7. Con objeto de establecer un plan de producción, una empresa ha estimado que la demanda de sus clientes, en miles de unidades del producto, se comporta semanalmente con arreglo a una ley de probabilidad dada por la función de densidad:

$$f(x) = \frac{3}{4}(2x - x^2), \quad 0 \leq x \leq 2.$$

a) ¿Qué cantidad deberá tener dispuesta a la venta al comienzo de cada semana para poder satisfacer plenamente la demanda con probabilidad 0.5?

b) Pasado cierto tiempo, se observa que la demanda ha crecido, estimándose que en ese momento se distribuye según la función de densidad:

$$f(y) = \frac{3}{4}(4y - y^2 - 3), \quad 1 \leq y \leq 3.$$

Los empresarios sospechan que este crecimiento no ha afectado a la dispersión de la demanda, ¿es cierta esta sospecha?

a) Sabemos que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cancel{\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx} \to 0 + \underbrace{\int_{0}^{T} f(x)\,dx}_{=0,5} + \underbrace{\int_{T}^{2} f(x)\,dx}_{=0,5} + \cancel{\int_{2}^{+\infty} f(x)\,dx} \to 0 = 1$$

Nos valdría cualquiera de las dos integrales que dan 0,5.

$$\frac{3}{4}\int_{T}^{2}(2x - x^2)\,dx = -\frac{3}{4}\int_{T}^{2} x^2\,dx + \frac{3}{4}\int_{T}^{2} 2x\,dx =$$

$$= -\frac{3}{4}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{T}^{2} + \frac{6}{4}\frac{x^2}{2}\Big|_{T}^{2} = -\frac{3}{4}\left(\frac{8}{3} - \frac{T^3}{3}\right) + \frac{6}{4}\left(2 - \frac{T^2}{2}\right) =$$

$$= -\frac{24}{12} + \frac{3T^3}{12} + 3 - \frac{3T^2}{4} = 1 - \frac{3}{4}T^2 + \frac{T^3}{4}$$

$$\frac{T^3}{4} - \frac{3}{4}T^2 + 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} T = 1 - \sqrt{3} \notin [0,2] \\ T = 1 + \sqrt{3} \notin [0,2] \\ T = 1 \in [0,2] \end{array}$$

Deberán tener puestas 1000 uds a la venta.

b) Vamos a hallar el coeficiente de variación de Pearson de ambas funciones de densidad

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \cancel{\int_{-\infty}^{0} x f(x)\,dx} + \int_{0}^{2} x f(x)\,dx + \cancel{\int_{2}^{+\infty} x f(x)\,dx}$$

$$= \frac{3}{4}\int_{0}^{2} (2x^2 - x^3)\,dx = \frac{3}{4}\left| \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right|_0^2 = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{3}\right) = 1$$

$$EY = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y)\,dy = \cancel{\int_{-\infty}^{1} y f(y)\,dy} + \int_{1}^{3} y f(y)\,dy + \cancel{\int_{3}^{+\infty} y f(y)\,dy} =$$

$$= \frac{3}{4}\int_{1}^{3} (4y^2 - y^3 - 3y)\,dy = \frac{3}{4}\left(\frac{4y^3}{3} - \frac{y^4}{4} - \frac{3y^2}{2} \right)_1^3 =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{8}{3}\right) = 2$$

Tras calcular las esperanzas, calculamos las varianzas.

$$Var = m_2 - m_1^2$$

$$Var[x] = E(x^2) - E(x)^2 = \frac{6}{5} - 1^2 = 0{,}2$$

$$E(x^2) = \int_0^2 x^2 f(x)\,dx = \frac{3}{4}\int_0^2 (2x^3 - x^4)\,dx =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{5} \right)_0^2 = \frac{3}{4}\left(\frac{8}{5}\right) = \frac{6}{5}$$

$$E(y^2) = \int_1^3 y^2 f(y)\,dy = \frac{3}{4}\int_1^3 (4y^3 - y^4 - 3y^2)\,dy =$$

$$= \frac{3}{4}\left(y^4 - \frac{y^5}{5} - y^3\right)\Big|_1^3 = \frac{3}{4}\left(\frac{28}{5}\right) = \frac{21}{5}$$

$$Var(y) = \frac{21}{5} - 2^2 = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

$$CV_x = \frac{\sigma_x}{E_x} = \frac{+\sqrt{\sigma_x^2}}{E_x} = 0{,}447$$

$$CV_y = \frac{\sigma_y}{E_y} = \frac{+\sqrt{\sigma_y^2}}{E_y} = 0{,}223$$

Como poseen distintos coeficientes de variación, podemos asegurar que el crecimiento sí ha afectado a la dispersión de la demanda.