RELACIÓN 4 ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA E INTRODUCCIÓN A LA PROBABILIDAD

UNIVERSIDAD
DE GRANADA

David Muñoz Sánchez
Higinio Paterna Ortiz
Tomás Rodríguez Hernáez
Mario Rubio Venzal
Hugo Teruel Muñoz

1. En una batalla naval, tres destructores localizan y disparan simultáneamente a un submarino. La probabilidad de que el primer destructor acierte el disparo es 0.6, la de que lo acierte el segundo es 0.3 y la de que lo acierte el tercero es 0.1. ¿Cuál es la probabilidad de que el submarino sea alcanzado por algún disparo?

Tenemos que pensar que el submarino puede ser alcanzado por un destructor, por dos destructores, o bien por los tres destructores. Definimos el suceso *Di = el submarino es alcanzado por el destructor i.*

Como los tres sucesos son independientes entre si, tenemos que:

$$P(D_1 \cup D_2 \cup D_3) = P(D_1) + P(D_2) + P(D_3) - P(D_1 \cap D_2) - P(D_1 \cap D_3) - P(D_2 \cap D_3) + P(D_1 \cap D_2 \cap D_3)$$

$$P(D_1) = 0{,}6 \quad P(D_2) = 0{,}3 \quad P(D_3) = 0{,}1$$

$$P(D_1 \cap D_2) = 0{,}6 \cdot 0{,}3 = 0{,}18$$

$$P(D_1 \cap D_3) = 0{,}6 \cdot 0{,}1 = 0{,}06$$

$$P(D_2 \cap D_3) = 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}03$$

$$P(D_1 \cap D_2 \cap D_3) = 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}018$$

Si sustituimos arriba:

$$P(D_1 \cup D_2 \cup D_3) = 0{,}748$$

2. Un estudiante debe pasar durante el curso 5 pruebas selectivas. La probabilidad de pasar la primera es 1/6. La probabilidad de pasar la i-ésima, habiendo pasado las anteriores es 1/(7-i). Determinar la probabilidad de que el alumno aprueba el curso.

La probabilidad de que el alumno apruebe el curso es $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5$, teniendo el suceso *A = pasar la prueba i.*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = P(A_1) \cdot Pr(A_2 / A_1) \cdot Pr(A_3 / A_1 \cap A_2) \cdot Pr(A_4 / A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cdot Pr(A_5 / A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$$

$$P(A_1) = \frac{1}{6}$$

$$Pr(A_2 / A_1) = \frac{1}{5}$$

$$Pr(A_3 / A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4}$$

$$Pr(A_4 / A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{3}$$

$$Pr(A_5 / A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{1}{2}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = 1.388 \cdot 10^{-3}$$

3. En una ciudad, el 40 % de las personas tienen pelo rubio, el 25 % tienen ojos azules y el 5% el pelo rubio y los ojos azules. Se selecciona una persona al azar. Calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) **tener el pelo rubio si se tiene los ojos azules,**
b) **tener los ojos azules si se tiene el pelo rubio,**
c) **no tener pelo rubio ni ojos azules,**
d) **tener exactamente una de estas características.**

Primero definimos los siguientes sucesos y probabilidades:

$$R = pelo \ \ rubio$$

$$A = ojos \ \ azules$$

$$P(R) = 0{,}4$$

$$P(A) = 0{,}25$$

$$P(R \cap A) = 0{,}05$$

a)

$$Pr(R/A) = \frac{P(R \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}05}{0{,}25} = 0{,}2$$

b)

$$Pr(A/R) = \frac{P(R \cap A)}{P(R)} = \frac{0{,}05}{0{,}4} = 0{,}125$$

c)

$$1 - P(R \cup A) = 1 - (P(R) + P(A) - P(R \cap A)) = 0{,}4$$

d)

$$P(\text{exactamente una}) = P(A \cup R) - P(A \cap R) = P(A) + P(R) - 2 \cdot P(A \cap R) = 0{,}55$$

4. En una población de moscas, el 25% presentan mutación en los ojos, el 50% presentan mutación en las alas y el 40% de la que presentan mutación en los ojos presentan mutación en las alas.

a) **¿Cuál es la probabilidad de que una mosca elegida al azar presente al menos una de las mutaciones?**
b) **¿Cuál es la probabilidad de que presente mutación en los ojos pero no en las alas?**

Sea *O = mutación en los ojos* y *A = mutación en las alas.*

Tenemos que:

$$P(O) = 0{,}25$$

$$P(A) = 0{,}50$$

$$Pr(A/O) = 0{,}40$$

a) Calcular la probabilidad de que presente al menos una de las mutaciones es equivalente a calcular la probabilidad de que presente mutación en las alas o mutación en los ojos.

Por tanto:

$$P(O\cup A) = P(A) + P(O) - P(A\cap O)$$

$$P(O\cup A) = Pr(A/O) \cdot P(O) = 0{,}4\cdot 0{,}25 = 0{,}1$$

$$P(O\cup A) = P(A) + P(O) - P(A\cap O) = 0{,}65$$

b)

$$P(O\cap \bar{A}) = P(O) - P(O\cap A) = 0{,}25-0{,}1 = 0{,}15$$

5. Una empresa utiliza dos sistemas alternativos, A y B, en la fabricación de un artículo, fabricando por el sistema A el 20 % de su producción. Cuando a un cliente se le ofrece dicho artículo, la probabilidad de que lo compre es 2/3 si este se fabricó por el sistema A y 2/5 si se fabricó por el sistema B. Calcular la probabilidad de vender el producto.

Primero definimos los sucesos *A = ser fabricado por el sistema A*, *B = ser fabricado por el sistema B* y *C = vender el producto*.

Tenemos, en base al enunciado:

$$P(A) = \frac{1}{5} \quad P(B) = \frac{4}{5} \quad Pr(C/A) = \frac{2}{3} \quad Pr(C/B) = \frac{2}{5}$$

Así, por el teorema de la probabilidad total podemos hallar la probabilidad de vender el producto:

$$P(C) = P(A)Pr(C/A) + P(B)Pr(C/B) = \frac{34}{75} = 0{,}4533$$

6. Se consideran dos urnas: la primera con 20 bolas, de las cuales 18 son blancas, y la segunda con 10 bolas, de las cuales 9 son blancas. Se extrae una bola de la segunda urna y se deposita en la primera; si a continuación, se extrae una bola de esta, calcular la probabilidad de que sea blanca.

Sean los sucesos:

- *Bi = sacar bola blanca en la extracción i.*
- *C1 = no sacar bola blanca en la primera extracción.*

La probabilidad de sacar una bola blanca en la segunda extracción dependerá de que en la primera urna salga o no bola blanca. Así, debemos considerar los sucesos B2/B1, es decir, que se extraiga en la segunda extracción una bola blanca sabiendo que en la primera se ha extraído otra blanca, y B2/C1, es decir, se extrae una bola blanca en la segunda extracción cuando en la primera se extrae una bola que no es blanca. Así pues, por el teorema de la probabilidad total:

$$P(B_2) = Pr(B_2/B_1)P(B_1) + Pr(B_2/C_1)P(C_1) = \frac{19}{21}\cdot\frac{9}{10} + \frac{18}{21}\cdot\frac{1}{10} = 0{,}9$$

7. Se dispone de tres urnas con la siguiente composición de bolas blancas y negras:

$$U_1:\ 5B\ \ y\ \ 5N \qquad U_2:\ 6B\ \ y\ \ 4N \qquad U_3:\ 7B\ \ y\ \ 3N$$

Se elige una urna al azar y se sacan cuatro bolas sin reemplazamiento.

a) **Calcular la probabilidad de que las cuatro sean blancas.**

b) **Si en las bolas extraídas solo hay una negra, ¿cuál es la probabilidad de que la urna elegida haya sido U2?**

Primero definimos los sucesos:

$$U_i\ =\ Elegir\ \ la\ \ urna\ \ i,\ \ i\ =\ 1,2,3$$

$$B\ =\ Sacar\ \ bola\ \ blanca$$

$$N\ =\ Sacar\ \ bola\ \ negra$$

$$Pr(B/U_1)\ =\ \frac{\binom{5}{4}}{\binom{10}{4}}\ =\ \frac{1}{42}$$

$$Pr(B/U_2)\ =\ \frac{\binom{6}{4}}{\binom{10}{4}}\ =\ \frac{1}{14}$$

$$Pr(B/U_3)\ =\ \frac{\binom{7}{4}}{\binom{10}{4}}\ =\ \frac{1}{6}$$

$$P(U_1)\ =\ P(U_2)\ =\ P(U_3)\ =\ \frac{1}{3}$$

a) Por el teorema de la probabilidad total tenemos que:

$$P(sacar\ \ 4\ \ blancas)\ =\ Pr(B/U_1)P(U_1)\ +\ Pr(B/U_2)P(U_2)\ +\ Pr(B/U_3)P(U_3)\ =\ 0{,}087$$

b) Por la regla de Bayes tenemos que:

$$Pr(U_2/N)\ =\ \frac{Pr(N/U_2)P(U_2)}{Pr(N/U_1)P(U_1)\ +\ Pr(N/U_2)P(U_2)\ +\ Pr(N/U_3)P(U_3)}$$

$$Pr(N/U_1) = \frac{\binom{5}{1}\binom{5}{3}}{\binom{10}{4}} = \frac{5}{21}$$

$$Pr(N/U_2) = \frac{\binom{6}{3}\binom{4}{1}}{\binom{10}{4}} = \frac{8}{21}$$

$$Pr(N/U_3) = \frac{\binom{7}{3}\binom{3}{1}}{\binom{10}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$Pr(U_2/N) = \frac{Pr(N/U_2)P(U_2)}{Pr(N/U_1)P(U_1) + Pr(N/U_2)P(U_2) + Pr(N/U_3)P(U_3)} = 0{,}34$$

8. La probabilidad de que se olvide inyectar el suero a un enfermo durante la ausencia del doctor es 2/3. Si se le inyecta el suero, el enfermo tiene igual probabilidad de mejorar que de empeorar, pero si no se le inyecta, la probabilidad de mejorar se reduce a 0.25. Al regreso, el doctor encuentra que el enfermo ha empeorado. ¿Cuál es la probabilidad de que no se le haya inyectado el suero?

Definamos primero los sucesos A = *suero olvidado* y B = *empeoramiento del enfermo.*

$$P(A) = \frac{2}{3} \qquad P(\bar{A}) = \frac{1}{3}$$

$$Pr(B/\bar{A}) = 0{,}5 \qquad Pr(B/A) = 0{,}75$$

En base a estos datos, podemos hacer uso de la regla de Bayes para calcular la probabilidad de que ante un empeoramiento del enfermo, no se le haya administrado el suero.

$$Pr(A/B) = \frac{Pr(B/A)\cdot P(A)}{Pr(B/A)\cdot P(A) + Pr(B/\bar{A})\cdot P(\bar{A})} = 0{,}75$$

9. N urnas contienen cada una 4 bolas blancas y 6 negras, mientras otra urna contiene 5 bolas blancas y 5 negras. De las N+1 urnas se elige una al azar y se extraen dos bolas sucesivamente, sin reemplazamiento, resultando ser ambas negras. Sabiendo que la probabilidad de que queden 5 blancas y 3 negras en la urna elegida es 1/7, encontrar N.

B = extraer dos bolas negras.

A = elegir urna n+1.

$$Pr(A/B) = \frac{1}{7}$$

$$Pr(B/A) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{2}{9}$$

En esta última probabilidad, hemos tenido en cuenta que hemos elegido la urna N+1 y usamos combinaciones sin repetición para ver el número de casos posibles y el numero de casos favorables.

Ahora, haciendo uso de la regla de Bayes:

$$Pr(A/B) = \frac{Pr(B/A)P(A)}{Pr(B/A)P(A)+Pr(B/\bar{A})P(\bar{A})} = \frac{\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{N+1}}{\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{N+1}+\frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}}\cdot\frac{N}{N+1}} = \frac{1}{7}$$

Si despejamos N resulta $N = 4$.

10. Se dispone de 6 cajas, cada una con 12 tornillos; una caja tiene 8 buenos y 4 defectuosos; dos cajas tienen 6 buenos y 6 defectuosos y tres cajas tienen 4 buenos y 8 defectuosos. Se elige al azar una caja y se extraen 3 tornillos con reemplazamiento, de los cuales 2 son buenos y 1 es defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que la caja elegida contuviera 6 buenos y 6 defectuosos?

Definamos los sucesos:

- Caja tipo 1: 8 buenos y 4 defectuosos.
- Caja tipo 2: 6 buenos y 6 defectuosos.
- Caja tipo 3: 4 buenos y 8 defectuosos.

$$A_i = Elegir\ \ la\ \ caja\ \ tipo\ \ i,\ \ i=1\ldots 3$$

$$D = Sacar\ \ 2\ \ tornillos\ \ buenos\ \ y\ \ 1\ \ defectuoso$$

Atendiendo a la regla de Bayes:

$$Pr(A_2/D) = \frac{Pr(D/A_2)P(A_2)}{Pr(D/A_1)P(A_1) + Pr(D/A_2)P(A_2) + Pr(D/A_3)P(A_3)}$$

$$P(A_1) = \frac{1}{6}$$

$$P(A_2) = \frac{2}{6}$$

$$P(A_3) = \frac{3}{6}$$

$$Pr(D/A_1) = \frac{8}{12}\cdot\frac{8}{12}\cdot\frac{4}{12} = \frac{4}{27}$$

$$Pr(D/A_2) = \frac{6}{12}\cdot\frac{6}{12}\cdot\frac{6}{12} = \frac{1}{8}$$

$$Pr(D/A_3) = \frac{4}{12}\cdot\frac{4}{12}\cdot\frac{8}{12} = \frac{2}{27}$$

$$Pr(A_2/D) = \frac{Pr(D/A_2)P(A_2)}{Pr(D/A_1)P(A_1) + Pr(D/A_2)P(A_2) + Pr(D/A_3)P(A_3)} = \frac{27}{67} = 0{,}4029$$

11. Se seleccionan n dados con probabilidad $p_n = \frac{1}{2^n},\ n \in \mathbb{N}$ **. Si se lanzan estos n dados y se obtiene una suma de 4 puntos, ¿cuál es la probabilidad de haber seleccionado 4 dados?**

Sea por una parte el suceso S = *sumar 4 puntos*. Sean los sucesos iD = *seleccionar i dados*. Entonces:

$$Pr(S/1D) = \frac{1}{6}$$

$$2 \ \ dados = \langle (1,3),(2,2),(3,1) \rangle$$

$$Pr(S/2D) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$3 \ \ dados = \langle (1,1,2),(1,2,1),(2,1,1) \rangle$$

$$Pr(S/3D) = \frac{3}{216} = \frac{1}{72}$$

$$4 \ \ dados = \langle (1,1,1,1) \rangle$$

$$Pr(S/4D) = \frac{1}{1296}$$

Trivialmente, no tiene sentido seleccionar más de cuatro dados, puesto que sería imposible conseguir que sumaran 4, asumiendo que cada una de sus caras está numerada del 1 al 6.

Si ahora aplicamos la regla de Bayes para calcular la probabilidad de que al haber obtenido 4 puntos, hayamos seleccionado 4 de esos dados.

$$Pr(4D/S) = \frac{Pr(S/4D) \cdot P(4D)}{Pr(S/1D) \cdot P(1D) + Pr(S/2D) \cdot P(2D) + Pr(S/3D) \cdot P(3D) + Pr(S/4D) \cdot P(4)} =$$

$$= \frac{1}{1297}$$

Por tanto, la probabilidad de que hayan seleccionado 4 dados es $\frac{1}{1297}$.

12. Se lanza una moneda; si sale cara, se introducen k bolas blancas en una urna y si sale cruz, se introducen 2k bolas blancas. Se hace una segunda tirada, poniendo en la urna h bolas negras si sale cara y 2h si sale cruz. De la urna así compuesta se toma una bola al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea negra?

Definimos los sucesos:

- *Ci = obtener cara en la tirada i.*
- *Xi = obtener cruz en la tirada i.*
- *N = obtener una bola negra en la extracción.*

Así, al lanzar la moneda dos veces, tenemos cuatro posibles resultados: C1C2, C1X2, X1C2, X1X2. Por tanto:

- Si ocurre C1C2: en la urna hay k bolas blancas y h bolas negras, luego $Pr(N/C1C2) = \frac{h}{k+h}$.
- Si ocurre C1X2: en la urna hay k bolas blancas y 2h bolas negras, luego $Pr(N/C1X2) = \frac{2h}{k+2h}$.
- Si ocurre X1C2: en la urna hay 2k bolas blancas y h bolas negras luego, $Pr(N/X1C2) = \frac{h}{2k+h}$.
- Si ocurre X1X2: en la urna hay 2k bolas blancas y 2h bolas negras luego, $Pr(N/X1C2) = \frac{h}{k+h}$.

Tenemos por tanto:

$$P(N) = P(C1C2)\cdot Pr(N/C1C2) + P(C1X2)\cdot Pr(N/C1X2) + P(X1C2)\cdot Pr(N/X1C2) +$$

$$+ P(X1X2)\cdot Pr(N/X1X2) = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2h}{k+h}+\frac{2h}{k+2h}+\frac{h}{2k+h}\right)$$