 1$, luego 1 y -1 son los únicos puntos en los que f puede tener un extremo absoluto o relativo. De hecho, tenemos que $f'(x) \leqslant 0$ cuando $|x| \geqslant 1$ mientras que $f'(x) \geqslant 0$ para todo $x \in [-1,1]$. Aplicando el resultado anterior con $a = -1$ y $\delta = 2$, obtenemos que f tiene un mínimo relativo en -1. Tomando $a = 1$ y $\delta = 2$ vemos que f tiene un máximo relativo en 1.

Podemos hacer un estudio más completo, usando que $f(\mathbb{R}^-) \subset \mathbb{R}^-$ y que $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$. Por ser f decreciente en $]-\infty,-1]$, para $x \in]-\infty,-1]$ tenemos $f(-1) \leqslant f(x) < 0 < f(1)$. Pero f también es decreciente en $[1,+\infty[$, luego también $f(1) \geqslant f(x) > 0 > f(-1)$ para todo $x \in [1,+\infty[$. Finalmente, f es creciente en $[-1,1]$ luego $f(-1) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$ para todo $x \in [-1,1]$. En resumen, vemos que f tiene un mínimo absoluto en -1 y un máximo absoluto en 1, luego $f(\mathbb{R}) = [f(-1), f(1)] = [-1/2, 1/2]$.

Como consecuencia obvia de resultados anteriores tenemos:

- *Sea I un intervalo no trivial y $f \in C(I) \cap D(I^\circ)$. Entonces:*

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in I^\circ \quad \Longleftrightarrow \quad f \ \textit{es constante}$$

La implicación hacia la izquierda es obvia, la interesante es la otra, pues nos dice que una función derivable en un intervalo queda determinada cuando conocemos su función derivada, salvo una constante aditiva. En efecto, si I es un intervalo no trivial y $f, g \in D(I)$ verifican que $f' = g'$, entonces $g - f$ es constante: existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x) + \lambda$ para todo $x \in I$.

Trabajar en un intervalo es esencial para los resultados anteriores. Pensemos por ejemplo en la función signo: es evidente que $\operatorname{sgn} \in D(\mathbb{R}^*)$ con $\operatorname{sgn}'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$. Esta función es constante en $\mathbb{R}^+$ y también en $\mathbb{R}^-$, intervalos en los que podemos aplicar el resultado anterior, pero no es constante en $\mathbb{R}^*$.

Otro ejemplo que merece destacarse es la función parte entera. Si la restringimos a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ obtenemos una función $f : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ que es derivable en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ con $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, pero f no es constante. Para cualquier intervalo $I \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ sí podemos aplicar el resultado anterior y deducir que f es constante en I, pero esto es bastante evidente, pues ha de existir $p \in \mathbb{Z}$ tal que $I \subset]p, p+1[$, y por tanto $f(x) = E(x) = p$ para todo $x \in I$.

5.4. Monotonía estricta

Estudiando la derivada de una función, podemos de hecho obtener su monotonía estricta, aunque ahora no tendremos una equivalencia, sino solamente una implicación. Para obtenerla aplicamos una vez más el teorema del valor medio, pero lo hacemos de una forma que tendrá después consecuencias importantes:

- *Sea I un intervalo no trivial y $f \in C(I) \cap D(I^\circ)$ con $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I^\circ$. Entonces f es estrictamente monótona y, o bien $f'(x) > 0$ para todo $x \in I^\circ$, o bien $f'(x) < 0$ para todo $x \in I^\circ$.*

Para demostrarlo, tomados $x, y \in I$ con $x \neq y$, el Teorema del Valor Medio nos permite escribir $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$ donde $c \in I^\circ$. Como $f'(c) \neq 0$, tenemos $f(y) \neq f(x)$ y hemos probado que f es inyectiva. Al ser una función continua e inyectiva en el intervalo I, f es estrictamente monótona. Está claro entonces que, si f es creciente se tendrá $f'(x) > 0$ para todo $x \in I^\circ$, y si f es decreciente será $f'(x) < 0$ para todo $x \in I^\circ$. ■

A la hora de usar el resultado anterior, lo más frecuente es que conozcamos de antemano el signo de la derivada, con lo que en realidad aplicamos la siguiente consecuencia obvia:

- *Sea I un intervalo no trivial y $f \in C(I) \cap D(I^\circ)$. Entonces:*

$$\begin{array}{lcl} f'(x) > 0 \quad \forall x \in I^\circ & \Longrightarrow & f \text{ es estrictamente creciente} \\ f'(x) < 0 \quad \forall x \in I^\circ & \Longrightarrow & f \text{ es estrictamente decreciente} \end{array}$$

Es importante resaltar que las anteriores implicaciones no son reversibles. Por ejemplo, la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ para todo $x \in \mathbb{R}$ es estrictamente creciente y derivable en $\mathbb{R}$, pero su derivada se anula en un punto: $f'(0) = 0$. Por tanto, a diferencia de lo que ocurría con la monotonía, la derivada de una función nos proporciona una condición suficiente, pero no necesaria, para la monotonía estricta de dicha función.

5.5. Teorema de la función inversa

El principal resultado recién obtenido, sobre la monotonía estricta de una función derivable, incluye dos ideas importantes, que vamos a tratar con más detalle. En primer lugar, nos da una condición suficiente para la inyectividad de una función derivable en un intervalo, que enlaza perfectamente con la regla de derivación de la función inversa:

- ***Teorema de la función inversa (global):*** *Sea I un intervalo no trivial y $f \in D(I)$ con $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Entonces f es inyectiva y, poniendo $J = f(I)$, se tiene que J es un intervalo y $f^{-1} \in D(J)$ con $\big(f^{-1}\big)'(y) = 1/f'\big(f^{-1}(y)\big)$ para todo $y \in J$.*

En efecto, sabíamos ya que f es inyectiva (de hecho estrictamente monótona) luego, al ser f continua e inyectiva en el intervalo I, sabemos que J es un intervalo y que f^{-1} es continua en J, con lo que basta aplicar la regla de derivación de la función inversa. ■

Frecuentemente, la hipótesis de que la función derivada no se anule en el intervalo I no se verifica, pero disponemos de una condición poco restrictiva que permite aplicar "localmente" el teorema anterior:

- ***Teorema de la función inversa (local):*** *Sea I un intervalo no trivial, $f \in D(I)$ y $a \in I$. Supongamos que f' es continua en a, con $f'(a) \neq 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que f es inyectiva en el intervalo $I_\delta = I \cap]a-\delta, a+\delta[$. Además, si $g = f|_{I_\delta}$ y $J_\delta = f(I_\delta)$, se tiene que J_δ es un intervalo y $g^{-1} \in D(J_\delta)$ con $\big(g^{-1}\big)'(y) = 1/f'\big(g^{-1}(y)\big)$ para todo $y \in J_\delta$.*

En efecto, aplicando a la función f' la caracterización $(\varepsilon - \delta)$ de la continuidad en el punto a, con $\varepsilon = |f'(a)| > 0$, obtenemos $\delta > 0$ tal que,

$$x \in I, \ |x-a| < \delta \implies |f'(x) - f'(a)| < |f'(a)| \implies f'(x) \neq 0$$

Tomando entonces $I_\delta = I \cap]a-\delta, a+\delta[$ y $g = f|_{I_\delta}$, tenemos que g es derivable en I_δ con $g'(x) = f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I_\delta$. Basta entonces aplicar a la función g el teorema de la función inversa global. ■

5.6. Propiedades de la derivada

Como segunda aplicación importante del resultado sobre monotonía estricta, también para una función derivable en un intervalo, vemos que si la derivada toma un valor positivo y un valor negativo, entonces también deberá anularse en algún punto. Este hecho se generaliza fácilmente para obtener que la función derivada tiene la propiedad del valor intermedio. Recordemos la definición de esta propiedad:

Si I es un intervalo no trivial, una función $g : I \to \mathbb{R}$ tiene la *propiedad del valor intermedio* cuando, para todo intervalo J contenido en I, se verifica que $g(J)$ es un intervalo. El teorema del valor intermedio para funciones continuas se enuncia equivalentemente diciendo que toda función continua en un intervalo tiene la propiedad del valor intermedio.

- ***Teorema del valor intermedio para las derivadas:*** *Sea I un intervalo no trivial y sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable en I. Entonces el conjunto $f'(I) = \{f'(x) : x \in I\}$ es un intervalo. Por tanto, f' tiene la propiedad del valor intermedio.*

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que existen $a, b \in I$, y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $f'(a) < \lambda < f'(b)$ pero $\lambda \notin f'(I)$. La función $g : I \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) - \lambda x$ para todo $x \in I$, es derivable en I con $g'(x) = f'(x) - \lambda \neq 0$ para todo $x \in I$. Ocurrirá entonces que, o bien $g'(x) > 0$ para todo $x \in I$, o bien $g'(x) < 0$ para todo $x \in I$. En ambos casos tenemos una contradicción, ya que $g'(a) = f'(a) - \lambda < 0$, mientras que $g'(b) = f'(b) - \lambda > 0$.

Finalmente, dado un intervalo $J \subset I$, podemos aplicar lo ya demostrado a $f|_J$ obteniendo que $f'(J)$ es un intervalo, luego f' tiene la propiedad del valor intermedio. ■

Este resultado se conoce también como *Teorema de Darboux*, en honor al matemático francés Jean Darboux (1842-1917), que estudió a fondo la propiedad del valor intermedio.

Para comprender mejor el teorema anterior, conviene enunciarlo de forma que tanto su hipótesis como su tesis se refieran a la misma función, lo que se consigue con la siguiente definición. Dada una función $g : I \to \mathbb{R}$, donde I es un intervalo no trivial, si existe $f \in D(I)$ tal que $f' = g$ decimos que f es una *primitiva* de g, y si no es preciso especificar la función f, decimos simplemente que g *admite primitiva*. Obviamente, si a una primitiva de una función, le sumamos cualquier función constante, obtenemos otra primitiva, y recíprocamente, sabemos que la diferencia entre dos primitivas de una misma función es constante. El teorema anterior se enuncia equivalentemente diciendo que *toda función definida en un intervalo no trivial, que admita una primitiva, tiene la propiedad del valor intermedio*. Por ejemplo, es obvio que la función parte entera no tiene la propiedad del valor intermedio, luego no admite primitiva, es decir, no existe una función derivable en $\mathbb{R}$ cuya derivada coincida con la función parte entera.

Conviene anunciar la relación entre las dos familias de funciones definidas en intervalos que sabemos tienen la propiedad del valor intermedio: las continuas y las que admiten primitiva. Veremos más adelante que *toda función continua en un intervalo admite primitiva*. Por tanto, el teorema de Darboux generaliza al del valor intermedio para funciones continuas. De hecho lo generaliza estrictamente, pues encontraremos también ejemplos de funciones derivables en un intervalo cuyas derivadas no son continuas, luego una función definida en un intervalo puede admitir primitiva sin ser continua.

Terminamos este tema viendo que la derivada de una función derivable en un intervalo, aunque puede no ser continua como acabamos de decir, tampoco puede tener ciertos tipos de discontinuidades. Para obtener este resultado, empezaremos por poner de manifiesto que, en ciertas condiciones, el teorema del valor medio puede aplicarse para estudiar la derivabilidad de una función.

- *Sea J un intervalo no trivial y $f : J \to \mathbb{R}$ una función continua. Dado $a \in J$, supongamos que f es derivable en $J \setminus \{a\}$.*

  (i) *Si f' tiene límite en a, entonces f es derivable en a con $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} f'(x)$.*

  (ii) *Si f' diverge en a, entonces f no es derivable en a.*

  (iii) *Supongamos que $a \in J^\circ$. Si f' tiene límite por la izquierda en a, entonces f es derivable por la izquierda en a con $f'(a-) = \lim\limits_{x\to a-} f'(x)$. Análogamente, si f' tiene límite por la derecha en a, será $f'(a+) = \lim\limits_{x\to a+} f'(x)$. Por tanto, si f' tiene límite por la izquierda y por la derecha derecha en a, pero dichos límites no son iguales, entonces f no es derivable en a.*

  Finalmente, si f es derivable en J, entonces f' no tiene discontinuidades evitables ni de salto, y tampoco diverge, en ningún punto de J.

Para discutir si f es o no derivable en a, sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de $J \setminus \{a\}$ con $\{x_n\} \to a$. Si, para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos $J_n = [x_n, a]$ o $J_n = [a, x_n]$, según sea $x_n < a$ o $a < x_n$, tenemos claramente $J_n \subset J$ y $J_n^\circ \subset J \setminus \{a\}$, luego f es continua en J_n y derivable en J_n°. Por tanto, el teorema del valor medio nos permite escribir:

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = f'(c_n) \tag{2}$$

donde $c_n \in J_n^\circ$, es decir, $\min\{a, x_n\} < c_n < \max\{a, x_n\}$. Es claro que $0 < |c_n - a| < |x_n - a|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $\{c_n\} \to a$.

(i). Poniendo $L = \lim\limits_{x\to a} f'(x)$, tenemos que $\{f'(c_n)\} \to L$ y, en vista de (2), deducimos que f es derivable en a con $f'(a) = L$.

(ii). Ahora la sucesión $\{f'(c_n)\}$ diverge y de (2) deducimos que f no es derivable en a.

(iii). Sea $L = \lim\limits_{x\to a-} f'(x)$. Si tomamos la sucesión $\{x_n\}$ verificando que $x_n < a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tendremos también $c_n < a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo que $\{f'(c_n)\} \to L$. Esto prueba que f es derivable por la izquierda en a con $f'(a-) = L$. El razonamiento para la derivada por la derecha es análogo. Por tanto, cuando los límites laterales de f' en a existen pero no coinciden, tenemos que las derivadas laterales de f en a existen pero no coinciden, luego f no es derivable en a.

Supongamos finalmente que f es derivable en J. Si f' tuviese una discontinuidad evitable en un punto $a \in J$, entonces f' tendría límite en a, pero dicho límite no coincidiría con $f'(a)$, en contradicción con (i). Si f' divergiese en un punto $a \in J$, o tuviese una discontinuidad de salto en un punto $a \in J^\circ$, aplicando (ii) o (iii) respectivamente, tendríamos que f no es derivable en a, también contradictorio. ■

5.7. Ejercicios

1. Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, probar que $A^\circ = \emptyset$ si, y sólo si, $\mathbb{R} \setminus A$ es denso en $\mathbb{R}$.
2. Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no constante, que tenga un máximo relativo en todo punto de $\mathbb{R}$.
3. Determinar la imagen de la función $f : A \to \mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos:

   (a) $A = [0,2]$, $\quad f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + 1 \quad \forall x \in A$

   (b) $A = [-2,2]$, $\quad f(x) = 1 - \sqrt{2|x| - x^2} \quad \forall x \in A$

4. Sean $a,b,c \in \mathbb{R}$ con $a^2 < 3b$. Probar que la ecuación $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ tiene una única solución $x \in \mathbb{R}$.
5. Determinar el número de soluciones reales de la ecuación $3x^5 + 5x^3 - 30x = \alpha$, según el valor de $\alpha \in \mathbb{R}$.
6. Probar que existe una única función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verificando que

   $$2\left(f(x)\right)^3 - 3\left(f(x)\right)^2 + 6f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

   Probar también que f es derivable en $\mathbb{R}$ y calcular $f'(0)$.
7. Sea $f \in D[0,1]$ con $f(0) = 0$ y supongamos que la función f' es creciente. Probar que la función $g :]0,1] \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ para todo $x \in]0,1]$, también es creciente.
8. Sea $f \in D[0,1]$ verificando que $f(0) = 0$ y $|f'(x)| \leqslant |f(x)|$ para todo $x \in [0,1]$. Probar que $f(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$.
9. De los vértices de un cuadrado de cartón se recortan cuatro cuadrados iguales y, plegando hacia arriba los rectángulos laterales resultantes, se fabrica una caja de base cuadrada, sin tapa. ¿Cómo podemos maximizar el volumen de la caja obtenida?
10. Determinar el rectángulo de área máxima que puede inscribirse en una circunferencia.

Tema 6

Continuidad uniforme

Como paso previo para el estudio del Cálculo Integral, discutimos en este tema una nueva propiedad que pueden tener las funciones reales de variable real, la continuidad uniforme. Será evidente que toda función uniformemente continua es continua y mostraremos con ejemplos que el recíproco no es cierto. El concepto de función lipschitziana permite obtener abundantes ejemplos de funciones uniformemente continuas. Como resultado más importante, probaremos el Teorema de Heine que, bajo ciertas condiciones, nos permitirá pasar de la continuidad a la continuidad uniforme.

6.1. Funciones uniformemente continuas

Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función continua, usando la caracterización $(\varepsilon - \delta)$ de la continuidad, tenemos:

$$\forall x \in A \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ : \ y \in A, \ |y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \varepsilon \tag{1}$$

Ni que decir tiene, δ depende de ε, pero también del punto $x \in A$ considerado. Fijado $\varepsilon > 0$, unos puntos de A pueden obligarnos a tomar δ mucho más pequeño que otros dependiendo, dicho intuitivamente, de la rapidez con que varía la función f cerca del punto que consideremos. Pues bien, cuando podamos conseguir que un mismo δ, que dependerá sólo de ε, sirva para todos los puntos del conjunto A, diremos que la función f es uniformemente continua en A.

Así pues, una función $f : A \to \mathbb{R}$ es *uniformemente continua* cuando, para cada $\varepsilon > 0$, puede encontrarse $\delta > 0$ tal que, si $x, y \in A$ verifican que $|y - x| < \delta$, entonces $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Simbólicamente:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ : \ x, y \in A, \ |y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \varepsilon \tag{2}$$

Obsérvese la sutil diferencia entre (1) y (2): como ya hemos explicado, en (1) permitimos que δ dependa de x y de ε, mientras que en (2) sólo puede depender de ε. Por supuesto, si f es uniformemente continua, podemos asegurar que f es continua, pero vemos enseguida que el recíproco no es cierto, con un contraejemplo nada rebuscado.

La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por $f(x)=x^2$ para todo $x\in\mathbb{R}$, no es uniformemente continua. Si lo fuese, usando (2) con $\varepsilon=1$, existiría $\delta>0$ verificando que

$$x,y\in\mathbb{R},\ \ |y-x|<\delta \implies |y^2-x^2|<1$$

pero esto no es posible, pues fijado $n\in\mathbb{N}$ con $1/n<\delta$, tomaríamos $x=n$, $y=n+(1/n)$, para obtener $2+(1/n)^2=|y^2-x^2|<1$, flagrante contradicción. Obsérvese que la restricción de f a $\mathbb{R}^+$ tampoco es uniformemente continua. Puesto que la función identidad es uniformemente continua, vemos que el producto de dos funciones uniformemente continuas puede no serlo.

El razonamiento usado en el ejemplo anterior nos da la pista para caracterizar la continuidad uniforme mediante sucesiones:

- *Si una función $f:A\to\mathbb{R}$ es uniformemente continua, para cualesquiera dos sucesiones $\{y_n\}$ y $\{x_n\}$ de puntos de A tales que $\{y_n-x_n\}\to 0$, se tiene que $\{f(y_n)-f(x_n)\}\to 0$. Recíprocamente, si f no es uniformemente continua, existen $\varepsilon_0>0$ y dos sucesiones $\{y_n\}$ y $\{x_n\}$ de puntos de A verificando que $|y_n-x_n|<1/n$ y $|f(y_n)-f(x_n)|\geqslant\varepsilon_0$ para todo $n\in\mathbb{N}$.*

En el primer caso, dado $\varepsilon>0$, encontramos $\delta>0$ tal que, para $x,y\in A$ con $|y-x|<\delta$, se tenga $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$. Como $\{y_n-x_n\}\to 0$, existirá entonces $m\in\mathbb{N}$ tal que, para $n\geqslant m$ se tenga $|y_n-x_n|<\delta$, luego $|f(y_n)-f(x_n)|<\varepsilon$. Así pues, $\{f(y_n)-f(x_n)\}\to 0$.

Recíprocamente, si f no es uniformemente continua, existe $\varepsilon_0>0$ tal que, para cada $\delta>0$ pueden encontrarse puntos $x,y\in A$ (que dependerán de δ) verificando que $|y-x|<\delta$ pero $|f(y)-f(x)|\geqslant\varepsilon_0$. Si para cada $n\in\mathbb{N}$ usamos lo anterior con $\delta=1/n$, obtenemos las dos sucesiones $\{y_n\}$ y $\{x_n\}$ requeridas. ■

6.2. Funciones lipschitzianas

Veamos ahora una propiedad sencilla que implica la continuidad uniforme. Se dice que una función $f:A\to\mathbb{R}$ es *lipschitziana* cuando existe una constante $M\geqslant 0$ verificando que:

$$|f(y)-f(x)|\leqslant M\,|y-x| \quad \forall x,y\in A \tag{3}$$

Claramente, existe una mínima constante $M_0\geqslant 0$ que verifica la desigualdad anterior,

$$M_0=\sup\left\{\frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|}\,:\,x,y\in A,\ \ x\neq y\right\}$$

y se dice que M_0 es la *constante de Lipschitz* de f, que toma su nombre del matemático alemán Rudolph Lipschitz (1832-1903).

De la desigualdad (3) deducimos que, dado $\varepsilon>0$, tomando $\delta>0$ de forma que $\delta M<\varepsilon$, se tendrá $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$, siempre que $x,y\in A$ verifiquen $|y-x|<\delta$. Tenemos por tanto:

- *Toda función lipschitziana es uniformemente continua.*

El teorema del valor medio nos proporciona un criterio cómodo para saber si una función derivable en un intervalo es lipschitziana, basta ver si la función derivada está acotada:

- *Sea I un intervalo no trivial y $f \in C(I) \cap D(I^\circ)$. Las siguientes afirmaciones equivalen:*
  (i) *f es lipschitziana.*
  (ii) *f' está acotada, es decir, existe $M \geqslant 0$ tal que $|f'(x)| \leqslant M$ para todo $x \in I^\circ$.*
  Caso de que se verifiquen (i) y (ii), la constante de Lipschitz de f viene dada por

$$M_0 = \sup\{|f'(x)| : x \in I^\circ\} \tag{4}$$

$(i) \Rightarrow (ii)$. Si M_0 es la constante de Lipschitz de f, fijado $x \in I^\circ$ tenemos

$$\left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right| \leqslant M_0 \qquad \forall y \in I \setminus \{x\}$$

de donde deducimos claramente que $|f'(x)| \leqslant M_0$. Por tanto f' está acotada y, escribiendo $M = \sup\{|f'(x) : x \in I^\circ\}$, tenemos ya la desigualdad $M \leqslant M_0$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Definiendo M como antes, para $x, y \in I$ con $x \neq y$, el Teorema del Valor Medio nos proporciona un punto intermedio $c \in I^\circ$ que nos permite escribir

$$|f(y) - f(x)| = |f'(c)|\,|y - x| \leqslant M\,|y - x|$$

Esto prueba que f es lipschitziana con constante de Lipschitz $M_0 \leqslant M$, la otra desigualdad que necesitábamos para probar (4). ∎

En general, adivinamos una forma fácil de asegurarse la acotación de la derivada, basta suponer que la derivada es continua y trabajar en un intervalo cerrado y acotado, para poder aplicar el Teorema de Weierstrass:

- *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $f \in D[a,b]$ y supongamos que $f' \in C[a,b]$. Entonces f es lipschitziana, con constante de Lipschitz $M_0 = \max\{|f'(x)| : x \in [a,b]\}$.*

Para concluir esta breve discusión de las funciones lipschitzianas, vemos un ejemplo de una función uniformemente continua que no es lipschitziana.

- *La función raíz cuadrada es uniformemente continua, pero no es lipschitziana.*

Para probar la continuidad uniforme, tomados $x, y \in \mathbb{R}_0^+$ con $x < y$, tenemos

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} = \frac{y - x}{\sqrt{y} + \sqrt{x}} \leqslant \frac{y - x}{\sqrt{y - x}} = \sqrt{y - x}, \quad \text{es decir,} \quad |\sqrt{y} - \sqrt{x}| \leqslant \sqrt{|y - x|}$$

La última desigualdad es obvia si $y = x$, y no se altera al intercambiar x con y, luego es válida para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}_0^+$. Para conseguir que sea $|\sqrt{y} - \sqrt{x}| < \varepsilon$, bastará por tanto que se tenga $|y - x| < \varepsilon^2$.

Por otra parte, la función raíz cuadrada no es lipschitziana, ya que es continua en $\mathbb{R}_0^+$ y derivable en $\mathbb{R}^+ = (\mathbb{R}_0^+)^\circ$ pero su derivada no está acotada. ∎

6.3. Teorema de Heine

Ha quedado claro anteriormente que una función derivable con derivada continua en un intervalo cerrado y acotado es uniformemente continua, pero podemos decir algo mejor:

Teorema. *Sean $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, f es uniformemente continua.*

Demostración. Suponer que f no es uniformemente continua nos llevará a contradicción. Existe un $\varepsilon_0 > 0$ y dos sucesiones $\{y_n\}$ y $\{x_n\}$ de puntos de $[a,b]$ tales que $\{y_n - x_n\} \to 0$ pero $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por el Teorema de Bolzano-Weierstrass, la sucesión $\{x_n\}$ admite una sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ que converge a un $x \in [a,b]$. Puesto que $\{y_n - x_n\} \to 0$, tenemos también $\{y_{\sigma(n)} - x_{\sigma(n)}\} \to 0$, luego $\{y_{\sigma(n)}\} \to x$. Como f es continua en el punto x, se tendrá que $\{f(x_{\sigma(n)})\} \to f(x)$ y también $\{f(y_{\sigma(n)})\} \to f(x)$, luego $\{f(y_{\sigma(n)}) - f(x_{\sigma(n)})\} \to 0$. Esto es una contradicción, ya que $|f(y_{\sigma(n)}) - f(x_{\sigma(n)})| \geqslant \varepsilon_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Este teorema nos permite poner de manifiesto que la continuidad uniforme, a diferencia de otras propiedades como la continuidad o la derivabilidad, no tiene carácter local, suele decirse que es una *propiedad global*. En efecto, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua, su restricción a cualquier intervalo cerrado y acotado será uniformemente continua. En particular, fijado un $\delta > 0$ arbitrario, tenemos que, para cada $x \in \mathbb{R}$, la restricción de f al intervalo $[x-\delta, x+\delta]$ es uniformemente continua. Sin embargo, esto no implica que f sea uniformemente continua.

6.4. Ejercicios

1. Probar que, si $f,g : A \to \mathbb{R}$ son funciones uniformemente continuas, entonces $f+g$ también lo es. Suponiendo además que f y g están acotadas, probar que también fg es uniformemente continua.

2. Consideremos la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Dado $\rho > 0$, probar que la restricción de f a la semirrecta $[\rho, +\infty[$ es lipschitziana, mientras que la restricción al intervalo $]0,\rho]$ no es uniformemente continua.

3. Sea I un intervalo no trivial y supongamos que todas las funciones continuas definidas en I son uniformemente continuas. Probar que I es cerrado y acotado.

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y sea $\rho > 0$. Probar que, si la restricción de f al conjunto $\{x \in \mathbb{R} : |x| \geqslant \rho\}$ es uniformemente continua, entonces f es uniformemente continua.

5. Sean $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ una función. Probar que equivalen las siguientes afirmaciones:

   (i) Existe una función continua $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in]a,b[$.

   (ii) f es uniformemente continua.

Tema 7

Integración

El concepto de integral se remonta a los orígenes del Cálculo Infinitesimal, cuando Newton y Leibniz descubren que el problema del cálculo de áreas puede abordarse mediante la operación inversa de la derivación, el cálculo de primitivas, consistente en obtener una función a partir de su derivada. De esta forma, dos problemas geométricos clásicos, el cálculo de la recta tangente a una curva y el cálculo de áreas, pueden verse cada uno como inverso del otro.

La primera definición rigurosa de integral, sin basarse en la resbaladiza idea de infinitésimo, se debe a Cauchy, y es exactamente la que vamos a explicar, estudiando sólo la integral de una función continua en un intervalo cerrado y acotado. El teorema de Heine, que nos da la continuidad uniforme de una tal función, jugará un papel esencial. A decir verdad, Cauchy no distinguía entre continuidad y continuidad uniforme, tomaba como hipótesis la continuidad y usaba la continuidad uniforme, pero está claro que con ello no cometía ningún error.

Durante todo el siglo XIX se estudiaron diversas generalizaciones de la integral definida por Cauchy, sin llegar a una teoría de la integración que pudiera considerarse acabada. En 1902, el matemático francés H. Lebesgue (1875-1941) hizo ver, con su tesis doctoral, que los métodos usados hasta entonces no eran los más adecuados, e interpretando de otra forma las ideas de Leibniz, consiguió un concepto de integral mucho más general y efectivo que cualquiera de los anteriores, dando lugar a una teoría de la integración plenamente satisfactoria. Sentó así las bases para el desarrollo del Análisis Matemático, y de otras muchas disciplinas, a todo lo largo del siglo XX. Como se ha dicho, aquí estudiamos sólo la integral de Cauchy.

7.1. Breve reseña histórica

Sean $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y f una función continua en $[a,b]$. Para explicar la forma en que Leibniz entendía la integral, supongamos para simplificar que f no toma valores negativos y pensemos cómo calcular el área limitada por el eje de abscisas, la gráfica de la función f y las rectas verticales de ecuaciones $x = a$ y $x = b$. Buscamos pues el área del conjunto

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

y esta es la interpretación geométrica de la integral que vamos a estudiar.

Leibniz consideraba, para cada punto $x \in [a,b]$ un intervalo de longitud “infinitesimal” dx, de forma que entre x y $x+dx$ puede admitirse que la función f se mantiene constantemente igual a $f(x)$. Por tanto, el infinitésimo $f(x)dx$ es el área de un rectángulo, precisamente la parte del conjunto T contenido entre las rectas verticales de abscisas x y $x+dx$. “Sumando” las áreas de todos los rectángulos que se obtienen cuando x recorre el intervalo $[a,b]$, debemos obtener el área del conjunto T, de modo que Leibniz entendía la integral como una “suma infinita de infinitésimos”. En su tiempo se usaba la letra S, en lugar de la actual Σ, para representar una suma, de modo que para indicar que su integral era una suma bastante peculiar, Leibniz propone alargar la S y denotar su integral por $\int_a^b f(x)dx$, notación que hoy seguimos usando.

Nos preguntamos entonces cual es la relación entre la integral así entendida y el concepto de derivada. Supongamos que disponemos de una *primitiva* de f, es decir, que f es la derivada de otra función F. Con la notación de Leibniz, escribiríamos $f(x)dx = dF(x) = F(x+dx) - F(x)$. Entonces, al sumar todos estos infinitésimos, como si de una suma finita se tratara, vemos sumandos consecutivos que se van cancelando, con lo que la suma resulta ser

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Esta fórmula básica del cálculo integral permite calcular áreas con sorprendente facilidad. También la conocía Newton, que esencialmente la usaba como definición de la integral y la atribuía a su maestro I. Barrow (1630-1677), por lo que suele conocerse como *regla de Barrow.*

Es fácil ahora adivinar el método usado por Cauchy para formalizar rigurosamente las ideas de Newton y Leibniz: igual que con la derivada, sustituir los infinitésimos por cantidades reales que se hacen tender a cero, de forma que la integral se obtiene, no como una misteriosa suma de infinitos infinitésimos sino como límite de sumas finitas de números reales.

Para entender toda la discusión que sigue, aunque no disponemos de una noción rigurosa de área, conviene pensar en la integral como un área, con una salvedad: permitimos que nuestra función tome valores negativos, con lo que en algunos puntos su gráfica está situada por debajo del eje de abscisas. La integral se interpreta geométricamente como la diferencia entre el área del conjunto T antes descrito, y la del conjunto $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b,\ f(x) \leqslant y \leqslant 0\}$.

7.2. Definición de integral

En todo lo que sigue, fijamos $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y una función continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, es decir, $f \in C[a,b]$. Nuestro objetivo es definir la integral de f, un número real que responda a nuestra idea intuitiva de área, explicada anteriormente.

Llamaremos *partición* del intervalo $[a,b]$, a todo subconjunto finito de $[a,b]$ que contenga a los extremos a y b, y denotaremos por $\Pi[a,b]$ al conjunto de todas las particiones del intervalo $[a,b]$, un conjunto no numerable. Los puntos de una partición se numeran siempre de menor a mayor; más concretamente, si para $P \in \Pi[a,b]$, escribimos $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$, se sobreentiende que $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$. Para resaltar este convenio podemos directamente escribir:

$$P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\} \tag{5}$$

Cada partición $P \in \Pi[a,b]$ nos da claramente una estimación por defecto y otra por exceso del área en la que estamos pensando:

$$\begin{aligned} I(f,P) &= \sum_{k=1}^{n} \big(\text{mín}\, f[t_{k-1},t_k]\big)\,(t_k - t_{k-1}) \\ S(f,P) &= \sum_{k=1}^{n} \big(\text{máx}\, f[t_{k-1},t_k]\big)\,(t_k - t_{k-1}) \end{aligned}$$

Decimos que $I(f,P)$ es la *suma inferior* y $S(f,P)$ la *suma superior* de f para la partición P.

También podemos, para $k = 1,2,\ldots,n$, elegir un punto $x_k \in [t_{k-1},t_k]$ y considerar la suma

$$\alpha = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,(t_k - t_{k-1})$$

Decimos que α es *una suma integral* de f para la partición P. Observamos que las sumas superior e inferior son sumas integrales, de hecho son respectivamente la máxima y la mínima, pues toda suma integral α verifica evidentemente que $I(f,P) \leqslant \alpha \leqslant S(f,P)$.

Como ya se ha dicho, el área que buscamos debe mayorar a todas las sumas inferiores que se obtienen al variar la partición P, y minorar a todas las sumas superiores. Por tanto, el siguiente resultado es un primer paso hacia nuestro objetivo.

Lema. *El conjunto* $\big\{I(f,P) : P \in \Pi[a,b]\big\}$*, de todas las sumas inferiores, está mayorado, el conjunto* $\big\{S(f,P) : P \in \Pi[a,b]\big\}$*, de todas las sumas superiores, está minorado y se tiene:*

$$\sup\{I(f,P) : P \in \Pi[a,b]\} \leqslant \text{ínf}\,\big\{S(f,P) : P \in \Pi[a,b]\big\} \tag{6}$$

Demostración. Consiste en observar como varían las sumas superior e inferior al cambiar la partición, empezando por añadirle un solo punto.

Sea pues $P \in \Pi[a,b]$ dada por (5), sea $P' = P \cup \{c\}$ con $c \in]a,b[\setminus P$ y $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ tal que $t_{k-1} < c < t_k$. Al pasar de P a P', todos los sumandos de $S(f,P)$ se mantienen salvo el k-ésimo, que se sustituye por la suma de dos, con lo que tenemos:

$$\begin{aligned} S(f,P') - S(f,P) &= \big(\text{máx}\, f[t_{k-1},c]\big)\,(c - t_{k-1}) + \big(\text{máx}\, f[c,t_k]\big)\,(t_k - c) \\ &\quad - \big(\text{máx}\, f[t_{k-1},t_k]\big)\,(t_k - t_{k-1}) \\ &\leqslant \big(\text{máx}\, f[t_{k-1},t_k]\big)\,\big[(c - t_{k-1}) + (t_k - c) - (t_k - t_{k-1})\big] = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, $S(f,P') \leqslant S(f,P)$. Análogamente veríamos que $I(f,P') \geqslant I(f,P)$. En resumen, al añadir un punto a la partición considerada, la suma superior se mantiene o disminuye, y la inferior se mantiene o aumenta.

El siguiente paso es una obvia inducción: lo mismo ocurrirá al añadir un conjunto finito de puntos, pasando de una partición a cualquier otra que la contenga. Así pues, tenemos:

$$P,P' \in \Pi[a,b]\,, \;\; P \subset P' \implies I(f,P) \leqslant I(f,P') \leqslant S(f,P') \leqslant S(f,P)$$

Si ahora tomamos dos particiones cualesquiera $P,Q \in \Pi[a,b]$ tendremos:

$$I(f,P) \leqslant I(f,P\cup Q) \leqslant S(f,P\cup Q) \leqslant S(f,Q)$$

así que cualquier suma inferior es menor o igual que cualquier suma superior. Como la anterior desigualdad es cierta para toda $P \in \Pi[a,b]$, vemos que $S(f,Q)$ es un mayorante del conjunto de todas las sumas inferiores, así que dicho conjunto está mayorado y se tendrá

$$\sup\{I(f,P)\,:\,P\in\Pi[a,b]\} \leqslant S(f,Q)$$

Pero ahora esta desigualdad es cierta para toda partición $Q \in \Pi[a,b]$, luego el conjunto de todas las sumas superiores está minorado y se verifica (6). ■

Nos hemos acercado a nuestro objetivo, pues el lema anterior nos asegura la existencia de números reales que cumplen lo esperado para el área que buscamos. Pero, a poco que se piense, la desigualdad (6) no es suficiente, necesitamos la igualdad para que el número real que buscamos esté determinado de manera única.

La idea es probar que, tomando una partición suficientemente "fina", podemos conseguir que la diferencia entre las sumas superior e inferior sea tan pequeña como se quiera, lo que claramente implicará que (6) es una igualdad. Llamaremos *anchura* de una partición P, dada por (5), al número positivo $\Delta P = \max\{t_k - t_{k-1}\,:\,k=1,2,\ldots,n\}$. Intuitivamente, una partición será tanto más "fina" cuanto más pequeña sea su anchura.

Lema. *Para cada* $\varepsilon > 0$ *se puede encontrar un* $\delta > 0$ *verificando que:*

$$P\in\Pi[a,b]\,,\ \Delta P < \delta \implies S(f,P) - I(f,P) < \varepsilon \tag{7}$$

Demostración. Por el teorema de Heine, f es uniformemente continua: dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(y)-f(x)| < \varepsilon/(b-a)$ para cualesquiera $x,y\in[a,b]$ que verifiquen $|y-x|<\delta$. Sea pues $P\in\Pi[a,b]$, dada por (5), con $\Delta P<\delta$. Para $k=1,2,\ldots,n$, sean $x_k,y_k\in[t_{k-1},t_k]$ tales que $f(x_k)=\min f[t_{k-1},t_k]$ y $f(y_k)=\max f[t_{k-1},t_k]$. Como $|y_k-x_k| \leqslant t_k-t_{k-1} \leqslant \Delta P < \delta$, tenemos $f(y_k)-f(x_k) < \varepsilon/(b-a)$, de donde

$$S(f,P)-I(f,P) = \sum_{k=1}^{n}\big(f(y_k)-f(x_k)\big)(t_k-t_{k-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}(t_k-t_{k-1}) = \varepsilon \qquad ■$$

Para deducir que se da la igualdad en (6) sólo queda asegurarse de que existen particiones con anchura arbitrariamente pequeña, lo cual es bien obvio, podemos por ejemplo subdividir el intervalo $[a,b]$ en un número suficiente de intervalos de igual longitud. Más concretamente, para cada $n\in\mathbb{N}$, la partición P_n dada por

$$P_n = \{a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b\} \qquad \text{con} \qquad t_k = a+\frac{k(b-a)}{n} \quad \text{para } k=0,1,\ldots,n \tag{8}$$

verifica evidentemente que $\Delta P_n = (b-a)/n$, luego $\{\Delta P_n\}\to 0$.

Podemos ya culminar todo el trabajo realizado con el siguiente teorema, que incluye la definición de integral y otra forma más cómoda de obtenerla.

Teorema *(de la integral de Cauchy). Para $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f \in C[a,b]$, se tiene:*

$$\sup\{I(f,P) : P \in \Pi[a,b]\} = \inf\{S(f,P) : P \in \Pi[a,b]\} \tag{9}$$

Este número es, por definición, la integral de la función f en el intervalo $[a,b]$ y se denota por

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Además, si $\{P_n\}$ es una sucesión de particiones de $[a,b]$ tal que $\{\Delta P_n\} \to 0$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, α_n es cualquier suma integral de f para la partición P_n, se tiene:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \alpha_n$$

Demostración. Sea $\{P_n\}$ cualquier sucesión de particiones de $[a,b]$ que, como la que aparece en (8), verifique $\{\Delta P_n\} \to 0$. Para cada $\varepsilon > 0$ el lema anterior nos proporciona un $\delta > 0$ verificando (7). Podemos entonces encontrar $m \in \mathbb{N}$ de forma que para $n \geqslant m$ se tenga $\Delta P_n < \delta$, y por tanto, $S(f,P_n) - I(f,P_n) < \varepsilon$. Esto prueba que $\{S(f,P_n) - I(f,P_n)\} \to 0$.

El primero de los lemas anteriores nos dice también que, para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos

$$0 \leqslant \inf\{S(f,P) : P \in \Pi[a,b]\} - \sup\{I(f,P) : P \in \Pi[a,b]\} \leqslant S(f,P_n) - I(f,P_n)$$

y usando que $\{S(f,P_n) - I(f,P_n)\} \to 0$, deducimos la igualdad (9), que permite definir la integral.

De dicha definición deducimos claramente que, de nuevo para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$0 \leqslant \int_a^b f(x)\,dx - I(f,P_n) \leqslant S(f,P_n) - I(f,P_n)$$
$$0 \leqslant S(f,P_n) - \int_a^b f(x)\,dx \leqslant S(f,P_n) - I(f,P_n)$$

y usando otra vez que $\{S(f,P_n) - I(f,P_n)\} \to 0$, deducimos que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} I(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} S(f,P_n)$$

Ahora, si para cada $n \in \mathbb{N}$ elegimos una suma integral α_n de la función f para la partición P_n, tenemos

$$I(f,P_n) \leqslant \alpha_n \leqslant S(f,P_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

de donde deducimos que la sucesión $\{\alpha_n\}$ también converge a la integral. ∎

La última expresión de la integral que aparece en el teorema anterior es la más cómoda. Obtenemos la integral como límite de sumas integrales, en las que sólo aparecen los valores de la función en ciertos puntos del intervalo, que además se pueden elegir con bastante libertad. Por ejemplo, usando la sucesión de particiones definida en (8) tenemos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k\,(b-a)}{n}\right)$$

Nótese que el número real $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ aparece como límite de una sucesión de medias aritméticas de valores de f, luego puede entenderse como un *promedio* de los valores de f en el intervalo $[a,b]$. Cuando $a=0$ y $b=1$, la igualdad anterior es muy sugestiva:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

7.3. Aclaraciones sobre la notación

Merece la pena un breve comentario acerca de la notación de Leibniz $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ que aún hoy usamos para referirnos a la integral de una función continua $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

Identifica claramente la integral de una función f, que solemos llamar *integrando*, sin que haya que definir f por separado. Por una parte, la notación indica el intervalo $[a,b]$ en el que está definida dicha función, llamado *intervalo de integración*, puesto que nos da los extremos de dicho intervalo, que suelen llamarse *límites de integración*. Por otra, la notación también indica el valor $f(x)$ que toma la función f en un punto genérico $x\in[a,b]$. Por ejemplo, al escribir $\displaystyle\int_0^1 x^2dx$, queda bien claro que el intervalo de integración es $[0,1]$ y el integrando es la función $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x^2$ para todo $x\in[0,1]$.

En ocasiones, incluso debemos adivinar el valor del integrando en algún punto $x\in[a,b]$ para el que la expresión $f(x)$ no tiene en principio sentido, quedando dicho valor determinado por el requerimiento de que f sea continua. Por ejemplo, podemos escribir $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\,dx$ para referirnos a la integral en el intervalo $[0,1]$ de la función $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ para todo $x\in]0,1]$ y $f(0)=1/2$.

El símbolo dx tiene también su papel: indica la *variable de integración* x, que como hemos visto representa un punto genérico del intervalo $[a,b]$. El integrando puede depender de otras variables, que se suelen llamar *parámetros*. Claramente la integral dependerá de los valores de los parámetros, pues al cambiar dichos valores, cambia la función que se integra. Por el contrario, es absurdo decir que la integral depende de la variable de integración, que sólo sirve para que entendamos el integrando y puede ser x o cualquier otra letra que nos convenga usar. Por ello, suele decirse que la variable de integración es una *variable muda*, ya que, una vez identificada la función que se integra, no tiene nada que decir. Consideremos por ejemplo las integrales $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{t}\,dx$ y $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{t}\,dt$. En la primera, la variable de integración es x, mientras que t es un parámetro, que no podrá tomar valores negativos. Nos referimos a la integral en $[0,1]$ de la función $x\mapsto x\sqrt{t}$, múltiplo de la función identidad, pero un múltiplo distinto según el valor de t. La segunda es la integral en el mismo intervalo de la función $t\mapsto x\sqrt{t}$, múltiplo de la función raíz cuadrada, que depende obviamente del parámetro x.

Más adelante veremos también que el símbolo dx ayuda a recordar la fórmula de cambio de variable, un método muy útil para calcular integrales.

7.4. Propiedades de la integral.

Vamos a probar tres propiedades básicas de la integral recién definida, las dos primeras describen su dependencia respecto del integrando, mientras la tercera se refiere al intervalo de integración.

Linealidad. *Para* $f,g \in C[a,b]$ *y* $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$*, se tiene:*

$$\int_a^b \big(\lambda f + \mu g\big)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx \tag{10}$$

La comprobación es casi evidente teniendo en cuenta la descripción de la integral como límite de sumas integrales. Si $\{P_n\}$ es una sucesión de particiones de $[a,b]$ con $\{\Delta P_n\} \to 0$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, γ_n es una suma integral de la función $\lambda f + \mu g$ para la partición P_n, es claro que $\gamma_n = \lambda\alpha_n + \mu\beta_n$ donde α_n es una suma integral de f y β_n un suma integral de g, en ambos casos para la partición P_n. Por tanto, la sucesión $\{\alpha_n\}$ converge a la integral de f y $\{\beta_n\}$ converge a la integral de g. Para obtener (10) basta ahora pensar que

$$\int_a^b \big(\lambda f + \mu g\big)(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \gamma_n = \lambda \lim_{n\to\infty} \alpha_n + \mu \lim_{n\to\infty} \beta_n = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx \quad \blacksquare$$

Podemos ver la integración como un proceso mediante el cual, a cada función continua en un intervalo fijo $[a,b]$, asignamos un número real, la integral de dicha función. Tenemos así una aplicación definida en $C[a,b]$, con valores en $\mathbb{R}$. Llamemos $\mathcal{I}$ a dicha aplicación:

$$\mathcal{I} : C[a,b] \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{I}(f) = \int_a^b f(x)\,dx \quad \forall f \in C[a,b] \tag{11}$$

Para entender mejor las propiedades de la integral con respecto al integrando, conviene tener presente la aplicación $\mathcal{I}$. Teniendo en cuenta que $C[a,b]$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, la propiedad recién demostrada nos dice que $\mathcal{I}$ es una aplicación *lineal*. Las aplicaciones lineales de un espacio vectorial X en el cuerpo sobre el que está construido suelen llamarse *formas lineales* en X, o también *funcionales lineales* en X. Así pues, la integración nos ha permitido definir un funcional lineal $\mathcal{I}$ en el espacio vectorial $C[a,b]$.

Positividad. *Si* $f \in C[a,b]$ *y* $f(x) \geqslant 0$ *para todo* $x \in [a,b]$*, entonces* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

Esta segunda propiedad de la integral es aún más evidente, pues todas las sumas integrales de f son números reales no negativos. $\blacksquare$

En el conjunto $C[a,b]$ hay una relación de orden muy natural: para $f,g \in C[a,b]$ podemos escribir $g \leqslant f$, o también $f \geqslant g$, cuando se tenga $g(x) \leqslant f(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Es bien fácil ver que efectivamente se trata de una relación de orden, pero conviene observar que no es un orden total: para $f,g \in C[a,b]$, ambas desigualdades $f \leqslant g$ y $g \leqslant f$ pueden ser falsas.

Recordando (11) y denotando por 0 a la función constantemente igual a cero en $[a,b]$, que es el vector cero del espacio vectorial $C[a,b]$, acabamos de probar que para $f \in C[a,b]$ con $f \geqslant 0$, se tiene $\mathcal{I}(f) \geqslant 0$, por lo que suele decirse que $\mathcal{I}$ es un funcional lineal *positivo*.

La positividad de la integral, junto con la linealidad, produce interesantes consecuencias que vamos a desgranar. Si $f, g \in C[a,b]$ verifican que $g \leqslant f$ tenemos evidentemente $0 \leqslant f - g$, luego $0 \leqslant \mathcal{I}(f-g) = \mathcal{I}(f) - \mathcal{I}(g)$. Vemos que la integral *preserva el orden* o, si se quiere, es una aplicación *creciente*:

$$f, g \in C[a,b], \ \ g \leqslant f \implies \mathcal{I}(g) \leqslant \mathcal{I}(f)$$

Para cualquier $f \in C[a,b]$ tenemos evidentemente $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$, luego la preservación del orden nos dice que $-\mathcal{I}(|f|) \leqslant \mathcal{I}(f) \leqslant \mathcal{I}(|f|)$, es decir, $|\mathcal{I}(f)| \leqslant \mathcal{I}(|f|)$. Más explícitamente, tenemos

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx \qquad \forall f \in C[a,b]$$

Esta desigualdad se usa a menudo para obtener acotaciones de ciertas integrales.

Para $f \in C[a,b]$, pongamos $m = \text{mín}\, f[a,b]$ y $M = \text{máx}\, f[a,b]$. De la definición de integral, o comparando f con funciones constantes, deducimos

$$m\,(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M\,(b-a)$$

Dividiendo por $b-a$ y aplicando el teorema del valor intermedio para funciones continuas, obtenemos la que se conoce como *propiedad de la media*:

- *Si $f \in C[a,b]$, existe $c \in [a,b]$ tal que* $f(c) = \dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx.$

Recuérdese que el cociente $\dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ puede verse como el promedio de los valores de f en el intervalo $[a,b]$. La propiedad de la media nos dice que este promedio es efectivamente un valor de la función f. Tomando valores absolutos obtenemos claramente

$$f \in C[a,b] \implies \left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \big(\text{máx}\,\{|f(x)| : x \in [a,b]\}\big)\,(b-a)$$

propiedad que puede entenderse como una *continuidad* de la integral con respecto al integrando. Para explicarlo, conviene aplicarla a la diferencia entre dos funciones y obtenemos la afirmación que sigue. Para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, de hecho podemos tomar $\delta = \varepsilon/(b-a)$, tal que:

$$f, g \in C[a,b], \quad |g(x) - f(x)| < \delta \ \ \forall x \in [a,b] \implies |\mathcal{I}(f) - \mathcal{I}(g)| < \varepsilon$$

Esta propiedad evoca claramente la idea de continuidad del funcional $\mathcal{I}$.

Veamos ya la tercera propiedad básica de la integral, referente al intervalo de integración.

Aditividad. *Si $f \in C[a,b]$, para todo $c \in]a,b[$ se tiene:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Para comprobarlo tomamos una partición $P \in \Pi[a,b]$ y escribimos $P' = P \cup \{c\} = P_1 \cup P_2$ donde $P_1 = P' \cap [a,c] \in \Pi[a,c]$ y $P_2 = P' \cap [c,b] \in \Pi[c,b]$. Tenemos claramente

$$I(f,P) \leqslant I(f,P') = I(f,P_1) + I(f,P_2) \leqslant \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

donde hemos usado que las integrales de f en los intervalos $[a,c]$ y $[c,b]$ son mayorantes de los respectivos conjuntos de sumas inferiores. Puesto que la desigualdad anterior es válida para toda partición $P \in \Pi[a,b]$, usando ahora la definición de la integral en el intervalo $[a,b]$ como supremo del conjunto de las sumas inferiores, obtenemos

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Para obtener la otra desigualdad basta aplicar la anterior a la función $-f$. ■

Concluimos este estudio de las propiedades de la integral con una consecuencia sencilla, pero bastante útil:

- *Sea* $f \in C[a,b]$ *verificando que* $f \geqslant 0$, *y supongamos que existe* $x_0 \in [a,b]$ *tal que* $f(x_0) > 0$. *Entonces:* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx > 0$.

En efecto, la continuidad de f en el punto x_0 (conservación del signo), nos da un $\delta > 0$ tal que, $f(x) > 0$ para todo $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap [a,b]$. Como $\text{máx}\{x_0 - \delta, a\} < \text{mín}\{x_0 + \delta, b\}$, podemos tomar $c, d \in \mathbb{R}$ de forma que $\text{máx}\{x_0 - \delta, a\} < c < d < \text{mín}\{x_0 + \delta, b\}$, con lo que $[c,d] \subset]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap [a,b]$ y tendremos $f(x) > 0$ para todo $x \in [c,d]$. En particular será $\text{mín}\big\{f(x) : x \in [c,d]\big\} = m > 0$. Usando entonces la aditividad y positividad de la integral, concluimos que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx \geqslant \int_c^d f(x)\,dx \geqslant m(d-c) > 0$$

como queríamos demostrar. ■

Este resultado permite decir que el funcional $\mathcal{I}$ definido en (11) es *estrictamente creciente*. Para entenderlo, dadas dos funciones $f, g \in C[a,b]$ podemos escribir $g < f$ cuando se tenga $g \leqslant f$ y $g \neq f$. Debemos tener cuidado con esta notación: de $g < f$ no podemos deducir que se tenga $g(x) < f(x)$ *para todo* $x \in [a,b]$, sólo podemos asegurar que $g(x) \leqslant f(x)$ para todo $x \in [a,b]$ y que *existe* $x_0 \in [a,b]$ tal que $g(x_0) < f(x_0)$. Podemos entonces aplicar el resultado anterior a la función $f - g$, obteniendo que $0 < \displaystyle\int_a^b (f-g)(x)\,dx$. Así pues, podemos escribir:

$$f, g \in C[a,b], \;\; g < f \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{I}(g) < \mathcal{I}(f)$$

y queda claro por qué podemos decir que $\mathcal{I}$ es estrictamente creciente.

7.5. Ejercicios

1. Probar, usando directamente alguna descripción de la integral, que

$$\int_0^1 x^p\,dx = \frac{1}{p+1} \quad \forall\, p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

   Deducir que, para cualquier polinomio P, se tiene

$$\int_0^1 P'(x)\,dx = P(1) - P(0)$$

2. Probar que para $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f,g \in C[a,b]$, se tiene

$$\left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(\int_a^b f(x)^2\,dx + \int_a^b g(x)^2\,dx\right)$$

   Deducir la llamada *desigualdad de Cauchy-Schwarz*:

$$\left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f(x)^2\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)^2\,dx\right)$$

3. Sean $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f \in C[a,b]$. Para cada partición $P \in \Pi[a,b]$, denotemos por $\Sigma(f,P)$ al conjunto de todas las sumas integrales de f para la partición P. Probar que, para $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$\lambda = \int_a^b f(x)\,dx \iff \lambda \in \Sigma(f,P) \quad \forall\, P \in \Pi[a,b]$$

Tema 8

La integral indefinida

Aclarado el concepto de integral y sus principales propiedades, abordamos ahora la relación entre derivada e integral, que se sintetiza en el Teorema Fundamental del Cálculo, sin duda el resultado más importante de todo el cálculo diferencial e integral para funciones reales de una variable real. Afirma que cuando integramos una función continua en un intervalo, entre un punto fijo y otro variable, obtenemos una nueva función cuya derivada es la función de partida, mostrando así la integración como la operación inversa de la derivación. Como consecuencias fáciles de este resultado principal, obtenemos tres reglas básicas para el cálculo de integrales: la regla de Barrow, la fórmula de cambio de variable y la fórmula de integración por partes.

8.1. Preliminares

Pretendemos, como se ha dicho, estudiar la función que se obtiene al integrar una función continua $f : I \to \mathbb{R}$, donde I es un intervalo no trivial, entre un punto fijo $a \in I$ y otro variable $x \in I$. Ciertamente, cuando $a < x$ dicha integral no tiene problema, pues f es continua en el intervalo $[a,x] \subset I$. Pero debemos considerar también el caso $x \leqslant a$. La pista sobre como hacerlo nos la da la aditividad de la integral,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

que sabemos es cierta cuando $a < c < b$ siempre que $f \in C[a,b]$. Es natural intentar que esta igualdad siga siendo cierta, cualquiera que sea la posición de los puntos a, b y c, siempre que f sea continua en un intervalo que los contenga. Tomando $c = a$, vemos que la integral debe anularse cuando los límites de integración coincidan. Pero entonces, tomando $b = a < c$, vemos que la integral debe cambiar de signo cuando permutemos dichos límites.

Por tanto, para $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f \in C[a,b]$, definimos:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad \text{y} \qquad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

En realidad, para la primera de estas definiciones, que son más bien convenios de notación, la función f puede ser perfectamente arbitraria. En cierto modo, estas definiciones resultan coherentes con nuestra interpretación de la integral como un área. Por una parte, cuando $a = b$ la integral en el intervalo $[a,a]$ se interpretaría, salvo el signo de $f(a)$, como el área de un segmento, pero es coherente que un segmento tenga área nula. Por otra, cuando $a < b$ la integral en el intervalo $[a,b]$ se interpretaba como la diferencia entre las áreas de dos regiones limitadas por el eje de abscisas y la gráfica de f. Concretamente, al recorrer el intervalo desde a hacia b, del área que queda a nuestra izquierda restamos la que queda a la derecha. Pero, si recorremos el intervalo en sentido contrario, la región que quedaba a la izquierda pasa a estar a la derecha y viceversa, luego es coherente que, al permutar a y b, la integral cambie de signo.

Así pues, la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ tiene ya perfecto sentido, cualquiera que sea la relación entre los puntos a y b, siempre que f sea continua en un intervalo que contenga ambos puntos. Observemos lo que ocurre con las propiedades de la integral en esta situación más general, empezando por comprobar que la aditividad se mantiene, como pretendíamos:

- *Sea I un intervalo no trivial y $f \in C(I)$. Entonces:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad \forall\, a,b,c \in I \tag{2}$$

Para comprobarlo, usamos la definición (1) para reescribir la igualdad (2) en forma cíclica:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx = 0$$

Observamos que el primer miembro cambia de signo, luego la igualdad buscada se mantiene, cuando permutamos dos de los puntos a,b,c. Usando una o dos permutaciones, bastará que la igualdad sea cierta cuando $a \leqslant c \leqslant b$. Entonces, si $a = c$ o $c = b$ la igualdad es evidente, mientras que si $a < c < b$ tenemos el caso ya conocido. ■

De forma todavía más clara, la linealidad de la integral, también sigue siendo cierta:

- *Sea I un intervalo no trivial, $f,g \in C(I)$ y $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$. Entonces:*

$$\int_a^b \big(\lambda f + \mu g\big)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx \quad \forall a,b \in I \tag{3}$$

El caso $a < b$ es conocido y, al permutar a con b, ambos miembros de (3) cambian de signo, luego la igualdad se mantiene. El caso $a = b$ no merece comentario. ■

Obviamente tenemos que ser más cuidadosos con la positividad de la integral, no podemos esperar que un funcional creciente lo siga siendo cuando lo cambiemos de signo, habrá pasado a ser decreciente. Sin embargo, las principales consecuencias que se dedujeron de la linealidad y positividad se mantienen: la propiedad de la media y la que habíamos interpretado como una continuidad de la integral, esta última con un ligero retoque:

- *Sea I un intervalo no trivial y $f \in C(I)$. Dados $a,b \in I$, sea J el intervalo cerrado de extremos a y b, es decir, $J = \big[\text{mín}\{a,b\}, \text{máx}\{a,b\}\big]$. Entonces, existe $c \in J$ tal que:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a) \tag{4}$$

Como consecuencia se tiene: $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \big(\text{máx}\,\{|f(x)| : x \in J\}\big)\,|b-a|.$

El resultado es conocido cuando $a < b$ y obvio cuando $a = b$. Si $a > b$, aplicamos lo ya sabido para el intervalo $J = [b,a]$ y obtenemos $c \in J$ que verifica la misma igualdad (4), sólo que ambos miembros aparecen cambiados de signo. Tomando ahora valores absolutos obtenemos claramente

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = |f(c)|\,|b-a| \leqslant \big(\text{máx}\,\{|f(x)| : x \in J\}\big)\,|b-a| \qquad \blacksquare$$

Resumiendo la discusión anterior, si $f \in C(I)$, donde I es un intervalo no trivial, hemos dado sentido a la integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, para cualesquiera $a,b \in I$. En este contexto, formalmente más general que el del tema anterior, las propiedades de linealidad y aditividad de la integral se mantienen literalmente. La positividad obviamente no se mantiene, pero sí sus principales consecuencias.

8.2. Teorema Fundamental del Cálculo

Ha llegado el momento de relacionar los conceptos de derivada e integral.

Teorema. *Sea I un intervalo no trivial y $f \in C(I)$. Fijado un punto $a \in I$, consideremos la función $F : I \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad \forall x \in I \tag{5}$$

Entonces F es una primitiva de f, es decir, $F \in D(I)$ con $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

Demostración. Fijado $x \in I$, para $y \in I \setminus \{x\}$, la aditividad de la integral nos dice que

$$F(y) - F(x) = \int_a^y f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^y f(t)\,dt$$

Tomando $J_y = \big[\text{mín}\{x,y\}, \text{máx}\{x,y\}\big]$, la propiedad de la media nos da un punto $c_y \in J_y$ tal que

$$\int_x^y f(t)\,dt = f(c_y)\,(y-x), \quad \text{es decir,} \quad \frac{F(y) - F(x)}{y - x} = f(c_y)$$

Basta ahora pensar que, cuando y se acerca a x, lo mismo le ocurre a c_y, luego $f(c_y)$ tiende a coincidir con $f(x)$, ya que f es continua en el punto x.

Más concretamente, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $z \in I$ verifica que $|z - x| < \delta$, entonces $|f(z) - f(x)| < \varepsilon$. Cuando $|y - x| < \delta$, como $c_y \in J_y$, tenemos $|c_y - x| \leqslant |y - x| < \delta$, luego podemos tomar $z = c_y$ para obtener $|f(c_y) - f(x)| < \varepsilon$. Así pues, tenemos

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : y \in I,\ 0 < |y - x| < \delta \implies \left| \frac{F(y) - F(x)}{y - x} - f(x) \right| < \varepsilon$$

Hemos probado que

$$\lim_{y \to x} \frac{F(y) - F(x)}{y - x} = f(x)$$

es decir, F es derivable en el punto x con $F'(x) = f(x)$. Esto es cierto para todo $x \in I$, como queríamos demostrar. ■

Veamos la terminología que se usa frecuentemente, en relación con el teorema anterior. Suele decirse que la función F dada por (5) es la *integral indefinida de f con origen en a*. Vemos que f tiene tantas integrales indefinidas, en principio diferentes, como puntos $a \in I$ podemos elegir como origen. Sin embargo, es evidente que la diferencia entre dos integrales indefinidas de una misma función ha de ser constante.

Por supuesto, la palabra "indefinida" no significa que la función F no esté perfectamente definida, sólo nos recuerda que tenemos una integral en un intervalo variable. En contraposición, fijados $a, b \in I$, suele decirse que $\int_a^b f(x)\,dx$ es una *integral definida* de la función f, pues ahora el intervalo de integración es fijo. Obsérvese que una integral indefinida es una función, mientras que una integral definida es un número. El teorema anterior nos dice que

- *Cualquier integral indefinida de una función continua en un intervalo no trivial, es una primitiva de dicha función.*

Hemos comprobado algo que quedó anunciado al discutir la consecuencias del teorema del valor medio: *toda función continua en un intervalo no trivial admite primitiva,* es decir, es la derivada de otra función. El teorema del valor intermedio para funciones continuas (Bolzano), queda pues como caso particular del teorema del valor intermedio para las derivadas (Darboux):

- *Dada una función $f : I \to \mathbb{R}$, donde I es un intervalo no trivial, consideremos las tres afirmaciones siguientes:*

  (i) *f es continua*
  (ii) *f admite primitiva*
  (iii) *f tiene la propiedad del valor intermedio*

  Se verifica que $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$.

Observamos que la afirmación $(i) \Rightarrow (ii)$ es el teorema fundamental del cálculo, $(ii) \Rightarrow (iii)$ es el teorema del valor intermedio para las derivadas, y de ellas se deduce $(i) \Rightarrow (iii)$, que es el teorema del valor intermedio para funciones continuas.

En otro orden de ideas, el teorema fundamental de cálculo permite entender muy claramente que la derivación y la integración son procesos inversos, viendo cada uno de ellos como una auténtica aplicación de un conjunto en otro, pero teniendo en cuenta que ambos son conjuntos de funciones. Observemos en primer lugar que una primitiva de una función continua en un intervalo es siempre una función derivable con derivada continua en dicho intervalo. Vamos a introducir la notación que suele usarse para referirse a las funciones con esa propiedad.

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto sin puntos aislados, es decir, verificando que $A \subset A'$, por ejemplo, un intervalo no trivial. Decimos que una función $F : A \to \mathbb{R}$ es *de clase* C^1 en A, cuando F es derivable en A y su función derivada es continua en A. Denotaremos por $C^1(A)$ al conjunto de todas las funciones de clase C^1 en A, es decir:

$$C^1(A) = \{F \in D(A) : F' \in C(A)\}$$

Tenemos evidentemente que $C^1(A) \subset D(A) \subset C(A)$. Para $f, g \in C^1(A)$ también tenemos que $(f+g)' = f' + g' \in C(A)$ y que $(fg)' = f'g + fg' \in C(A)$, luego $C^1(A)$ hereda toda la estructura que tenía $D(A)$, es un subanillo y también un subespacio vectorial.

Pues bien, sea I un intervalo no trivial, fijemos un punto $a \in I$ y denotemos por $C_a^1(I)$ al conjunto de todas las funciones de clase C^1 en I que se anulan en el punto a:

$$C_a^1(I) = \{F \in C^1(I) : F(a) = 0\}$$

que es a su vez un subespacio vectorial y un subanillo de $C^1(I)$. Podemos ver la derivación como una aplicación de $C_a^1(I)$ en $C(I)$, concretamente:

$$\mathcal{D} : C_a^1(I) \to C(I), \quad \mathcal{D}(F) = F' \quad \forall F \in C_a^1(I)$$

Una aplicación entre dos conjuntos de funciones es lo que suele llamarse un *operador*, pues de alguna forma "opera" con una función para transformarla en otra. En nuestro caso, como ocurre muy frecuentemente, los conjuntos de funciones son espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ y sabemos que la aplicación $\mathcal{D}$, aunque no es un homomorfismo de anillos, sí es lineal, así que podemos decir que $\mathcal{D}$ es un *operador lineal*. Aplicar $\mathcal{D}$ a una función es tanto como calcular su derivada, así que suele decirse que $\mathcal{D}$ es un *operador diferencial*. Como consecuencia del teorema del valor medio, vemos que $\mathcal{D}$ es inyectivo, su núcleo es $\{0\}$, pues si $F \in C_a^1(I)$ verifica que $F' = \mathcal{D}(F) = 0$, entonces F es constante, pero $F(a) = 0$, luego $F = 0$. Obsérvese que en todo lo dicho sólo hay cálculo diferencial, la palabra "integral" aún no ha aparecido.

Por otra parte, para cada función $f \in C(I)$, podemos llamar $\mathcal{I}_a(f)$ a la integral indefinida de f con origen en el punto a. Esta definición no involucra ningún cálculo diferencial, $\mathcal{I}_a(f)$ es el resultado de un proceso de integración, aplicado a la función f. El teorema fundamental del cálculo nos dice que, para toda $f \in C(I)$ se tiene que $\mathcal{I}_a(f) \in C_a^1(I)$ con $\mathcal{D}\big(\mathcal{I}_a(f)\big) = f$.

Por tanto, en primer lugar, podemos ver $\mathcal{I}_a$ como una aplicación de $C(I)$ en $C_a^1(I)$, un operador que también es lineal, y podemos decir que se trata de un *operador integral*:

$$\mathcal{I}_a : C(I) \to C_a^1(I), \quad \big(\mathcal{I}_a(f)\big)(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \forall x \in I, \quad \forall f \in C(I)$$

Pero además, la igualdad $\mathcal{D}\big(\mathcal{I}_a(f)\big) = f$, válida para toda $f \in C(I)$, nos asegura que $\mathcal{D}$ es sobreyectivo, luego biyectivo, y su operador inverso es precisamente $\mathcal{I}_a$.

En resumen, podemos pensar que el proceso de derivación consiste en usar el operador $\mathcal{D}$, el proceso de integración consiste en usar el operador $\mathcal{I}_a$, y cada una de estos procesos es inverso del otro: $\mathcal{I}_a = \mathcal{D}^{-1}$ y $\mathcal{D} = \mathcal{I}_a^{-1}$.

8.3. Regla de Barrow

Veamos ya la principal regla práctica para el cálculo de integrales:

Regla de Barrow. *Si I es un intervalo no trivial, $f \in C(I)$ y G es una primitiva de f, entonces:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) \quad \forall a,b \in I$$

Demostración. Nótese que puede perfectamente ser $a \geqslant b$. En cualquier caso, fijado $a \in I$, sea F la integral indefinida de f con origen en a. Puesto que $F,G \in D(I)$ con $F' = f = G'$, existirá una constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) = G(x) + C$ para todo $x \in I$. Por ser $F(a) = 0$, tenemos $C = -G(a)$ de donde, para todo $b \in I$, deducimos que

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) = G(b) + C = G(b) - G(a) \qquad \blacksquare$$

Cuando se usa esta regla, es frecuente escribir: $\big[G(x)\big]_a^b = G(b) - G(a)$, notación que deja muy clara la primitiva que estamos usando. Aplicar la regla de Barrow, usando como G una integral indefinida de f, es una buena forma de perder el tiempo. La regla tiene utilidad cuando, por algún otro método, disponemos de una primitiva de la función f que no venga expresada como una integral. De entrada, cada vez que calculamos la derivada de una función, tenemos una primitiva de otra. Veamos tres ejemplos:

$$\textit{(i)} \quad \int_a^b x^{n-1}\,dx = \left[\frac{x^n}{n}\right]_a^b = \frac{b^n - a^n}{n} \quad \forall a,b \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\textit{(ii)} \quad a,b \in \mathbb{R},\ ab > 0 \implies \int_a^b \frac{dx}{x^{n+1}} = \left[\frac{-1}{nx^n}\right]_a^b = \frac{1}{na^n} - \frac{1}{nb^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\textit{(iii)} \quad \int_a^b \frac{\sqrt[n]{x}\,dx}{x} = \left[n\sqrt[n]{x}\right]_a^b = n\left(\sqrt[n]{b} - \sqrt[n]{a}\right) \quad \forall a,b \in \mathbb{R}^+,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Usando (i) y la linealidad de la integral, calculamos todas las integrales de funciones polinómicas. Dados $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$, si definimos $P(x) = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k x^k$ para todo $x \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\int_a^b P(x)\,dx = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k \int_a^b x^k\,dx = \sum_{k=0}^{p} \frac{\alpha_k(b^{k+1} - a^{k+1})}{k+1} \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$$

En (ii) hemos calculado integrales de algunas funciones racionales, pero de momento el resultado no es tan general como el obtenido para polinomios. Igualmente en (iii) tenemos algunas integrales de funciones irracionales muy concretas.

8.4. Cambio de variable

Mezclando la regla de Barrow con la regla de la cadena, obtenemos fácilmente la segunda regla básica para el cálculo de integrales.

Fórmula de cambio de variable. *Sea I un intervalo no trivial, $f \in C(I)$ y $a,b \in I$. Sea ahora J otro intervalo no trivial y $\varphi \in C^1(J)$ verificando que $\varphi(J) \subset I$, y que existen $\alpha, \beta \in J$ tales que $a = \varphi(\alpha)$ y $b = \varphi(\beta)$. Entonces:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt \tag{6}$$

En efecto, si F es una primitiva de f, la regla de la cadena nos dice que $F \circ \varphi$ es una primitiva de $(f \circ \varphi)\,\varphi'$, función que es continua en J. Aplicando dos veces la regla de Barrow, tenemos:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \big(F \circ \varphi\big)(\beta) - \big(F \circ \varphi\big)(\alpha) = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt \qquad \blacksquare$$

Obsérvese cómo la notación que usamos para la integral permite recordar muy fácilmente la fórmula de cambio de variable, pensando que la igualdad (6) se obtiene al sustituir la variable de integración x por una nueva variable t, ligadas por la igualdad $x = \varphi(t)$. Para abreviar, suele decirse simplemente que estamos haciendo la sustitución $x = \varphi(t)$. Claro está que debemos entonces sustituir $f(x)$ por $f\big(\varphi(t)\big)$, pero si recordamos la diferencial de una función, también resulta coherente sustituir dx por $\varphi'(t)\,dt$. Finalmente, el cambio en el intervalo de integración es igualmente natural: basta pensar que $x = a$ para $t = \alpha$ y $x = b$ para $t = \beta$.

Ni que decir tiene, la igualdad (6) se usa para calcular una de las dos integrales que en ella aparecen, conociendo la otra, así que la fórmula puede usarse en dos sentidos. Podría pensarse que ambas formas de usarla son equivalentes, más concretamente, que si en un sentido usamos la sustitución $x = \varphi(t)$, en sentido contrario podríamos hacer $t = \varphi^{-1}(x)$, pero esta idea es errónea: en principio φ puede no ser inyectiva y, aunque lo fuese, su derivada podría anularse, con lo que φ^{-1} no sería derivable en algunos puntos.

El camino más obvio se presenta cuando, para una función f continua en un intervalo no trivial I, conocemos una primitiva de f, que nos permite calcular su integral entre cualesquiera dos puntos $a,b \in I$. Entonces, para cualquier intervalo J y cualquier función $\varphi \in C^1(J)$ que verifique $\varphi(J) \subset I$, podemos usar la fórmula de cambio de variable para calcular la integral del producto $(f \circ \varphi)\,\varphi'$ entre cualesquiera dos puntos $\alpha, \beta \in J$, sin más que tomar $a = \varphi(\alpha)$ y $b = \varphi(\beta)$. Por ejemplo, a partir de las integrales deducidas de la regla de Barrow al final de la sección anterior, podemos ahora calcular otras muchas:

- *Si J un intervalo no trivial, $\varphi \in C^1(J)$ y $\alpha, \beta \in J$, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene:*

$$\textit{(i)} \quad \int_\alpha^\beta \big(\varphi(t)\big)^{n-1} \varphi'(t)\,dt = \frac{\big(\varphi(\beta)\big)^n - \big(\varphi(\alpha)\big)^n}{n}$$

$$\textit{(ii)} \quad \varphi(J) \subset \mathbb{R}^* \implies \int_\alpha^\beta \frac{\varphi'(t)\,dt}{\big(\varphi(t)\big)^{n+1}} = \frac{1}{n\big(\varphi(\alpha)\big)^n} - \frac{1}{n\big(\varphi(\beta)\big)^n}$$

$$\textit{(iii)} \quad \varphi(J) \subset \mathbb{R}^+ \implies \int_\alpha^\beta \frac{\sqrt[n]{\varphi(t)}\,\varphi'(t)\,dt}{\varphi(t)} = n\big(\sqrt[n]{\varphi(\beta)} - \sqrt[n]{\varphi(\alpha)}\,\big)$$

En los tres casos está muy clara la forma en que usamos la fórmula de cambio de variable. Concretamente, suponiendo que φ no es constante, podemos tomar siempre $I = \varphi(J)$, $a = \varphi(\alpha)$ y $b = \varphi(\beta)$. Entonces, tomando $f(x) = x^{n-1}$, $f(x) = 1/x^{n+1}$ y $f(x) = \sqrt[n]{x}/x$ para todo $x \in I$ obtenemos respectivamente (i), (ii) y (iii). ■

A poco que se piense, esta forma de usar la fórmula de cambio de variable aporta muy poca novedad. Si conocemos explícitamente una primitiva F de la función f, también conocemos explícitamente la función $F \circ \varphi$, que es una primitiva de $(f \circ \varphi)\varphi'$. Por ejemplo, el resultado de (i) se puede deducir directamente de la regla de Barrow:

$$\int_\alpha^\beta \big(\varphi(t)\big)^{n-1} \varphi'(t)\,dt = \left[\frac{\big(\varphi(t)\big)^n}{n}\right]_\alpha^\beta = \frac{\big(\varphi(\beta)\big)^n - \big(\varphi(\alpha)\big)^n}{n}$$

y algo similar se haría con (ii) y (iii). En la práctica, la fórmula de cambio de variable es mucho más útil cuando la usamos en el sentido inverso: nos interesa la integral que aparece en el primer miembro de (6), pero no disponemos de una primitiva de la función f, así que usamos un cambio de variable, intentando que la integral del segundo miembro sea más sencilla.

Como ejemplo ilustrativo, calculemos la integral: $\displaystyle\int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}$. Para usar la misma notación que en (6), sea f el integrando dado, que es una función continua en el intervalo $I = [-1, +\infty[$, y sean $a = -1 \in I$, $b = 8 \in I$. Esta elección de I se comprende muy bien si pensamos que las hipótesis para aplicar (6) son tanto más fáciles de comprobar cuanto más grande sea I, siempre que f sea continua en I.

Queremos hacer una sustitución que simplifique el integrando cuanto sea posible. Parece buena idea intentar conseguir que, si t va a ser la nueva variable, se tenga $\sqrt{1+\sqrt{1+x}} = t$. Ello sugiere claramente la sustitución $x = \big(t^2-1\big)^2 - 1$. Observamos que para $t = 1$ se tiene $x = -1$, mientras que para $t = 2$ será $x = 8$. Tomamos entonces

$$J = [1,2]\,, \ \ \varphi(t) = \big(t^2-1\big)^2 - 1 \quad \forall t \in J\,, \ \ \alpha = 1\,, \ \ \beta = 2$$

Nótese que ahora, las hipótesis de (6) son tanto más fáciles de conseguir cuanto más pequeño sea J. Tenemos claramente

$$\varphi \in C^1(J)\,, \ \ \varphi(J) \subset I\,, \ \ \varphi(\alpha) = a\,, \ \ \varphi(\beta) = b\,, \ \ \varphi'(t) = 4t\big(t^2-1\big) \quad \forall t \in J$$

Además, para $t \in J$ tenemos también $t^2 - 1 \geqslant 0$ y $t \geqslant 0$, de donde

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\left[(t^2-1)^2-1\right]}} = \sqrt{1+(t^2-1)} = \sqrt{t^2} = t$$

Así pues, al aplicar la fórmula de cambio de variable obtenemos

$$\int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{1+x}}} = \int_1^2 \frac{4t\left(t^2-1\right)}{t}\,dt = 4\int_1^2 \left(t^2-1\right)dt = 4\left[\frac{t^3}{3}-t\right]_1^2 = \frac{16}{3}$$

8.5. Integración por partes

Veamos un último método general para el cálculo de integrales, que resulta útil cuando el integrando es un producto de dos funciones.

Fórmula de integración por partes. *Sea I un intervalo no trivial y $f, G \in C^1(I)$. Para cualesquiera $a, b \in I$, se tiene:*

$$\int_a^b f(x)\,G'(x)\,dx = \big[f(x)\,G(x)\big]_a^b - \int_a^b f'(x)\,G(x)\,dx \tag{7}$$

Como fG es una primitiva de $f'G + fG'$ la regla de Barrow nos dice que

$$\int_a^b \big[f'(x)\,G(x) + f(x)\,G'(x)\big]\,dx = \big[f(x)\,G(x)\big]_a^b$$

con lo que la igualdad buscada se deduce de la linealidad de la integral. ■

En la práctica, la fórmula de integración por partes se usa para calcular integrales en las que el integrando es un producto de dos funciones, digamos $\displaystyle\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$, donde a y b son puntos de un intervalo no trivial I, $f \in C^1(I)$ y $g \in C(I)$. Suponiendo que, por algún otro método, dispongamos de una primitiva G de la función g, la fórmula permite calcular la integral buscada, siempre que podamos calcular la integral que aparece en el segundo miembro de (7). Así pues, relacionamos la integral buscada con otra, en la que un factor se sustituye por su derivada y el otro por una primitiva que debemos conocer de antemano.

Por ejemplo, para $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $q \in \mathbb{N}$, vamos a calcular la integral $\sigma(a,b) = \displaystyle\int_a^b x^p \sqrt[q]{x}\,dx$, con $a, b \in \mathbb{R}^+$. Aplicamos la fórmula de integración por partes, tomando $I = \mathbb{R}^+$, $f(x) = \sqrt[q]{x}$ y $g(x) = x^p$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Claramente $f \in C^1(\mathbb{R}^+)$, $g \in C(\mathbb{R}^+)$ y conocemos una primitiva de la función g, dada por $G(x) = x^{p+1}/(p+1)$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Al aplicar (7) obtenemos

$$\sigma(a,b) = \left[\sqrt[q]{x}\,\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_a^b - \int_a^b \frac{\sqrt[q]{x}}{qx}\,\frac{x^{p+1}}{p+1}\,dx = \left[\sqrt[q]{x}\,\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_a^b - \frac{1}{(p+1)\,q}\,\sigma(a,b)$$

Como ocurre con frecuencia, al usar la fórmula de integración por partes nos vuelve a aparecer la integral de partida. No obstante, de la igualdad anterior deducimos que

$$\sigma(a,b) = \frac{q}{pq+q+1}\left(b^{p+1}\sqrt[q]{b} - a^{p+1}\sqrt[q]{a}\right)$$

Nótese que el razonamiento anterior no es válido en el caso $a=0$, porque f no es derivable en 0. Sin embargo, la integral $\sigma(0,b)$ tiene perfecto sentido, pues el integrando es una función continua en $\mathbb{R}_0^+$. Podemos resolver este problema teniendo en cuenta que una integral indefinida siempre es una función continua. En nuestro caso se razona como sigue:

$$\int_0^b x^p \sqrt[q]{x}\, dx = \lim_{a\to 0} \int_a^b x^p \sqrt[q]{x}\, dx = \frac{q\, b^{p+1}\sqrt[q]{b}}{pq+q+1}$$

8.6. Ejercicios

1. Sea I un intervalo no trivial y G una primitiva de una función $f \in C(I)$. ¿Se puede asegurar que G es una integral indefinida de f?

2. Sea $f \in C(\mathbb{R})$ y $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

   $$H(x) = \int_{x^2}^{x^3} f(t)\, dt$$

   Probar que $H \in D(\mathbb{R})$ y calcular su derivada.

3. Probar que la función $g : [1,2] \to \mathbb{R}$ definida por

   $$g(y) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^4+y^4}} \qquad \forall y \in [1,2]$$

   es lipschitziana.

4. Sea I un intervalo no trivial y $f \in C(I)$. Probar las siguientes igualdades:

   (a) $$\int_{a-h}^{b-h} f(x+h)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \qquad \forall a,b \in I,\ \forall h \in \mathbb{R}$$

   (b) $$\int_{\lambda a}^{\lambda b} f\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx \qquad \forall a,b \in I,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}^*$$

5. Sea I un intervalo no trivial y $f \in C^1(I)$. Probar que, para $a,b \in I$ se tiene

   $$\int_a^b f(x)\, dx = b\, f(b) - a\, f(a) - \int_a^b x\, f'(x)\, dx$$

6. Calcular las siguientes integrales:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^5}\, dx$ (b) $\displaystyle\int_1^4 \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^3}{\sqrt{x}}\, dx$

   (c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{2}{(3-x)^2}\sqrt[3]{\frac{3-x}{3+x}}\, dx$ (d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}$

Tema 10

Funciones trigonométricas

Para estudiar esta nueva familia de funciones utilizamos una estrategia similar a la seguida en el tema anterior. Igual que ocurrió con el logaritmo, una integral indefinida de una función racional bien conocida nos llevará a la función arco-tangente, cuyas principales propiedades se probarán fácilmente, usando el teorema fundamental del cálculo y el teorema del valor medio. Su función inversa, extendida por periodicidad, será la función tangente, a partir de la cual estudiaremos con facilidad el seno, el coseno y el resto de las funciones trigonométricas.

10.1. El arco-tangente

La función $t \mapsto 1/(1+t^2)$ es continua en $\mathbb{R}$, lo que nos permite considerar su integral indefinida con origen en 0. La *función arco-tangente*, o simplemente *el arco-tangente*, es la función $\operatorname{arc\,tg} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\operatorname{arc\,tg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Su primera propiedad, clave para obtener las demás, es la siguiente:

(A.1) *El arco-tangente es la única función $f \in D(\mathbb{R})$ tal que $f(0)=0$ y $f'(x) = 1/(1+x^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por tanto, es una función estrictamente creciente.*

Es obvio que $\operatorname{arc\,tg} 0 = 0$ y el teorema fundamental del cálculo nos da $\operatorname{arc\,tg}'(x) = 1/(1+x^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Unicidad y crecimiento estricto se deducen del teorema del valor medio. ■

Podemos reducir el estudio del arco-tangente al de su restricción a $\mathbb{R}^+$:

(A.2) *El arco-tangente es una función impar:* $\operatorname{arc\,tg}(-x) = -\operatorname{arc\,tg} x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

En efecto, basta usar la sustitución $t = -s$:

$$\operatorname{arc\,tg}(-x) = \int_0^{-x} \frac{dt}{1+t^2} = -\int_0^x \frac{ds}{1+s^2} = -\operatorname{arc\,tg} x \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad ■$$

Para proseguir nuestro estudio del arco-tangente, es conveniente, aunque no imprescindible, introducir el número π. Su definición puede resultar sorprendente, pero está motivada por ideas básicas de trigonometría: $\operatorname{arc\,tg} 1$ se interpreta en trigonometría como un ángulo cuya medida, en radianes, es $\pi/4$. Así pues, por definición, *el número* π viene dado por:

$$\pi = 4 \operatorname{arc\,tg} 1 = 4 \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$$

Puesto que $1/2 \leqslant 1/\big(1+t^2\big) \leqslant 1$ para todo $t \in [0,1]$, y ambas desigualdades son estrictas para $t \in]0,1[$, tenemos $2 < \pi < 4$. A continuación relacionamos este número con la imagen del arco-tangente.

(A.3) *Se verifica que* $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg}(1/x) = \pi/2$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^+$. *Como consecuencia:*

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{2} \qquad y \qquad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arc\,tg} x = -\frac{\pi}{2}$$

Por tanto, la imagen del arco-tangente es el intervalo abierto $]-\pi/2,\pi/2[$.

Para obtener la primera igualdad observamos que, para $x \in \mathbb{R}^+$, se tiene

$$\int_1^{1/x} \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^x \frac{-ds/s^2}{1+(1/s)^2} = -\int_1^x \frac{ds}{1+s^2}$$

donde hemos hecho la sustitución $t = 1/s$ con $s \in \mathbb{R}^+$. La aditividad de la integral nos da

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg}(1/x) = 2\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} + \int_1^x \frac{dt}{1+t^2} + \int_1^{1/x} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$$

El límite en $+\infty$ se calcula ahora convirtiéndolo en un límite por la derecha en el origen:

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arc\,tg} x = \lim_{x\to 0+} \operatorname{arc\,tg}(1/x) = \lim_{x\to 0+} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x\right) = \frac{\pi}{2}$$

Para el límite en $-\infty$ basta usar que el arco-tangente es una función impar y, por tratarse de una función estrictamente creciente, su intervalo imagen no podrá ser otro que $]-\pi/2,\pi/2[$. ■

Revisamos ahora las propiedades de la función inversa del arco-tangente, a la que no vamos a dar un nombre especial, pues enseguida la extenderemos para obtener la función que realmente nos interesa.

- *Sea* $J =]-\pi/2,\pi/2[$. *La función* $\tau = \operatorname{arc\,tg}^{-1} : J \to \mathbb{R}$ *tiene las siguientes propiedades:*
  - (i) *Es derivable en* J *con* $\tau'(x) = 1 + \tau(x)^2$ *para todo* $x \in J$.
  - (ii) *Es una función impar:* $\tau(-x) = -\tau(x)$ *para todo* $x \in J$.
  - (iii) *Es una biyección estrictamente creciente de* J *sobre* $\mathbb{R}$, *con*

$$\tau(x) \to -\infty \ \ (x \to -\pi/2), \qquad \tau(x) \to +\infty \ \ (x \to \pi/2)$$

$$\tau(-\pi/4) = -1, \quad \tau(0) = 0, \quad \tau(\pi/4) = 1$$

Sólo (i) merece comentario. El teorema de la función inversa nos dice que $\tau \in D(J)$ con:

$$\tau'(x) = \frac{1}{\operatorname{arc\,tg}'\big(\tau(x)\big)} = 1 + \tau(x)^2 \qquad \forall x \in J$$ ■

10.2. La tangente

A partir de la inversa del arco-tangente vamos a definir la función tangente haciendo una “extensión por periodicidad”, es decir, repitiendo sus valores en sucesivos intervalos abiertos de longitud π. La periodicidad es una propiedad clave de varias funciones trigonométricas, así que conviene aclarar algunas ideas al respecto.

Dada una función $f : A \to \mathbb{R}$, decimos que $T \in \mathbb{R}$ es un *periodo* de f cuando se verifican las dos condiciones siguientes

$$\{x+T : x \in A\} = A \qquad \text{y} \qquad f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in A$$

Trivialmente, 0 es un periodo de cualquier función. Decimos que la función f es *periódica* cuando tiene un periodo $T \neq 0$, y si queremos explicitar dicho periodo, podemos decir que f es *T-periódica*. Es evidente que entonces $-T$ es otro periodo de f, luego toda función periódica posee un periodo positivo. De hecho, se comprueba claramente por inducción que kT también es un periodo de f, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Toda función definida en un conjunto acotado admite una *extensión por periodicidad*, es decir, se puede extender para obtener una función periódica. Trataremos solamente el caso que realmente nos interesa. Como la función $\tau = \operatorname{arc\,tg}^{-1}$ está definida en $J =]-\pi/2, \pi/2[$, un intervalo de longitud π, es natural intentar extenderla, para obtener una función π-periódica.

Como la extensión que buscamos será también $k\pi$-periódica para todo $k \in \mathbb{Z}$, deberá estar definida, al menos, en el conjunto $A_t = \{x+k\pi : x \in J,\ k \in \mathbb{Z}\}$, que se obtiene como una unión de intervalos abiertos consecutivos, concretamente los de la forma $]k\pi - (\pi/2), k\pi + (\pi/2)[$ con $k \in \mathbb{Z}$. Por tanto, $\mathbb{R} \setminus A_t$ es el conjunto formado precisamente por los extremos de dichos intervalos: los números de la forma $k\pi - (\pi/2) = (2k-1)\pi/2$ con $k \in \mathbb{Z}$. Así pues,

$$A_t = \mathbb{R} \setminus \{(2k-1)\pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$$

es el conjunto que se obtiene al suprimir de $\mathbb{R}$ los múltiplos enteros impares de $\pi/2$.

Si la extensión que buscamos estuviera definida en algún punto $y \in \mathbb{R} \setminus A_t$, debería estarlo en todos los puntos de la forma $y + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, que son todos los puntos de $\mathbb{R} \setminus A_t$, luego estaría definida en $\mathbb{R}$. Sin embargo, sabemos por ejemplo que τ diverge en $\pi/2$, luego tal extensión no podría ser continua. En resumen, si queremos extender la función τ para obtener una función π-periódica y continua, el conjunto de definición de dicha extensión no puede ser otro que A_t.

Pues bien, a poco que se piense, la definición de la extensión que buscamos es obligada: dado $x \in A_t$, bastará encontrar $k \in \mathbb{Z}$ de forma que $x - k\pi \in J$, y el valor de la nueva función en el punto x no puede ser otro que $\tau(x-k\pi)$. Pero esto es fácil, ya que:

$$-\frac{\pi}{2} < x - k\pi < \frac{\pi}{2} \iff k\pi < x + \frac{\pi}{2} < (k+1)\pi \iff k < \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} < k+1$$

Obsérvese que, por ser $x \in A_t$, tenemos que $\dfrac{x}{\pi} + \dfrac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, luego $k = E\left(\dfrac{x}{\pi} + \dfrac{1}{2}\right)$ es el único número entero que verifica la condición pedida. Queda así explicada la siguiente definición.

La *función tangente*, o simplemente *la tangente*, es la función $\operatorname{tg} : A_t \to \mathbb{R}$, definida por

$$\operatorname{tg} x = \tau\big(x - k(x)\pi\big) = \operatorname{arc\,tg}^{-1}\big(x - k(x)\,\pi\big) \quad \forall x \in A_t$$

donde $A_t = \mathbb{R} \setminus \{(2k-1)\pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$ y $k(x) = E\left(\dfrac{x}{\pi} + \dfrac{1}{2}\right)$ para todo $x \in A_t$. Hemos visto que, para cada $x \in A_t$, $k(x)$ es el único número entero que verifica $-\pi/2 < x - k(x)\,\pi < \pi/2$, y esto hace que la definición de $\operatorname{tg} x$ sea correcta.

Anotemos las propiedades que caracterizan a la función tangente:

(T.1) *La tangente es la única función π-periódica, definida en A_t, cuya restricción al intervalo $]-\pi/2, \pi/2[$ es la función inversa del arco-tangente. Queda pues determinada por:*

$$\operatorname{tg} : A_t \to \mathbb{R}, \quad \operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x \ \ \forall x \in A_t, \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x) = x \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

También conviene anotar algunos valores concretos de la tangente: para $m \in \mathbb{Z}$ tenemos claramente que $\operatorname{tg}\big(m\pi - (\pi/4)\big) = -1$, $\operatorname{tg}(m\pi) = 0$ y $\operatorname{tg}\big(m\pi + (\pi/4)\big) = 1$.

Las propiedades de la función inversa del arco-tangente, se extienden fácilmente usando la periodicidad, para obtener las correspondientes propiedades de la tangente.

(T.2) *La tangente es derivable en A_t, con $\operatorname{tg}'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ para todo $x \in A_t$.*

Podemos aplicar directamente la regla de la cadena. La función parte entera es derivable en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ con $E'(y) = 0$ para todo $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, luego la función $k : A_t \to \mathbb{Z}$ también es derivable en A_t con $k'(x) = 0$ para todo $x \in A_t$. Por tanto,

$$\operatorname{tg}'(x) = \tau'\big(x - k(x)\pi\big) = 1 + \tau\big(x - k(x)\pi\big)^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 x \quad \forall x \in A_t \qquad \blacksquare$$

(T.3) *La tangente es una función impar: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ para todo $x \in A_t$.*

En efecto, para $x \in A_t$ tenemos $-\pi/2 < x - k(x)\pi < \pi/2$ y basta usar la periodicidad de la tangente junto con la imparidad de la función τ:

$$\operatorname{tg}(-x) = \operatorname{tg}\big(k(x)\pi - x\big) = \tau\big(k(x)\pi - x\big) = -\tau\big(x - k(x)\pi\big) = -\operatorname{tg} x \qquad \blacksquare$$

(T.4) *Para cada $m \in \mathbb{Z}$, la restricción de la tangente al intervalo $J_m =]m\pi - (\pi/2), m\pi + (\pi/2)[$ es una biyección estrictamente creciente de J_m sobre $\mathbb{R}$. Por tanto, la tangente diverge positivamente por la izquierda, y negativamente por la derecha, en todo punto de $\mathbb{R} \setminus A_t$. Finalmente, para todo $y \in \mathbb{R}$ se tiene: $\{x \in A_t : \operatorname{tg} x = y\} = \{\operatorname{arc\,tg} y + m\pi : m \in \mathbb{Z}\}$.*

La primera afirmación se comprueba usando que, si $m \in \mathbb{Z}$, para todo $x \in J_m$ se tiene $k(x) = m$ y $\operatorname{tg} x = \tau(x - m\pi)$, con lo que basta aplicar las propiedades de τ ya conocidas.

Dado $z \in \mathbb{R} \setminus A_t$, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $z = m\pi - (\pi/2) = \inf J_m$, luego trabajando en J_m obtenemos que $\operatorname{tg} x \to -\infty$ $(x \to z+)$. Pero como también $z = \sup J_{m-1}$, trabajando en J_{m-1} obtenemos que $\operatorname{tg} x \to +\infty$ $(x \to z-)$. Nótese que la tangente diverge en todo punto de $\mathbb{R} \setminus A_t$.

Veamos la última igualdad, que aclara la relación entre tangente y arco-tangente. Para $y \in \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{Z}$ tenemos $\operatorname{tg}\big(\operatorname{arc\,tg} y + m\pi\big) = \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} y) = y$, lo que nos da una inclusión. Para la otra, si $x \in A_t$, de $y = \operatorname{tg} x = \operatorname{arc\,tg}^{-1}\big(x - k(x)\pi\big)$, deducimos que $\operatorname{arc\,tg} y = x - k(x)\pi$, luego $x = \operatorname{arc\,tg} y + m\pi$ con $m = k(x) \in \mathbb{Z}$. $\blacksquare$

10.3. El seno y el coseno

A partir de la tangente, definiremos directamente estas dos funciones, sin duda las funciones trigonométricas más relevantes. Consideramos el conjunto $B = \mathbb{R} \setminus \{(2k-1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, que se obtiene al suprimir de $\mathbb{R}$ los múltiplos enteros impares de π, y observamos su relación con el conjunto de definición de la tangente: $A_t = \{x/2 : x \in B\}$. Pues bien, *el seno* y *el coseno* son las funciones $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= \frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)} \quad \forall x \in B, \qquad \operatorname{sen} x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus B \\ \cos x &= \frac{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)} \quad \forall x \in B, \qquad \cos x = -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus B \end{aligned}$$

De la continuidad de la tangente deducimos que ambas funciones son continuas en B. Además, como la tangente diverge en todo punto de $\mathbb{R} \setminus A_t$, para todo $x \in \mathbb{R} \setminus B$ tenemos que $\operatorname{tg}(y/2) \to \infty \ (y \to x)$, de donde

$$\begin{aligned} \lim_{y\to x} \operatorname{sen} y &= \lim_{y\to x} \frac{2}{\big(1/\operatorname{tg}(y/2)\big) + \operatorname{tg}(y/2)} = 0 = \operatorname{sen} x \\ \lim_{y\to x} \cos y &= \lim_{y\to x} \frac{\big(1/\operatorname{tg}^2(y/2)\big) - 1}{\big(1/\operatorname{tg}^2(y/2)\big) + 1} = -1 = \cos x \end{aligned}$$

Esto explica la definición del seno y el coseno en $\mathbb{R} \setminus B$: se ha hecho de forma que ambas funciones sean continuas en todo $\mathbb{R}$. De hecho, probamos enseguida algo mucho mejor:

(SC.1) *Las funciones seno y coseno son derivables en $\mathbb{R}$ con*

$$\operatorname{sen}'(x) = \cos x, \qquad \cos'(x) = -\operatorname{sen} x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

El carácter local de la derivada y las reglas básicas de derivación nos dan la derivabilidad en B. Para $x \in B$ se tiene que $\operatorname{tg}'(x/2) = 1 + \operatorname{tg}^2(x/2)$, de donde

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}'(x) &= \frac{\operatorname{tg}'(x/2)\big(1+\operatorname{tg}^2(x/2)\big) - 2\operatorname{tg}^2(x/2)\operatorname{tg}'(x/2)}{\big(1+\operatorname{tg}^2(x/2)\big)^2} = \frac{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)} = \cos x \\ \cos'(x) &= \frac{-\operatorname{tg}(x/2)\operatorname{tg}'(x/2)\big(1+\operatorname{tg}^2(x/2)+1-\operatorname{tg}^2(x/2)\big)}{\big(1+\operatorname{tg}^2(x/2)\big)^2} = \frac{-2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)} = -\operatorname{sen} x \end{aligned}$$

Sea ahora $a \in \mathbb{R} \setminus B$ y consideremos el intervalo $J =]a-2\pi, a+2\pi[$, que verifica $J \setminus \{a\} \subset B$. Sabemos que el seno y el coseno son funciones continuas en J, y acabamos de ver que son derivables en $J \setminus \{a\}$. Usando otra vez la continuidad de ambas en el punto a, tenemos

$$\lim_{x\to a} \operatorname{sen}'(x) = \lim_{x\to a} \cos x = \cos a, \qquad \lim_{x\to a} \cos'(x) = \lim_{x\to a} (-\operatorname{sen} x) = -\operatorname{sen} a$$

Una consecuencia del teorema del valor medio, estudiada en su momento, nos dice que el seno y el coseno son derivables en a verificándose que $\operatorname{sen}'(a) = \cos a$ y $\cos'(a) = -\operatorname{sen} a$. ■

Conviene anotar algunos valores del seno y el coseno, que se deducen directamente de las definiciones, usando valores conocidos de la tangente:

$$\begin{array}{lllll} \operatorname{sen}(-\pi) = 0\,, & \operatorname{sen}(-\pi/2) = -1\,, & \operatorname{sen} 0 = 0\,, & \operatorname{sen}(\pi/2) = 1\,, & \operatorname{sen}\pi = 0 \\ \cos(-\pi) = -1\,, & \cos(-\pi/2) = 0\,, & \cos 0 = 1\,, & \cos(\pi/2) = 0\,, & \cos\pi = -1 \end{array}$$

Probamos ahora una relación entre el seno y el coseno que es la más famosa de las llamadas *identidades trigonométricas*. De ella se deduce la imagen de ambas funciones.

(SC.2) *Se verifica que* $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$. *Como consecuencia, la imagen, tanto del seno como del coseno, es el intervalo* $[-1,1]$.

Se puede deducir directamente de las definiciones, pero usemos una idea alternativa: definiendo $h(x) = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, vemos inmediatamente que $h \in D(\mathbb{R})$ con $h' = 0$, luego h es constante, pero es claro que $h(0) = 1$.

Por tanto, tenemos $|\operatorname{sen} x| \leqslant 1$ y $|\cos x| \leqslant 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, pero sabemos que ambas funciones toman los valores 1 y -1, luego su imagen no puede ser otra que $[-1,1]$. ■

Las identidades trigonométricas más importantes son sin duda las siguientes:

(SC.3) *Fórmulas de adición para el seno y el coseno. Para cualesquiera* $x, y \in \mathbb{R}$ *se tiene:*

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x+y) &= \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \end{aligned}$$

Fijado $y \in \mathbb{R}$, consideramos las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ g(x) &= \cos(x+y) - \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

y queremos probar que ambas son idénticamente nulas. Es claro que $f, g \in D(\mathbb{R})$ con

$$f'(x) = g(x)\,, \quad g'(x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Consideremos ahora la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = f(x)^2 + g(x)^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces $h \in D(\mathbb{R})$ con

$$h'(x) = 2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x) = 2f(x)g(x) - 2g(x)f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

luego h es constante. De $\operatorname{sen} 0 = 0$ y $\cos 0 = 1$ deducimos que $f(0) = g(0) = 0$, luego $h(0) = 0$. Por tanto, $h(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, es decir, $f(x) = g(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, como queríamos demostrar. ■

A partir de las fórmulas de adición deduciremos otras propiedades básicas del seno y el coseno. En primer lugar obtenemos una relación aún más directa entre ambas funciones, de la que se deduce su periodicidad:

(SC.4) *Para cualesquiera $x \in \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{Z}$, se verifican las siguientes igualdades:*

$$\operatorname{sen}\big(x+(\pi/2)\big) = \cos x\,, \qquad \cos\big(x+(\pi/2)\big) = -\operatorname{sen} x \tag{1}$$

$$\operatorname{sen}(x+m\pi) = (-1)^m \operatorname{sen} x\,, \qquad \cos(x+m\pi) = (-1)^m \cos x \tag{2}$$

En particular, el seno y el coseno son funciones 2π-periódicas, así que no tienen límite en $+\infty$ y tampoco en $-\infty$.

Puesto que $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$ y $\cos(\pi/2) = 0$, las fórmulas de adición, con $y = \pi/2$, nos dan (1). Aplicando dos veces (1) obtenemos (2) para $m = 1$, lo que también puede usarse dos veces, para conseguir la periodicidad. Entonces, para todo $k \in \mathbb{Z}$, tenemos que $2k\pi$ también es un periodo del seno y el coseno. Esto demuestra (2) cuando m es par y, usando de nuevo el caso $m = 1$, lo probamos también para m impar. Con respecto al comportamiento en $-\infty$ y $+\infty$ basta observar que $\operatorname{sen}\big((\pi/2)+m\pi\big) = \cos(m\pi) = (-1)^m$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. ■

(SC.5) *El coseno es una función par, mientras que el seno es impar:*

$$\cos(-x) = \cos x\,, \quad \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Para probarlo, dado $x \in \mathbb{R}$, las fórmulas de adición nos dan:

$$\begin{aligned} 1 &= \cos\big(x+(-x)\big) = \cos x \cos(-x) - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(-x) \\ 0 &= \operatorname{sen}\big(x+(-x)\big) = \operatorname{sen} x \cos(-x) + \cos x \operatorname{sen}(-x) \end{aligned}$$

Multiplicando en la primera igualdad por $\cos x$, en la segunda por $\operatorname{sen} x$, y sumando las igualdades resultantes, obtenemos $\cos x = \big(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x\big)\cos(-x) = \cos(-x)$. También podemos multiplicar la primera igualdad por $-\operatorname{sen} x$ y la segunda por $\cos x$, con lo que al sumar obtenemos: $-\operatorname{sen} x = \big(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x\big)\operatorname{sen}(-x) = \operatorname{sen}(-x)$. ■

10.4. Arco-seno y arco-coseno

La periodicidad del seno y el coseno permite reducir el estudio de dichas funciones al de sus restricciones a un intervalo de longitud 2π. Pero teniendo en cuenta que $\operatorname{sen}(x+\pi) = -\operatorname{sen} x$ y $\cos(x+\pi) = -\cos x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, podemos de hecho restringirnos a un intervalo de longitud π. Es habitual usar el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ para el seno y $[0, \pi]$ para el coseno. En ambos casos, la restricción es una función inyectiva y toma los mismos valores que la función de partida, más concretamente:

(SC.6) *La restricción del seno al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ es una biyección estrictamente creciente de dicho intervalo sobre $[-1, 1]$. La restricción del coseno al intervalo $[0, \pi]$ es una biyección estrictamente decreciente de dicho intervalo sobre $[-1, 1]$.*

Para $x \in]-\pi/2, \pi/2[$ tenemos $|x/2| < \pi/4$, luego $|\operatorname{tg}(x/2)| < 1$, de donde $\cos x > 0$, es decir, $\operatorname{sen}'(x) > 0$. Así pues, el seno es estrictamente creciente en $[-\pi/2, \pi/2]$, luego transforma dicho intervalo en $[\operatorname{sen}(-\pi/2), \operatorname{sen}(\pi/2)] = [-1, 1]$.

Análogamente, para $x \in]0, \pi[$ tenemos $0 < x/2 < \pi/4$, luego $\operatorname{tg}(x/2) > 0$, de donde $\operatorname{sen} x > 0$, es decir, $\cos'(x) < 0$. Vemos que el coseno es estrictamente decreciente en $[0, \pi]$ y transforma dicho intervalo en $[\cos \pi, \cos 0] = [-1, 1]$. ■

Es natural considerar ahora las funciones inversas de las dos biyecciones recién conseguidas. El *arco-seno* es, por definición, la inversa de la restricción del seno al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ y se denota por $\operatorname{arc sen}$. Así pues, para cada $x \in [-1, 1]$, $\operatorname{arc sen} x$ es el único $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ que verifica $\operatorname{sen} y = x$.

Análogamente, el *arco-coseno* es la inversa de la restricción del coseno al intervalo $[0, \pi]$ y se denota por $\operatorname{arc cos}$, de modo que para $x \in [-1, 1]$, $\operatorname{arc cos} x$ es el único $z \in [0, \pi]$ tal que $\cos z = x$. Tomando entonces $y = (\pi/2) - z \in [-\pi/2, \pi/2]$ tenemos $\operatorname{sen} y = x$, con lo que $y = \operatorname{arc sen} x$ y obtenemos la relación directa entre las dos funciones recién definidas:

$$\operatorname{arc sen} x + \operatorname{arc cos} x = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1, 1]$$

Las propiedades básicas de estas dos funciones se deducen fácilmente de su definición:

- *El arco-seno es una biyección estrictamente creciente de* $[-1, 1]$ *sobre* $[-\pi/2, \pi/2]$ *y el arco-coseno es una biyección estrictamente decreciente de* $[-1, 1]$ *sobre* $[0, \pi]$. *Ambas funciones son continuas en* $[-1, 1]$ *y derivables en* $]-1, 1[$ *con*

$$\operatorname{arc sen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = -\operatorname{arc cos}'(x) \quad \forall x \in]-1, 1[$$

pero no son derivables en los puntos 1 *y* -1.

Basta trabajar con el arco-seno, que es biyectiva, estrictamente creciente y continua, como inversa de una función definida en un intervalo, que tiene esas mismas propiedades. Para la derivabilidad, dado $x \in [-1, 1]$, escribimos $y = \operatorname{arc sen} x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Si $x = \pm 1$, tenemos $y = \pm(\pi/2)$, luego $\operatorname{sen}'(y) = \cos y = 0$ y la regla de derivación de la función inversa nos dice que el arco-seno no es derivable en x. Si por el contrario $x \in]-1, 1[$, tenemos $\cos y > 0$ y la misma regla nos dice que

$$\operatorname{arc sen}'(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad ■$$

El arco-seno y el arco-coseno nos permiten determinar el conjunto de puntos donde el seno y el coseno toman cada uno de sus valores:

- *Para todo* $x \in [-1, 1]$ *se tiene:*

$$\{z \in \mathbb{R} : \cos z = x\} = \{\pm \operatorname{arc cos} x + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$
$$\{y \in \mathbb{R} : \operatorname{sen} y = x\} = \{\operatorname{arc sen} x + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \operatorname{arc sen} x + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

De la primera igualdad, una inclusión se deduce de la periodicidad y paridad del coseno: para $k \in \mathbb{Z}$ se tiene $\cos(\pm \arccos x + 2k\pi) = \cos(\pm \arccos x) = x$. Para la otra inclusión, sea $z \in \mathbb{R}$ tal que $\cos z = x$, sea $k = E\left(\dfrac{z+\pi}{2\pi}\right) \in \mathbb{Z}$ y pongamos $z_0 = z - 2k\pi$, que también verifica $\cos z_0 = x$ pero ahora con $-\pi \leqslant z_0 < \pi$. Entonces $\cos |z_0| = x$ con $0 \leqslant |z_0| \leqslant \pi$, de donde $|z_0| = \arccos x$, luego $z = \pm \arccos x + 2k\pi$.

En cuanto a la segunda igualdad, basta pensar que, para $y \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$\operatorname{sen} y = x \iff \cos\big(y - (\pi/2)\big) = x \iff y - (\pi/2) = \pm \arccos x + 2k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff \begin{cases} y = (\pi/2) + \arccos x + 2k\pi = \pi - \operatorname{arcsen} x + 2k\pi, & \text{o bien,} \\ y = (\pi/2) - \arccos x + 2k\pi = \operatorname{arcsen} x + 2k\pi \end{cases}$$

y esta equivalencia es precisamente la igualdad de conjuntos buscada. ■

10.5. Coordenadas polares en el plano

Veamos ahora un resultado que conecta las funciones seno y coseno con las nociones básicas de la trigonometría. Para cada $t \in \mathbb{R}$, el punto del plano $(a,b) = (\cos t, \operatorname{sen} t) \in \mathbb{R}^2$ verifica que $a^2 + b^2 = 1$, es decir, (a,b) está en la circunferencia con centro en el origen y radio 1, a la que suele llamarse *circunferencia unidad*. Pues bien, lo interesante es que el recíproco también es cierto: todo punto de la circunferencia unidad puede expresarse en la forma $(\cos t, \operatorname{sen} t)$ con $t \in \mathbb{R}$. Veamos antes la relación entre dos posibles valores de t:

- *Si* $s, t \in \mathbb{R}$ *verifican* $\cos s = \cos t$ *y* $\operatorname{sen} s = \operatorname{sen} t$*, entonces* $s - t = 2k\pi$ *con* $k \in \mathbb{Z}$.

En efecto, tenemos claramente $\cos(s-t) = \cos^2 s + \operatorname{sen}^2 s = 1$, pero conocemos los puntos donde el coseno toma el valor 1, luego: $s - t = \pm \arccos 1 + 2k\pi = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ ■

Probamos ya el resultado anunciado, con la condición adicional que asegura la unicidad:

- *Si* $a, b \in \mathbb{R}$ *y* $a^2 + b^2 = 1$*, existe un único* $t \in]-\pi, \pi]$ *tal que* $(a,b) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$.

Podemos dar explícitamente el valor de t: si $b \neq 0$, basta tomar

$$t = \operatorname{sgn}(b) \arccos a$$

y es obvio que $\cos t = a$, luego $\operatorname{sen}^2 t = 1 - a^2 = b^2$. Además, por ser $|a| < 1$, tenemos $0 < \arccos a < \pi$, es decir, $0 < |t| < \pi$. Entonces es claro que $\operatorname{sgn}(\operatorname{sen} t) = \operatorname{sgn}(t) = \operatorname{sgn}(b)$, y deducimos que $\operatorname{sen} t = b$. En el caso $b = 0$ tenemos $|a| = 1$ con lo que basta tomar $t = \arccos a \in \{0, \pi\}$. Obsérvese que este segundo caso queda englobado en el primero, si convenimos que $\operatorname{sgn} 0 = 1$.

La unicidad se deduce del resultado anterior: si s verifica las mismas condiciones que t, deberá ser $s - t = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Pero sumando miembro a miembro las desigualdades $-\pi < s \leqslant \pi$ y $-\pi \leqslant -t < \pi$, obtenemos $-2\pi < 2k\pi < 2\pi$, luego $k = 0$ y $s = t$. ■

De manera ligeramente más general, podemos ahora obtener:

- *Para cada* $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, *existe un único* $\rho \in \mathbb{R}^+$ *y un único* $t \in]-\pi,\pi]$, *tales que* $(x,y) = (\rho \cos t\,,\, \rho \operatorname{sen} t)$.

La igualdad buscada implica que $x^2 + y^2 = \rho^2$, luego es obligado tomar $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$. Basta ahora aplicar el resultado anterior, que nos proporciona un único $t \in]-\pi,\pi]$ verificando que $\cos t = x/\rho$ y $\operatorname{sen} t = y/\rho$. ■

Hemos obtenido las *coordenadas polares* de cualquier punto del plano, excluido el origen: se dice que ρ es el *radio polar* y t el *ángulo polar* del punto (x,y). La interpretación geométrica es clara: ρ es la longitud del segmento que une el origen con el punto (x,y) y t es la medida en radianes del ángulo (orientado) que forma dicho segmento con la dirección positiva del eje de abscisas, entendiendo que dicha medida es positiva o negativa según que el punto (x,y) esté situado en el semiplano superior o en el inferior. Cuando $y = 0$, estamos en el eje de abscisas y tenemos $t = 0$ o $t = \pi$ según el signo de x.

10.6. Otras funciones trigonométricas

Observemos la relación entre el conjunto de definición de la tangente y los ceros del coseno:

$$A = \mathbb{R} \setminus \{(2k-1)\pi/2 \,:\, k \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{R} \,:\, \cos x \neq 0\}$$

Pues bien, vamos a recuperar la tangente a partir del seno y el coseno:

- *Se verifica que* $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ *para todo* $x \in A$.

Para $x \in A$, como $2x$ no es múltiplo impar de π, tenemos

$$\cos(2x) = \frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{2}{1+\operatorname{tg}^2 x} - 1 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(2x) = \frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$$

y concluimos que

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen}(2x)}{1+\cos(2x)} = \frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{1+\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{2\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

donde hemos usado las fórmulas de adición. ■

En claro paralelismo con la última expresión de la tangente, pasamos a comentar brevemente otras tres funciones trigonométricas.

La función *secante* tiene el mismo conjunto de definición que la tangente y viene dada por:

$$\sec : A \to \mathbb{R}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \forall x \in A$$

Por otra parte, podemos considerar el conjunto de los puntos donde no se anula el seno, que sabemos se obtiene al suprimir de $\mathbb{R}$ los múltiplos enteros de π:

$$B = \{x \in \mathbb{R} \,:\, \operatorname{sen} x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\}$$

Pues bien, en el conjunto B se definen las funciones *cotangente* y *cosecante*:

$$\operatorname{cotg}, \operatorname{cosec} : B \to \mathbb{R}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \quad \forall x \in B$$

No haremos un estudio detallado de estas nuevas funciones, pues sus propiedades básicas (periodicidad, paridad o imparidad, derivabilidad, etc.) se deducen rutinariamente de las que ya conocemos para el seno y el coseno.

10.7. Algunos contraejemplos

Para una función $f : I \to \mathbb{R}$, donde I es un intervalo no trivial, recordemos tres afirmaciones que ya habíamos relacionado:

(i) *f es continua*
(ii) *f admite una primitiva*
(iii) *f tiene la propiedad del valor intermedio*

Sabemos que $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$. Usando la funciones trigonométricas, probaremos ahora con comodidad que esas implicaciones no son reversibles.

El coseno no tiene límite en $+\infty$ ni en $-\infty$, pero conviene precisar esa afirmación: para todo $y \in [-1,1]$, el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : \cos x = y\}$ no está mayorado ni minorado, luego si $S \subset \mathbb{R}$ es cualquier semirrecta, se tendrá que $\cos(S) = [-1,1]$. Un obvio cambio de variable nos proporciona una función que tiene el mismo tipo de comportamiento en el origen, tanto por la derecha como por la izquierda:

- *La función $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = \cos\frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^* \tag{3}$$

verifica que $f\big(]0,\delta[\big) = f\big(]-\delta,0[\big) = [-1,1]$ para todo $\delta > 0$. Por tanto, f no tiene límite por la izquierda, ni por la derecha, en el origen.

Basta pensar que $f\big(]0,\delta[\big) = \cos\big(]1/\delta,+\infty[\big)$ y $f\big(]-\delta,0[\big) = \cos\big(]-\infty,-1/\delta[\big)$. ■

Ya podemos dar ejemplos de funciones que tienen la propiedad del valor intermedio, sin ser continuas:

- *Fijado $\lambda \in [-1,1]$, la función $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$f_\lambda(x) = \cos\frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f_\lambda(0) = \lambda \tag{4}$$

tiene la propiedad del valor intermedio, pero no es continua.

Vemos que f_λ extiende a la función f definida en (3), así que f_λ no es continua en 0. Si J es un intervalo no trivial y $0 \notin J$, f_λ es continua en J, luego $f_\lambda(J)$ es un intervalo. Si $0 \in J$, podemos encontrar $\delta > 0$ de forma que $]0, \delta[\subset J$, o bien $]-\delta, 0[\subset J$. En ambos casos deducimos que $f(J \setminus \{0\}) = [-1, 1]$, luego $f_\lambda(J) = f(J \setminus \{0\}) \cup \{\lambda\} = [-1, 1]$. ■

Con respecto a las afirmaciones consideradas al principio, hemos visto que $(iii) \not\Rightarrow (i)$, pero queremos ver que $(iii) \not\Rightarrow (ii)$. Encontraremos el contraejemplo casi al mismo tiempo que probamos que $(ii) \not\Rightarrow (i)$.

- *La función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $h(x) = x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$ y $h(0) = 0$, es derivable en $\mathbb{R}$ pero su derivada no es continua: $h \in D(\mathbb{R})$ pero $h \notin C^1(\mathbb{R})$.*

Usaremos también la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad g(0) = 0$$

Es evidente que g es continua en $\mathbb{R}^*$ pero, al tratarse del producto de una función acotada por otra que tiene límite 0 en el origen, tenemos $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0 = g(0)$, luego $g \in C(\mathbb{R})$.

Claramente h es derivable en $\mathbb{R}^*$, con

$$h'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} = 2g(x) - f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^* \tag{5}$$

donde f es la función definida en (3). Pero h también es derivable en 0, ya que

$$\lim_{x \to 0} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \to 0} g(x) = 0$$

así que $h'(0) = 0$. Como también $g(0) = 0$, si en (5) sustituimos f por su extensión f_0 (definida en (4) para $\lambda = 0$), hacemos que la igualdad sea válida en todo $\mathbb{R}$. Anotémosla para uso posterior:

$$f_0(x) = 2g(x) - h'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{6}$$

Como g es continua en el origen, pero f_0 no lo es, deducimos que h' tampoco puede serlo. ■

Ya tenemos una función derivable en un intervalo, cuya derivada no es continua. Pero aprovechando los razonamientos anteriores, encontraremos también una función que tiene la propiedad del valor intermedio pero no admite primitiva.

- *Sean $f_0, f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas en (4), con $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$ respectivamente. Entonces, f_0 admite una primitiva, pero f_1 no.*

Para la primera afirmación, recordemos la igualdad (6). Como $g \in C(\mathbb{R})$, existe $G \in D(\mathbb{R})$ tal que $g = G'$. Basta entonces tomar $F_0 = 2G - h$ para tener una primitiva de f_0.

Supongamos, por reducción al absurdo, que f_1 también admite una primitiva: $F_1 \in D(\mathbb{R})$ tal que $F_1' = f_1$. Como F_0' y F_1' coinciden en $\mathbb{R}^*$, el teorema del valor medio nos dice que $F_0 - F_1$ es constante en $\mathbb{R}^+$, y también en $\mathbb{R}^-$, pero al ser continua en 0, será constante en todo $\mathbb{R}$. Entonces $F_0' = F_1'$, es decir, $f_0 = f_1$, flagrante contradicción. ■

10.8. Ejercicios

1. Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$, estudiar el comportamiento en el origen y en el infinito de las funciones $f, g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a}{x}\right) + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{x}\right), \qquad g(x) = x\,f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

2. Calcular la imagen de la función $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg}(\log |x|) \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

3. Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg} \frac{1+x}{1-x} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Estudiar la continuidad de f y su comportamiento en 1, $+\infty$ y $-\infty$. Calcular su imagen.

4. Probar que, si $a, b \in \mathbb{R}$ verifican que $ab < 1$, entonces:

$$\operatorname{arc\,tg} a + \operatorname{arc\,tg} b = \operatorname{arc\,tg} \frac{a+b}{1-ab}$$

5. Calcular las siguientes integrales:

$$\text{(a)} \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2} \qquad\qquad \text{(b)} \int_0^1 \frac{x^2-3x+4}{x^3-x^2+3x+5}\,dx$$

6. Calcular la imagen de las funciones $F, G : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$F(x) = \int_1^x \frac{1-t}{t\,(t+1)\,(t^2+1)}\,dt, \qquad G(x) = \int_1^{1+(x-1)^2} \frac{\operatorname{arc\,tg} t}{t^2}\,dt \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

7. Probar que existe una única función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifica

$$f(x) + \exp\big(f(x)\big) = \operatorname{arc\,tg}\big(f(x)\big) + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Probar también que $f \in D(\mathbb{R})$ y calcular $f'(1)$.

8. Si A es el conjunto de definición de la tangente, probar que el conjunto $\{x \in A : \operatorname{tg} x = x\}$ es infinito y numerable.

9. Probar que el arco-tangente es uniformemente continua, pero su inversa no.

10. Probar que, para todo $x \in]0, \pi/2[$ se tiene: $\dfrac{2x}{\pi} < \operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$.

11. Dado $x \in \mathbb{R}$, estudiar la convergencia de las sucesiones $\{\operatorname{sen}(nx)\}$ y $\{\cos(nx)\}$.

12. Estudiar la convergencia de las siguientes sucesiones:

$$\text{(a)}\ \left\{ n\,\text{sen}\left(\frac{n}{n^2+1}\right)\right\} \qquad \text{(b)}\ \left\{\cos^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\} \qquad \text{(c)}\ \left\{\frac{(\log n)\cos\sqrt{n^2+1}}{n\,\text{arc tg}\, n}\right\}$$

13. Dado $\alpha\in\mathbb{R}$, estudiar la convergencia de las siguientes series

$$\text{(a)}\ \sum_{n\geqslant 2}\frac{\cos(n\alpha)}{n(\log n)^2} \qquad \text{(b)}\ \sum_{n\geqslant 1}\big(\text{sen}\,(1/n)\big)^{\alpha} \qquad \text{(c)}\ \sum_{n\geqslant 3}\left(\frac{\big(1-e^{-1/n}\big)\,\text{arc tg}\,(1/n)}{\log n}\right)^{\alpha}$$

14. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \text{sen}\, x\ \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \quad \forall x\in\mathbb{R}^*, \quad f(0)=0$$

Estudiar la continuidad y derivabilidad de f, así como su comportamiento en $+\infty$ y $-\infty$.

15. Sea $\alpha\in\mathbb{R}$ y $f:\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = x^{\alpha}\cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad \forall x\in\mathbb{R}^+, \quad f(0)=0$$

Estudiar la continuidad y derivabilidad de f, así como la continuidad de su derivada.

16. Para $x\in\mathbb{R}$, discutir la validez de cada una de las siguientes afirmaciones:

(a) $\text{tg}\,(\text{arc tg}\, x) = x$ (b) $\text{arc tg}\,(\text{tg}\, x) = x$
(c) $\text{sen}\,(\text{arc sen}\, x) = x$ (d) $\text{arc sen}\,(\text{sen}\, x) = x$
(e) $\cos\,(\text{arc cos}\, x) = x$ (f) $\text{arc cos}\,(\cos x) = x$

17. Sea $f:]0,\pi/2[\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \left(\frac{1}{\text{tg}\, x}\right)^{\text{sen}\, x} \qquad \forall x\in]0,\pi/2[$$

¿Puede extenderse f para obtener una función continua en $[0,\pi/2]$?

18. Sea $f:]0,\pi/2[\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = (1+\text{sen}\, x)^{\text{cotg}\, x} \quad \forall x\in]0,\pi/2[$$

Estudiar la continuidad de f y su comportamiento en 0 y $\pi/2$.

19. Sean $J=[-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}]$ y $g:J\to[-\pi/2,\pi/2]$ la función definida por

$$g(x) = \text{arc sen}\,\big(2x\sqrt{1-x^2}\big) \quad \forall x\in J$$

Probar que g es biyectiva, continua en J y estrictamente creciente. Dar una expresión explícita para la función inversa de g.

20. Dado $a\in\mathbb{R}^+$, calcular la imagen de la función $G:[0,a]\to\mathbb{R}$ definida por

$$G(x) = \int_{-x}^{x}\sqrt{a^2-t^2}\,dt \quad \forall x\in[0,a]$$

Tema 11

Reglas de l'Hôpital

Vamos a estudiar en este tema un método práctico, que resulta útil con frecuencia para resolver indeterminaciones del tipo $[0/0]$ o $[\infty/\infty]$, y que lleva el nombre de un aristócrata y matemático francés, el marqués de l'Hôpital (1661-1704), aunque el descubrimiento se debe más bien al que fue su maestro, el matemático suizo Johann Bernouilli (1667-1748).

La idea general de las reglas de L'Hôpital consiste en que, con las hipótesis adecuadas, cuando el cociente f'/g' entre las derivadas de dos funciones tiene límite o diverge, bien en un punto de la recta real, bien por la izquierda o por la derecha de dicho punto, o bien en $+\infty$ o en $-\infty$, entonces lo mismo le ocurre al cociente f/g entre las dos funciones. A la hora de concretar esta idea genérica, se comprende que serían necesarios demasiados enunciados para estudiar uno a uno todos los casos. Presentaremos solamente dos enunciados, conocidos como primera y segunda reglas de l'Hôpital, que se aplican respectivamente a indeterminaciones del tipo $[0/0]$ e $[\infty/\infty]$. Después veremos que a partir de estos dos resultados, podemos abordar todos los casos que pueden darse.

11.1. Teorema del Valor Medio Generalizado

Se conoce con este nombre la siguiente versión del teorema del valor medio, que resulta especialmente indicada para estudiar las reglas de l'Hôpital:

Teorema. *Sean $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f,g \in C[a,b] \cap D\big(]a,b[\big)$. Entonces, existe $c \in]a,b[$ verificando que:*

$$\big(f(b)-f(a)\big)\,g'(c) \,=\, \big(g(b)-g(a)\big)\,f'(c) \tag{1}$$

Demostración. Consideramos una función $h : [a,b] \to \mathbb{R}$, que se visualiza muy bien usando determinantes. Para $x \in [a,b]$ definimos:

$$\begin{aligned} h(x) &= \begin{vmatrix} 1 & f(x) & g(x) \\ 1 & f(a) & g(a) \\ 1 & f(b) & g(b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & f(a) \\ 1 & f(b) \end{vmatrix} g(x) - \begin{vmatrix} 1 & g(a) \\ 1 & g(b) \end{vmatrix} f(x) + \begin{vmatrix} f(a) & g(a) \\ f(b) & g(b) \end{vmatrix} \\ &= \big(f(b)-f(a)\big)\, g(x) - \big(g(b)-g(a)\big)\, f(x) + f(a)\, g(b) - f(b)\, g(a) \end{aligned}$$

Es evidente que $h \in C[a,b] \cap D\big(]a,b[\big)$ con

$$h'(x) = \big(f(b)-f(a)\big)\, g'(x) - \big(g(b)-g(a)\big)\, f'(x) \quad \forall x \in]a,b[$$

También es evidente que $h(a) = h(b) = 0$. Por el teorema de Rolle, existe $c \in]a,b[$ tal que $h'(c) = 0$, que es precisamente la igualdad buscada. ■

El nombre del teorema anterior se explica porque, tomando $g(x) = x$ para todo $x \in [a,b]$, obtenemos para f la tesis del teorema del valor medio. Nótese además que en la demostración anterior no hemos usado el teorema del valor medio, sino directamente el teorema de Rolle. Así pues, tenemos tres versiones equivalentes de un mismo resultado.

Conviene comentar que si hubiésemos aplicado directamente a las funciones f y g el teorema del valor medio, no habríamos obtenido la conclusión buscada. Tendríamos puntos $u, v \in]a,b[$ verificando que

$$f(b) - f(a) = f'(u)\,(b-a) \qquad \text{y} \qquad g(b) - g(a) = g'(v)\,(b-a)$$

de donde deduciríamos que

$$\big(f(b)-f(a)\big)\, g'(v) = \big(g(b)-g(a)\big)\, f'(u)$$

una igualdad que está todavía lejos de (1), pues no podemos asegurar que se tenga $u = v$.

Para ver lo que ocurre en un ejemplo concreto, sean $a = 0$, $b = 1$ y $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ las funciones dadas por

$$f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = x^3 \quad \forall x \in [0,1]$$

Para $u, v \in]0,1[$ tenemos entonces

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) = f'(u)\,(b-a) &\iff 1 = 2u \iff u = 1/2 \\ g(b) - g(a) = g'(v)\,(b-a) &\iff 1 = 3v^2 \iff v = 1/\sqrt{3} \end{aligned}$$

así que no podemos conseguir $u = v$, pero lo que buscamos es $c \in]0,1[$ verificando (1), es decir, $3c^2 = 2c$, para lo cual basta tomar $c = 2/3$.

Expliquemos ahora por adelantado el interés de la versión generalizada del teorema del valor medio recién obtenida. Suponiendo $f(a) = g(a) = 0$, la igualdad (1) toma la forma $f(b)\, g'(c) = g(b)\, f'(c)$ y esto abre el camino para relacionar los cocientes f/g y f'/g'. Lo que queda es poner las hipótesis adecuadas para que la idea anterior dé resultado.

11.2. Primera regla de l'Hôpital

Empezamos trabajando con una indeterminación del tipo $[0/0]$.

Teorema. *Sea I un intervalo no trivial, $a \in I$ y $f, g : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ funciones verificando:*

(a) *f y g son derivables en $I \setminus \{a\}$* (b) *$g'(x) \neq 0$ para todo $x \in I \setminus \{a\}$*
(c) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$

Entonces se tiene que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in I \setminus \{a\}$, con lo que las funciones f/g y f'/g' están definidas en $I \setminus \{a\}$. Además, se verifica que:

$$(i) \quad \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \implies \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

$$(ii) \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} \to +\infty \ (x \to a) \implies \frac{f(x)}{g(x)} \to +\infty \ (x \to a)$$

$$(iii) \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} \to -\infty \ (x \to a) \implies \frac{f(x)}{g(x)} \to -\infty \ (x \to a)$$

$$(iv) \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} \to \infty \ (x \to a) \implies \frac{f(x)}{g(x)} \to \infty \ (x \to a)$$

Demostración. Empezamos observando que la hipótesis (c) permite extender las funciones f y g, dándoles el valor 0 en el punto a, para obtener funciones continuas en I. Podemos seguir llamando f y g a las extensiones así obtenidas, pues todo el contenido del teorema se mantiene literalmente al sustituir f y g por dichas extensiones. Así pues, podemos suponer que $f, g \in C(I)$ con $f(a) = g(a) = 0$.

Para $x \in I \setminus \{a\}$ escribimos $J_x = [\min\{a,x\}, \max\{a,x\}]$, con lo que f y g son continuas en J_x, ya que $J_x \subset I$, y derivables en J_x°, pues $J_x^\circ \subset I \setminus \{a\}$.

Para comprobar la primera afirmación del enunciado, esto es, que $g(x) \neq 0$, aplicamos a g el teorema del valor medio, obteniendo $u_x \in J_x^\circ$ tal que

$$g'(u_x)(x-a) = g(x) - g(a) = g(x)$$

pero $x \neq a$ y sabemos que $g'(u_x) \neq 0$, luego $g(x) \neq 0$.

Por otra parte, podemos aplicar a f y g el teorema del valor medio generalizado obteniendo $c_x \in J_x^\circ$ tal que

$$\big(f(x) - f(a)\big)\, g'(c_x) = \big(g(x) - g(a)\big)\, f'(c_x)$$

con lo cual tenemos

$$0 < |c_x - a| < |x - a| \quad \text{y} \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \tag{2}$$

El resto de la demostración se adivina ya fácilmente.

(i). Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$y \in I, \ \ 0 < |y - a| < \delta \implies \left| \frac{f'(y)}{g'(y)} - L \right| < \varepsilon \tag{3}$$

Para $x \in I$ con $0 < |x - a| < \delta$, al aplicar (2) tendremos $0 < |c_x - a| < \delta$, lo que nos permite usar (3) con $y = c_x$ para concluir que

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| = \left| \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - L \right| < \varepsilon$$

(ii). Dado $K \in \mathbb{R}$, existe $\delta > 0$ tal que: $y \in I, \ \ 0 < |y - a| < \delta \implies \dfrac{f'(y)}{g'(y)} > K \qquad (3')$

Para $x \in I$ con $0 < |x - a| < \delta$, aplicando (2) y $(3')$ concluimos que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} > K$$

(iii). Basta aplicar (ii) pero cambiando f por $-f$.

(iv). Dado $K \in \mathbb{R}$, existe $\delta > 0$ tal que $y \in I, \ \ 0 < |y - a| < \delta \implies \left| \dfrac{f'(y)}{g'(y)} \right| > K \qquad (3'')$

Para $x \in I$ con $0 < |x - a| < \delta$, de (2) y $(3'')$ deducimos que

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = \left| \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \right| > K$$

y hemos probado que f/g diverge en el punto a. ■

Como ejemplo sencillo de aplicación de la regla anterior, vamos a comprobar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Sean $I = \mathbb{R}$, $a = 0$, $f(x) = 1 - \cos x$ y $g(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$. Se cumplen las hipótesis del teorema anterior: (a) $f, g \in D(\mathbb{R}^*)$; (b) $f'(x) = \operatorname{sen} x$ y $g'(x) = 2x \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$; y (c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$. La derivabilidad del seno en el origen nos da

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \frac{1}{2} \operatorname{sen}'(0) = \frac{1}{2}$$

y la regla de l'Hôpital recién demostrada nos lleva a la conclusión deseada.

Volviendo al caso general, conviene observar que el cociente f'/g', cuyo comportamiento debemos estudiar para aplicar la regla de l'Hôpital, puede a su vez cumplir las hipótesis de dicha regla, lo que permite aplicarla reiteradamente. Por ejemplo, usándola dos veces, tendríamos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{1}{6}$$

Ni que decir tiene, la regla de l'Hôpital puede aplicarse al estudio de límites laterales o divergencia lateral de una función en un punto, pues se trata de los límites ordinarios o la divergencia ordinaria en dicho punto de una conveniente restricción de la función dada. Merece la pena comentar la forma en que se aplica entonces el teorema anterior, pues sus hipótesis se debilitan. Dicho informalmente, basta exigirlas "a un lado" del punto en el que trabajamos.

Para un intervalo no trivial $I \subset \mathbb{R}$, un punto $a \in I^\circ$, y dos funciones $f, g : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$, supongamos que queremos estudiar el comportamiento de f/g en a, pero sólo por la derecha de dicho punto. Aplicamos el teorema anterior a las restricciones de f y g al intervalo $J \setminus \{a\}$ donde $J = \{x \in I : x \geqslant a\}$, luego no son f y g, sino dichas restricciones, las que deben cumplir las hipótesis del teorema. Así pues, bastará que f y g sean derivables en $J \setminus \{a\}$, con $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in J \setminus \{a\}$, y la hipótesis (c) toma la forma $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} g(x) = 0$, pero no hay que suponer nada sobre el comportamiento de f y g a la izquierda del punto a. Del mismo modo se modifica la tesis del teorema: por una parte, nos dice que g no se anula en $J \setminus \{a\}$; por otra, en las implicaciones (i) a (iv) sólo se relacionan comportamientos por la derecha en a de las funciones f'/g' y f/g. Concretamente, la afirmación (i) nos dice que:

$$\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \implies \lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

y lo mismo ocurre con las otras tres implicaciones.

Merece la pena recordar un resultado, deducido en su momento del teorema del valor medio, y usado para probar la derivabilidad del seno y el coseno, que de hecho es caso particular del teorema anterior. Concretamente, sea I un intervalo no trivial, $a \in I$ y $h \in C(I) \cap D\big(I \setminus \{a\}\big)$. Podemos aplicar la regla de l'Hôpital, tomando $f(x) = h(x) - h(a)$ y $g(x) = x - a$ para todo $x \in I$, ya que tenemos $f(a) = g(a) = 0$ y $g'(x) = 1 \neq 0$ para todo $x \in I$. Obtenemos las tres conclusiones que ya conocíamos: si h' tiene límite en el punto a, entonces h es derivable en a con $h'(a) = \lim\limits_{x \to a} h'(x)$; si h' diverge en a, entonces h no es derivable en a; finalmente, si $a \in I^\circ$, los límites laterales de h' en a, si existen, son las derivadas laterales de h en a.

Conviene finalmente resaltar que las implicaciones que aparecen en la regla de l'Hôpital no son reversibles. Centrándonos en la primera de ellas, para funciones $f, g : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ verificando las hipótesis (a), (b) y (c) de dicha regla, puede ocurrir que el cociente f/g tenga límite en el punto a pero el cociente f'/g' no lo tenga. Para comprobarlo, basta tomar

$$I = \mathbb{R}, \;\; a = 0, \;\; f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, \;\; g(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

En efecto, definiendo $f(0) = 0$, sabemos que f es derivable en $\mathbb{R}$, con $f'(0) = 0$, pero su derivada no tiene límite en 0. Por tanto, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)/g(x) = 0$, pero f'/g' no tiene límite en 0.

Así pues, si una vez comprobadas las hipótesis (a), (b) y (c) de la regla de l'Hôpital, nos encontramos con que el cociente f'/g' no tiene límite ni diverge en el punto a, nada podemos afirmar sobre el comportamiento del cociente f/g en dicho punto.

11.3. Segunda regla de l'Hôpital

Esta segunda versión se aplica a indeterminaciones del tipo $[\infty/\infty]$:

Teorema. *Sea I un intervalo no trivial, $a \in I$ y $f, g : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ funciones verificando:*

(a) *f y g son derivables en $I \setminus \{a\}$* (b) *$g'(x) \neq 0$ para todo $x \in I \setminus \{a\}$*

(c) *g diverge en el punto a*

Entonces existe $\rho > 0$ tal que, para $x \in I$ con $0 < |x - a| < \rho$, se tiene $g(x) \neq 0$. Además, se verifican las mismas cuatro implicaciones de la primera regla:

$$
\begin{array}{rl}
(i) & \displaystyle \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \implies \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L \\
(ii) & \displaystyle \frac{f'(x)}{g'(x)} \to +\infty \ (x \to a) \implies \frac{f(x)}{g(x)} \to +\infty \ (x \to a) \\
(iii) & \displaystyle \frac{f'(x)}{g'(x)} \to -\infty \ (x \to a) \implies \frac{f(x)}{g(x)} \to -\infty \ (x \to a) \\
(iv) & \displaystyle \frac{f'(x)}{g'(x)} \to \infty \ (x \to a) \implies \frac{f(x)}{g(x)} \to \infty \ (x \to a)
\end{array}
$$

Demostración. La existencia de ρ es obvia, pues g diverge en el punto a. Dependiendo de que a sea un extremo o un punto interior del intervalo I, podemos distinguir tres casos: $a = \min I$, $a = \max I$, o bien $a \in I^\circ$.

Primer caso: $a = \min I$. La demostración es similar a la de la primera regla, con la dificultad de no poder extender la función g para que sea continua en a. En vez de a usaremos otro punto $y \in I$ que tomaremos tan cerca de a como convenga, pero esto complica un poco los cálculos.

Tomando ρ suficientemente pequeño, conseguimos $[a, a+\rho[\subset I$. En el intervalo $]a, a+\rho[$, sabemos que g no se anula, pero además es inyectiva, porque g' tampoco se anula. Pues bien, para $a < x < y < a + \rho$, puesto que f y g son derivables en el intervalo $[x, y]$, podemos aplicar el teorema del valor medio generalizado para encontrar un punto $c_{x,y} \in]x, y[$ tal que

$$\big(f(x) - f(y)\big)\, g'(c_{x,y}) = \big(g(x) - g(y)\big)\, f'(c_{x,y})$$

Usando ahora que $g(x) \neq 0$, $g'(c_{x,y}) \neq 0$ y $g(x) \neq g(y)$ tenemos

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)} = \frac{f'(c_{x,y})}{g'(c_{x,y})} \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)} \qquad (5)$$

Nótese la diferencia entre esta expresión y la igualdad (2) que usábamos para la primera regla.

(i). Restando L en ambos miembros de (5) tenemos

$$\frac{f(x)}{g(x)} - L = \left(\frac{f'(c_{x,y})}{g'(c_{x,y})} - L\right)\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) - L\,\frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)}$$

y tomando valores absolutos llegamos a

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-L\right| \leqslant \left|\frac{f'(c_{x,y})}{g'(c_{x,y})}-L\right| \left(1+\left|\frac{g(y)}{g(x)}\right|\right) + \left|\frac{f(y)-Lg(y)}{g(x)}\right| \tag{6}$$

En resumen, para $a<x<y<a+\rho$, existe $c_{x,y}\in]x,y[$ verificando (6).

Dado $\varepsilon>0$, por hipótesis, existe $\tau>0$ (podemos tomar $\tau<\rho$), tal que

$$a<z<a+\tau \implies \left|\frac{f'(z)}{g'(z)}-L\right| < \frac{\varepsilon}{4} \tag{7}$$

Fijamos $y\in]a,a+\tau[$ y aplicamos que g diverge en el punto a, obteniendo $\delta>0$, que podemos suponer verifica $a+\delta<y$, tal que

$$a<x<a+\delta \implies |g(x)|>|g(y)| \quad \text{y} \quad \left|\frac{f(y)-Lg(y)}{g(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{8}$$

Además, si $a<x<a+\delta$, tenemos $x<y$, luego podemos aplicar (6). Observamos que $a<c_{x,y}<a+\tau$, lo que nos permite aplicar (7) con $z=c_{x,y}$. Usando también (8), concluimos:

$$a<x<a+\delta \implies \left|\frac{f(x)}{g(x)}-L\right| < \frac{\varepsilon}{4}2+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(ii). La demostración es similar e incluso más sencilla, indicamos los cambios necesarios. Si f'/g' diverge positivamente en a, para cada $K\in\mathbb{R}^+$ existe $\tau\in]0,\rho[$ que ahora verifica

$$a<z<a+\tau \implies \frac{f'(z)}{g'(z)} > 2(K+1) \tag{7$'$}$$

Fijamos como antes $y\in]a,a+\tau[$ y, como g diverge en a, existe $\delta\in]0,a-y[$ que ahora verifica

$$a<x<a+\delta \implies \left|\frac{g(y)}{g(x)}\right| < \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| < 1 \tag{8$'$}$$

Usamos ahora (5), (7$'$) con $z=c_{x,y}$ y (8$'$) para concluir que

$$a<x<a+\delta \implies \frac{f(x)}{g(x)} > 2(K+1)\left(1-\frac{1}{2}\right)-1 = K$$

(iii). Basta aplicar lo anterior, cambiando f por $-f$.

(iv). Dado $K\in\mathbb{R}^+$ obtenemos $0<\tau<\rho$ verificando ahora que

$$a<z<a+\tau \implies \left|\frac{f'(z)}{g'(z)}\right| > 2(K+1) \tag{7$''$}$$

De nuevo, fijamos $y\in]a,a+\tau[$ y encontramos $\delta\in]0,y-a[$ verificando (8$'$). Para $a<x<a+\delta$, aplicamos (5), (7$''$) con $z=c_{x,y}$, y (8$'$), obteniendo

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \geqslant \left|\frac{f'(c_{x,y})}{g'(c_{x,y})}\right| \left(1-\left|\frac{g(y)}{g(x)}\right|\right) - \left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| > 2(K+1)\left(1-\frac{1}{2}\right)-1 = K$$

Queda así demostrado el teorema en el caso $a = \min I$.

Segundo caso: $a = \max I$. Se podría repetir el proceso, trabajando a la izquierda del punto a en vez de hacerlo a la derecha. Alternativamente, podemos usar el intervalo $\hat{I} = \{-x : x \in I\}$ que verifica $-a = \min \hat{I}$, y aplicar lo ya demostrado a las funciones $\hat{f}, \hat{g} : \hat{I} \setminus \{-a\} \to \mathbb{R}$ dadas por $\hat{f}(x) = f(-x)$, $\hat{g}(x) = g(-x)$ para todo $x \in \hat{I} \setminus \{-a\}$. Son funciones derivables en $\hat{I} \setminus \{-a\}$ con $\hat{f}'(x) = -f'(-x)$ y $\hat{g}'(x) = -g'(-x) \neq 0$ para todo $x \in \hat{I} \setminus \{-a\}$, y es claro que $\hat{g}$ diverge en $-a$. Entonces, para obtener (i) basta pensar que

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \;\Leftrightarrow\; \lim_{x \to -a} \frac{f'(-x)}{g'(-x)} = L \;\Leftrightarrow\; \lim_{x \to -a} \frac{\hat{f}'(x)}{\hat{g}'(x)} = L$$

$$\Rightarrow\; \lim_{x \to -a} \frac{\hat{f}(x)}{\hat{g}(x)} = L \;\Leftrightarrow\; \lim_{x \to -a} \frac{f(-x)}{g(-x)} = L \;\Leftrightarrow\; \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

y, para las otras tres implicaciones se razona de forma análoga.

Tercer caso: $a \in I^\circ$. En lugar de I, usamos $I^+ = \{x \in I : x \geqslant a\}$ e $I^- = \{x \in I : x \leqslant a\}$, que son intervalos no triviales verificando que $\min I^+ = a$ y ,$\max I^- = a$. Lógicamente, en lugar de f y g consideramos sus restricciones, por una parte a $I^+ \setminus \{a\}$, y por otra a $I^- \setminus \{a\}$. Al hacer estas sustituciones, se mantienen obviamente las hipótesis (a), (b) y (c) del teorema. En el caso (i), aplicando entonces lo ya demostrado, obtenemos que

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a-} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \quad \text{luego} \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Para probar las otras tres implicaciones, el razonamiento es análogo. ■

11.4. Límites en el infinito

Para completar todos los casos que pueden darse, adaptamos fácilmente las reglas de l'Hôpital para que nos permitan estudiar límites o divergencias en $+\infty$ o en $-\infty$:

- *Sea J un intervalo no mayorado y $f, g : J \to \mathbb{R}$ funciones verificando:*

  $$\text{(a)} \quad f, g \in D(J) \qquad \text{(b)} \quad g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in J$$

  Supongamos además que se cumple una de las siguientes condiciones:

  $$\text{(c.1)} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0 \qquad \text{(c.2)} \quad g \text{ diverge en } +\infty$$

  Entonces existe $M > 0$ tal que, para $x \in J$ con $x > M$, se tiene $g(x) \neq 0$. Además:

  $$(i) \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \implies \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

  $$(ii) \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} \to +\infty \ (x \to +\infty) \implies \frac{f(x)}{g(x)} \to +\infty \ (x \to +\infty)$$

  $$(iii) \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} \to -\infty \ (x \to +\infty) \implies \frac{f(x)}{g(x)} \to -\infty \ (x \to +\infty)$$

  Análogo enunciado, con las modificaciones oportunas, para el comportamiento en $-\infty$.

En primer lugar, la hipótesis (b) implica que g es estrictamente monótona, luego a lo sumo podrá anularse en un punto de J, lo que garantiza la existencia de M. Usaremos la equivalencia bien conocida entre el comportamiento en $+\infty$ de una función y el comportamiento en 0 de otra, directamente relacionada con la primera. El caso de $-\infty$ tendría un tratamiento análogo.

Fijamos $\alpha \in I$, con $\alpha > M$, tomamos $I = [0, 1/\alpha[$, y definimos $\varphi, \psi : I \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ por:

$$\varphi(x) = f(1/x)\,, \quad \psi(x) = g(1/x) \quad \forall x \in I \setminus \{0\}$$

La regla de la cadena nos dice que φ y ψ son derivables en $I \setminus \{0\}$ con

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2} f'(1/x)\,, \quad \psi'(x) = -\frac{1}{x^2} g'(1/x) \neq 0 \quad \forall x \in I \setminus \{0\}$$

Así pues, φ y ψ verifican las hipótesis (a) y (b) comunes a las dos reglas de l'Hôpital. Si se verifica (c.1) tenemos claramente $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to 0} \psi(x) = 0$, luego φ y ψ verifican las hipótesis de la primera regla de l'Hôpital. Si se verifica (c.2), entonces ψ diverge en 0 y se cumplen las hipótesis de la segunda regla. Podemos pues aplicar la regla que proceda a las funciones φ, ψ.

Teniendo en cuenta que

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{f'(1/x)}{g'(1/x)} \quad \forall x \in I \setminus \{0\}$$

el comportamiento en 0 del cociente φ'/ψ' es el mismo que tenga f'/g' en $+\infty$. Tenemos por tanto

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \iff \lim_{x \to 0} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = L \implies \lim_{x \to 0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = L \iff \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

y análogo razonamiento para las otras dos implicaciones. ■

Comparando el último resultado con los obtenidos anteriormente, se puede echar de menos el caso en que f'/g' diverge en $+\infty$ pero no lo hace positiva ni negativamente. No se ha incluido simplemente porque ese caso no se puede presentar. Si f'/g' diverge en $+\infty$, existe $\alpha \in J$ tal que, para $x > \alpha$ se tiene $f'(x) \neq 0$, y también sabemos que $g'(x) \neq 0$. Deducimos que f'/g' tiene signo constante en $]\alpha, +\infty[$ luego diverge positiva o negativamente en $+\infty$.

Como aplicación de esta última versión de la regla de l'Hôpital, podemos volver a obtener la escala de infinitos, con un razonamiento más expeditivo que el usado en su momento. Dado $\rho \in \mathbb{R}^+$, podemos tomar $J = \mathbb{R}^+$, $f(x) = \log x$ y $g(x) = x^\rho$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Es claro que $f, g \in D(\mathbb{R}^+)$ con $g'(x) = \rho x^{\rho-1} \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Como g diverge en $+\infty$, se cumplen las hipótesis (a), (b) y (c.2) del resultado anterior. Tenemos claramente

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\rho x^\rho} = 0\,, \quad \text{luego} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^\rho} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

11.5. Ejercicios

1. Estudiar el comportamiento de la función $h : A \to \mathbb{R}$ en el punto α, en cada uno de los siguientes casos:

   (a) $A =]2, +\infty[\,,\quad h(x) = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2 - 4}} \quad \forall x \in A\,,\quad \alpha = 2$

   (b) $A =]1, +\infty[\backslash\{2\}\,,\quad h(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x + 3} - 1}{(x-2)\sqrt{x-1}} \quad \forall x \in A\,,\quad \alpha \in \{1\,, 2\}$

   (c) $A =]-1, 1[\backslash\{0\}\,,\quad h(x) = \dfrac{\log(1 - x^2)}{x^2 - x^4} \quad \forall x \in A\,,\quad \alpha \in \{-1\,, 0\,, 1\}$

   (d) $A =]-\pi/3, \pi/3[\backslash\{0\}\,,\quad h(x) = \dfrac{\sqrt[3]{2+x} - 2}{\operatorname{sen}(3x)} \quad \forall x \in A\,,\quad \alpha \in \{-\pi/3\,, 0\,, \pi/3\}$

   (e) $A =]-\pi/2, \pi/2[\backslash\{0\}\,,\quad h(x) = (\sec x)^{1/x^2} \quad \forall x \in A\,,\quad \alpha \in \{-\pi/2\,, 0\,, \pi/2\}$

2. Probar las siguientes igualdades:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + 2 - 2\sqrt{1+x^2}}{x^4} = \frac{1}{4}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 3x - 9 + 9\sqrt[3]{1+x}}{x^3} = \frac{5}{9}$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = 2$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{arc\,tg}(x/2)}{(\cos x)\operatorname{sen}^3(2x)} = \frac{1}{16}$

3. Sea $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ una función derivable en $\mathbb{R}_0^+$ y supongamos que f' es continua en 0. Estudiar la derivabilidad de las extensiones par e impar de f, es decir, de las funciones $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por:

   $$\varphi(x) = f\big(|x|\big) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi(x) = (\operatorname{sgn} x)\, f\big(|x|\big) \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \psi(0) = f(0)$$

   ¿Se puede obtener la misma conclusión, sin suponer que f' sea continua en 0?

4. Estudiar el comportamiento en $+\infty$ de la función $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por la igualdad que en cada caso se indica, válida para todo $x \in \mathbb{R}^+$:

   (a) $h(x) = \sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{1+x^3}$ (b) $h(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}$

   (c) $h(x) = \left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2+1}\right)^{(x^3+2)/x}$ (d) $h(x) = \left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x\right)^{1/\log(x+1)}$

5. Sea I un intervalo no mayorado y $h \in D(I)$. Supongamos que la función $h + h'$ tiene límite en $+\infty$. Probar que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h'(x) = 0$.

Tema 12

Derivadas sucesivas

El proceso de derivación de funciones reales de variable real puede obviamente iterarse, obteniendo la segunda y sucesivas derivadas de una función. Como es lógico, para $n \in \mathbb{N}$, la definición de la derivada n-ésima de una función ha de hacerse por inducción. En este tema extendemos las reglas de derivación para que nos permitan estudiar la existencia de las derivadas sucesivas de una función y, cuando sea posible, calcularlas. Aparecerán de esta forma nuevos espacios de funciones cuya estructura iremos analizando.

12.1. Definición de las derivadas sucesivas

Recordemos la definición de la derivada de una función $f : A \to \mathbb{R}$, que en adelante se denotará también por $f^{(1)}$:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{x \in A \cap A' : f \text{ es derivable en } x\}, \quad \text{y si } A_1 \neq \emptyset, \\ f^{(1)} &= f' : A_1 \to \mathbb{R}, \quad f^{(1)}(x) = f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \quad \forall x \in A_1 \end{aligned}$$

Si $x \in A_1 \cap A_1'$ y f' es derivable en x, decimos que f es *dos veces derivable* en x. La derivada de f' en x recibe el nombre de *segunda derivada* de f en x y se denota lógicamente por $f''(x)$, o también por $f^{(2)}(x)$. Si ahora A_2 es el conjunto de los puntos de $A_1 \cap A_1'$ en los que f es dos veces derivable, y suponemos que $A_2 \neq \emptyset$, la función $f'' = f^{(2)} : A_2 \to \mathbb{R}$, que a cada punto $x \in A_2$ hace corresponder la segunda derivada de f en x, es la *función derivada segunda* de f. Así pues, tenemos:

$$\begin{aligned} A_2 &= \{x \in A_1 \cap A_1' : f' \text{ es derivable en } x\}, \quad \text{y si } A_2 \neq \emptyset, \\ f^{(2)} &= f'' : A_2 \to \mathbb{R}, \quad f^{(2)}(x) = f''(x) = \lim_{y \to x} \frac{f'(y) - f'(x)}{y - x} \quad \forall x \in A_2 \end{aligned}$$

Conviene resaltar que, para que tenga sentido plantearse la posible existencia de la derivada segunda de f en un punto x, es necesario que $x \in A_1 \cap A_1'$. Esto exige que f sea derivable, no sólo en el punto x, sino también en otros muchos puntos de $A \cap A'$.

En general, la definición de las sucesivas derivadas se hace por inducción, hemos definido la derivada segunda sólo para que se entienda mejor el proceso.

Sea pues $n \in \mathbb{N}$ y supongamos definida la función derivada n-ésima $f^{(n)} : A_n \to \mathbb{R}$. Cuando $x \in A_n \cap A_n'$ y $f^{(n)}$ es derivable en x, decimos que f es $n+1$ *veces derivable* en x, la derivada de $f^{(n)}$ en x recibe el nombre de $(n+1)$-*ésima derivada* de f en x, y se denota por $f^{(n+1)}(x)$. Así pues, $f^{(n+1)}(x) = \big(f^{(n)}\big)'(x)$. Si ahora A_{n+1} es el conjunto de puntos de $A_n \cap A_n'$ en los que f es $n+1$ veces derivable, cuando sea $A_{n+1} \neq \emptyset$, podemos considerar la *función derivada* $(n+1)$-*ésima* de f, es decir, la función $f^{(n+1)} : A_{n+1} \to \mathbb{R}$ que a cada punto de A_{n+1} hace corresponder la $(n+1)$-ésima derivada de f en dicho punto. En resumen:

$$A_{n+1} = \{x \in A_n \cap A_n' : f^{(n)} \text{ es derivable en } x\}, \quad \text{y si } A_{n+1} \neq \emptyset,$$

$$f^{(n+1)} : A_{n+1} \to \mathbb{R}, \quad f^{(n+1)}(x) = \lim_{y \to x} \frac{f^{(n)}(y) - f^{(n)}(x)}{y - x} \quad \forall x \in A_{n+1}$$

Por conveniencia de notación, para cualquier función $f : A \to \mathbb{R}$, es frecuente escribir $f^{(0)}$ para referirse a la propia función: $f^{(0)} = f$.

Es fácil adivinar que la mayoría de los resultados sobre derivadas sucesivas se probarán por inducción, obteniendo información sobre la derivada $(n+1)$-ésima de una función, a partir de su derivada n-ésima. A este respecto conviene aclarar que, aunque $f^{(n+1)}$ se ha definido por inducción como la primera derivada de $f^{(n)}$, también es la n-ésima derivada de f':

- *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función derivable en algún punto de $A \cap A'$ y sea $f' : A_1 \to \mathbb{R}$ la función derivada de f. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$, se verifica que $f^{(n+1)} = \big(f'\big)^{(n)}$. Más concretamente, el conjunto A_{n+1}, de los puntos en los que f es $n+1$ veces derivable, coincide con el conjunto de los puntos en los que f' es n veces derivable y, cuando dicho conjunto no es vacío, se tiene $f^{(n+1)}(x) = \big(f'\big)^{(n)}(x)$ para todo $x \in A_{n+1}$.*

Para aclarar el razonamiento, pongamos $B = A_1$ y $g = f'$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, la n-ésima derivada de g estará definida en un conjunto B_n. Pretendemos probar que $A_{n+1} = B_n$ y que, cuando dicho conjunto no es vacío, se tiene $f^{(n+1)}(x) = g^{(n)}(x)$ para todo $x \in A_{n+1}$.

El caso $n = 1$ es evidente: las igualdades $A_2 = B_1$ y $f'' = g'$ se verifican por definición de la segunda derivada. Razonando por inducción, suponemos que la igualdad entre funciones buscada, que presupone la igualdad entre sus conjuntos de definición, se verifica para $n \in \mathbb{N}$, y la comprobamos para $n+1$. Si el conjunto $A_{n+1} \cap A_{n+1}' = B_n \cap B_n'$ fuese vacío, no habría nada que demostrar, ya que $A_{n+2} = B_{n+1} = \emptyset$. En otro caso, para $x, y \in A_{n+1} \cap A_{n+1}' = B_n \cap B_n'$ con $y \neq x$, la hipótesis de inducción nos dice que

$$\frac{f^{(n+1)}(y) - f^{(n+1)}(x)}{y - x} = \frac{g^{(n)}(y) - g^{(n)}(x)}{y - x}$$

Por tanto, f es $n+2$ veces derivable en x si, y sólo si, g es $n+1$ veces derivable en x. Esto prueba ya que $A_{n+2} = B_{n+1}$, pero además, si dicho conjunto no es vacío y $x \in A_{n+2} = B_{n+1}$, la misma igualdad anterior nos dice también que $f^{(n+2)}(x) = g^{(n+1)}(x)$. ■

Naturalmente la observación anterior puede iterarse:

- *Sean $m,n \in \mathbb{N}$, $f : A \to \mathbb{R}$ una función m veces derivable en algún punto de $A \cap A'$, y sea $f^{(m)} : A_m \to \mathbb{R}$ la función derivada m-ésima de f. Entonces $f^{(n+m)} = \left(f^{(m)}\right)^{(n)}$. Más concretamente, el conjunto A_{n+m}, de los puntos en los que f es $n+m$ veces derivable, coincide con el conjunto de los puntos en los que $f^{(m)}$ es n veces derivable y, cuando dicho conjunto no es vacío, se tiene $f^{(n+m)}(x) = \left(f^{(m)}\right)^{(n)}(x)$ para todo $x \in A_{n+m}$.*

Acabamos de comprobar el caso $m = 1$ y, suponiendo que el resultado es cierto para $m \in \mathbb{N}$, es fácil probarlo para $m+1$. Si entendemos que cualquier igualdad entre funciones presupone la igualdad entre sus conjuntos de definición, el razonamiento se puede indicar brevemente:

$$f^{(n+m+1)} = \left(f^{(n+m)}\right)' = \left[\left(f^{(m)}\right)^{(n)}\right]' = \left[\left(f^{(m)}\right)'\right]^{(n)} = \left(f^{(m+1)}\right)^{(n)} \qquad \blacksquare$$

Resaltemos ahora que las derivadas sucesivas tienen, como la primera, carácter local:

- *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función y sea B un subconjunto no vacío de A. Supongamos que para cada $b \in B$ existe un $\delta > 0$ tal que $A \cap]b-\delta, b+\delta[\subset B$. Entonces, para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$ y $x \in B$, f es n veces derivable en x, si, y sólo si, $f|_B$ es n veces derivable en x, en cuyo caso se tiene $(f|_B)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)$.*

Para simplificar la notación, pongamos $g = f|_B$. La demostración por inducción no presenta dificultad, salvo que debemos ser cuidadosos con los conjuntos de definición de las sucesivas derivadas de f y de g. El caso $n = 1$ no es más que el carácter local del concepto de (primera) derivada. Supuesto que el resultado es cierto para $n \in \mathbb{N}$, sean C y D los conjuntos de definición de $f^{(n)}$ y $g^{(n)}$ respectivamente. La hipótesis de inducción nos dice que $D = C \cap B$ y que $g^{(n)} = f^{(n)}|_D$. La demostración estará completa tan pronto como comprobemos que se puede aplicar el carácter local de la (primera) derivada a las funciones $f^{(n)}$ y $g^{(n)}$. Para ello, bastará ver que C y D está relacionados de la misma forma que lo estaban A y B, pero esto es fácil: dado $d \in D$, como $d \in B$, sabemos que existe $\delta > 0$ tal que $A \cap]d-\delta, d+\delta[\subset B$, pero entonces está claro que $C \cap]d-\delta, d+\delta[\subset C \cap B = D$. $\blacksquare$

12.2. Nuevos espacios de funciones

Ha quedado claro que la definición de las derivadas sucesivas tiene sentido para funciones definidas en conjuntos bastante arbitrarios. Sin embargo, este contexto general puede resultar demasiado problemático: el conjunto A_n en el que está definida la función derivada n-ésima va reduciéndose al aumentar n porque, ni los puntos aislados de A_n, ni los puntos de acumulación de A_n en los que $f^{(n)}$ no sea derivable, pueden pertenecer al conjunto A_{n+1}. Para evitar este tipo de complicaciones, y como ya hicimos con la primera derivada, trabajaremos con funciones definidas en un conjunto A sin puntos aislados, es decir, $A \subset A'$, suponiendo la existencia de cada derivada en todos los puntos de A, antes de estudiar la derivada siguiente. De esta forma, la función de partida, y las sucesivas derivadas que vayamos considerando, estarán todas definidas en el mismo conjunto A. Nos interesa sobre todo el caso en que A es un intervalo no trivial, pero usaremos también ciertas uniones de intervalos no triviales, como por ejemplo $A = \mathbb{R}^*$.

Así pues, para $A \subset \mathbb{R}$, con $\emptyset \neq A \subset A'$, y $n \in \mathbb{N}$, denotamos por $D^n(A)$ al conjunto de todas las funciones de A en $\mathbb{R}$ que son n veces derivables en todo punto de A. Coherentemente, $D^0(I)$ será el conjunto de todas las funciones de A en $\mathbb{R}$. Obsérvese que $D^1(A)$ no es otra cosa que el conjunto de las funciones derivables en A, que hasta ahora habíamos denotado simplemente por $D(A)$. Para $f \in D^n(A)$ y $k \in \mathbb{Z}$ con $0 \leqslant k \leqslant n$, tenemos que $f^{(k)} \in D^{n-k}(A)$. En particular, cuando $k < n$, $f^{(k)}$ es continua, cosa que puede no ocurrir para $k = n$.

Decimos que $f : A \to \mathbb{R}$ es una función *de clase* C^n en A cuando $f \in D^n(A)$ y $f^{(n)}$ es continua en A. Denotamos por $C^n(A)$ al conjunto de todas las funciones de clase C^n en A. Ahora $C^0(A)$ será el conjunto de todas las funciones continuas de A en $\mathbb{R}$, que hasta ahora veníamos denotando por $C(A)$. También hemos manejado anteriormente el conjunto $C^1(A)$. De nuevo, para $f \in C^n(A)$ y $k \in \mathbb{Z}$ con $0 \leqslant k \leqslant n$, tenemos que $f^{(k)} \in C^{n-k}(A)$.

En sentido contrario, para $m,n \in \mathbb{N}$, es claro que si $f \in D^m(A)$ y $f^{(m)} \in D^n(A)$, entonces $f \in D^{m+n}(A)$. Si de hecho fuese $f^{(m)} \in C^n(A)$ tendríamos $f \in C^{m+n}(A)$.

Decimos finalmente que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es *indefinidamente derivable* en A, o bien que f es *de clase* C^∞ en A, cuando $f \in D^n(A)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y denotamos por $C^\infty(A)$ al conjunto de todas las funciones de clase C^∞ en A. Así pues:

$$C^\infty(A) = \bigcap_{n=1}^{\infty} D^n(A) = \bigcap_{n=1}^{\infty} C^n(A)$$

Si $f \in C^\infty(A)$, es obvio que $f^{(k)} \in C^\infty(A)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Recíprocamente, también es claro que si, para algún $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $f \in D^k(A)$ y $f^{(k)} \in C^\infty(A)$, entonces $f \in C^\infty(A)$.

Una primera relación entre los conjuntos de funciones recién definidos es bastante evidente: para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$D^0(A) \supset C^0(A) \supset D^n(A) \supset C^n(A) \supset D^{n+1}(A) \supset C^{n+1}(A) \supset C^\infty(A) \tag{1}$$

Se suele decir que, al situar una función en alguno de los conjuntos anteriores, cuantificamos su *regularidad*, entendiendo que una función es tanto más regular cuanto mayor sea el número n de derivadas que sabemos admite, teniendo también en cuenta si la derivada n-ésima es continua o no. Cabe preguntarse si existen funciones que tengan exactamente un grado de regularidad prefijado, es decir, si las inclusiones que aparecen en (1) son estrictas. Es obvio que $D^0(A) \neq C^0(A) \neq D^1(A)$. Cuando $A = I$ es un intervalo no trivial, también sabemos que $D^1(I) \neq C^1(I)$. El teorema fundamental del cálculo nos permitirá probar enseguida que todas las demás inclusiones también son estrictas.

- *Sea I un intervalo no trivial y $f \in C^0(I)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una función $F_n \in D^n(I)$ tal que $F_n^{(n)} = f$. De hecho, es claro que $F_n \in C^n(I)$.*

La demostración por inducción es inmediata. El teorema fundamental del cálculo resuelve el caso $n = 1$, F_1 puede ser cualquier integral indefinida de f. Obtenida $F_n \in D^n(I)$ tal que $F_n^{(n)} = f$, como F_n es continua, podemos volver a aplicar el teorema fundamental del cálculo, obteniendo $F_{n+1} \in D^1(I)$ tal que $F'_{n+1} = F_n$, con lo que $F_{n+1} \in D^{n+1}(I)$ y $F_{n+1}^{(n+1)} = f$. ■

Obsérvese que la construcción de la función F_n nos lleva a *iterar* el proceso de integración. Por ejemplo, fijado un punto $a \in I$, podemos tomar:

$$F_2(x) = \int_a^x \left(\int_a^t f(s)\, ds \right) dt \quad \forall x \in I$$

El siguiente paso para aclarar las inclusiones que aparecen en (1) es inmediato, si elegimos adecuadamente la función continua f, conseguiremos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, la función F_n que nos da el resultado anterior, tenga las propiedades deseadas:

- *Si I es un intervalo no trivial, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene $C^{n-1}(I) \neq D^n(I) \neq C^n(I)$, es decir: existen funciones de clase C^{n-1} en I que no son n veces derivables en I, y también existen funciones n veces derivables en I que no son de clase C^n en I.*

Partimos del caso conocido $n = 1$: fijado $a \in I$ usaremos las funciones $g, h : I \to \mathbb{R}$ dadas por

$$g(x) = (x-a)\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x-a} \quad \forall x \in I \setminus \{a\}, \quad g(a) = 0 \quad \text{y} \quad h(x) = (x-a)\,g(x) \quad \forall x \in I$$

Sabemos que $g \in C^0(I) \setminus D^1(I)$ mientras que $h \in D^1(I) \setminus C^1(I)$. Para $n > 1$, el resultado anterior nos proporciona funciones $G, H \in D^{n-1}(I)$ tales que $G^{(n-1)} = g$ y $H^{(n-1)} = h$. Es claro que $G \in C^{n-1}(I) \setminus D^n(I)$ mientras que $H \in D^n(I) \setminus C^n(I)$. ■

El razonamiento anterior prueba la existencia de funciones que verifican las condiciones requeridas, es decir, que tienen exactamente el grado de regularidad que queramos, pero no las muestra de manera explícita. Más adelante veremos ejemplos concretos.

12.3. Sumas, productos y cocientes

En lo sucesivo, para evitar repeticiones, A será siempre un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, sin puntos aislados, es decir, $A \subset A'$. Vamos a obtener fácilmente, siempre por inducción, las reglas básicas para estudiar la derivabilidad sucesiva de una función. Iremos comprobando que, para cada $n \in \mathbb{N}$, los conjuntos $D^n(A)$ y $C^n(A)$ se mantienen estables mediante diversas operaciones con funciones reales de variable real. Como consecuencia, igual le ocurre a $C^\infty(A)$. Empezamos con las derivadas sucesivas de una combinación lineal de funciones.

- *Si $n \in \mathbb{N}$, $f, g \in D^n(A)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha f + \beta g \in D^n(A)$ con*

$$(\alpha f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)} \tag{2}$$

Por tanto, si $f, g \in C^n(A)$ será $\alpha f + \beta g \in C^n(A)$, mientras que si $f, g \in C^\infty(A)$, será $\alpha f + \beta g \in C^\infty(A)$. Así pues, los conjuntos $D^n(A)$, $C^n(A)$ y $C^\infty(A)$ tienen estructura de espacio vectorial: son subespacios vectoriales de $D^0(A)$.

La demostración por inducción, partiendo del caso conocido $n=1$, es clara. Para abreviar la notación, pongamos $h=\alpha f+\beta g$. Si $f,g\in D^{n+1}(A)$, tenemos en particular que $f,g\in D^{n}(A)$, con lo que la hipótesis de inducción nos dice que $h\in D^{n}(A)$ verificándose (2). Es claro entonces que $h^{(n)}\in D^{1}(A)$, luego $h\in D^{n+1}(A)$ y tenemos

$$h^{(n+1)}=\left[h^{(n)}\right]'=\alpha\left(f^{(n)}\right)'+\beta\left(g^{(n)}\right)'=\alpha f^{(n+1)}+\beta g^{(n+1)} \qquad \blacksquare$$

Con un poco más esfuerzo, obtenemos una fórmula explícita para las derivadas sucesivas de un producto, que se conoce como *Regla de Leibniz* y recuerda claramente la fórmula del binomio de Newton.

- *Si $n\in\mathbb{N}$ y $f,g\in D^{n}(A)$, entonces $fg\in D^{n}(A)$ con*

$$(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k)} \tag{3}$$

Por tanto, si $f,g\in C^{n}(A)$ se tiene $fg\in C^{n}(A)$, y si $f,g\in C^{\infty}(A)$, será $fg\in C^{\infty}(A)$. Así pues, $D^{n}(A)$, $C^{n}(A)$ y $C^{\infty}(A)$ son subanillos de $D^{0}(A)$.

De nuevo razonamos por inducción, pues para $n=1$ la regla de Leibniz no es más que la regla ya conocida para la primera derivada del producto. Si $f,g\in D^{n+1}(A)$, tenemos en particular que $f,g\in D^{n}(A)$, con lo que la hipótesis de inducción nos dice que $fg\in D^{n}(A)$ verificándose (3). Puesto que, para $k=0,1,\ldots,n$, las funciones $f^{(n-k)}$ y $g^{(k)}$ son derivables en A, deducimos que $(fg)^{(n)}$ es derivable en A, es decir, fg es $n+1$ veces derivable en A. Usando la regla para la primera derivada de sumas y productos tenemos:

$$\begin{aligned}(fg)^{(n+1)}&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[f^{(n-k+1)}g^{(k)}+f^{(n-k)}g^{(k+1)}\right]\\ &=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k+1)}g^{(k)}+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}f^{(n-k+1)}g^{(k)}\\ &=f^{(n+1)}g^{(0)}+\sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right]f^{(n-k+1)}g^{(k)}+f^{(0)}g^{(n+1)}\\ &=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(n+1-k)}g^{(k)}\end{aligned}$$

que es la regla de Leibniz para la derivada $(n+1)$-ésima. $\blacksquare$

Abundan ya los ejemplos de funciones indefinidamente derivables: *toda función polinómica en A es de clase C^{∞} en A*. Más adelante calcularemos con detalle las sucesivas derivadas de las funciones polinómicas. Veamos ahora lo que ocurre con los cocientes:

- *Sean $f,g:A\to\mathbb{R}$ y supongamos que $g(x)\neq 0$ para todo $x\in A$. Si $n\in\mathbb{N}$ y $f,g\in D^{n}(A)$, entonces $f/g\in D^{n}(A)$. Si $f,g\in C^{n}(A)$ se tiene $f/g\in C^{n}(A)$, luego si $f,g\in C^{\infty}(A)$, será $f/g\in C^{\infty}(A)$.*

Razonamos una vez más por inducción, partiendo del caso conocido $n = 1$, pero a poco que se piense, el razonamiento no puede ser tan sencillo como el que hemos usado para sumas y productos, porque no tenemos una fórmula explícita para la derivada n-ésima del cociente. La clave para salvar esta dificultad consiste en observar que la afirmación que queremos probar por inducción, que obviamente depende de un número natural n, es una implicación. Teniendo siempre presente que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in A$, pues esta condición no depende de n, la implicación buscada es

$$f,g \in D^n(A) \implies f/g \in D^n(A) \qquad (*)$$

Así pues, suponiendo que esta implicación es cierta, debemos probar que sigue siendo cierta al sustituir n por $n+1$, luego dadas $f,g \in D^{n+1}(A)$ deberemos probar que $f/g \in D^{n+1}(A)$. Pero es importante tener claro que la hipótesis de inducción es la implicación $(*)$, que puede usarse para f y g, o para cualquier otra pareja de funciones que nos pueda interesar.

Pues bien, si $f,g \in D^{n+1}(A)$, sabemos que $f/g \in D(A)$ con

$$(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Puesto que $f,g,f',g' \in D^n(A)$, los resultados anteriores sobre sumas y productos nos dicen que $f'g - fg' \in D^n(A)$ y también $g^2 \in D^n(A)$. Por tanto, la hipótesis de inducción, aplicada a las funciones $f'g - fg'$ y g^2, nos dice que $(f/g)' \in D^n(A)$, es decir, que $f/g \in D^{n+1}(A)$.

Para funciones de clase C^n, la inducción es completamente análoga. Si $f,g \in C^1(A)$, es claro que $(f/g)'$ es continua en A, luego $f/g \in C^1(A)$ y tenemos probado el caso $n = 1$. Suponiendo que el resultado es cierto para un $n \in \mathbb{N}$, para $f,g \in C^{n+1}(A)$, obtenemos que $f'g - fg' \in C^n(A)$ y que $g^2 \in C^n(A)$, y la hipótesis de inducción nos da $(f/g)' \in C^n(A)$, es decir, $f/g \in C^{n+1}(A)$. ■

Como consecuencia inmediata de los resultados anteriores, tenemos:

- *Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función racional, entonces $f \in C^\infty(A)$ y todas las derivadas de f son funciones racionales.*

Que $f \in C^\infty(A)$ es consecuencia de los resultados anteriores, pues se trata de un cociente de dos funciones polinómicas. Que $f^{(n)}$ es una función racional para todo $n \in \mathbb{N}$, se prueba por inducción, de manera obvia. ■

12.4. Composición y función inversa

Obtenemos ahora fácilmente una versión de la regla de la cadena para funciones varias veces derivables, pero tampoco tendremos una fórmula explícita para las derivadas sucesivas de una composición de funciones.

- *Sean A y B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ tales que $A \subset A'$ y $B \subset B'$, y consideremos dos funciones $f : A \to B$ y $g : B \to \mathbb{R}$. Si $f \in D^n(A)$ y $g \in D^n(B)$ entonces $g \circ f \in D^n(A)$. Si $f \in C^n(A)$ y $g \in C^n(B)$ se tiene $g \circ f \in C^n(A)$. Por tanto, si $f \in C^\infty(A)$ y $g \in C^\infty(B)$, entonces $g \circ f \in C^\infty(A)$.*

El razonamiento, como siempre por inducción, es similar al que hemos hecho para el cociente. Si $f \in D^1(A)$ y $g \in D^1(B)$, sabemos que $g \circ f \in D^1(A)$ con

$$(g \circ f)' = (g' \circ f)\, f'$$

Si $f \in C^1(A)$ y $g \in C^1(B)$, de $f \in C^0(A)$ y $g' \in C^0(B)$ deducimos que $g' \circ f \in C^0(A)$ y como también $f' \in C^0(A)$, concluimos que $(g \circ f)' \in C^0(A)$, es decir, $g \circ f \in C^1(A)$, lo que completa el caso $n = 1$.

Para la etapa de inducción, suponiendo que $f \in D^{n+1}(A)$ y $g \in D^{n+1}(B)$, tenemos que $f \in D^n(A)$ y $g' \in D^n(B)$ luego la hipótesis de inducción, aplicada a las funciones f y g', nos dice que $g' \circ f \in D^n(A)$, pero también $f' \in D^n(A)$, luego $(g \circ f)' = (g' \circ f)f' \in D^n(A)$, es decir, $g \circ f \in D^{n+1}(A)$. Partiendo de $f \in C^{n+1}(A)$ y $g \in C^{n+1}(B)$, el mismo razonamiento nos hubiera llevado a $g \circ f \in C^{n+1}(A)$. ■

Completamos las reglas básicas de cálculo con la versión del teorema de la función inversa para las derivadas sucesivas.

- *Sea I un intervalo no trivial y $f \in D^1(I)$ con $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Consideremos el intervalo $J = f(I)$ y la función inversa $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$. Si $n \in \mathbb{N}$ y $f \in D^n(I)$, entonces $f^{-1} \in D^n(J)$. Si $f \in C^n(I)$ se tiene $f^{-1} \in C^n(J)$, y si $f \in C^\infty(I)$, será $f^{-1} \in C^\infty(J)$.*

Sabemos que $f^{-1} \in D^1(J)$ con

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Si $f \in C^1(I)$, de $f^{-1} \in C^0(J)$ y $f' \in C^0(I)$ deducimos claramente que $\left(f^{-1}\right)' \in C^0(J)$, es decir, $f^{-1} \in C^1(J)$, lo único que nos quedaba por ver en el caso $n = 1$.

De nuevo por inducción, si suponemos $f \in D^{n+1}(I)$, tenemos $f' \in D^n(I)$ y la hipótesis de inducción nos dice que $f^{-1} \in D^n(J)$. Aplicando entonces la regla de la cadena tenemos que $f' \circ f^{-1} \in D^n(J)$, de donde también $\left(f^{-1}\right)' \in D^n(J)$ y $f^{-1} \in D^{n+1}(J)$. De haber supuesto $f \in C^{n+1}(I)$, el mismo razonamiento nos hubiera dado $f^{-1} \in C^{n+1}(J)$. ■

12.5. Ejemplos

Pasamos a presentar abundantes ejemplos de funciones de clase C^∞ calculando, cuando sea posible, las sucesivas derivadas. Tras las funciones racionales, el primer ejemplo es inmediato:

- *La exponencial es de clase C^∞ en $\mathbb{R}$ y todas sus derivadas coinciden con ella misma.*

Aplicando la versión del teorema de la función inversa recién obtenida, deducimos que el logaritmo es de clase C^∞ en $\mathbb{R}^+$. Alternativamente, podemos pensar que la primera derivada del logaritmo es una función racional. Conviene calcular explícitamente todas las derivadas del logaritmo:

- *El logaritmo es una función de clase C^∞ en $\mathbb{R}^+$ y se verifica que:*

$$\log^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{4}$$

En efecto, la igualdad (4) es conocida para $n = 1$ y, suponiendo que se verifica para un $n \in \mathbb{N}$, tenemos

$$\log^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!\,(-n)\,x^{-n-1} = \frac{(-1)^{n+2}\,n!}{x^{n+1}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \qquad \blacksquare$$

Teniendo en cuenta que, para $\alpha \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}^+$, se tiene por definición, $x^\alpha = \exp(\alpha \log x)$, los resultados anteriores nos permiten deducir que cualquier función potencia es de clase C^∞ en $\mathbb{R}^+$. Calculamos también fácilmente todas sus derivadas:

- *Fijado $\alpha \in \mathbb{R}$, pongamos $f_\alpha(x) = x^\alpha$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Entonces $f_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$, con*

$$f_\alpha^{(n)}(x) = \left(\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha - k)\right) x^{\alpha-n} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{5}$$

Que $f_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ ya se ha comentado y (5) se comprueba fácilmente por inducción. $\blacksquare$

Vamos ahora con las funciones trigonométricas:

- *El seno y el coseno son funciones de clase C^∞ en $\mathbb{R}$ y, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene*

$$\operatorname{sen}^{(n)}(x) = \operatorname{sen}(x + n\pi/2), \qquad \cos^{(n)}(x) = \cos(x + n\pi/2) \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{6}$$

Comprobamos por inducción que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene $\operatorname{sen}, \cos \in D^n(\mathbb{R})$ y se cumple (6). Para $n = 1$ basta observar que

$$\operatorname{sen}'(x) = \cos x = \operatorname{sen}(x + \pi/2), \quad \cos'(x) = -\operatorname{sen} x = \cos(x + \pi/2) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Suponiendo que el resultado buscado es cierto para un $n \in \mathbb{N}$, (6) nos dice claramente que $\operatorname{sen}, \cos \in D^{n+1}(\mathbb{R})$ y que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^{(n+1)}(x) &= \cos\big(x + n\pi/2\big) = \operatorname{sen}\big(x + (n+1)\pi/2\big) \\ \cos^{(n+1)}(x) &= -\operatorname{sen}\big(x + n\pi/2\big) = \cos\big(x + (n+1)\pi/2\big) \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, que es (6) para $n+1$ en lugar de n. $\blacksquare$

Podemos ya asegurar que las funciones trigonométricas que se obtienen como cocientes que involucran el seno y el coseno, son de clase C^∞.

- *La tangente, la secante, la cotangente y la cosecante son funciones de clase C^∞ es sus respectivos conjuntos de definición. Concretamente, si $A = \mathbb{R} \setminus \{(2k-1)\pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$ y $B = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, se tiene que $\operatorname{tg}, \sec \in C^\infty(A)$ y que $\operatorname{cotg}, \operatorname{cosec} \in C^\infty(B)$.*

Aunque no hay una fórmula explícita para las derivadas de estas funciones, podemos dar una descripción que frecuentemente resulta útil. Lo haremos sólo para la tangente, las otras tres admiten un tratamiento similar.

- *Para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene*

$$\operatorname{tg}^{(n)}(x) = P_n(\operatorname{tg} x) \quad \forall x \in A = \mathbb{R} \setminus \{(2k-1)\pi/2 : k \in \mathbb{Z}\} \tag{7}$$

donde $\{P_n\}$ es la sucesión de polinomios definida inductivamente por

$$P_1(y) = 1 + y^2, \quad P_{n+1}(y) = P_n'(y)\,(1 + y^2) \quad \forall y \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

El caso $n = 1$ es conocido y suponiendo (7) para un $n \in \mathbb{N}$, la regla de la cadena nos da:

$$\operatorname{tg}^{(n+1)}(x) = P_n'(\operatorname{tg} x)\,(1 + \operatorname{tg}^2(x)) = P_{n+1}(\operatorname{tg} x) \quad \forall x \in A \qquad \blacksquare$$

El arco-tangente admite un tratamiento similar:

- *El arco-tangente es una función de clase C^∞ en $\mathbb{R}$ y, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene*

$$\operatorname{arc\,tg}^{(n)}(x) = \frac{Q_n(x)}{\left(1 + x^2\right)^n} \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{8}$$

donde $\{Q_n\}$ es la sucesión de polinomios definida inductivamente por

$$Q_1(x) = 1, \quad Q_{n+1}(x) = Q_n'(x)(1 + x^2) - 2nxQ_n(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

La derivada del arco tangente es una función racional, luego $\operatorname{arc\,tg} \in C^\infty(\mathbb{R})$. Suponiendo (8) para un $n \in \mathbb{N}$ tenemos claramente

$$\operatorname{arc\,tg}^{(n+1)}(x) = \frac{Q_n'(x)}{(1 + x^2)^n} - \frac{2nxQ_n(x)}{(1 + x^2)^{n+1}} = \frac{Q_{n+1}(x)}{(1 + x^2)^{n+1}} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \blacksquare$$

Veamos las dos funciones trigonométricas que quedan por comentar:

- *El arco-seno y el arco-coseno son funciones de clase C^∞ en $]-1,1[$.*

Basta recordar que $\operatorname{arc\,sen}'(x) = -\operatorname{arc\,cos}'(x) = \left(1 - x^2\right)^{-1/2}$, para todo $x \in]-1,1[$, con lo que la regla de la cadena nos asegura que la primera derivada de ambas funciones es de clase C^∞ en $]-1,1[$, luego también $\operatorname{arc\,sen}, \operatorname{arc\,cos} \in C^\infty\big(]-1,1[\big)$. $\blacksquare$

Concluimos este tema con ejemplos explícitos de funciones que tienen exactamente cada grado de regularidad determinado. Dar un ejemplo concreto, para cada $n \in \mathbb{N}$, de una función de clase C^{n-1} en un intervalo, que no sea derivable n veces en dicho intervalo es fácil:

- *Para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = x^{n-1}\,|x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$, verifica que $f_n \in C^{n-1}(\mathbb{R}) \setminus D^n(\mathbb{R})$.*

La demostración por inducción no ofrece dificultad. Para la etapa base, f_1 es la función valor absoluto, continua en $\mathbb{R}$ pero no derivable en el origen. Supuesto cierto el resultado para un $n \in \mathbb{N}$, observamos que f_{n+1} es claramente derivable en $\mathbb{R}^*$ con

$$f'_{n+1}(x) = n x^{n-1} |x| + x^n \frac{|x|}{x} = (n+1) x^{n-1} |x| = (n+1) f_n(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

Ahora es claro que $\lim\limits_{x \to 0} f'_{n+1}(x) = 0$, luego f_{n+1} también es derivable en 0 con $f'_{n+1}(x) = 0$. Por tanto, $f_{n+1} \in D^1(\mathbb{R})$ y la igualdad $f'_{n+1}(x) = (n+1) f_n(x)$ es válida para todo $x \in \mathbb{R}$. Por la hipótesis de inducción, $f_n \in C^{n-1}(\mathbb{R}) \setminus D^n(\mathbb{R})$, luego $f_{n+1} \in C^n(\mathbb{R}) \setminus D^{n+1}(\mathbb{R})$. ■

Dar ejemplos explícitos, para cada $n \in \mathbb{N}$, de funciones n veces derivables en un intervalo que no sean de clase C^n en dicho intervalo es un poco más difícil. Recuérdese que el caso $n = 1$ ya requirió cierto esfuerzo. Inspirándonos en ese caso, conseguimos el resultado general.

- *Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos las funciones $g_n, h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por*

$$g_n(x) = x^{2n-1} \operatorname{sen}(1/x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad g_n(0) = 0$$
$$h_n(x) = x^{2n} \operatorname{sen}(1/x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad h_n(0) = 0$$

Se verifica que $g_n \in C^{n-1}(\mathbb{R}) \setminus D^n(\mathbb{R})$, mientras que $h_n \in D^n(\mathbb{R}) \setminus C^n(\mathbb{R})$.

Para comprobarlo necesitamos las funciones $\varphi_n, \psi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ análogas a las dadas, sólo que usando el coseno en vez del seno:

$$\varphi_n(x) = x^{2n-1} \cos(1/x) \;\; \forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad \varphi_n(0) = 0$$
$$\psi_n(x) = x^{2n} \cos(1/x), \;\; \forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad \psi_n(0) = 0$$

Probaremos por inducción que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$g_n, \varphi_n \in C^{n-1}(\mathbb{R}) \setminus D^n(\mathbb{R}) \quad \text{y} \quad h_n, \psi_n \in D^n(\mathbb{R}) \setminus C^n(\mathbb{R}) \tag{9}$$

El caso $n = 1$ es esencialmente conocido. Vimos en su momento que $g_1 \in C^0(\mathbb{R}) \setminus D^1(\mathbb{R})$ y el mismo razonamiento se usaría con φ_1. También vimos que $h_1 \in D^1(\mathbb{R}) \setminus C^1(\mathbb{R})$ y análogo razonamiento se aplicaría a ψ_1.

Suponiendo (9) para un $n \in \mathbb{N}$, debemos probarlo para $n+1$. Para ello calculamos la primera derivada de las cuatro funciones que nos interesan, cosa que no tiene dificultad:

$$\begin{aligned} g'_{n+1} &= (2n+1) h_n - \varphi_n, \qquad & \varphi'_{n+1} &= (2n+1)\psi_n + g_n \\ h'_{n+1} &= (2n+2) g_{n+1} - \psi_n, \qquad & \psi'_{n+1} &= (2n+2)\varphi_{n+1} + h_n \end{aligned} \tag{10}$$

La hipótesis de inducción nos dice que $h_n \in D^n(\mathbb{R}) \subset C^{n-1}(\mathbb{R})$ y también $\varphi_n \in C^{n-1}(\mathbb{R})$, con lo que usando (10) deducimos que $g'_{n+1} \in C^{n-1}(\mathbb{R})$, es decir, $g_{n+1} \in C^n(\mathbb{R})$. Si fuese $g_{n+1} \in D^{n+1}(\mathbb{R})$ tendríamos $g'_{n+1} \in D^n(\mathbb{R})$ y, puesto que también $h_n \in D^n(\mathbb{R})$, usando (10) tendríamos que $\varphi_n \in D^n(\mathbb{R})$ lo que contradice la hipótesis de inducción. En resumen, tenemos $g_{n+1} \in C^n(\mathbb{R}) \setminus D^{n+1}(\mathbb{R})$, que era la afirmación buscada para la función g_{n+1}. Análogamente se prueba que $\varphi_{n+1} \in C^n(\mathbb{R}) \setminus D^{n+1}(\mathbb{R})$.

El razonamiento con las funciones h_{n+1} y ψ_{n+1} es similar, salvo que no sólo usamos la hipótesis de inducción, sino también lo ya demostrado para g_{n+1} y φ_{n+1}. Sabemos que $g_{n+1} \in C^n(\mathbb{R}) \subset D^n(\mathbb{R})$ y la hipótesis de inducción nos dice que también $\psi_n \in D^n(\mathbb{R})$, luego de (10) deducimos que $h'_{n+1} \in D^n(\mathbb{R})$, es decir, $h_{n+1} \in D^{n+1}(\mathbb{R})$. Si fuese $h_{n+1} \in C^{n+1}(\mathbb{R})$, tendríamos $h'_{n+1} \in C^n(\mathbb{R})$ y, como también sabemos que $g_{n+1} \in C^n(\mathbb{R})$, de (10) deduciríamos que $\psi_n \in C^n(\mathbb{R})$, lo que contradice la hipótesis de inducción. Tenemos pues, para h_{n+1}, la conclusión buscada: $h_{n+1} \in D^{n+1}(\mathbb{R}) \setminus C^{n+1}(\mathbb{R})$.

Finalmente, sustituyendo en el razonamiento anterior g_{n+1} por φ_{n+1} y ψ_n por h_n llegamos para ψ_{n+1} a la misma conclusión obtenida para h_{n+1}: $\psi_{n+1} \in D^{n+1}(\mathbb{R}) \setminus C^{n+1}(\mathbb{R})$. Hemos obtenido así las cuatro afirmaciones que aparecen en (9) para $n+1$ en lugar de n. Queda pues completa la demostración por inducción. ■

12.6. Ejercicios

1. Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, estudiar la existencia y continuidad de las sucesivas derivadas de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \forall x \in \mathbb{R}^-, \qquad f(x) = \log(1+x) \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$

2. Dado $q \in \mathbb{N}$, estudiar la existencia y continuidad de las sucesivas derivadas de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 \sqrt[q]{|x|}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

3. Encontrar todas las funciones $f \in D^2(\mathbb{R})$ que verifiquen:
$$f''(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(0) = f(1) = 0$$

4. Probar que existe una única función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verificando que
$$\exp\big(f(x)\big) + f(x)^3 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
Probar también que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ y calcular $f''(1)$.

5. Describir un procedimiento que permita, operando solamente con polinomios, calcular las derivadas sucesivas que sean necesarias, de las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ y $g(x) = \sqrt{1+x^2}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

6. Si A es el conjunto de definición de la secante, definir inductivamente una sucesión $\{P_n\}$ de polinomios de forma que se tenga:
$$\sec^{(n)}(x) = \sec x \, P_n(\operatorname{tg} x) \quad \forall x \in A, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

7. Sea $f \in D^2(\mathbb{R})$ verificando:
$$f''(x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$
Probar que, si $f(0) = f'(0) = 0$, entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Deducir que, en cualquier caso, se tiene $f(x) = f(0) \cos x + f'(0) \operatorname{sen} x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Tema 13

Fórmula de Taylor

Igual que la derivabilidad de una función en un punto permitía aproximar la función por un polinomio de primer orden, la derivada n-ésima permitirá una aproximación aún mejor, mediante un polinomio de grado menor o igual que n, el *polinomio de Taylor de orden n* de la función dada, en el punto considerado. El error que se comete al hacer esta aproximación, es decir, la diferencia entre la función y su polinomio de Taylor, se conoce como *resto de Taylor*. La validez de la aproximación se cuantifica mediante la llamada *fórmula infinitesimal del resto*, que concreta la rapidez con la que el resto de Taylor tiende a cero en el punto en cuestión.

Una estimación aún más precisa se consigue mediante la llamada *fórmula de Taylor*, un resultado análogo al teorema del valor medio, pero involucrando las derivadas sucesivas de una función. Obtendremos diversas aplicaciones de la fórmula de Taylor, entre las que destacan los desarrollos en *serie de Taylor* de varias funciones elementales. Incluimos finalmente en este tema otros ejemplos de funciones de clase C^∞ en $\mathbb{R}$, que son útiles en contextos muy variados.

13.1. Polinomios de Taylor

Para motivar la definición, empecemos observando las derivadas sucesivas de una función polinómica $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de grado $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, que vendrá dada por $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ para todo $x \in \mathbb{R}$, para convenientes constantes $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, con $a_n \neq 0$. Fijado $a \in \mathbb{R}$ arbitrario, para cada $x \in \mathbb{R}$ podemos escribir $P(x)$ usando las sucesivas potencias de $x - a$ en vez de las de x. Basta observar que

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \left[(x-a)+a\right]^j = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j (x-a)^j \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

donde los coeficientes $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, se pueden obtener fácilmente, a partir de $a_0, \ldots, a_n$, mediante la fórmula del binomio de Newton, cosa que no será necesaria. Es claro, por ejemplo, que $\alpha_0 = P(a)$ y $\alpha_n = a_n$.

Si $1 \leqslant n$ (en otro caso P sería constante), se tiene

$$P'(x) = \sum_{j=1}^{n} j\,\alpha_j\,(x-a)^{j-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)\,\alpha_{j+1}\,(x-a)^j \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Para $2 \leqslant n$, deducimos que

$$P''(x) = \sum_{j=2}^{n} j(j-1)\,\alpha_j\,(x-a)^{j-2} = \sum_{j=0}^{n-2} (j+2)(j+1)\,\alpha_{j+2}\,(x-a)^j \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En general, para $k \leqslant n$ tendremos

$$P^{(k)}(x) = \sum_{j=k}^{n} \frac{j\,!}{(j-k)\,!}\,\alpha_j\,(x-a)^{j-k} = \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(j+k)\,!}{j\,!}\,\alpha_{j+k}\,(x-a)^j \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

cosa que se puede comprobar fácilmente por inducción.

En particular, cuando $k = n$ tenemos $P^{(n)}(x) = n\,!\,\alpha_n$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por tanto, si $k > n$, será $P^{(k)}(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Hemos obtenido explícitamente todas las derivadas de una función polinómica.

Por otra parte, tomando $x = a$ en (2), obtenemos

$$P^{(k)}(a) = k\,!\;\alpha_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, n) \tag{3}$$

Así pues, el polinomio P queda determinado cuando se conocen los valores de P y de sus n primeras derivadas en un sólo punto $a \in \mathbb{R}$. En concreto, en vista de (3) y (1) se tiene claramente

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k\,!}\,(x-a)^k \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R}$$

Pues bien, en el segundo miembro de esta igualdad, podemos sustituir las sucesivas derivadas de P en el punto a por las de cualquier función que sea n veces derivable en a, obteniendo un polinomio que no coincidirá con dicha función, pero podría ser una buena aproximación de la misma. Esto motiva la definición que sigue.

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Si f es al menos n veces derivable en un punto $a \in A$, podemos considerar la función polinómica $T_n[f\,,a]$ dada por:

$$T_n[f\,,a](x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k\,!}\,(x-a)^k \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

que se denomina *polinomio de Taylor de orden n de la función f en el punto a*, en honor del matemático inglés B. Taylor (1685-1731). Obsérvese que el grado de $T_n[f\,,a]$ es menor o igual que n, de ahí que digamos que es un polinomio de *orden* n como ya hicimos en el caso particular $n = 1$. En vista de la discusión anterior sobre las sucesivas derivadas de una función polinómica, observamos que $T_n[f\,,a]$ es el único polinomio P, de orden n, que verifica $P^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ para $0 \leqslant k \leqslant n$.

Obsérvese cómo se van obteniendo los sucesivos polinomios de Taylor: si f es dos veces derivable en el punto a, para todo $x \in \mathbb{R}$, se tendrá

$$\begin{aligned} T_0[f,a](x) &= f(a) \\ T_1[f,a](x) &= f(a) + f'(a)(x-a) \\ T_2[f,a](x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \big(f''(a)/2!\big)(x-a)^2 \end{aligned}$$

Por ejemplo, como la exponencial es una función de clase C^∞ en $\mathbb{R}$, con $\exp^{(k)}(a) = e^a$ para cualesquiera $a \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, escribimos enseguida todos sus polinomios de Taylor:

$$T_n[\exp,a](x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^a}{k!}(x-a)^k \quad \forall x,a \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Para valorar la posible aproximación de una función mediante su polinomio de Taylor de un cierto orden, deberemos estimar la diferencia entre ambos. Así pues, suponiendo de nuevo que $f : A \to \mathbb{R}$ es n veces derivable en el punto $a \in A$, con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, consideramos la función $R_n[f,a] : A \to \mathbb{R}$ definida por

$$R_n[f,a](x) = f(x) - T_n[f,a](x) \quad \forall x \in A$$

que recibe el nombre de *resto de Taylor de orden n de la función f en el punto a*.

Como se ha comentado, el resto de Taylor nos dirá si $T_n[f,a]$ es una buena aproximación de la función f. Cuando $n = 0$, con sólo suponer que f es continua en a, tenemos

$$\lim_{x \to a} R_0[f,a](x) = \lim_{x \to a} \big(f(x) - f(a)\big) = 0$$

Más interesante es el caso $n = 1$: si f es derivable en a, tenemos

$$\lim_{x \to a} \frac{R_1[f,a](x)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} = 0$$

Intuitivamente, decíamos en su momento que el resto $R_1[f,a]$ tiende a cero en el punto a más rápidamente que $x-a$, algo mejor que lo dicho para $R_0[f,a]$. En general, cabe esperar que al aumentar n, la aproximación de f mediante su polinomio de Taylor vaya mejorando, es decir, que el resto de Taylor vaya tendiendo a cero cada vez más rápidamente. Bajo ciertas condiciones podremos probar efectivamente este hecho y, para ello, usaremos la siguiente relación entre los polinomios de Taylor de una función y de su derivada.

- *Si $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ es $n+1$ veces derivable en un punto $a \in A$, se tiene:*

$$T_{n+1}[f,a]' = T_n[f',a]$$

La comprobación es inmediata: de la definición de $T_{n+1}[f,a]$ deducimos que

$$\begin{aligned} T_{n+1}[f,a]'(x) &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\, k\,(x-a)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(x-a)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{\big(f'\big)^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = T_n[f',a](x) \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, como se quería. ■

13.2. Fórmula infinitesimal del resto

Veamos ya en qué sentido podemos decir que el polinomio de Taylor de una función es una buena aproximación de la función, cerca del punto considerado. El siguiente resultado se conoce como *Teorema de Taylor*, y también como *Fórmula Infinitesimal del Resto*.

Teorema. *Sea I un intervalo no trivial, $n \in \mathbb{N}$ y $f \in D^{n-1}(I)$. Si f es n veces derivable en un punto $a \in I$, entonces*

$$\lim_{x \to a} \frac{R_n[f,a](x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_n[f,a](x)}{(x-a)^n} = 0 \tag{4}$$

Además, $T_n[f,a]$ es el único polinomio de orden n que verifica la última igualdad.

Demostración. La igualdad (4) se probará por inducción, partiendo del caso $n=1$ ya conocido. Supongamos demostrada dicha igualdad para un $n \in \mathbb{N}$ y, lo que es importante, para toda función que cumpla las hipótesis. Entonces, dada una función $f \in D^n(I)$ que sea $n+1$ veces derivable en a, probaremos (4), pero sustituyendo n por $n+1$.

Para ello aplicamos la regla de l'Hôpital, usando las funciones $\varphi, \psi : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$\varphi(x) = R_{n+1}[f,a](x), \qquad \psi(x) = (x-a)^{n+1} \qquad \forall x \in I \setminus \{a\}$$

Claramente, ambas son funciones derivables en $I \setminus \{a\}$, con $\psi'(x) = (n+1)(x-a)^n \neq 0$ para todo $x \in I \setminus \{a\}$ y se tiene evidentemente que $\lim_{x \to a} \varphi(x) = \lim_{x \to a} \psi(x) = 0$, luego se cumplen las hipótesis de la primera regla de l'Hôpital. Además, tenemos claramente

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{f'(x) - T_{n+1}[f,a]'(x)}{(n+1)(x-a)^n} = \frac{1}{n+1} \, \frac{R_n[f',a](x)}{(x-a)^n} \quad \forall x \in I \setminus \{a\}$$

donde hemos usado la relación entre los polinomios de Taylor de f y f'.

Puesto que $f' \in D^{n-1}(I)$ y f' es n veces derivable en a, la hipótesis de inducción se puede aplicar a la función f', obteniendo precisamente que

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{1}{n+1} \lim_{x \to a} \frac{R_n[f',a](x)}{(x-a)^n} = 0$$

Aplicando la regla de l'Hôpital concluimos que

$$\lim_{x \to a} \frac{R_{n+1}[f,a](x)}{(x-a)^{n+1}} = \lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0$$

Finalmente, si P es un polinomio de orden n tal que $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0$, deberemos probar que $P = T_n[f,a]$. Escribiendo $Q(x) = P(x) - T_n[f,a](x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k$ para todo $x \in \mathbb{R}$, con $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n \in \mathbb{R}$, deberemos ver que $\alpha_k = 0$ para $k = 0, 1, \ldots, n$.

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que alguno de esos coeficientes no se anula y sea $m = \text{mín}\,\big\{k \in \{0,1,\ldots,n\} : \alpha_k \neq 0\big\}$, con lo que $\alpha_k = 0$ para $0 \leqslant k < m$. Entonces, para $x \in \mathbb{R}\setminus\{a\}$ tenemos claramente

$$\frac{Q(x)}{(x-a)^m} = \sum_{k=m}^{n} \alpha_k\,(x-a)^{k-m}, \quad \text{luego} \quad \lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^m} = \alpha_m$$

Ahora bien, en vista de la hipótesis sobre P, y lo ya demostrado, tenemos también

$$\lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{\big(P(x)-f(x)\big) + \big(f(x)-T_n[f,a](x)\big)}{(x-a)^n} = 0$$

de donde obtenemos inmediatamente que

$$\alpha_m = \lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^m} = \lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n}\,(x-a)^{n-m} = 0$$

lo cual es una contradicción, ya que teníamos $\alpha_m \neq 0$. ■

El resultado anterior pone de manifiesto la utilidad de las derivadas sucesivas. Ha quedado claro que en el caso $n=1$ la fórmula infinitesimal del resto no es otra cosa que la definición de derivada, que nos dio en su momento una buena aproximación de una función, cerca de un punto donde sea derivable, mediante un único polinomio de primer orden, justo su polinomio de Taylor de primer orden en dicho punto.

Pues bien, ahora hemos obtenido un resultado análogo para $n \in \mathbb{N}$ arbitrario: suponiendo que una función f es $n-1$ veces derivable en un intervalo que contiene al punto a (la hipótesis restrictiva que nos ha permitido usar la regla de l'Hôpital) y n veces derivable en a, tenemos una buena aproximación de f, cerca del punto a, mediante un único polinomio de orden n, el polinomio de Taylor $T_n[f,a]$. Conforme n aumenta, será más laborioso calcular el polinomio de Taylor, pero mejoramos la aproximación obtenida, puesto que la diferencia $f - T_n[f,a]$ tiende a cero en el punto a más rápidamente que $(x-a)^n$.

Si en la igualdad (4), separamos el último sumando del polinomio de Taylor, la fórmula infinitesimal del resto toma la siguiente forma:

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_{n-1}[f,a](x)}{(x-a)^n} \tag{5}$$

Tenemos así una nueva expresión para la derivada n-ésima. A poco que se piense, si queremos calcular $f^{(n)}(a)$ mediante la definición de la derivada n-ésima, necesitamos conocer $f^{(k)}(x)$, al menos para todos los puntos x suficientemente cerca de a, y para $0 \leqslant k < n$. El interés de la igualdad (5) radica en que nos permite calcular $f^{(n)}(a)$, siempre que se cumplan las hipótesis de la fórmula infinitesimal del resto, conociendo solamente $f^{(k)}(a)$ para $0 \leqslant k < n$, que es lo único que necesitamos para conocer el polinomio de Taylor $T_{n-1}[f,a]$.

Mostraremos la utilidad práctica del teorema anterior, usando la función exponencial. Como $\exp \in C^\infty(\mathbb{R})$, la fórmula infinitesimal del resto nos dice que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^n}\left(e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^n}\,\big(\exp(x) - T_n[\exp,0](x)\big) = 0$$

Equivalentemente, usando (5) tenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^n}\left(e^x - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k\,!}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^n}\big(\exp(x) - T_{n-1}[\exp,0](x)\big) = \frac{\exp^{(n)}(0)}{n\,!} = \frac{1}{n\,!}$$

Por ejemplo, para $n=4$, tenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) = \frac{1}{24}$$

Nótese que, para calcular este último límite usando sólo la regla de l'Hôpital, tendríamos que aplicar dicha regla tres o cuatro veces. La fórmula infinitesimal del resto muestra así una utilidad práctica: permite resolver, en un sólo paso, indeterminaciones que requerirían aplicar la regla de l'Hôpital varias veces.

Conviene también resaltar que el teorema anterior nos da una caracterización del polinomio de Taylor, que a veces permite obtenerlo sin calcular todas las derivadas que involucra, e incluso deducir después el valor de dichas derivadas. Consideremos por ejemplo la función $f\in C^\infty(\mathbb{R})$ dada por

$$f(x) = \log(1+x^4) \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Para encontrar sus polinomios de Taylor en el origen, usaremos la siguiente función auxiliar

$$\varphi\in C^\infty\big(]-1,+\infty[\big),\quad \varphi(y) = \log(1+y) \quad \forall y\in]-1,+\infty[$$

Tenemos fácilmente $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)=1$ y $\varphi''(0)=-1$, luego

$$T_2[\varphi,0](y) = y - \frac{y^2}{2} \quad \forall y\in\mathbb{R}$$

y la fórmula infinitesimal del resto, aplicada a φ con $n=2$, nos da

$$\lim_{y\to 0}\frac{1}{y^2}\left(\log(1+y) - y + \frac{y^2}{2}\right) = 0$$

Si en este límite hacemos el cambio de variable $y=x^4$, obtenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^8}\left(\log(1+x^4) - x^4 + \frac{x^8}{2}\right) = 0$$

y de nuevo el teorema anterior, aplicado a f con $n=8$, nos dice que

$$T_8[f,0](x) = x^4 - \frac{x^8}{2} \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

No hemos tenido que calcular ocho derivadas de f, sino sólo dos derivadas de la mucho más sencilla función φ. Además, del polinomio de Taylor deducimos las ocho derivadas de f que involucra: $f^{(k)}(0)=0$ para $k=0,1,2,3$ y también para $k=5,6,7$, mientras que $f^{(4)}(0)=4!$ y $f^{(8)}(0)=-(8!/2)$.

13.3. Extremos relativos

La fórmula infinitesimal del resto permite detectar extremos relativos de algunas funciones: cuando se cumple una hipótesis no muy restrictiva, podemos sustituir la condición necesaria que sabemos deben cumplir los extremos relativos (primera derivada nula), por otra más fuerte, que ya es necesaria y suficiente.

- *Sea I un intervalo, $a \in I^\circ$, $n \in \mathbb{N}$ y $f \in D^{n-1}(I)$. Supongamos que $f^{(k)}(a) = 0$ para $1 \leqslant k < n$ y que f es n veces derivable en el punto a con $f^{(n)}(a) \neq 0$. Entonces:*

  (i) *Si n es par y $f^{(n)}(a) > 0$, f tiene un mínimo relativo en el punto a.*
  (ii) *Si n es par y $f^{(n)}(a) < 0$, f tiene un máximo relativo en a.*
  (iii) *Si n es impar, f no tiene un extremo relativo en a.*

  Por tanto, f tiene un extremo relativo en a si, y sólo si, n es par.

Al anularse en el punto a todas las derivadas anteriores a la n-ésima, el polinomio de Taylor de orden n de f en a es el siguiente:

$$T_n[f,a](x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por tanto, la fórmula infinitesimal del resto nos dice que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

y deducimos que, cerca del punto a, el cociente que aparece en el primer miembro tendrá el mismo signo que $f^{(n)}(a)$. Más concretamente, existe $\delta > 0$, que podemos tomar de forma que $]a-\delta, a+\delta[\subset I$, tal que

$$0 < |x-a| < \delta \implies \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n}\, f^{(n)}(a) > 0 \tag{6}$$

En el caso (i) deducimos que $f(x) \geqslant f(a)$ para todo $x \in]a-\delta, a+\delta[$, luego f tiene un mínimo relativo en el punto a. En el caso (ii) será $f(x) \leqslant f(a)$ para todo $x \in]a-\delta, a+\delta[$ y tenemos un máximo relativo. Para probar (iii), suponiendo de momento que $f^{(n)}(a) > 0$, de (6) deducimos que $f(x) < f(a)$ cuando $a - \delta < x < a$, mientras que $f(a) < f(x)$ para $a < x < a + \delta$, luego no puede haber un extremo relativo en a. Si $f^{(n)}(a) < 0$, lo anterior se aplica a $-f$, obteniendo la misma conclusión. ■

No se debe entender el resultado anterior como una caracterización de los extremos relativos de una función, pues sólo los caracteriza bajo hipótesis que no tienen por qué cumplirse. De entrada, una función puede tener un extremo relativo en un punto sin ser siquiera continua en dicho punto. También puede ocurrir, por ejemplo, que siendo $f \in D^1(I)$ con $f'(a) = 0$, f no sea dos veces derivable en a, y tampoco podemos usar el resultado anterior.

Aunque se verifiquen sus hipótesis, tampoco debemos entender el resultado anterior como una regla general que deba aplicarse siempre, pues con frecuencia es más fácil usar métodos que ya conocíamos.

Concretamente, supongamos que $f \in D^1(I)$ y, no sólo sabemos que $f'(a) = 0$, sino que conocemos los demás ceros de f', esto es, el conjunto $C = \{x \in I : f'(x) = 0\}$. Si a es un punto aislado de C, existirá $\delta > 0$ tal que, para $0 < |x-a| < \delta$, se tenga $x \in I$ con $f'(x) \neq 0$. Entonces f es estrictamente monótona tanto en $]a-\delta, a[$ como en $]a, a+\delta[$, y podremos decidir fácilmente si f tiene o no un extremo relativo en el punto a. Con frecuencia ocurre que el conjunto C es finito, luego todos sus puntos son aislados.

El interés del resultado anterior estriba en que permite decidir si a es un extremo relativo de f, sin conocer el conjunto C. Para ver un ejemplo, retocamos una función estudiada en el tema anterior, definiendo:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 + x^4 \operatorname{sen}(1/x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(0) = 0$$

Observamos que $f \in D^2(\mathbb{R})$ con $f'(0) = 0$ y $f''(0) = 2 > 0$, luego el resultado anterior, con $n = 2$, nos dice directamente que f tiene un mínimo relativo en el origen, sin necesidad de estudiar otros ceros de f'.

13.4. Fórmula de Taylor

La fórmula infinitesimal del resto cuantifica la rapidez con que el resto de Taylor de una función en un punto a tiende a cero en a, pero no da información sobre el valor de dicho resto en puntos distintos de a. Con hipótesis poco más restrictivas, vamos a obtener ahora una descripción del resto de Taylor que sí permite frecuentemente obtener esa información. Los resultados de este tipo se conocen con el nombre genérico de *Fórmulas de Taylor* y difieren unos de otros precisamente en la expresión concreta que ofrecen para el resto.

Teorema *(Fórmula de Taylor con resto de Lagrange). Sea I un intervalo no trivial y sea $f \in C^n(I) \cap D^{n+1}(I^\circ)$ con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces, para cualesquiera $a, x \in I$ con $a \neq x$, podemos escribir*

$$R_n[f, a](x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)\,!}\,(x-a)^{n+1}$$

donde c es un punto intermedio entre a y x: $\min\{a,x\} < c < \max\{a,x\}$.

Demostración. Sean $a, x \in I$ con $a \neq x$, que estarán fijos en todo el razonamiento, y sea $J = [\min\{a,x\}, \max\{a,x\}]$, intervalo que obviamente verifica $J \subset I$, $J^\circ \subset I^\circ$. Aplicaremos el teorema del valor medio generalizado a las siguientes funciones:

$$\varphi, \psi : J \to \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k\,!}\,(x-t)^k, \quad \psi(t) = -(x-t)^{n+1} \qquad \forall t \in J$$

En la suma que define a φ, cada sumando es el producto de una derivada $f^{(k)}$, con $0 \leqslant k \leqslant n$, por un polinomio. De ser $f \in C^n(I) \cap D^{n+1}(I^\circ)$, deducimos que $\varphi \in C^0(J) \cap D^1(J^\circ)$, mientras que $\psi \in C^\infty(J)$. El mencionado teorema nos da $c \in J^\circ$ verificando:

$$\big(\varphi(x) - \varphi(a)\big)\,\psi'(c) = \big(\psi(x) - \psi(a)\big)\,\varphi'(c) \qquad (7)$$

Todo lo que queda es traducir esta igualdad en términos de f. Empezamos por lo más fácil:

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \varphi(a) &= f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = R_n[f,a](x) \\ \psi(x) - \psi(a) &= (x-a)^{n+1}, \quad \psi'(c) = (n+1)(x-c)^n \end{aligned} \tag{8}$$

El cálculo de $\varphi'(c)$ tampoco es difícil. Para $t \in J$ tenemos:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= f'(t) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \end{aligned}$$

y, en particular

$$\varphi'(c) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n \tag{9}$$

Al sustituir (8) y (9) en (7), obtenemos:

$$(n+1)\,(x-c)^n R_n[f,a](x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n\,(x-a)^{n+1}$$

y la igualdad buscada se consigue dividiendo ambos miembros por $(n+1)\,(x-c)^n \neq 0$. ■

En el caso $n = 0$, la hipótesis del teorema anterior es $f \in C^0(I) \cap D^1(I^\circ)$ y la tesis que se obtiene es $f(x) - f(a) = f'(c)\,(x-a)$, que son precisamente la hipótesis y la tesis del teorema del valor medio. Así pues, podemos afirmar que la fórmula de Taylor generaliza el teorema del valor medio, de la misma forma que la fórmula infinitesimal del resto generalizaba la definición de derivada, en ambos casos involucrando derivadas sucesivas.

Como aplicación evidente de la Fórmula de Taylor, obtenemos la siguiente consecuencia, que también se podría probar directamente por inducción.

- *Sea I un intervalo no trivial y $f \in C^n(I) \cap D^{n+1}(I^\circ)$ con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Supongamos que $f^{(n+1)}(x) = 0$ para todo $x \in I^\circ$. Entonces f es una función polinómica de orden n.*

La aplicación práctica más habitual de la fórmula de Taylor consiste en estimar el error que se comete al tomar $T_n[f,a](x)$ como valor aproximado de $f(x)$, eligiendo adecuadamente n y un punto a en el que se conozcan los valores de f y de sus derivadas.

Como ejemplo ilustrativo sirve de nuevo la función exponencial. Supongamos que, sólo con papel y lápiz, queremos calcular $\sqrt[6]{e} = e^{1/6}$ con error menor que 10^{-4}. Usamos los polinomios de Taylor de la exponencial en 0, es decir, para $n \in \mathbb{N}$ conveniente, tomamos $T_n[\exp,0](1/6)$ como valor aproximado de $e^{1/6}$. El error cometido será $R_n[\exp 0](1/6)$ y la fórmula de Taylor nos da un $c \in]0,1/6[$ tal que:

$$R_n[\exp,0](1/6) = \frac{e^c}{(n+1)!}\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}$$

Por tanto, como $e^c < 2$, tendremos

$$0 < R_n[\exp, 0](1/6) < \frac{2}{(n+1)!\, 6^{n+1}} \tag{10}$$

Al ser $4! \cdot 6^4 > 2 \cdot 10^4$, para que el error sea menor que 10^{-4} basta tomar $n = 3$. Así pues, tenemos que

$$T_3[\exp, 0](1/6) = 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{2! \cdot 6^2} + \frac{1}{3! \cdot 6^3} = \frac{1531}{1296}$$

es una aproximación por defecto de $\sqrt[6]{e}$ con error menor que 10^{-4}.

Obsérvese que, variando n, podemos conseguir que el error sea tan pequeño como se quiera. La desigualdad (6), válida para todo $n \in \mathbb{N}$, prueba que $\{R_n[\exp, 0](1/6)\} \to 0$, o lo que es lo mismo, $\{T_n[\exp, 0](1/6)\} \to e^{1/6}$. En realidad lo que tenemos es la suma de una serie:

$$e^{1/6} = \lim_{n\to\infty} T_n[\exp, 0](1/6) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(1/6)^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/6)^n}{n!}$$

Como se puede adivinar, $1/6$ no tiene nada de especial, probaremos el mismo resultado para todo $x \in \mathbb{R}$ y obtendremos resultados análogos para otras funciones distintas de la exponencial.

13.5. La serie de Taylor

En lo que sigue, fijamos un intervalo no trivial I, una función $f \in C^\infty(I)$ y un punto $a \in I^\circ$. Supongamos que conocemos $f^{(n)}(a)$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y, usando los polinomios de Taylor de f en a, queremos calcular $f(x)$ para otros puntos $x \in I$. Es lo que acabamos de hacer con la exponencial para $a = 0$ y $x = 1/6$. Nos preguntamos si la sucesión $\{T_n[f, a](x)\}$ converge a $f(x)$, pero conviene ver dicha sucesión como una serie. Para cada $x \in \mathbb{R}$, diremos que la serie

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{11}$$

es la *serie de Taylor de la función f en el punto a, evaluada en x*. Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la $(n+1)$-ésima suma parcial de dicha serie es $T_n[f, a](x)$.

Propiamente hablando, si vemos x como la variable que se suele usar para definir funciones, la serie de Taylor de f en a es una *serie de funciones*, o si se quiere, una *sucesión de funciones*, la sucesión de los polinomios de Taylor de f en a. Pero no vamos a trabajar con sucesiones o series de funciones, simplemente nos limitamos a pensar que, para cada $x \in \mathbb{R}$, tenemos una serie de números reales.

Pues bien, para $x \in I$, nos preguntamos si se verifica o no la igualdad

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{12}$$

que obviamente exige que la serie de Taylor sea convergente.

Veremos ejemplos en los que esta igualdad se verifica para todo $x \in I$, o al menos en un cierto intervalo $J \subset I$ que verifica $a \in J^{\circ}$. Diremos entonces que f admite un *desarrollo en serie de Taylor centrado en el punto a y válido en el intervalo J*. En el extremo opuesto, también veremos ejemplos en los que la igualdad (12) sólo se verifica en el caso trivial $x = a$, con lo que la serie de Taylor resulta perfectamente inútil para estudiar la función f. Antes de presentar ambos tipos de ejemplos, analizamos un poco el problema general.

Fijado $x \in I \setminus \{a\}$ (el caso $x = a$ es trivial como hemos dicho) podemos aplicar la fórmula de Taylor obteniendo que, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{13}$$

donde $\min\{a,x\} < c_n < \max\{a,x\}$. Por tanto la igualdad (12) equivale a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = 0 \tag{14}$$

donde $\{c_n\}$ es la sucesión que ha aparecido en (13). Procede ahora una observación sencilla:

- *Para cualesquiera $a,x \in \mathbb{R}$, la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(x-a)^n}{n!}$ converge absolutamente, luego la sucesión $\{(x-a)^n/n!\}$ converge a cero.*

En efecto, si $x = a$ no hay nada que demostrar y en otro caso tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|(x-a)^{n+1}|\,/\,(n+1)!}{|(x-a)^n|\,/\,n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-a|}{n+1} = 0$$

con lo que basta aplicar el criterio del cociente. ■

Así pues, con vistas a (14), la sucesión $\{(x-a)^{n+1}/(n+1)!\}$ converge a cero, lo que nos indica una estrategia que tendrá éxito en varios casos: si la sucesión $\{f^{(n+1)}(c_n)\}$ está acotada, se verifica (14), luego también (12). En general, el problema es que dicha sucesión puede ser divergente, e incluso hacer que no se verifiquen (14) y (12). A veces ocurrirá que la serie de Taylor, evaluada en el punto x, no converge, otras veces dicha serie es convergente, pero su suma no coincide con $f(x)$.

13.6. Desarrollos de la exponencial, el seno y el coseno

La última discusión hace casi evidente lo que va a ocurrir con la función exponencial, así como con el seno y el coseno: las tres funciones van a admitir desarrollos en serie de Taylor, centrados en cualquier punto de la recta y válidos en todo $\mathbb{R}$. Ello se debe a que, cuando f es una de esas funciones, tenemos acotaciones de sus derivadas, que permiten probar (14), y por tanto (12), para cualesquiera $a,x \in \mathbb{R}$.

Empecemos con la función exponencial, tomando $a = 0$. Para $x \in \mathbb{R}^*$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ la fórmula de Taylor nos da

$$e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k\,!} = \frac{\exp^{(n+1)}(c_n)\, x^{n+1}}{(n+1)\,!} = \frac{e^{c_n}\, x^{n+1}}{(n+1)\,!}$$

donde $|c_n| < |x|$, luego $e^{c_n} \leqslant e^{|c_n|} \leqslant e^{|x|}$. Por tanto,

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k\,!} \right| \leqslant \frac{e^{|x|}\,|x|^{n+1}}{(n+1)\,!} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{15}$$

Puesto que $\{|x|^{n+1} / (n+1)\,!\} \to 0$, concluimos que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n\,!} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{16}$$

que es el desarrollo en serie de Taylor de la exponencial, centrado en el origen y válido en todo $\mathbb{R}$. Puede usarse para aproximarla con la exactitud que se desee, pues (15) permite acotar fácilmente el error que se comete al sustituir la suma de la serie por una suma parcial. Es lo que hicimos como ejemplo anteriormente, para $x = 1/6$ y $n = 3$.

El razonamiento anterior podría repetirse literalmente, sustituyendo el origen por cualquier otro punto $a \in \mathbb{R}$, pero no merece la pena, el resultado se puede deducir directamente de (16), usando la fórmula de adición:

- *Para cualesquiera $a, x \in \mathbb{R}$ se tiene:*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a}{n\,!}(x-a)^n$$

En efecto, basta pensar que:

$$e^x = e^a\, e^{x-a} = e^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n\,!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a}{n\,!}(x-a)^n \qquad \blacksquare$$

Hemos obtenido así el desarrollo en serie de Taylor de la función exponencial, centrado en cualquier punto $a \in \mathbb{R}$ y válido en todo $\mathbb{R}$. Para el seno y el coseno vamos a conseguir el mismo resultado, de forma aún más fácil. Fijados $a, x \in \mathbb{R}$ con $a \neq x$, la fórmula de Taylor nos dice que, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, podemos escribir

$$\operatorname{sen} x - \sum_{k=0}^{n} \frac{\operatorname{sen}\big(a + (k\pi/2)\big)}{k\,!}(x-a)^k = \frac{\operatorname{sen}\big(c_n + ((n+1)\pi/2)\big)}{(n+1)\,!}\,(x-a)^{n+1}$$

Sin importar cual sea la sucesión $\{c_n\}$, deducimos que

$$\left| \operatorname{sen} x - \sum_{k=0}^{n} \frac{\operatorname{sen}\big(a + (k\pi/2)\big)}{k\,!}(x-a)^k \right| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)\,!}$$

y basta aplicar una vez más que $\{|x-a|^{n+1} / (n+1)\,!\} \to 0$. Con el coseno el razonamiento es idéntico, y tenemos los desarrollos en serie de Taylor de ambas funciones:

- *Para cualesquiera $a, x \in \mathbb{R}$ se tiene:*

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\big(a + (n\pi/2)\big)}{n\,!}(x-a)^n\,, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\big(a + (n\pi/2)\big)}{n\,!}(x-a)^n \tag{17}$$

Obsérvese que, como ocurría con la exponencial, ambas series convergen absolutamente, para cualesquiera $a, x \in \mathbb{R}$. El caso $a = 0$ merece ser destacado:

- *Para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene* $\operatorname{sen} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)\,!}$ *y* $\cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)\,!}$

Si $k \in \mathbb{Z}$ es par, digamos $k = 2j$ con $j \in \mathbb{Z}$, sabemos que $\operatorname{sen}(k\pi/2) = \operatorname{sen}(j\pi) = 0$, mientras que $\cos(k\pi/2) = (-1)^j$. Si, por el contrario $k = 2j+1$ con $k \in \mathbb{Z}$, será $\operatorname{sen}(k\pi/2) = (-1)^j$ y $\cos(k\pi/2) = 0$.

Así pues, una vez expresadas las sumas de las series que aparecen en (17) como límites de apropiadas sumas finitas, podremos suprimir los sumandos que se anulan y simplificar los demás. Fijado $x \in \mathbb{R}$, para el seno tenemos:

$$\operatorname{sen} x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{\operatorname{sen}(k\pi/2)}{k\,!}x^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j x^{2j+1}}{(2j+1)\,!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)\,!}$$

Para el coseno, el razonamiento es análogo:

$$\cos x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2n} \frac{\cos(k\pi/2)}{k\,!}x^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j x^{2j}}{(2j)\,!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)\,!} \qquad \blacksquare$$

13.7. Desarrollos del logaritmo y el arco-tangente

Para estas funciones, en lugar de la fórmula de Taylor con resto de Lagrange, usaremos otra descripción del resto de Taylor, que resulta más sencilla y efectiva. Como $\log \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$, conviene hacer una traslación que nos permita trabajar en el origen. Concretamente, usamos el intervalo $I =]-1, +\infty[$ y la función $f \in C^\infty(I)$ dada por $f(x) = \log(1+x)$ para todo $x \in I$. Vamos a obtener el desarrollo en serie de Taylor de f centrado en el origen, del que fácilmente deduciremos desarrollos en serie del logaritmo centrados en cualquier punto de $\mathbb{R}^+$.

Aprovechando la relación entre los polinomios de Taylor de una función y de su derivada, empezaremos trabajando con la función $\varphi = f'$ que es una función racional: $\varphi(t) = 1/(1+t)$ para todo $t \in I$. En lugar de calcular las derivadas de φ en el origen, preferimos recordar cómo se estudió la serie geométrica de razón $-t$, claramente relacionada con φ. Para $t \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, escribimos

$$(1+t)\sum_{k=0}^{n-1}(-t)^k = \sum_{k=0}^{n-1}\big((-t)^k - (-t)^{k+1}\big) = 1 - (-t)^n$$

y deducimos claramente que

$$\varphi(t) = \frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k + \frac{(-1)^n t^n}{1+t} \qquad \forall\, t \in I \tag{18}$$

Hemos obtenido así los polinomios de Taylor de φ en el origen, pues vemos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t^{n-1}} \left(\varphi(t) - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k \right) = \lim_{t\to 0} \frac{(-1)^n t}{1+t} = 0$$

y la fórmula infinitesimal del resto nos dice que

$$T_{n-1}[\varphi, 0](t) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Así pues, en (18) tenemos la función φ expresada como suma de su polinomio de Taylor de orden $n-1$ en el origen, con el correspondiente resto de Taylor. No hemos necesitado calcular las sucesivas derivadas de φ en el origen y tenemos una expresión cómoda del resto, sin usar ninguna fórmula de Taylor. Esto no nos debe extrañar, en este caso el resto de Taylor es la diferencia entre una función racional y un polinomio, luego es otra función racional, que hemos calculado fácilmente.

Observamos, por tanto, que la serie de Taylor de φ en el origen, evaluada en un punto $t \in \mathbb{R}$, es precisamente la serie geométrica de razón $-t$. Por supuesto, para $t \in]-1,1[$, podemos usar que $\{t^n\} \to 0$ y deducir de (18) que

$$\varphi(t) = \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \qquad \forall t \in]-1,1[$$

Esta igualdad, nada nueva, nos da el desarrollo en serie de Taylor de φ centrado en el origen y tenemos un ejemplo de una situación que ya habíamos anunciado: a pesar de que $\varphi \in C^\infty(I)$, el desarrollo no es válido en todo el intervalo I, sino sólo en el intervalo $J =]-1,1[$, simplemente porque la serie geométrica de razón $-t$ no converge cuando $t \notin J$.

Pero volvamos a la igualdad (18) que ha sido la clave de los razonamientos anteriores. La idea, bien sencilla, es usarla para calcular la integral indefinida de φ con origen en 0, que es f. Aparecerán lógicamente los polinomios de Taylor de f en el origen, y el resto de Taylor expresado también como una integral indefinida. Concretamente, para $x \in I$ y $n \in \mathbb{N}$, usamos (18), la linealidad de la integral y la regla de Barrow, para obtener:

$$\begin{aligned} f(x) = \log(1+x) &= \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^x t^k \, dt + \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t} \, dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t} \, dt \end{aligned}$$

En resumen, hemos probado que

$$\log(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} = \int_0^x \frac{(-1)^n t^n \, dt}{1+t} \qquad \forall x \in I, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{19}$$

y tenemos lo esperado: cada resto de Taylor de f en el origen, expresado como una integral indefinida. Para cada $x \in I$, estudiamos ahora la convergencia de la sucesión de integrales que aparece en el segundo miembro de (19).

Si $x \geqslant 0$, para $t \in [0, x]$ y $n \in \mathbb{N}$ tenemos $t^n/(1+t) \leqslant t^n$, y usamos que la integral respeta el orden entre funciones:

$$\left| \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\, dt \right| = \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\, dt \leqslant \int_0^x t^n\, dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, si $0 \leqslant x \leqslant 1$, dicha sucesión de integrales converge a cero.

Si $-1 < x < 0$, hacemos algo ligeramente distinto. Para $t \in [x, 0]$ y $n \in \mathbb{N}$, usamos que $|t|^n = (-t)^n \leqslant (-x)^n$, junto con $|1+t| = 1+t \geqslant 1+x > 0$, obteniendo

$$\left| \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\, dt \right| = \left| \int_x^0 \frac{t^n\, dt}{1+t} \right| \leqslant \int_x^0 \frac{|t|^n\, dt}{|1+t|} \leqslant \int_x^0 \frac{(-x)^n}{1+x}\, dt = \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y de nuevo la sucesión de integrales converge a cero. En resumen, hemos probado que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\, dt = 0 \qquad \forall x \in]-1, 1]$$

y en vista de (19), tenemos

$$f(x) = \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} \quad \forall x \in]-1, 1] \tag{20}$$

desarrollo en serie de Taylor de la función f, centrado en el origen, que es válido en el intervalo $J =]-1, 1]$. Para $x > 1$ es claro que la serie de Taylor no converge. El caso $x = 1$ merece destacarse, pues hemos encontrado la suma de la serie armónica alternada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2$$

Si ahora queremos el desarrollo en serie de Taylor del logaritmo, centrado en un punto $a \in \mathbb{R}^+$, basta pensar que $\log x = \log a + \log\big(1 + (x-a)/a\big)$ y sustituir x por $(x-a)/a$ en (20). Necesitamos que sea $-1 < (x-a)/a \leqslant 1$, que equivale a $0 < x \leqslant 2a$ y obtenemos:

- *Dado $a \in \mathbb{R}^+$, se tiene que* $\log x = \log a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n a^n}(x-a)^n$, *para todo* $x \in]0, 2a]$.

Obsérvese que, una vez más, aunque $\log \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ su desarrollo de Taylor centrado en un punto $a \in \mathbb{R}^+$ sólo es válido en $]0, 2a]$, para $x > 2a$ la serie de Taylor no converge.

Para obtener un desarrollo en serie de Taylor del arco-tangente, seguiremos una estrategia análoga a la usada con el logaritmo, empezamos con su derivada, la función racional $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ dada por $\psi(t) = 1/(1+t^2)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Para conseguir sus polinomios de Taylor, volvemos a la igualdad (18) que fue la clave para el estudio del logaritmo. Para todo $t \in \mathbb{R}$, tenemos $t^2 > -1$ y (18) nos dice que

$$\psi(t) = \frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^{2k} + \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2} \qquad \forall t \in \mathbb{R} \tag{21}$$

Tenemos así expresada la función ψ como suma de su polinomio de Taylor de orden $2n-2$, o también $2n-1$, y el correspondiente resto de Taylor, puesto que, tanto para $m=2n-2$ como para $m=2n-1$, tenemos

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t^m}\left(\psi(t) - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^{2k}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{(-1)^n t^{2n-m}}{1+t^2} = 0$$

con lo que la fórmula infinitesimal del resto nos dice que

$$T_{2n-1}[\psi,0](t) = T_{2n-2}[\psi,0](t) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^{2k} \qquad \forall t\in\mathbb{R}, \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

La igualdad entre los dos polinomios de Taylor no nos debe sorprender, simplemente ocurre que $\psi^{(2n-1)}(0)=0$, porque ψ es una función par.

Para $t\in]-1,1[$ usamos en (21) que $\{t^{2n}\}\to 0$ y obtenemos el desarrollo en serie de Taylor de ψ centrado en el origen, que no es más que la suma de una serie geométrica:

$$\psi(t) = \frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k} \qquad \forall t\in]-1,1[$$

Consideramos ahora la integral indefinida de ψ con origen en 0, que es el arco-tangente. Usando (21), la linealidad de la integral y la regla de Barrow, tenemos

$$\begin{aligned}\operatorname{arc\,tg} x &= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\int_0^x t^{2k}\,dt + \int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2}\,dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + \int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2}\,dt \qquad \forall x\in\mathbb{R}, \quad \forall n\in\mathbb{N}\end{aligned} \tag{22}$$

En vista de la relación entre los polinomios de Taylor de una función y de su derivada, tenemos aquí los polinomios de Taylor en 0 del arco-tangente:

$$T_{2n-1}[\operatorname{arc\,tg},0](x) = T_{2n}[\operatorname{arc\,tg},0](x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \qquad \forall x\in\mathbb{R}, \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

No hemos necesitado calcular las sucesivas derivadas del arco-tangente en el origen, cosa que no hubiera sido del todo fácil. De hecho ahora las tenemos calculadas:

$$\operatorname{arc\,tg}^{(2k)}(0) = 0, \quad \operatorname{arc\,tg}^{(2k+1)}(0) = (-1)^k(2k)! \quad \forall k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$$

Así pues, en (22) tenemos expresado el arco-tangente como suma de su polinomio de Taylor de orden $2n-1$ o $2n$ con el correspondiente resto de Taylor, que otra vez aparece como una integral indefinida. Escribimos dicha igualdad, aislando la integral:

$$\operatorname{arc\,tg} x - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} = \int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2}\,dt \qquad \forall x\in\mathbb{R}, \quad \forall n\in\mathbb{N} \tag{23}$$

El siguiente paso se debe ya adivinar: para cada $x \in \mathbb{R}$, debemos estudiar la convergencia de la sucesión de integrales que aparece en el segundo miembro de (23).

Si $x \geqslant 0$, usando que $1+t^2 \geqslant 1$ para todo $t \in [0,x]$ tenemos

$$\left| \int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2}\, dt \right| = \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\, dt \leqslant \int_0^x t^{2n}\, dt = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}$$

Para $x < 0$, el razonamiento es casi idéntico:

$$\left| \int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2}\, dt \right| = \int_x^0 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\, dt \leqslant \int_x^0 t^{2n}\, dt = \frac{-x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}$$

y la misma desigualdad es válida para todo $x \in \mathbb{R}$. Para $x \in [-1,1]$, la sucesión de integrales converge a cero y, en vista de (23), tenemos el desarrollo en serie de Taylor del arco-tangente centrado en el origen, válido en $[-1,1]$. Hemos probado:

- *Para todo $x \in [-1,1]$ se tiene:* $\operatorname{arc\,tg} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

El caso $x = 1$ merece destacarse, tenemos una serie cuya suma es el número π:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

13.8. Otras funciones indefinidamente derivables

Usando la función exponencial, vamos a construir algunas funciones de clase C^∞ en $\mathbb{R}$, que responden preguntas interesantes y son útiles en diversos contextos. Como orientación, podemos plantearnos el siguiente problema: para $0 < r < R$, conseguir una función $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ que verifique $\varphi(x) = 1$ cuando $|x| \leqslant r$ mientras que $\varphi(x) = 0$ cuando $|x| \geqslant R$.

Como primer paso, podemos preguntarnos si una función de clase C^∞ en $\mathbb{R}$ puede ser constante en un intervalo no trivial, sin ser constante en toda la recta. Más aún, si existe una función $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}_0^-$, pero $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Si sólo le pidiéramos a f que fuese continua, o derivable unas cuantas veces, sería fácil construirla. Pero ser de clase C^∞ impone una severa restricción a su comportamiento en el origen: *todas* sus derivadas han de anularse en el origen. Usando la función exponencial, conseguimos fácilmente tal función:

- *La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^-, \qquad f(x) = e^{-1/x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

es de clase C^∞ en $\mathbb{R}$, con $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Usando el carácter local de las derivadas sucesivas y la regla de la cadena, obtenemos que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^*)$, y se comprueba fácilmente por inducción que, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, existe un polinomio P_n tal que

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^* \tag{24}$$

Nótese que esta igualdad es evidente para $x \in \mathbb{R}^-$, cualquiera que sea el polinomio P_n, ya que $f^{(n)}(x) = f(x) = 0$. Para $\mathbb{R}^+$ la inducción es muy similar a la hecha en otras ocasiones.

Para concluir la demostración bastará comprobar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, f es $n-1$ veces derivable en el origen con $f^{(n-1)}(0) = 0$. Para el caso $n = 1$ no hay nada que comprobar y, suponiendo que el resultado es cierto para un $n \in \mathbb{N}$, debemos ver que f es n veces derivable en el origen con $f^{(n)}(0) = 0$, es decir, que $\lim\limits_{x\to 0} f^{(n-1)}(x)/x = 0$. Evidentemente, el límite por la izquierda es cero y, para el límite por la derecha, tenemos

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{x^{2n-1}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^{2n-1}}{e^x} = 0$$

donde hemos usado la escala de infinitos. De (24) deducimos ahora que

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f^{(n-1)}(x)}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{P_{n-1}(x)\, f(x)}{x^{2n-1}} = 0 \qquad \blacksquare$$

Nótese que la serie de Taylor de la función f en el origen, evaluada en cualquier $x \in \mathbb{R}$, es idénticamente nula. Trivialmente converge para todo $x \in \mathbb{R}$, pero su suma sólo coincide con $f(x)$ cuando $x \in \mathbb{R}_0^-$. Así que f, siendo una función de clase C^∞ en $\mathbb{R}$, no admite un desarrollo en serie de Taylor *centrado* en el origen. El caso extremo de esta situación se presenta para una función muy relacionada con f. Definimos $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\psi(x) = e^{-1/x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \psi(0) = 0$$

Que $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ se deduce del resultado anterior, pues evidentemente se tiene $\psi(x) = f(x^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, con lo que ψ es la composición de dos funciones de clase C^∞ en $\mathbb{R}$. También es fácil comprobar que $\psi^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así pues, la serie de Taylor de ψ en el origen es idénticamente nula, converge para todo $x \in \mathbb{R}$, pero su suma sólo coincide con $\psi(x)$ en el caso trivial $x = 0$.

Otra sencilla modificación de la función f estudiada anteriormente nos acerca un poco más al objetivo de partida:

- *Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

  $$g(t) = \exp\left(\frac{-1}{(t-a)(b-t)}\right) \quad \forall t \in]a,b[, \quad g(t) = 0 \quad \forall t \in]-\infty, a] \cup [b+\infty[$$

  es de clase C^∞ en $\mathbb{R}$.

Basta pensar que $g(t) = f\big((t-a)(b-t)\big)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y aplicar la regla de la cadena para las derivadas sucesivas. $\blacksquare$

Obsérvese que ahora $g(t) = 0$ tanto si $t \leqslant a$ como si $t \geqslant b$, pero $g(t) > 0$ para todo $t \in]a,b[$. El siguiente paso es considerar la integral indefinida de g con origen en el punto a, salvo una normalización, que nos permitirá probar lo siguiente:

- *Dados $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, existe una función $h \in C^\infty(\mathbb{R})$, estrictamente creciente en el intervalo $[a,b]$, verificando que $h(x) = 0$ para todo $x \in]-\infty,a]$ y $h(x) = 1$ para todo $x \in [b,+\infty[$.*

Fijados a y b, usamos la función g construida anteriormente, la integral $\rho = \displaystyle\int_a^b g(t)\,dt > 0$, y definimos $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$h(x) = \frac{1}{\rho}\int_a^x g(t)\,dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Al ser $g(t) = 0$ para $t \leqslant a$, tenemos también $h(x) = 0$ para $x \leqslant a$ pues estamos integrando una función idénticamente nula. Para $x \geqslant b$, usando la aditividad de la integral, junto con que $g(t) = 0$ para $t \geqslant b$, comprobamos que $h(x) = 1$, ya que

$$\rho\, h(x) = \int_a^x g(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt + \int_b^x g(t)\,dt = \rho$$

El teorema fundamental del cálculo nos dice que $h \in D^1(\mathbb{R})$ con $h'(x) = g(x)/\rho$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, tenemos también $h \in C^\infty(\mathbb{R})$. Finalmente, al ser $h'(x) > 0$ para todo $x \in]a,b[$, del teorema del valor medio deducimos que h es estrictamente creciente en $[a,b]$. ■

Podemos ya construir fácilmente la función que nos propusimos encontrar. Por razones obvias, es lo que suele llamarse una *función meseta*, de clase C^∞ en $\mathbb{R}$.

- *Dados $r,R \in \mathbb{R}$ con $0 < r < R$, existe una función $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ con las siguientes propiedades:*

  (i) $x \in \mathbb{R},\ |x| \leqslant r \implies \varphi(x) = 1$
  (ii) $x \in \mathbb{R},\ |x| \geqslant R \implies \varphi(x) = 0$
  (iii) φ *es estrictamente creciente en* $[-R,-r]$ *y estrictamente decreciente en* $[r,R]$

Basta tomar $a = r^2 < R^2 = b$ y, usando la función h recién construida, definir

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = 1 - h(x^2) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Es claro que $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ y las propiedades requeridas para φ se deducen de las conocidas para h sin ninguna dificultad. ■

Resaltamos finalmente que todas las propiedades de las funciones que hemos ido estudiando son fáciles de conseguir para funciones a las que sólo exijamos ser derivables un cierto número de veces, lograr el mismo tipo de comportamiento para funciones de clase C^∞ en toda la recta es lo que hace interesante la construcción que hemos desarrollado.

13.9. Ejercicios

1. Probar que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^4}\left(2x\sqrt[3]{1+x^3} + 2\sqrt{1+x^2} - 2 - 2x - x^2\right) = \dfrac{5}{12}$.

2. Estudiar el comportamiento en $-\infty$, 0 y $+\infty$ de la función $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^6}\left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}\right) \qquad \forall x\in\mathbb{R}^*$$

3. Encontrar $\alpha, \beta, \gamma\in\mathbb{R}$ que verifiquen la siguiente igualdad:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[5]{1+x^5} - 1 - \alpha x^5\right)\left(x - \operatorname{tg} x - \beta x^3\right)}{x^{15}} = \gamma$$

4. Encontrar los extremos relativos de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos:

   (a) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 10 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

   (b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2+1} \quad \forall x\in\mathbb{R}$

   (c) $f(x) = x^2\,|x|\,e^{-|x|} \quad \forall x\in\mathbb{R}$

5. Sea $f\in D^3(\mathbb{R})$ con $f'(0)\neq 0$, y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $g(x) = x^2 f(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Probar que g tiene un extremo relativo en el origen si, y sólo si, $f(0)\neq 0$.

6. Sea I un intervalo y $f\in D^2(I)$ tal que $f''(x) = f(x)$ para todo $x\in I$. Probar que, si existe $a\in I$ tal que $f(a) = f'(a) = 0$, entonces $f(x) = 0$ para todo $x\in I$.

7. Probar que, para $q\in\mathbb{N}$ y $x\in\mathbb{R}^+$, se verifican las siguientes desigualdades:

$$1 + \frac{x}{q} - \frac{(q-1)x^2}{2q^2} \leqslant \sqrt[q]{1+x} \leqslant 1 + \frac{x}{q}$$

8. Probar que $1 - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$ para todo $x\in[0,\pi]$.

9. Calcular un valor aproximado de $\sqrt[3]{7}$ con error menor que 10^{-4}.

10. Dados una función $f\in C^\infty(\mathbb{R})$ y $\delta > 0$, probar que existe una función $g\in C^\infty(\mathbb{R})$ que verifica las siguientes condiciones:

    (i) $g(x) = f(x) \quad \forall x\in[-1,1]$

    (ii) $g(x) = 0 \quad \forall x\in\,]-\infty, -1-\delta]\cup[1+\delta, +\infty[$

    (iii) $|g(x)| \leqslant |f(x)| \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Tema 14

Funciones convexas

Los resultados obtenidos en el desarrollo del cálculo diferencial nos permiten estudiar con facilidad una importante familia de funciones definidas en intervalos, las *funciones convexas*. Haremos una discusión breve de estas funciones, empezando por su definición, que se basa en una sencilla idea geométrica. Para funciones que sean derivables, o dos veces derivables, en un intervalo, obtendremos útiles caracterizaciones de la convexidad.

14.1. Definición de función convexa

La noción de función convexa es muy intuitiva y fácil de entender geométricamente. Si I es un intervalo no trivial, una función $f : I \to \mathbb{R}$ será convexa cuando la gráfica de la restricción de f a cualquier intervalo cerrado y acotado $[a,b] \subset I$, queda siempre por debajo del segmento que une los puntos $\big(a, f(a)\big)$ y $\big(b, f(b)\big)$. Enseguida convertimos esta sencilla idea geométrica en una definición concreta.

Para cualesquiera $a,b \in I$ con $a < b$, la recta secante a la gráfica de f que pasa por los puntos $\big(a, f(a)\big)$ y $\big(b, f(b)\big)$ tiene ecuación

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}\,(x-a)$$

Por tanto f será convexa cuando, para cualesquiera $a,b \in I$ con $a < b$, se tenga que

$$f(z) \leqslant f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}\,(z-a) \quad \forall z \in [a,b]$$

o equivalentemente,

$$f(z) \leqslant \frac{b-z}{b-a}\, f(a) + \frac{z-a}{b-a}\, f(b) \quad \forall z \in [a,b] \tag{1}$$

Obsérvese que esta desigualdad es obvia para $z = a$ y para $z = b$, de hecho en ambos casos se da la igualdad. Bastaría por tanto exigirla para todo $z \in]a,b[$. Pero vamos a expresarla de forma más cómoda y fácil de recordar.

Dado $t \in [0,1]$ podemos tomar $z = a + t\,(b-a) \in [a,b]$ y (1) nos dice que

$$f\big((1-t)\,a + t\,b\big) \leqslant (1-t)\,f(a) + t\,f(b) \quad \forall t \in [0,1] \tag{2}$$

Pero recíprocamente, dado $z \in [a,b]$ podemos tomar

$$t = \frac{z-a}{b-a}\,, \quad \text{que verifica} \quad t \in [0,1] \quad \text{y} \quad 1-t = \frac{b-z}{b-a}$$

con lo que $(1-t)a+tb = z$ y, al aplicar (2), obtenemos directamente (1). Nótese que ahora, en (2) se da obviamente la igualdad para $t=0$ y $t=1$.

En resumen, f será convexa cuando verifique (2) para cualesquiera $a,b \in I$ con $a < b$ y para todo $t \in [0,1]$. Ahora bien, observamos que cuando $a = b$ se tiene siempre la igualdad en (2). Pero es que además, en el caso $a > b$, podemos aplicar (2) intercambiando los papeles de a y b, pero sustituyendo t por $1-t$, con lo que obtenemos exactamente la misma desigualdad. Así pues, en (2) podemos tomar como a y b dos puntos cualesquiera del intervalo I. Hemos llegado así a la definición cómoda de función convexa que buscábamos.

Si I es un intervalo no trivial, se dice que una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es *convexa* cuando verifica:

$$f\big((1-t)\,x + t\,y\big) \leqslant (1-t)\,f(x) + t\,f(y) \quad \forall x,y \in I\,,\ \forall t \in [0,1] \tag{3}$$

Aunque esta es la forma más conveniente de expresar la convexidad de una función, hay algo en la discusión anterior que no conviene olvidar: para probar (3), no se pierde generalidad suponiendo que $x < y$ y que $0 < t < 1$. Tampoco conviene olvidar la interpretación geométrica de la convexidad, con la que hemos iniciado la discusión.

Como ejemplo, la función valor absoluto es convexa, pues evidentemente,

$$\big|(1-t)\,x + t\,y\big| \leqslant (1-t)\,|x| + t\,|y| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}\,,\ \forall t \in [0,1]$$

Conviene comentar que lo ocurrido en este ejemplo es poco usual. Rara vez se prueba que una función es convexa usando la definición, pues incluso para funciones muy sencillas, no suele ser fácil comprobar (3). Lo habitual es, sabiendo que una función es convexa gracias a alguna de las caracterizaciones que vamos a estudiar, usar (3) para obtener desigualdades nada evidentes.

Al cambiar de signo una función convexa se obtiene una función cóncava. Por tanto, si I es un intervalo no trivial, se dice que una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es *cóncava* cuando $-f$ es convexa, es decir, cuando se verifica que $f\big((1-t)x+ty\big) \geqslant (1-t)\,f(x) + t\,f(y)$ para cualesquiera $x,y \in I$ y para todo $t \in [0,1]$.

Obsérvese que la convexidad o concavidad de una función, como ocurre con la monotonía, es bastante restrictiva. Es frecuente que una función no sea convexa ni cóncava, pero que su restricción a un cierto intervalo, contenido en su intervalo de definición, sí tenga una de esas propiedades. De hecho, podemos también considerar funciones definidas en un conjunto A que no es un intervalo, pero que pueden restringirse a un intervalo $J \subset A$. Para tratar cómodamente ambas situaciones, si tenemos una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y un intervalo no trivial $J \subset A$, diremos que f es *convexa en* J cuando $f|_J$ sea convexa. Lógicamente, f será *cóncava en* J cuando $f|_J$ sea cóncava, es decir, cuando $-f$ sea convexa en J.

En lo sucesivo trabajaremos preferentemente con las funciones convexas, pues cualquier resultado que obtengamos dará información sobre una función cóncava, sin más que aplicarlo a la función opuesta.

14.2. Continuidad y derivabilidad

Para obtener propiedades importantes de las funciones convexas, conviene deducir de la definición de función convexa, o más directamente de la condición (1), una doble desigualdad:

Lema *(de las tres secantes). Sea I un intervalo no trivial y $f : I \to \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces, para cualesquiera $x_1, x_2, x_3 \in I$, con $x_1 < x_2 < x_3$, se tiene:*

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \tag{3}$$

La demostración no tiene dificultad. Aplicamos (1) con $a = x_1$, $z = x_2$ y $b = x_3$ para obtener

$$f(x_2) \leqslant \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3) \tag{4}$$

Ahora restamos $f(x_1)$ en ambos miembros:

$$f(x_2) - f(x_1) \leqslant \frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3) = (x_2 - x_1) \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$$

y al dividir por $x_2 - x_1 > 0$ tenemos la primera desigualdad de (3). Para la otra, cambiamos de signo ambos miembros de (4), con lo que la desigualdad se invierte, y sumamos en ambos $f(x_3)$, obteniendo

$$f(x_3) - f(x_2) \geqslant \frac{x_2 - x_3}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_3) = (x_3 - x_2) \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$$

con lo que basta dividir por $x_3 - x_2 > 0$. ■

A poco que se piense, el lema anterior nos da una relación entre las pendientes de tres rectas secantes a la gráfica de una función convexa, que tiene una interpretación geométrica muy clara. La traducción analítica de esta idea es la propiedad clave de las funciones convexas que nos permitirá estudiar su derivabilidad:

- *Sea I un intervalo no trivial y $f : I \to \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces, para cada $a \in I$ la función $f_a : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$, dada por $f_a(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ para todo $x \in I \setminus \{a\}$, es creciente.*

En efecto, dados $a \in I$ y $x, y \in I \setminus \{a\}$ con $x < y$, distinguimos los tres casos posibles, para probar siempre que $f_a(x) \leqslant f_a(y)$. Si $a < x < y$, usamos la primera desigualdad de (3) con $x_1 = a$, $x_2 = x$, $x_3 = y$, obteniendo directamente que $f_a(x) \leqslant f_a(y)$. Si $x < y < a$, usamos la segunda desigualdad de (3) con $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = a$, obteniendo la misma conclusión. Finalmente, si $x < a < y$, usamos la desigualdad entre el primer y último miembro de (3) con $x_1 = x$, $x_2 = a$, $x_3 = y$, obteniendo de nuevo $f_a(x) \leqslant f_a(y)$. ■

Es fácil ya conseguir el principal resultado sobre la derivabilidad de funciones convexas:

Teorema. *Sea I un intervalo no trivial y $f : I \to \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces f es derivable por la izquierda y por la derecha, y por tanto es continua, en todo punto $a \in I^\circ$. De hecho, se tiene*

$$\begin{aligned} f'(a-) &= \sup\{f_a(x) : x \in I,\, x < a\} \\ f'(a+) &= \inf\{f_a(x) : x \in I,\, x > a\} \end{aligned} \tag{5}$$

Demostración. Fijado $a \in I^\circ$, la comprobación de (5) es bien sencilla, usando solamente que f_a es una función creciente. Tomando $b \in I$ con $b > a$, que existe porque $a \in I^\circ$, para $x \in I$ con $x < a$ se tiene $f_a(x) \leqslant f_a(b)$, luego el conjunto $\{f_a(x) : x \in I,\, x < a\}$ está mayorado y, llamando s_a a su supremo, veremos enseguida que $f'(a-) = s_a$.

Dado $\varepsilon > 0$, por definición de supremo existirá $x_0 \in I$ con $x_0 < a$ tal que $f_a(x_0) > s_a - \varepsilon$. Tomando $\delta = a - x_0 > 0$, tenemos

$$a - \delta < x < a \implies s_a - \varepsilon < f_a(x_0) \leqslant f_a(x) \leqslant s_a < s_a + \varepsilon$$

luego $\lim\limits_{x \to a-} f_a(x) = s_a$, como se quería. El cálculo de la derivada por la derecha es análogo. ■

Merece la pena resaltar que en general no podemos asegurar que una función convexa sea derivable en todos los puntos interiores de su intervalo de definición. Por ejemplo, la función valor absoluto es convexa pero no es derivable en 0. Cuando el intervalo de definición tiene mínimo o máximo, tampoco podemos asegurar que una función convexa sea continua en tales puntos. Por ejemplo, tomando $f(x) = 0$ para todo $x \in]0,1[$ y $f(0) = f(1) = 1$, obtenemos una función convexa $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ que no es continua en 0 ni en 1.

Nótese también que, en la demostración del teorema anterior, sólo hemos usado que la función f_a es creciente. Por tanto, con la misma demostración, obtendríamos lo siguiente:

- *Sea I un intervalo no trivial y $g : I \to \mathbb{R}$ una función creciente. Entonces g tiene límite por la izquierda y por la derecha en todo punto $a \in I^\circ$.*

Obviamente, este resultado también es válido para funciones decrecientes, al igual que el teorema anterior tiene su correspondiente versión para funciones cóncavas.

14.3. Caracterizaciones de las funciones convexas

Para funciones derivables, vamos ya a obtener una útil caracterización de la convexidad, pero conviene aclarar un hecho que facilitará la demostración.

Sea I un intervalo no trivial y $f \in D^1(I)$ una función convexa. Para $a \in I^\circ$, la primera parte del teorema anterior no nos dice nada que no sepamos, pero las igualdades (5) nos dan dos expresiones de $f'(a)$ que son útiles. Cuando $a \in I$ es un extremo del intervalo, una de esas expresiones no tiene sentido, porque el conjunto que en ella aparece es vacío, pero la otra sigue siendo cierta. De hecho, si $a = \max I$, el conjunto $\{f_a(x) : x \in I,\, x < a\}$ ha de estar mayorado, pues en otro caso, f_a divergería en el punto a y f no sería derivable en a. Entonces, se puede razonar como hemos hecho en el teorema anterior, para probar que $f'(a)$ es el supremo de dicho conjunto. Análogamente, si $a = \min I$, también tendremos $f'(a) = \inf\{f_a(x) : x \in I,\, x > a\}$.

- *Sea I un intervalo no trivial y $f \in D^1(I)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
  (i) *f es convexa.*
  (ii) *f' es creciente.*
  (iii) *Para cualesquiera $a,x \in I$ se tiene que $f(x) \geqslant f(a) + f'(a)(x-a)$.*

$(i) \Rightarrow (ii)$. Dados $a,b \in I$ con $a < b$, deberemos probar que $f'(a) \leqslant f'(b)$. Para ello basta tomar $x \in]a,b[$ y escribir

$$f'(a) \leqslant f_a(x) = f_x(a) \leqslant f_x(b) = f_b(x) \leqslant f'(b)$$

donde hemos usado que f_x es una función creciente y las expresiones de $f'(a)$ y $f'(b)$ dadas por (5), que como hemos comentado, son válidas también cuando $a = \text{mín}\, I$ o $b = \text{máx}\, I$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Para $a,x \in I$ con $a \neq x$, el teorema del valor medio nos da

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x-a)$$

donde c es un punto intermedio entre a y x, luego bastará ver que $f'(c)(x-a) \geqslant f'(a)(x-a)$.

En efecto, si $a < c < x$, al ser f' creciente, tendremos $f'(c) \geqslant f'(a)$, y basta multiplicar ambos miembros por $x - a > 0$. En otro caso será $x < c < a$, luego $f'(c) \leqslant f'(a)$, pero esta desigualdad se invierte al multiplicar ambos miembros por $x - a < 0$.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Dados $x,y \in I$ y $t \in [0,1]$, tomando $a = (1-t)x + ty \in I$, deberemos probar que $(1-t)f(x) + tf(y) \geqslant f(a)$. Aplicando dos veces (iii), tenemos:

$$\begin{aligned}(1-t)f(x) + t f(y) &\geqslant (1-t)\big(f(a) + f'(a)(x-a)\big) + t\big(f(a) + f'(a)(y-a)\big)\\ &= f(a) + f'(a)\big((1-t)(x-a) + t(y-a)\big)\end{aligned}$$

y basta observar que

$$\begin{aligned}(1-t)(x-a) + t(y-a) &= \big((1-t)x + ty - (1-t)a - ta\\ &= a - (1-t)a - ta = 0\end{aligned}$$ ■

Nótese la clara interpretación geométrica de la condición (iii) anterior: la gráfica de f se mantiene siempre por encima de la recta tangente en cualquiera de sus puntos.

Por otra parte, si disponemos de la segunda derivada, podemos usarla para caracterizar el crecimiento de f', obteniendo:

- *Sea I un intervalo no trivial y $f \in C^1(I) \cap D^2(I^\circ)$. Entonces f es convexa si, y sólo si, $f''(x) \geqslant 0$ para todo $x \in I^\circ$.*

Por supuesto, los dos resultados anteriores se traducen inmediatamente para tener sendas caracterizaciones de la concavidad.

14.4. Ejemplos

Veamos que las caracterizaciones anteriores permiten encontrar fácilmente intervalos de convexidad o de concavidad para diversas funciones.

Empecemos con un ejemplo obvio: todo polinomio de primer orden P define una función que es simultáneamente convexa y cóncava en $\mathbb{R}$, porque su primera derivada es constante, o porque su segunda derivada es idénticamente nula. En realidad esto se puede comprobar directamente con las definiciones: es claro que $P\big((1-t)x+ty\big) = (1-t)P(x)+tP(y)$ para cualesquiera $x,y,t \in \mathbb{R}$. Recíprocamente, es fácil comprobar que si I es un intervalo no trivial y $f: I \to \mathbb{R}$ es a la vez cóncava y convexa, entonces f es un polinomio de primer orden.

La función definida por un polinomio de segundo grado, $P(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$, es convexa si $a > 0$ y cóncava si $a < 0$, ya que $P''(x) = 2a$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ es la función potencia de exponente $\alpha \in \mathbb{R}$, como $f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, tenemos:

- *La función potencia de exponente $\alpha \in \mathbb{R}$ es convexa cuando $\alpha \leqslant 0$ o $\alpha \geqslant 1$, y cóncava cuando $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.*

Merece la pena comentar las extensiones de la función potencia que podemos hacer para algunos valores del exponente α. La comprobación de las siguientes afirmaciones es la ya comentada, pues la segunda derivada responde siempre a la misma expresión. Sólo hay que tener en cuenta el signo de $x^{\alpha-2}$ cuando $x \in \mathbb{R}^-$.

- *Para $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$, se tiene:*
  - (i) *Si n es par, la función $x \mapsto x^n$, es convexa (en $\mathbb{R}$), mientras que, si n es impar, dicha función es cóncava en $\mathbb{R}_0^-$ y convexa en $\mathbb{R}_0^+$.*
  - (ii) *Si n es par, la función $x \mapsto x^{-n}$ (definida en $\mathbb{R}^*$), es convexa en $\mathbb{R}^+$ y también en $\mathbb{R}^-$, mientras que, si n es impar, es cóncava en $\mathbb{R}^-$ y convexa en $\mathbb{R}^+$.*
  - (iii) *Si n es impar, la función raíz n-ésima es convexa en $\mathbb{R}_0^-$ y cóncava en $\mathbb{R}_0^+$.*

Conviene resaltar que algunas de las afirmaciones anteriores, por muy fácil que haya sido comprobarlas, implican desigualdades nada triviales. Por ejemplo, el hecho de que la función $x \mapsto x^4$ sea convexa en $\mathbb{R}$, significa que $\big((1-t)x+ty\big)^4 \leqslant (1-t)x^4 + ty^4$ para cualesquiera $x,y \in \mathbb{R}$ y $t \in [0,1]$. Esta desigualdad se puede comprobar por métodos puramente algebraicos, pero no es del todo fácil. Aún menos trivial es el siguiente resultado, cuya demostración es evidente:

- *La exponencial es una función convexa y el logaritmo es una función cóncava.*

La concavidad del logaritmo se puede reformular equivalentemente, obteniendo el siguiente resultado, que se conoce como *desigualdad de Young*:

- *Para* $p \in \mathbb{R}$ *con* $p > 1$*, definiendo* $p^* \in \mathbb{R}$ *por la igualdad* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p^*} = 1$*, se tiene:*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p^*}}{p^*} \qquad \forall a,b \in \mathbb{R}^+$$

Tomando $x = a^p$, $y = b^{p^*}$ y $t = 1/p^* \in [0,1]$, tenemos:

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^{p^*}}{p^*}\right) &= \log\big((1-t)x + t\,y\big)\\ &\geqslant (1-t)\log x + t\log y = \frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{p^*}\log b^{p^*} = \log(ab)\end{aligned}$$

y basta usar que la exponencial es creciente. ■

Encontrar intervalos de concavidad y convexidad para diversas funciones trigonométricas es también un ejercicio sencillo. Mencionamos un ejemplo:

- *El arco-tangente es una función convexa en* $\mathbb{R}_0^-$ *y cóncava en* $\mathbb{R}_0^+$.

14.5. Ejercicios

1. Probar que la suma de dos funciones convexas es una función convexa.

2. Dar un ejemplo de dos funciones convexas cuyo producto no sea una función convexa.

3. Sean I, J intervalos no triviales, $f : I \to J$ una función convexa y $g : J \to \mathbb{R}$ una función convexa y creciente. Probar que entonces $g \circ f$ es convexa.

4. Sea I un intervalo no trivial y $f : I \to \mathbb{R}$ una función convexa. Supongamos además que f es continua e inyectiva, luego estrictamente monótona. Probar que, si f es creciente, f^{-1} es cóncava, mientras que, si f es decreciente, entonces f^{-1} es convexa.

5. En cada uno de los siguientes casos, encontrar intervalos de convexidad o concavidad para la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida, para todo $x \in \mathbb{R}$ por

   (a) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 10$ (b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + 1}$

   (c) $f(x) = \log\left(1 + x^2\right)$ (d) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$

Tema 9

Potencias y logaritmos

Usando los principales resultados del cálculo diferencial e integral, podemos estudiar con gran comodidad varias funciones reales de variable real que no han aparecido hasta ahora y que, junto con las funciones racionales, forman la colección de las funciones "elementales". Las nuevas funciones se clasifican en dos familias: las relacionadas con las potencias de base y exponente real, que estudiamos en este tema, y las funciones trigonométricas, que aparecerán en el siguiente.

Siguiendo un orden que puede parecer sorprendente, empezamos considerando la función logaritmo, que se define fácilmente mediante una integral. El teorema fundamental del cálculo nos da directamente su derivada y ello permite usar el teorema del valor medio para obtener sus principales propiedades, que nos deben resultar muy familiares.

La función exponencial aparece entonces como la inversa del logaritmo y puede estudiarse igualmente con suma facilidad. Combinando ambas funciones definimos la potencia a^b para cualesquiera $a \in \mathbb{R}^+$ y $b \in \mathbb{R}$, extendiendo por supuesto la definición ya conocida para el caso en que $b \in \mathbb{N}$. Podemos entonces estudiar fácilmente tres amplias gamas de funciones: las exponenciales, las logarítmicas y las funciones potencia.

9.1. La función logaritmo

La función $t \mapsto 1/t$ es continua en el intervalo $\mathbb{R}^+$, luego tiene una integral indefinida con origen en 1, que es la función que ahora nos interesa. Para $x \in \mathbb{R}^+$ definimos:

$$\log x = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

Decimos que $\log x$ es el *logaritmo* de x, y la función $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, que a cada número real positivo hace corresponder su logaritmo, es la *función logaritmo*. Nótese que, siguiendo una sana costumbre, escribimos simplemente $\log x$, en lugar de $\log(x)$, siempre que no haya peligro de confusión. También es costumbre referirse a la función logaritmo llamándola simplemente *el logaritmo*. Esto tampoco nos debe confundir, por el contexto se sabe siempre si estamos hablando del logaritmo de un número concreto, o nos referimos a la función logaritmo.

Deducimos enseguida la primera propiedad del logaritmo, clave para las demás:

(L.1) *El logaritmo es la única función $f \in D(\mathbb{R}^+)$ que verifica $f(1)=0$ y $f'(x) = 1/x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. En particular, es una función estrictamente creciente.*

Es obvio que $\log 1 = 0$ y el teorema fundamental del cálculo nos dice que $\log'(x) = 1/x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Unicidad y crecimiento estricto se deducen del teorema del valor medio. ■

La siguiente propiedad del logaritmo es crucial:

(L.2) *Se verifica que*

$$\log(xy) = \log x + \log y \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^+ \tag{1}$$

Como consecuencia, se tiene

(i) $\log(x/y) = \log x - \log y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+$
(ii) $\log(x^n) = n \log x \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \ \forall n \in \mathbb{N}$
(iii) $\log e = 1$

Para probar (1) hay dos procedimientos, ambos instructivos. Por una parte, podemos usar la aditividad de la integral y la fórmula de cambio de variable:

$$\log(xy) = \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_x^{xy} \frac{dt}{t} = \log x + \int_1^y \frac{ds}{s} = \log x + \log y$$

donde hemos hecho la sustitución $t = xs$.

Por otra parte, fijado $y \in \mathbb{R}^+$, podemos considerar la función $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \log(xy) - \log x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Tenemos $h \in D(\mathbb{R}^+)$ con $h' = 0$, luego h es constante, es decir, $h(x) = h(1) = \log y$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, que es la igualdad buscada.

Para tener (i) basta escribir $\log x = \log\big((x/y)y\big) = \log(x/y) + \log y$, mientras que (ii) se prueba por inducción: el caso $n=1$ es obvio y, si se verifica (ii) para un $n \in \mathbb{N}$, tenemos:

$$\log\left(x^{n+1}\right) = \log\left(x^n x\right) = \log\left(x^n\right) + \log x = n \log x + \log x = (n+1)\log x$$

Para obtener (iii), puesto que $e = \lim\limits_{n\to\infty} \big(1 + (1/n)\big)^n$, la continuidad del logaritmo en el punto e y su derivabilidad en 1 nos permiten escribir:

$$\log e = \lim_{n\to\infty} n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log\big(1+(1/n)\big) - \log 1}{\big(1+(1/n)\big) - 1} = \log'(1) = 1 \qquad ■$$

Podemos encontrar ahora fácilmente la imagen del logaritmo:

(L.3) *La función logaritmo diverge positivamente en $+\infty$ y negativamente en cero, luego su imagen es $\mathbb{R}$.*

En efecto, dado $m \in \mathbb{N}$, para $x > e^m$ tenemos $\log x > \log e^m = m \log e = m$. Esto prueba ya que $\log x \to +\infty$ $(x \to +\infty)$, y en el origen tenemos $\log x = -\log(1/x) \to -\infty$ $(x \to 0)$. Por tanto, la imagen del logaritmo es un intervalo no mayorado y no minorado, luego es $\mathbb{R}$. ■

Así pues, el logaritmo es una aplicación biyectiva de $\mathbb{R}^+$ sobre $\mathbb{R}$, y todo está preparado para estudiar su inversa.

9.2. La función exponencial

La función inversa del logaritmo es la *función exponencial*, o simplemente *la exponencial*, y se denota por $\exp$. Así pues, $\exp = \log^{-1}$, luego $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ también es biyectiva y, para cada $x \in \mathbb{R}$, $\exp x$ es el único $y \in \mathbb{R}^+$ que verifica $\log y = x$. Equivalentemente tenemos

$$\exp(\log y) = y \quad \forall y \in \mathbb{R}^+ \qquad \text{y} \qquad \log(\exp x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por ejemplo, $\exp 0 = 1$ y $\exp 1 = e$. La propiedad básica de esta nueva función se obtiene con suma facilidad:

(E.1) *La exponencial es una función derivable en $\mathbb{R}$, que coincide con su derivada. Por tanto, es una función estrictamente creciente.*

En efecto, puesto que $\log'(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, el teorema de la función inversa global nos dice que la exponencial es derivable en $\mathbb{R}$, con

$$\exp'(x) = \frac{1}{\log'(\exp x)} = \frac{1}{1/\exp x} = \exp x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \blacksquare$$

La propiedad crucial de la función exponencial es la siguiente:

(E.2) *La función exponencial verifica la llamada "fórmula de adición":*

$$\exp(x+y) = \exp x \, \exp y \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Como consecuencia se tiene:

(i) $\exp(x-y) = \exp x / \exp y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
(ii) $\exp(nx) = \big(\exp x\big)^n \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$

Para probar (2), fijamos $y \in \mathbb{R}$ y consideramos la función

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Es claro que $h \in D(\mathbb{R})$ y se comprueba inmediatamente que $h'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por tanto, h es constante, es decir, $h(x) = h(0) = \exp y$ para todo $x \in \mathbb{R}$, de donde se deduce (2).

Para probar (i) basta ahora pensar que, para $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene $\exp(x-y)\exp y = \exp x$, mientras que (ii) se consigue por inducción:

$$\exp\big((n+1)x\big) = \exp(nx+x) = \exp(nx)\exp x = \big(\exp x\big)^n \exp x = (\exp x)^{n+1} \qquad \blacksquare$$

Anotemos finalmente el comportamiento de la exponencial en el infinito:

(E.3) *Se verifica que* $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp x = 0$ *y que* $\exp x \to +\infty \ (x \to +\infty)$.

Como $\{e^n\} \to +\infty$, dado $K \in \mathbb{R}$ podemos encontrar $m \in \mathbb{N}$ tal que $e^m > K$. Para $x > m$ se tendrá que: $\exp x > \exp m = (\exp 1)^m = e^m > K$, luego $\exp x \to +\infty \ (x \to +\infty)$. Pero entonces, tenemos también

$$0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\exp x} = \lim_{x\to+\infty} \exp(-x) = \lim_{x\to-\infty} \exp x \qquad \blacksquare$$

9.3. Potencias de exponente real

Usando las propiedades de la exponencial y el logaritmo, podemos ya extender la definición de las potencias de exponente natural. Dados $a \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \mathbb{N}$, sabemos que $a^n = \exp(n \log a)$. En el segundo miembro de esta igualdad nada nos impide sustituir n por un número real cualquiera y definir:

$$a^b = \exp(b \log a) \quad \forall b \in \mathbb{R}, \ \forall a \in \mathbb{R}^+$$

Decimos que a^b es la *potencia* de *base* a y *exponente* b. Según tomemos a o b como variable, vamos a obtener dos gamas de funciones, cuyo estudio no ofrecerá dificultad alguna.

Fijado $a \in \mathbb{R}^+$, la *exponencial de base* a es la función $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ dada por

$$\exp_a x = a^x = \exp(x \log a) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Como $\exp_1 x = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, el caso $a = 1$ carece de interés. Observamos también que $\exp_e x = e^x = \exp x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Vemos que la de base e es la función exponencial por antonomasia, la que hemos tomado como referencia, pues todas las demás se obtienen muy fácilmente a partir de ella. Nótese además que, de todas las funciones exponenciales, la de base e es la única que coincide con su derivada. Comprobar esta afirmación, y todas las del siguiente enunciado, no tiene dificultad alguna.

- *Para* $a \in \mathbb{R}^+$, *la exponencial de base* a *es derivable en* $\mathbb{R}$ *con* $\exp_a'(x) = a^x \log a$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$, *y verifica la fórmula de adición:* $a^{x+y} = a^x a^y$ *para cualesquiera* $x, y \in \mathbb{R}$.

  Si $a > 1$, $\exp_a$ *es estrictamente creciente, con* $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ *y* $a^x \to +\infty \ (x \to +\infty)$.
  Si $a < 1$, $\exp_a$ *es estrictamente decreciente, con* $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$ *y* $a^x \to +\infty \ (x \to -\infty)$.
  En ambos casos tenemos una aplicación biyectiva de $\mathbb{R}$ *sobre* $\mathbb{R}^+$.

Fijado $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, la inversa de la exponencial de base a es el *logaritmo en base* a, que se denota por $\log_a$. Tenemos por tanto,

$$a^{\log_a y} = y \quad \forall y \in \mathbb{R}^+ \qquad \text{y} \qquad \log_a a^x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

De nuevo, el logaritmo en base e es la función logarítmica por antonomasia, las demás se obtienen con sólo dividir por la constante adecuada, pues se tiene fácilmente

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \ \forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

A modo de repaso, resumimos las propiedades de las funciones logarítmicas:

- *Para* $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, *el logaritmo en base* a *es una biyección de* $\mathbb{R}^+$ *sobre* $\mathbb{R}$, *derivable en* $\mathbb{R}^+$, *verificando que* $\log_a'(x) = \dfrac{1}{x \log a}$ *y que* $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ *para cualesquiera* $x, y \in \mathbb{R}^+$.

  Si $a > 1$, *es estrictamente creciente,* $\log_a x \to -\infty \ (x \to 0)$ *y* $\log_a x \to +\infty \ (x \to +\infty)$.
  Si $a < 1$, *es estrictamente decreciente,* $\log_a x \to +\infty \ (x \to 0)$ *y* $\log_a x \to -\infty \ (x \to +\infty)$.

9.4. Funciones potencia

Pasamos ahora a estudiar las funciones que se obtienen al considerar potencias con base variable y exponente constante, algunas de las cuales son sobradamente conocidas. Empezamos con una observación bien sencilla:

- *Se verifica que*

$$\left(a^b\right)^c = a^{cb} \quad \forall b,c \in \mathbb{R}, \ \forall a \in \mathbb{R}^+ \tag{4}$$

En efecto: $\left(a^b\right)^c = \exp\left(c\log\left(a^b\right)\right) = \exp\left(cb\log a\right) = a^{cb}$. ■

Fijado $\alpha \in \mathbb{R}$, la función $x \mapsto x^\alpha$, de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$, es la *función potencia de exponente* α, o simplemente la *potencia de exponente* α. Veamos los casos en que esta función no es nueva.

Cuando $\alpha = n \in \mathbb{N}$ tenemos la restricción a $\mathbb{R}^+$ de una función polinómica bien conocida, mientras que para $\alpha = 0$ tenemos una función constante.

Si $\alpha = -n$ con $n \in \mathbb{N}$, es claro que $x^{-n} = 1/x^n$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, luego estamos hablando de una función racional bien conocida. Por supuesto, podemos escribir $x^{-n} = 1/x^n$ para todo $x \in \mathbb{R}^-$ y considerar la potencia de exponente $-n$ como una función definida en $\mathbb{R}^*$.

Para $q \in \mathbb{N}$, la igualdad (4) nos dice que $x^{1/q} = \sqrt[q]{x}$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, luego la potencia de exponente $1/q$ es la restricción a $\mathbb{R}^+$ de la función raíz q-ésima. Conviene recordar que la función raíz q-ésima se definió y es continua en $\mathbb{R}_0^+$, e incluso en todo $\mathbb{R}$ cuando q es impar.

Si ahora $\alpha = p/q$ con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$, de (4) deducimos que $x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Así pues, la potencia de exponente $\alpha \in \mathbb{Q}$ se obtiene como composición de dos funciones conocidas.

El caso novedoso se presenta por tanto cuando $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. No obstante, tiene interés saber que las restricciones a $\mathbb{R}^+$ de varias funciones conocidas quedan como casos particulares del que ahora nos ocupa. Pasamos a estudiar las propiedades básicas de las funciones potencia.

(P.1) *Fijado* $\alpha \in \mathbb{R}$, *sea* $f_\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *la potencia de exponente* α. *Entonces* $f_\alpha \in D(\mathbb{R}^+)$ *y*

$$f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \tag{5}$$

Por tanto, f_α *es estrictamente creciente si* $\alpha > 0$ *y estrictamente decreciente si* $\alpha < 0$.

En efecto, como $f_\alpha = \exp\circ(\alpha\log)$, basta aplicar la regla de la cadena:

$$f'_\alpha(x) = \exp(\alpha\log x)\,\frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$ ■

Obsérvese que todas las funciones potencia se derivan, formalmente, como si el exponente fuese un número natural. Nótese también que, si en (5) tomamos $\alpha = 1/q$ con $q \in \mathbb{N}$, tenemos la derivada de la función raíz q-ésima, calculada en su momento. Ahora tenemos un resultado más general, e incluso más fácil de recordar.

Para que todas las propiedades algebraicas de las potencias con exponente natural, que conocíamos hace tiempo, queden generalizadas, observamos claramente que todas las funciones potencia preservan el producto de números reales:

(P.2) *Se verifica que* $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

En efecto: $(xy)^\alpha = \exp\big(\alpha \log(xy)\big) = \exp(\alpha \log x)\exp(\alpha \log y) = x^\alpha y^\alpha$. ∎

Finalmente, el comportamiento de las potencias en 0 y en $+\infty$, también es evidente:

(P.3) *Si* $\alpha > 0$, *se tiene que* $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha = 0$ *y que* $x^\alpha \to +\infty \ (x \to +\infty)$. *Si* $\alpha < 0$, *entonces* $x^\alpha \to +\infty \ (x \to 0)$ *y* $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha = 0$. *En ambos casos, la potencia de exponente* $\alpha \in \mathbb{R}^*$ *es una biyección de* $\mathbb{R}^+$ *sobre sí mismo y su inversa es la potencia de exponente* $1/\alpha$.

9.5. Sucesiones de potencias

Pasamos ahora a discutir el comportamiento de funciones que involucran las potencias de exponente real, sin necesidad de que la base o el exponente sean constantes. En general, dado un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$, podemos considerar una función $h : A \to \mathbb{R}^+$ que venga definida por $h(x) = f(x)^{g(x)}$ para todo $x \in A$, donde $f : A \to \mathbb{R}^+$ y $g : A \to \mathbb{R}$ son funciones cualesquiera.

Cuando tenga sentido, nos preguntamos por el comportamiento lateral u ordinario de h en un punto, o en el infinito, suponiendo que sabemos lo que les ocurre a f y g. Para contestar estas preguntas sin tener que distinguir casos, bastará ver si la sucesión $\big\{f(a_n)^{g(a_n)}\big\}$ converge o diverge, donde $\{a_n\}$ es una sucesión de puntos de A, convergente o divergente. Así pues, nuestro problema consiste en analizar una sucesión de potencias $\big\{x_n^{y_n}\big\}$, donde $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son sucesiones convergentes o divergentes, con $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para ello escribimos

$$x_n^{y_n} = \exp\big(y_n \log x_n\big) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y aprovechamos las propiedades de la exponencial y del logaritmo, junto con las reglas sobre la convergencia o divergencia del producto de dos sucesiones, obteniendo inmediatamente los siguientes resultados.

- *Sean* $y_n \in \mathbb{R}$ *y* $x_n \in \mathbb{R}^+$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.
  - (i) *Supongamos que* $\{x_n\} \to 0$.
    - (a) *Si* $\{y_n\} \to -\infty$, *o* $\{y_n\} \to y \in \mathbb{R}^-$, *entonces* $\big\{x_n^{y_n}\big\} \to +\infty$.
    - (b) *Si* $\{y_n\} \to y \in \mathbb{R}^+$, *o* $\{y_n\} \to +\infty$, *entonces* $\big\{x_n^{y_n}\big\} \to 0$.
  - (ii) *Supongamos que* $\{x_n\} \to x \in \mathbb{R}^+$.
    - (a) *Si* $\{y_n\} \to y \in \mathbb{R}$, *entonces* $\big\{x_n^{y_n}\big\} \to x^y$.
    - (b) *Si* $\{y_n\} \to +\infty$ *y* $x > 1$, *o* $\{y_n\} \to -\infty$ *y* $x < 1$, *entonces* $\big\{x_n^{y_n}\big\} \to +\infty$.
    - (c) *Si* $\{y_n\} \to +\infty$ *y* $x < 1$, *o* $\{y_n\} \to -\infty$ *y* $x > 1$, *entonces* $\big\{x_n^{y_n}\big\} \to 0$.
  - (iii) *Supongamos finalmente que* $\{x_n\} \to +\infty$.
    - (a) *Si* $\{y_n\} \to -\infty$, *o* $\{y_n\} \to y \in \mathbb{R}^-$, *entonces* $\big\{x_n^{y_n}\big\} \to 0$.
    - (b) *Si* $\{y_n\} \to y \in \mathbb{R}^+$, *o* $\{y_n\} \to +\infty$, *entonces* $\big\{x_n^{y_n}\big\} \to +\infty$.

Destaquemos los tres casos que no quedan cubiertos por la discusión anterior, porque la sucesión $\{y_n \log x_n\}$ presenta una indeterminación del tipo $[0 \cdot \infty]$:

- $\{x_n\} \to 0$ e $\{y_n\} \to 0$: *Indeterminación del tipo* $\left[0^0\right]$
- $\{x_n\} \to 1$ e $\{y_n\}$ diverge: *Indeterminación del tipo* $[1^\infty]$
- $\{x_n\} \to +\infty$ e $\{y_n\} \to 0$: *Indeterminación del tipo* $\left[(+\infty)^0\right]$

En cualquiera de los tres casos, nada se puede afirmar, en general, sobre la sucesión $\left\{x_n^{y_n}\right\}$. Es fácil comprobar que *toda* sucesión $\{z_n\}$ de números reales positivos puede expresarse como una sucesión de potencias $\{z_n\} = \left\{x_n^{y_n}\right\}$, de forma que $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ se encuentren en cualquiera de los tres casos anteriores.

Resumiendo, podemos ya enumerar todos los tipos de indeterminación. En esencia sólo hay dos, $[\infty - \infty]$ y $[0 \cdot \infty]$, que ya aparecieron al estudiar el comportamiento de sumas y productos, respectivamente. La segunda tomaba dos aspectos, $[\infty/\infty]$ y $[0/0]$ que aparecieron al estudiar cocientes, y ahora tres aspectos más, $\left[0^0\right]$, $\left[(+\infty)^0\right]$ y $[1^\infty]$, que han surgido al estudiar potencias. En lo que sigue presentaremos métodos que, lógicamente bajo ciertas hipótesis, permiten resolver estas últimas indeterminaciones. Volvemos a trabajar con límites de funciones, que siempre es un planteamiento más general.

9.6. Escala de infinitos

La exponencial, el logaritmo y cualquier potencia con exponente positivo, son funciones que divergen en $+\infty$, pero cabe preguntarse qué le ocurre al cociente entre dos de estas funciones, que presenta una indeterminación del tipo $[\infty/\infty]$. Obviamente, comparar dos potencias no tiene dificultad, basta pensar que $x^\alpha/x^\beta = x^{\alpha-\beta}$ para cualesquiera $x, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$. Damos ahora respuesta a las demás preguntas.

- *Para todo* $\rho \in \mathbb{R}^+$ *se tiene:* $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^\rho} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\rho}{e^x} = 0.$

Empezamos comprobando que $\left\{(\log n)/n\right\} \to 0$. Para ello aplicamos el criterio de Stolz, pues se trata de un cociente de dos sucesiones, cuyo denominador es una sucesión estrictamente creciente y no mayorada. Basta entonces observar que

$$\left\{\frac{\log(n+1) - \log n}{(n+1) - n}\right\} = \left\{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right\} \to \log 1 = 0$$

Si ahora definimos $h(x) = (\log x)/x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, es claro que $h \in D(\mathbb{R}^+)$ con

$$h'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Para $x \geqslant e$ tenemos $h'(x) \leqslant 0$, luego h es decreciente en la semirrecta $[e, +\infty[$.

Como $\{h(n)\} \to 0$, para cada $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $m \in \mathbb{N}$, con $m > e$, de forma que $h(m) < \varepsilon$. Entonces, para $x \in \mathbb{R}$ con $x > m$ tenemos $0 < h(x) \leqslant h(m) < \varepsilon$ y hemos demostrado que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$.

Si ahora $\rho \in \mathbb{R}^+$ y $\{x_n\}$ es cualquier sucesión de números positivos con $\{x_n\} \to +\infty$, tomando $\{y_n\} = \{x_n^\rho\} \to +\infty$, obtenemos

$$\left\{\frac{\log x_n}{x_n^\rho}\right\} = \left\{\frac{\log y_n}{\rho\, y_n}\right\} = \left\{\frac{1}{\rho}\, h(y_n)\right\} \to 0$$

Queda así comprobado que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log x}{x^\rho} = 0$.

Por otra parte, también podemos tomar $\{z_n\} = \{e^{x_n}\} \to +\infty$ y, usando lo ya demostrado, concluimos que

$$\left\{\frac{x_n^\rho}{e^{x_n}}\right\} = \left\{\left[\frac{\log z_n}{z_n^{1/\rho}}\right]^\rho\right\} \to 0, \qquad \text{luego} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\rho}{e^x} = 0 \qquad \blacksquare$$

El resultado anterior se conoce como "escala de infinitos", pues claramente establece una jerarquía entre funciones que divergen positivamente en $+\infty$: la exponencial "domina" a todas las potencias con exponente positivo, mientras que cualquiera de dichas potencias domina, en el mismo sentido, al logaritmo. Muchos otros límites pueden deducirse de los anteriores mediante fáciles manipulaciones, como veremos en algunos ejemplos. Para todo $\rho \in \mathbb{R}^+$ se tiene:

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 0} x^\rho \log x = \lim_{x\to+\infty} (1/x)^\rho \log(1/x) = -\lim_{x\to+\infty} (\log x)/x^\rho = 0$$

$$\text{(b)} \quad \lim_{x\to 0+} e^{-1/x}/x^\rho = \lim_{x\to+\infty} x^\rho e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} x^\rho/e^x = 0$$

Veamos también un par de ejemplos de indeterminaciones de tipo $[(+\infty)^0]$ y $[0^0]$:

$$\text{(c)} \quad \lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = \lim_{x\to+\infty} \exp\big((\log x)/x\big) = 1$$

$$\text{(d)} \quad \lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} \exp(x \log x) = 1$$

9.7. Series armónicas y series de Bertrand

Usando potencias de exponente real, podemos completar la gama de series armónicas: fijado $\alpha \in \mathbb{R}$, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ se conoce como *serie armónica con exponente* α. Hasta ahora sólo habíamos considerado esta serie para algunos valores de α muy concretos. En general, es fácil estudiar su convergencia:

- *La serie armónica con exponente* $\alpha \in \mathbb{R}$ *converge si, y sólo si,* $\alpha > 1$.

Es claro que, para $\alpha \leqslant 0$, el término general de nuestra serie no converge a cero, luego la serie no converge. Suponiendo que $\alpha > 0$, la sucesión $\{1/n^{\alpha}\}$ es decreciente y podemos aplicar el criterio de condensación: la convergencia de la serie armónica con exponente α equivale a la de la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} 2^n \frac{1}{\left(2^n\right)^{\alpha}} = \sum_{n\geqslant 0} \left(2^{1-\alpha}\right)^n$. Pero esta es la serie geométrica de razón $2^{1-\alpha}$, que sabemos converge si, y sólo si, $2^{1-\alpha} < 1$, es decir, $\alpha > 1$. ■

Como ocurrió en su momento con las series geométricas, tenemos aquí una nueva gama de series, cuya convergencia hemos caracterizado en forma fácil de recordar, lo que las hace muy útiles para estudiar otras series, gracias a los criterios de comparación. Esta gama se puede todavía ampliar, involucrando la función logaritmo y un nuevo exponente. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{n^{\alpha}(\log n)^{\beta}}$ se conoce como *serie de Bertrand* con exponentes α y β. Tomar $n \geqslant 3$ hace que se tenga $\log n > 1$, lo que facilita los cálculos.

- *La serie de Bertrand con exponentes α y β converge cuando $\alpha > 1$ y diverge cuando $\alpha < 1$. En el caso $\alpha = 1$, dicha serie converge si, y sólo si, $\beta > 1$.*

En la demostración escribimos para abreviar $a_n = \dfrac{1}{n^{\alpha}(\log n)^{\beta}}$. En el caso $\alpha > 1$, debemos comprobar que la serie de Bertrand converge para todo $\beta \in \mathbb{R}$. Si $\beta \geqslant 0$, tenemos $a_n \leqslant 1/n^{\alpha}$ y aplicamos el criterio de comparación. Si $\beta < 0$, fijamos $\lambda \in]1, \alpha[$, para comparar la serie de Bertrand con la armónica de exponente λ, que sabemos converge. La escala de infinitos, con $\rho = (\lambda - \alpha)/\beta > 0$, nos dice que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1/n^{\lambda}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^{-\beta}}{n^{\alpha-\lambda}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\log n}{n^{\rho}}\right)^{-\beta} = 0$$

y basta aplicar el criterio de comparación por paso al límite.

En el caso $\alpha < 1$, la divergencia de la serie de Bertrand se obtiene de forma bastante similar. Si $\beta \leqslant 0$, tenemos $a_n \geqslant 1/n^{\alpha}$ y basta aplicar el criterio de comparación. En el caso $\beta > 0$, fijamos $\lambda \in]\alpha, 1[$, para comparar la serie de Bertrand con la armónica de exponente λ, que ahora diverge. La escala de infinitos, otra vez con $\rho = (\lambda - \alpha)/\beta > 0$, nos dice que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/n^{\lambda}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^{\beta}}{n^{\lambda-\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\log n}{n^{\rho}}\right)^{\beta} = 0$$

y aplicamos de nuevo el criterio de comparación por paso al límite.

Queda considerar finalmente el caso $\alpha = 1$. De nuevo, si $\beta \leqslant 0$, tenemos $a_n \geqslant 1/n$, y el criterio de comparación nos dice que la serie de Bertrand diverge. En el caso $\beta \geqslant 0$, la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente y podemos aplicar el criterio de condensación. Obtenemos que, para $\alpha = 1$, la convergencia de la serie de Bertrand equivale a la de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{2^n}{2^n\left(\log 2^n\right)^{\beta}} = \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{(\log 2)^{\beta} n^{\beta}}$. Basta ahora aplicar que la serie armónica con exponente β converge si, y sólo si, $\beta > 1$. ■

Obsérvese el papel clave que ha jugado el criterio de condensación en los razonamientos anteriores: primero nos llevó de una serie armónica a una geométrica y después nos ha llevado de una serie de Bertrand a una armónica.

9.8. Equivalencia logarítmica

Con la escala de infinitos resolvimos algunas indeterminaciones del tipo $\left[(+\infty)^0\right]$ y $\left[0^0\right]$. Vamos a ver ahora un método bastante útil para abordar indeterminaciones del tipo $[1^\infty]$. Para motivarlo basta recordar la derivada del logaritmo en 1:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = 1 \tag{6}$$

Si una sucesión de potencias $\left\{x_n^{y_n}\right\}$ presenta una indeterminación del tipo $[1^\infty]$, vimos que el problema procede de la sucesión $\{y_n \log x_n\}$, que presenta una indeterminación del tipo $[\infty \cdot 0]$. Como $\{x_n\} \to 1$, la igualdad (6) sugiere sustituir la sucesión $\{y_n \log x_n\}$ por $\{y_n (x_n - 1)\}$, que debe tener el mismo comportamiento y, aunque presenta el mismo tipo de indeterminación, puede ser en la práctica mucho más sencilla. Obtenemos así el resultado que sigue, conocido como *criterio de equivalencia logarítmica*.

- *Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales positivos tal que $\{x_n\} \to 1$ y sea $\{y_n\}$ cualquier sucesión de números reales.*

  (i) *Para $L \in \mathbb{R}$ se tiene:* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x_n - 1) = L \iff \lim\limits_{n\to\infty} x_n^{y_n} = e^L$

  (ii) $\{y_n(x_n-1)\} \to +\infty \iff \left\{x_n^{y_n}\right\} \to +\infty$

  (iii) $\{y_n(x_n-1)\} \to -\infty \iff \left\{x_n^{y_n}\right\} \to 0$

La demostración se deduce de las ideas ya comentadas, salvo que para aplicar directamente (6), necesitaríamos que $x_n \neq 1$ para n suficientemente grande, cosa que no podemos asegurar, ya que $\{x_n\} \to 1$. La solución consiste simplemente en interpretar (6) como la posibilidad de extender por continuidad una función. Más concretamente, la función $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x) = \frac{\log x}{x-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, \quad \varphi(1) = 1$$

es continua en 1, luego $\{\varphi(x_n)\} \to 1$. Además, es claro que $\varphi(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

La igualdad $y_n \log x_n = y_n (x_n - 1)\, \varphi(x_n)$, válida para todo $n \in \mathbb{N}$, nos da el comportamiento de la sucesión $\{y_n \log x_n\}$ a partir del de $\{y_n (x_n - 1)\}$, y viceversa. Las tres equivalencias del enunciado son ya inmediatas. ■

Aunque las implicaciones hacia la derecha que aparecen en el criterio anterior son las más útiles en la práctica, las recíprocas también tienen interés. Tenemos, por ejemplo, una bonita descripción del logaritmo:

$$\log a = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) \quad \forall a \in \mathbb{R}^+$$

La derivada en el origen de la función exponencial de base a nos daría el mismo resultado.

Ni que decir tiene, el criterio de equivalencia logarítmica permite estudiar la existencia de límite o la divergencia de funciones definidas como potencias con base y exponente variables, cuando presenten indeterminaciones del tipo $[1^\infty]$. Por ejemplo, tenemos claramente

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

9.9. Ejercicios

1. Dado $\rho \in \mathbb{R}^+$, probar que la restricción del logaritmo a $[\rho, +\infty[$ es lipschitziana, pero la restricción a $]0, \rho]$ no es uniformemente continua.

2. Probar que existe una única función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ que verifica $\log f(x) + \sqrt{f(x)} = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Probar también que $f \in D(\mathbb{R})$ y calcular $f'(1)$.

3. Estudiar la existencia y continuidad de la derivada de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^-, \qquad f(x) = \log(1+x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

4. Calcular la imagen de la función $f : [1, 2e] \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x) = \frac{\log x}{x} \quad \forall x \in [1, 2e]$$

5. Probar que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1$.

6. Sea $f \in D(\mathbb{R})$ tal que $f'(x) = \alpha f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es una constante. Probar que $f(x) = f(0)\, e^{\alpha x}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

7. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f \in C[a,b] \cap D\big(]a,b[\big)$, tal que $f(a) = f(b) = 0$. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, probar que existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = \lambda f(c)$.

8. Probar que $e^x + e^{-x} \geqslant 2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

9. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x + e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Probar que f es biyectiva y que f^{-1} es derivable en $\mathbb{R}$. Calcular $(f^{-1})'(1)$ y $(f^{-1})'(1+e)$.

10. Probar que $1 + x \leqslant e^x \leqslant 1 + x e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

11. Probar que $x^e \leqslant e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Probar también que la anterior desigualdad caracteriza al número e, es decir, si $a \in \mathbb{R}^+$ verifica que $x^a \leqslant a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, entonces $a = e$.

12. Estudiar el comportamiento en $+\infty$ de las funciones $\varphi, \psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definidas como sigue, donde $a \in \mathbb{R}^+$ es una constante:
$$\varphi(x) = \frac{\log\left(2 + a e^x\right)}{\sqrt{2 + a x^2}}, \quad \psi(x) = \left(a^x + x\right)^{1/x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

13. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, estudiar la convergencia de las siguientes series:
$$\text{(a)} \quad \sum_{n\geqslant 1} \left(\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^{\alpha} \qquad\qquad \text{(b)} \quad \sum_{n\geqslant 1} \left(1 - e^{-1/n}\right)^{\alpha}$$

14. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, estudiar la derivabilidad de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^-, \quad f(x) = x^\alpha \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

15. Se considera la función $f : \mathbb{R}^+ \setminus \{e\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^{1/(\log x - 1)} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{e\}$$

Estudiar el comportamiento de f en $0, e, +\infty$.

16. Estudiar la convergencia de la sucesión:

$$\left\{ \left(\frac{\alpha \sqrt[n]{a} + \beta \sqrt[n]{b}}{\alpha + \beta} \right)^n \right\}$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha + \beta \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}^+$.

17. Estudiar la derivabilidad de la función $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x^x \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f(0) = 1$$

18. Estudiar el comportamiento en $+\infty$ de la función $h :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos:

(a) $h(x) = \dfrac{x\left(x^{1/x} - 1\right)}{\log x} \quad \forall x \in]1, +\infty[$

(b) $h(x) = (x+1)^{2/3} - (x-1)^{2/3} \quad \forall x \in]1, +\infty[$

(c) $h(x) = \left(\dfrac{x+5}{2x^2 - 1} \right)^{\frac{x-2}{x^2+3}} \quad \forall x \in]1, +\infty[$

19. Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función verificando que

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Probar que $\varphi(r) = \varphi(1)\, r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. Deducir que, si φ es continua al menos en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces $\varphi(x) = \varphi(1)\, x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

20. Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ una función derivable en 1 y verificando que

$$f\big(f(x)\big) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Probar que f es la potencia de exponente $\sqrt{2}$ o la de exponente $-\sqrt{2}$.