

Ejercicios de Cálculo II
Relación 4: Derivadas (III)

- 1) Expresa el polinomio $x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 7x + 6$ en potencias de $(x - 2)$.
- 2) (*) Sea f una función cuyo polinomio de Taylor de grado 3 centrado en 0 es

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Calcula el polinomio de Taylor de grado 3 centrado en cero de la función $g(x) = xf(x)$.

- 3) Estudia el comportamiento de la función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ en el punto α en cada uno de los siguientes casos:

a) $A =]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus \{0\}$, $f(x) = \frac{\tan(x) \arctan(x) - x^2}{x^6}$, $\alpha = 0$

b) $A = \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{1}{x^4} - \frac{1}{6x^2} - \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^3}$, $\alpha = 0$

- 4) Prueba que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} \left(2x^3 \sqrt{1+x^3} + 2\sqrt{1+x^2} - 2 - 2x - x^2 \right) = \frac{5}{12}.$$

- 5) Estudia el comportamiento en $-\infty$, 0 y $+\infty$ de la función $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x - \operatorname{sen}(x)}{x^6} \left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \right).$$

- 6) Encuentra los extremos relativos de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos:

a) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 10$,

b) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}$,

c) $f(x) = x^2|x|e^{-|x|}$

- 7) Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces derivable con $f'(0) = 0$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $g(x) = x^2 f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Prueba que si $f(0) \neq 0$, entonces g tiene un extremo relativo en 0.
- 8) Sea I un intervalo y $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces derivable tal que $f''(x) = f(x)$ para todo $x \in I$. Prueba que si existe $a \in I$ tal $f(a) = f'(a) = 0$, entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in I$.
- 9) Prueba que $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ para todo $x \in [0, \pi]$.
- 10) Calcula un valor aproximado del número real α con un error menor de 10^{-2} en cada uno de los casos siguientes:
- a) $\alpha = \sqrt{e}$,
 - b) $\alpha = \sin\left(\frac{1}{2}\right)$,
 - c) (*) $\alpha = \sqrt[3]{7}$,
 - d) $\alpha = \sqrt{102}$.