5 LÍMITE FUNCIONAL

5.1 DEFINICIÓN

5.1.1 Acumulación

Definición 5.1.1. Sea A un conjunto de números reales. Diremos que $\alpha \in \mathbb{R}$ es un *punto de acumulación* si existe una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

1) $a_n \in A$, para todo $n \in \mathbb{N}$,

2) $a_n \neq \alpha$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y

3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

Usaremos A' para denotar al conjunto de los puntos de acumulación de A.

Ejemplos 5.1.2. 1) Si I es un intervalo, I' es el correspondiente intervalo cerrado. Por ejemplo, $]0,1['= [0,1]$.

2) $\mathbb{N}' = \emptyset$.

3) $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$.

4) $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}' = \{0\}$.

Proposición 5.1.3. *Sea $A \subset \mathbb{R}$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1) α es un punto de acumulación de A.

2) $\left(]\alpha - r, \alpha + r[\setminus\{\alpha\}\right) \cap A \neq \emptyset$, para cualquier $r > 0$.

Demostración. 1)⇒2) Supongamos que α es un punto de acumulación y sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de A con límite α y $a_n \neq \alpha$. Dado $r > 0$, aplicamos la definición de convergencia para dicho número positivo: existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - \alpha| < r$ si $n \geqslant n_0$. En particular,

$$a_{n_0} \in \left(]\alpha - r, \alpha + r[\setminus\{\alpha\}\right) \cap A,$$

por lo que la intersección es no vacía como queríamos.

2)⇒1) Dado $n \in \mathbb{N}$, tomemos $r = 1/n$. Por hipótesis, existe

$$a_n \in \left(]\alpha - r, \alpha + r[\setminus\{\alpha\}\right) \cap A.$$

En particular, se cumple que $|a_n - \alpha| < \frac{1}{n}$, con lo que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y su límite es α. Tal como lo hemos elegido, $a_n \in A$ y $a_n \neq \alpha$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ como queríamos. □

Definición 5.1.4. Sea A un conjunto de números reales. Un punto $a \in A$ diremos que es un *punto aislado* si no es un punto de acumulación o, lo que es lo mismo, si existe $r > 0$ tal que $]a - r, a + r[\cap A = \{a\}$.

Proposición 5.1.5. *Sea $A \subset \mathbb{R}$ y sea $a \in A$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) a *es un punto aislado de* A.

2) *Si* $\{a\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de elementos de* A *convergente a* a, *entonces existe un número natural* n_0 *tal que* $a_n = a$ *para cualquier* $n \geqslant n_0$.

Observación 5.1.6. Las funciones son automáticamente continuas en los puntos aislados del dominio.

5.1.2 Límite funcional

Definición 5.1.7. Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función real de variable real y sea $\alpha \in A'$. Diremos que la función f tiene límite L en el punto α si para toda sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A ,distintos de α, que tienda a α se cumple que $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a L.

En ese caso, escribiremos $\lim_{x\to\alpha} f(x) = L$.

Observación 5.1.8.

1) El valor de la función, si es que tiene sentido, no tiene ninguna relación con el valor del límite.

2) No tiene sentido ni interés el estudio del límite funcional en los puntos aislados.

3) El límite, caso de existir, es único.

4) Hay dos motivos por los que una función no tiene límite en un punto:

   a) existe una sucesión $\{x_n\}$ tal que $\{f(x_n)\}$ no tiende a L,

   b) o bien existen dos sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ tales que $\{f(x_n)\}$ y $\{f(y_n)\}$ tienen límites distintos.

Figura 4: Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859)
Dirichlet fue un matemático alemán de la primera mitad del siglo XIX. Entre otras muchas cosas, a él se le atribuye la idea moderna de función.

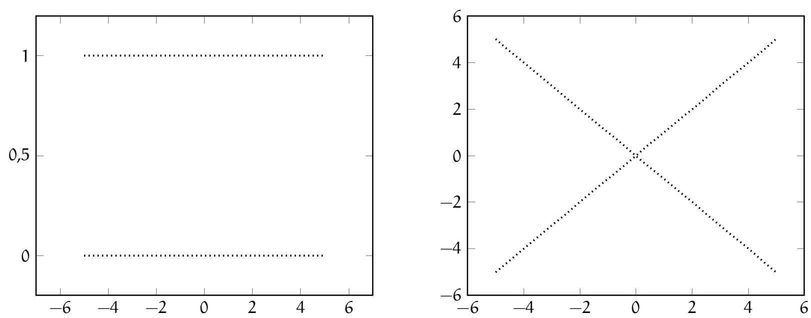
Ejemplo 5.1.9. La *función de Dirichlet*, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{si } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

utiliza la densidad de $\mathbb{Q}$ para construir una función que no se puede pintar. Esta función no es continua en ningún punto. La función $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ -x, & \text{si } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

sólo es continua en 0.



Teorema 5.1.10 (Caracterización de la existencia de límite). *Sea* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *y* $\alpha \in A'$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1) $\lim_{x\to\alpha} f(x) = L$.

2) *Para toda sucesión* monótona $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de elementos de* A *distintos de* α *que tienda a* α *se cumple que* $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tiende a* L.

3) *Para cada* $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que si* $0 < |x-a| < \delta$, *se tiene que* $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Demostración. FALTA □

5.2 LÍMITES LATERALES

Sea A un conjunto de números reales y α un número real. Usaremos la notación

$$A_\alpha^- = \{a \in A : a < \alpha\}$$
$$A_\alpha^+ = \{a \in A : a > \alpha\}$$

Por el Teorema 5.1.10, se tiene que $A' = (A_\alpha^-)' \cup (A_\alpha^+)'$

Definición 5.2.1. Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función y $\alpha \in A'$.

1) Diremos que f tiene límite L por la derecha en α si $\alpha \in A_\alpha^+$ y

$$\lim_{x\to\alpha} f_{|A_\alpha^+}(x) = L.$$

Usaremos la notación $\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = L$.

2) De forma análoga se define $\lim_{x\to\alpha^-} f(x) = L$.

Proposición 5.2.2. *Una función tiene límite en un punto si, y sólo si, existen todos los límites laterales que tengan sentido y coinciden.*

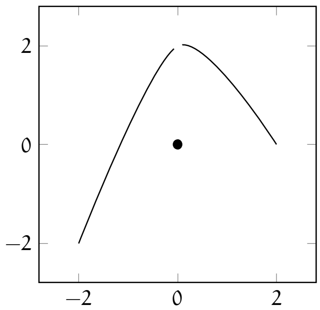


Figura 5: Discontinuidad evitable

5.3 RELACIÓN ENTRE LÍMITE Y CONTINUIDAD

Teorema 5.3.1. *Sea* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *y sea* $a \in A$.

1) *Si* $a \in A'$, f *es continua en* a *si, y sólo si,* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

2) *Si* a *es un punto aislado,* f *es continua en* a.

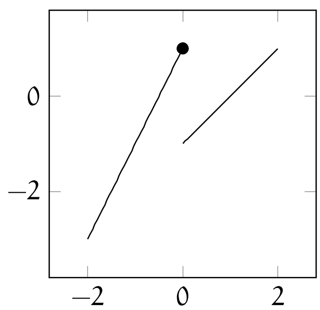


Figura 6: Discontinuidad de salto

Corolario 5.3.2. *Sea* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *y* $\alpha \in A' \setminus A$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1) f *tiene límite en* α.

2) *Existe una función* $g\colon A \cup \{\alpha\} \to \mathbb{R}$ *continua tal que* $g_{|A} = f$.

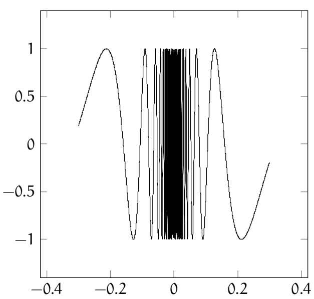


Figura 7: Discontinuidad esencial

Tipos de discontinuidades

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función y sea $a \in A'$. Si la función no es continua en a, ¿cuáles son las posibles razones? En vista del teorema anterior, la función no es continua si el valor del límite no coincide con el valor de la función en a o si el límite no existe. El primer tipo de discontinuidad corresponde al primer caso; la no existencia de límite corresponde a los siguientes.

1) Una función tiene una discontinuidad *evitable* en a si existe $\lim_{x\to a} f(x)$, pero no es vale $f(a)$. Decimos que la discontinuidad es evitable por que si definimos una nueva función $\tilde{f}$ como

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \neq a, \\ \lim\limits_{x\to a} f(x), & \text{si } x = a, \end{cases}$$

obtenemos una función que es continua en a.

2) La función tiene una discontinuidad de salto en a si existen los límites laterales, pero no coinciden. El salto puede ser finito o infinito. Por ejemplo, la función $f\colon [-2,2] \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{si } -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ x-1, & \text{si } 0 < x \leqslant 2, \end{cases}$$

tiene una discontinuidad de salto. La límites laterales en cero valen 1 y -1. El salto es, por tanto, finito. En cambio, el salto de la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

es infinito.

3) Si el motivo por el que no existe el límite es otro, decimos que la función tienen una discontinuidad *esencial*. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

no tiene límite en el origen.

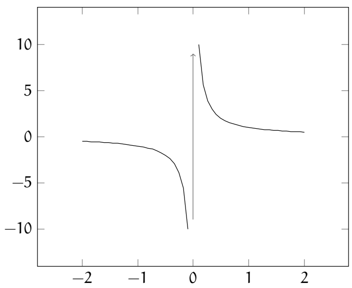


Figura 8: Una asíntota vertical

5.4 LÍMITES E INFINITO

5.4.1 Límites infinitos

Definición 5.4.1. Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función y sea $\alpha \in A'$. Diremos que f tiene límite $+\infty$ (resp. $-\infty$) en α si para toda sucesión $\{a_n\}$ que tienda a α de puntos de A, distintos de α, se cumple que $\{f(a_n)\}$ tiende a $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Proposición 5.4.2. *Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función y sea $\alpha \in A'$. Son equivalentes:*

1) $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$.

2) *Dado $M \in \mathbb{R}$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in A$ y $0 < |x-\alpha| < \delta$, entonces $f(x) > M$.*

Definición 5.4.3. La recta $x = \alpha$ es una *asíntota vertical* de la función $f\colon A \to \mathbb{R}$ si alguno de los límites laterales de f en α vale $+\infty$ o $-\infty$.

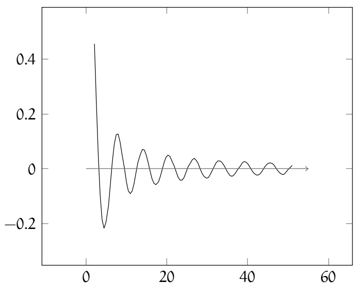


Figura 9: Una asíntota horizontal

5.4.2 Límites en infinito

Definición 5.4.4. 1) Sea A un conjunto de números reales no acotado superiormente. Diremos que una función $f\colon A \to \mathbb{R}$ tiene límite L en $+\infty$ si para toda sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos de A que diverge positivamente se cumple que $\{f(x_n)\}$ tiende a L. En ese caso, escribiremos

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L.$$

2) Si A es un conjunto que no está acotado inferiormente, se define de forma análoga el límite en $-\infty$ de una función $f\colon A \to \mathbb{R}$.

Definición 5.4.5. La recta $y = L$ es una *asíntota horizontal* de la función $f\colon A \to \mathbb{R}$ si alguno de los límites de f en $\pm\infty$ vale L.

Ejemplo 5.4.6. 1) El límite de la función $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \operatorname{sen}(x)/x$ en $+\infty$ es cero.

2) Ninguna función periódica, salvo las constantes, tiene límite en $+\infty$. En efecto, sea f una función periódica no constante. Esto quiere decir que

   a) existen x_0 y x_1 tales que $f(x_0) \neq f(x_1)$, y

   b) existe $T > 0$ tal que $f(x) = f(x+T)$ para cualquier x.

   Es evidente que las sucesiones $\{x_0 + nT\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{x_1 + nT\}_{n\in\mathbb{N}}$ tienden a $+\infty$, pero

$$\lim_{n\to\infty} f(x_0 + nT) = f(x_0) \neq f(x_1) = \lim_{n\to\infty} f(x_1 + nT).$$

   Por tanto, f no tiene límite en $+\infty$.

Proposición 5.4.7. *Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función definida en un conjunto A no acotado superiormente. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = L.$

2) *Dado $\varepsilon > 0$ existe $M \in \mathbb{R}$ tal que si $x > M$ y $x \in A$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.*

De forma similar se puede definir $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ o las versiones equivalentes con $-\infty$.

Cambios de variable

Es posible intercambiar cero e infinito en el cálculo de límites, ya sea el resultado o el lugar donde se estudia el límite, mediante un cambio de variable.

Proposición 5.4.8. *Sea $a \in \mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$ y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$. Entonces*

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = +\infty \iff \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Proposición 5.4.9. *Sea $L \in \mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$. Entonces*

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = L \iff \lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = L$, *y*

2) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) = L \iff \lim_{x\to-\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = L.$

5.5 ÁLGEBRA DE LÍMITES

Proposición 5.5.1 (Suma de límites). *Sean $f, g\colon A \subset\to \mathbb{R}$ dos funciones y sea $\alpha \in A'$.*

1) *Si ambas funciones tienen límite en α,*

$$\lim_{x\to\alpha} (f+g)(x) = \lim_{x\to\alpha} f(x) + \lim_{x\to\alpha} g(x).$$

2) *Supongamos que* f *tiene límite en* α *y que existe un número positivo* δ *tal que la función* g *está acotada inferiormente en el conjunto* $]a-\delta, a+\delta[\cap A$. *Entonces*

$$\lim_{x\to\alpha}(f+g)(x) = +\infty.$$

Demostración. Las demostraciones de está sección son consecuencia directa de la versión análoga para sucesiones. Por ejemplo, si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión con límite α y $x_n \neq \alpha$, entonces

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(f+g)(x_n) &= \lim_{n\to\infty}(f(x_n)+g(x_n)) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} g(x_n)\\ &= \lim_{x\to\alpha} f(x) + \lim_{x\to\alpha} g(x),\end{aligned}$$

y, por tanto,

$$\lim_{x\to\alpha}(f+g)(x) = \lim_{x\to\alpha} f(x) + \lim_{x\to\alpha} g(x). \qquad \square$$

Proposición 5.5.2 (Producto de límites)**.** *Sean* $f, g\colon A \subset\to \mathbb{R}$ *dos funciones y sea* $\alpha \in A'$.

1) *Si ambas funciones tienen límite en* α,

$$\lim_{x\to\alpha}(f\cdot g)(x) = \left(\lim_{x\to\alpha} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to\alpha} g(x)\right).$$

2) *Si* f *tiene límite cero en* α *y la función* g *está acotada en un entorno de* α, *entonces*

$$\lim_{x\to\alpha}(f\cdot g)(x) = 0.$$

3) *Supongamos que* f *tiene límite en* α *y que existe un número positivo* δ *tal que la función* $1/g$ *está acotada inferiormente por un número positivo en el conjunto* $]a-\delta, a+\delta[\cap A$. *Entonces*

$$\lim_{x\to\alpha}(f\cdot g)(x) = +\infty.$$

Corolario 5.5.3. *Sean* $f, g\colon A \subset\to \mathbb{R}$ *dos funciones y sea* $\alpha \in A'$. *Supongamos que* $\lim_{x\to\alpha} g(x) \neq 0$, *entonces*

$$\lim_{x\to\alpha}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to\alpha} f(x)}{\lim_{x\to\alpha} g(x)}.$$

Ejemplo 5.5.4. Para calcular el límite de un cociente de polinomios en $+\infty$ tenemos que dividir por x^n, donde n es el grado del denominador.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{3x^2-x+4} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}+\frac{4}{x^2}} = \frac{1}{3}.$$

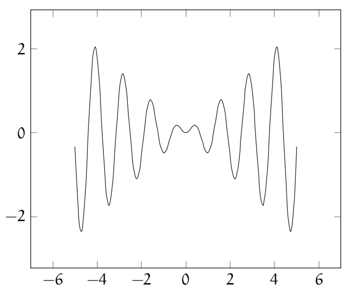


Figura 10: En Italia, la regla del sandwich o, como algunos dicen, el teorema del emparedado, es conocido informalmente como el teorema de los dos carabineros (dos carabineros conduciendo a un prisionero entre ellos).

Relación entre límite y orden

Proposición 5.5.5 (Relación con el orden)**.** *Sean* $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ *y sea* $\alpha \in A'$. *Supongamos que* $f(x) \leqslant g(x)$ *para todo* $x \in A$. *Entonces* $\lim_{x\to\alpha} f(x) \leqslant \lim_{x\to\alpha} g(x)$.

Corolario 5.5.6 (Regla del sandwich)**.** *Sean* $f, g, h\colon A \to \mathbb{R}$ *y sea* $\alpha \in A'$. *Supongamos que* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ *para todo* $x \in A$. *Si además se cumple que*

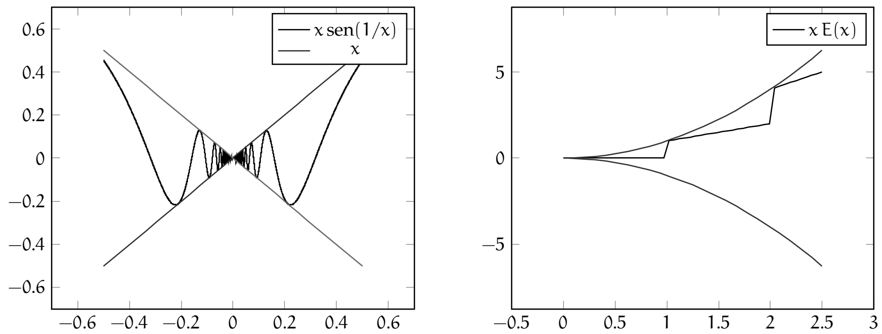
$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} h(x),$$

entonces $\lim_{x\to\alpha} g(x) = \lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} h(x)$.

Ejemplo 5.5.7. Consideremos las funciones

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} xE(x), & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Es sencillo comprobar que $-x \leqslant f(x) \leqslant x$ y que $-x^2 \leqslant xE(x) \leqslant x^2$. Tomando límites en dichas desigualdades se obtiene que ambas funciones tienen límite cero en cero y, por tanto, son continuas.



5.6 ALGUNOS LÍMITES INTERESANTES

Proposición 5.6.1 (Escala de infinitos). *Si* $b > 0$ *y* $a > 1$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x^b} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{a^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{b^x}{x^x} = 0.$$

Podemos usar que las funciones exponencial y logaritmo son continuas e inversas una de la otra para resolver límites de la forma $\lim f(x)^{g(x)}$. En otras palabras, si f es una función positiva

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = L \iff \lim_{x\to alpha} \log(f(x)) = \log(L).$$

Usando esto y la escala de infinitos es inmediato comprobar lo siguiente.

Proposición 5.6.2.

$$\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = 1.$$

Corolario 5.6.3.

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = 1.$$

En el caso particular de que la base tienda a uno, además de lo anterior, también podemos usar el siguiente resultado.

Proposición 5.6.4 (Regla del número e).

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Corolario 5.6.5. *Si* $\lim_{x\to\alpha} f(x) = 1$, *entonces*

$$\lim_{x\to\alpha} f(x)^{g(x)} = e^L, +\infty, 0 \iff \lim_{x\to\alpha} g(x)\left(f(x) - 1\right) = L, +\infty, -\infty.$$

Ejemplo 5.6.6. Vamos a usar la proposición 5.6.4 para calcular el límite

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2+2}\right)^{x+1}.$$

Para ello calculamos

$$\lim_{x\to+\infty}(x+1)\cdot\left(\frac{x^2+1}{x^2+2}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x-1}{x^2+2}=0.$$

Por tanto, $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2+2}\right)^{x+1}=e^0=1$.

Ejemplo 5.6.7. Esta regla para el cálculo de límites se puede usar en los dos sentidos. Por ejemplo, para calcular $\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt[x]{a}-1\right)$, estudiamos el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[x]{a}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(a^{1/x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}a=a.$$

Por tanto, $\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt[x]{a}-1\right)=\log(a)$.

5.7 EJERCICIOS

Ejercicio 5.1. Sea $A\subset\mathbb{R}$ y sea $\alpha\in A'$.

1) Prueba que existe una sucesión estrictamente monótona de puntos de A que converge a α.

2) Comprueba también que, para todo $\delta>0$, el conjunto $]\alpha-\delta,\alpha+\delta[\cap A$ es infinito.

Ejercicio 5.2. Determina el conjunto de puntos de acumulación de cada uno de los siguientes conjuntos:

$$\{x\in\mathbb{Q}:0<|x|<1\},\quad\left\{\frac{(-1)^n}{n}:n\in\mathbb{N}\right\},\quad\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}:n,m\in\mathbb{N}\right\}$$

Ejercicio 5.3. Sea $f\colon A\to\mathbb{R}$ una función y $\alpha\in A'$. Supongamos que se verifica que: para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que, para $x,y\in A$ con $0<|x-\alpha|<\delta$ y $0<|y-\alpha|<\delta$, se tiene que $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. Prueba que f tiene límite en el punto α.

Ejercicio 5.4. Sean $f,g\colon A\to\mathbb{R}$ funciones continuas verificando que $f(x)=g(x)$, para todo x en un conjunto B denso en A. Prueba que $f(x)=g(x)$, para $x\in A$.

Ejercicio 5.5. Sea $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función verificando que $f(x+y)=f(x)+f(y)$ para cualesquiera x e y en $\mathbb{R}$. Prueba que

1) $f(rx)=rf(x),\ \forall r\in\mathbb{Q},\ \forall x\in\mathbb{R}$.

2) Si existe un intervalo abierto I con $f(I)$ acotado, entonces f es continua en 0. (es fácil demostrar que se puede asumir que $0\in I$)

3) Si f es continua en 0 entonces f es continua en todo $\mathbb{R}$.

4) Si f es continua en $\mathbb{R}$ entonces $f(x) = ax$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$ con $a = f(1)$.

Ejercicio 5.6. Sea $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{1}{1-x+E(x)}$, para $x \in \mathbb{R}^+$, donde E es la función parte entera. Estudia el límite en $+\infty$ de las funciones $g(x) = f(x+1) - f(x)$ y $h(x) = \frac{f(x)}{x}$.

Ejercicio 5.7. Sea $c \in \mathbb{R}$ una constante y se considera $f\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$ definida como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)^{-1}, & \text{si } -1 < x < 0, \\ c, & \text{si } x = 0, \\ 1+x^2, & \text{si } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Estudia la existencia de límite y la continuidad de f en 0. ¿Puede extenderse f para obtener una función continua en el intervalo $]-1,1]$ o incluso en el intervalo $[-1,1]$?

Ejercicio 5.8. Sea $f\colon]0,1[\to \mathbb{R}$ la función dada por:

$$f(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x(x-1)}$$

Prueba que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ y que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$. Deduce que la imagen de f es todo $\mathbb{R}$.

Ejercicio 5.9. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polinomio de grado impar. Calcula su imagen.

Ejercicio 5.10. Sean $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+e^{1/x}}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{x}, & \text{si } x < 0, \\ x, & \text{si } 0 \leqslant x < 1, \\ \sqrt[5]{x}, & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Estudia la continuidad de f y g en todo punto de $\mathbb{R}$ y la existencia de límites de f y g en $+\infty$ y en $-\infty$.

Ejercicio 5.11.

1) Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua no nula tal que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Prueba que si f toma algún valor positivo, entonces f alcanza el máximo absoluto en $\mathbb{R}$.

2) Demuestra que la función $f(x) = x^2/(1+x^6)$ está acotada. ¿Se puede decir lo mismo de la función $f(x) = x^2/(1+x^3)$?

Ejercicio 5.12. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

1) $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^{\frac{1}{x^2-1}}$, si $x \neq 1$ y $f(1) = \sqrt{e}$.

2) $f\colon]-1/2,+\infty[\to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = (x+e^x)^{1/x}$, si $x \neq 0$ y $f(0) = e^2$.

3) $f\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = (1+x\log(x))^{1/x}$ si $x > 0$, y $f(0) = 0$.

4) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$.

Ejercicio 5.13. Sea $f\colon \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \left(\frac{1}{\tan(x)}\right)^{\operatorname{sen}(x)}$. Prueba que f tiene límite en los puntos 0 y $\frac{\pi}{2}$ y calcula dichos límites.

Ejercicio 5.14. Sea $f\colon \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (1 + \operatorname{sen}(x))^{\cot(x)}$. Estudia la continuidad de f y su comportamiento en o y $\pi/2$.

Ejercicio 5.15. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a > 0 > b$. Estudia el comportamiento en cero de las funciones $f, g\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \arctan\left(\frac{a}{x}\right) - \arctan\left(\frac{b}{x}\right), \quad g(x) = xf(x).$$