

Calcula los 4 nodos de Chebyshev del intervalo $[2, \frac{11}{4}]$.

SOLUCIÓN

Comenzamos hallando los 4 nodos de Chebyshev del intervalo referencial, $[-1, 1]$, y a continuación, mediante un conveniente isomorfismo afín, determinamos lo pedido.

(i) $[-1, 1], N=4$: $x_i = \cos \frac{2i+1}{8}\pi$, $i=0, 1, 2, 3$:

$$\left\{ \cos \frac{\pi}{8}, \cos \frac{3\pi}{8}, \cos \frac{5\pi}{8}, \cos \frac{7\pi}{8} \right\},$$

o si se quiere, refinando los ángulos al 1^{er} cuadrante:

$$\left\{ \cos \frac{\pi}{8}, \cos \frac{3\pi}{8}, -\cos \frac{3\pi}{8}, -\cos \frac{\pi}{8} \right\}$$

(¡obsérvese la distribución simétrica de los nodos respecto al cero!)

(ii) $[2, \frac{11}{4}], N=4$. Sea $\phi: [-1, 1] \rightarrow [2, \frac{11}{4}]$ el isomorfismo afín caracterizado por

la doble igualdad

$$\phi(-1)=2 \quad \wedge \quad \phi(1)=\frac{11}{4},$$

esto es, si $\phi(x)=\alpha x+\beta$, para ciertos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{cases} -\alpha + \beta = 2 \\ \alpha + \beta = \frac{11}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{3}{8} \\ \beta = \frac{19}{8} \end{cases}.$$

Por tanto,

$$\phi(x) = \frac{3}{8}x + \frac{19}{8}$$

y los 4 nodos de Chebyshev en el intervalo $[2, \frac{11}{4}]$ son

$$\left\{ \frac{3}{8} \cos \frac{\pi}{8} + \frac{19}{8}, \frac{3}{8} \cos \frac{3\pi}{8} + \frac{19}{8}, -\frac{3}{8} \cos \frac{3\pi}{8} + \frac{19}{8}, -\frac{3}{8} \cos \frac{\pi}{8} + \frac{19}{8} \right\}.$$

