Límite superior e inferior

85. Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones acotadas. Prueba que:

i) $\underline{\lim}\{x_n\} = -\overline{\lim}\{-x_n\}$.

ii)

$$\underline{\lim}\{x_n\} + \underline{\lim}\{y_n\} \leqslant \underline{\lim}\{x_n + y_n\} \leqslant \overline{\lim}\{x_n + y_n\} \leqslant \overline{\lim}\{x_n\} + \overline{\lim}\{y_n\}$$

iii) Si $x_n \geqslant 0$ e $y_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\underline{\lim}\{x_n\}\underline{\lim}\{y_n\} \leqslant \underline{\lim}\{x_n y_n\} \leqslant \overline{\lim}\{x_n y_n\} \leqslant \overline{\lim}\{x_n\}\overline{\lim}\{y_n\}.$$

iv) Si $\lim\{x_n\} = x > 0$, entonces

$$\underline{\lim}\{x_n y_n\} = x\,\underline{\lim}\{y_n\}, \quad \overline{\lim}\{x_n y_n\} = x\,\overline{\lim}\{y_n\}.$$

Prueba con ejemplos que las desigualdades en ii) y iii) pueden ser estrictas.

Esta desigualdad es trivial

ii) $\underline{\lim}\{x_n\} + \underline{\lim}\{y_n\} \leq \underline{\lim}\{x_n + y_n\} \leq \overline{\lim}\{x_n + y_n\} \leq \overline{\lim}\{x_n\} + \overline{\lim}\{y_n\}$

Pongamos $A_n = \{x_k : k \geq n\}$ $B_n = \{y_k : k \geq n\}$ $C_n = \{x_k + y_k : k \geq n\}$

$\alpha_n = \inf(A_n)$ $\beta_n = \inf(B_n)$ $\lambda_n = \inf(C_n)$

$\sigma_n = \sup(A_n)$ $\varphi_n = \sup(B_n)$ $\gamma_n = \sup(C_n)$

Minorante de C_n

$\forall k \geq n$

$\alpha_n \leq x_k \leq \sigma_n$

$\beta_n \leq y_k \leq \varphi_n \Rightarrow \alpha_n + \beta_n \leq x_k + y_k \Rightarrow \alpha_n + \beta_n \leq \lambda_n$

$\lambda_n \leq x_k + y_k \leq \gamma_n$ $\quad \sigma_n + \varphi_n \geq x_k + y_k \Rightarrow \sigma_n + \varphi_n \geq \gamma_n$

Mayorante de C_n

$\alpha_n + \beta_n \leq \lambda_n \leq \gamma_n \leq \sigma_n + \varphi_n$

Aplicando límites

$\underline{\lim}\{x_n\} + \underline{\lim}\{y_n\} \leq \underline{\lim}\{x_n + y_n\} \leq \overline{\lim}\{x_n + y_n\} \leq \overline{\lim}\{x_n\} + \overline{\lim}\{y_n\}$

iii)

$$\underline{\lim}\{x_n\}\,\underline{\lim}\{y_n\} \leq \underline{\lim}\{x_n y_n\} \leq \overline{\lim}\{x_n y_n\} \leq \overline{\lim}\{x_n\}\,\overline{\lim}\{y_n\}$$

Pongamos $A_n = \{x_k : k \geq n\}$ $B_n = \{y_k : k \geq n\}$ $C_n = \{x_k y_k : k \geq n\}$

$$\alpha_n = \inf(A_n) \quad \beta_n = \inf(B_n) \quad \lambda_n = \inf(C_n)$$
$$\sigma_n = \sup(A_n) \quad \varphi_n = \sup(B_n) \quad \gamma_n = \sup(C_n)$$

$\forall k \geq n$ $\quad \alpha_n \leq x_k \leq \sigma_n$

$\beta_n \leq y_k \leq \varphi_n$

$\lambda_n \leq x_k y_k \leq \gamma_n$

Puedo multiplicar porque $x_n \geq 0$ $y_n \geq 0$

$\alpha_n \beta_n \leq x_k y_k \Rightarrow \alpha_n \beta_n \leq \lambda_n$

Minorante de C_n

$\sigma_n \varphi_n \geq x_k y_k \Rightarrow \sigma_n \varphi_n \geq \gamma_n$

Mayorante de C_n

$\lambda_n \leq \gamma_n$

$$\alpha_n \beta_n \leq \lambda_n \leq \gamma_n \leq \sigma_n \varphi_n$$

Tomamos límites

$$\underline{\lim}\{x_n\}\,\underline{\lim}\{y_n\} \leq \underline{\lim}\{x_n y_n\} \leq \overline{\lim}\{x_n y_n\} \leq \overline{\lim}\{x_n\}\,\overline{\lim}\{y_n\}$$

Ejercicio examen parcial 2019/2020

$\{x_n\}$ $\{y_n\}$ sucesiones acotadas.

Prueba que $\underline{\lim}\{x_n+y_n\} \le \overline{\lim}\{x_n\} + \underline{\lim}\{y_n\} \le \overline{\lim}\{x_n+y_n\}$

Sean $A_n=\{x_k : k\ge n\}$ $B_n=\{y_k : k\ge n\}$ $C_n=\{x_k+y_k : k\ge n\}$

$\alpha_n=\inf(A_n)$ $\beta_n=\inf(B_n)$ $\gamma_n=\inf(C_n)$
$\sigma_n=\sup(A_n)$ $\varphi_n=\sup(B_n)$ $\lambda_n=\sup(C_n)$

$\forall k\ge n$:

$\alpha_n\le x_k\le\sigma_n \Rightarrow -\sigma_n\le -x_k\le -\alpha_n$
$\beta_n\le y_k\le\varphi_n\Rightarrow -\varphi_n\le -y_k\le-\beta_n$
$\gamma_n\le x_k+y_k\le\lambda_n$

Minorante de B_n

$\gamma_n-\sigma_n\le y_k \Rightarrow \gamma_n-\sigma_n\le\beta_n\Rightarrow \gamma_n\le\beta_n+\sigma_n$

Mayorante de A_n

$\lambda_n-\beta_n\ge x_k\Rightarrow \lambda_n-\beta_n\ge\sigma_n\Rightarrow\lambda_n\ge\sigma_n+\beta_n$

$\gamma_n\le\beta_n+\sigma_n\le\lambda_n$

Tomando límites

$\underline{\lim}\{x_n+y_n\}\le\underline{\lim}\{y_n\}+\overline{\lim}\{x_n\}\le\overline{\lim}\{x_n+y_n\}$

¿Pueden ser estrictas las desigualdades?

Sean las parciales $\{x_{2n}\}=0$ $\{x_{2n-1}\}=1$
$\{y_{2n}\}=2$ $\{y_{2n-1}\}=3$

$\underline{\lim}\{x_n+y_n\}=2\le\underline{\lim}\{y_n\}+\overline{\lim}\{x_n\}=3\le\overline{\lim}\{x_n+y_n\}=4$