20. Sea $A \in M_3(\mathbb{R})$ dada por:
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -4 \\ 8 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$
Demuestra que A no es diagonalizable. ¿Es diagonalizable si se considera con entradas en $\mathbb{C}$? Utiliza el Teorema de Cayley-Hamilton para poner A^{2018} como combinación lineal de $\{A^2, A, I_3\}$.

21. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $b \neq 0$ se define la matriz cuadrada de orden $n \geq 2$
$$A = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{pmatrix}.$$
   a) Prueba que $\lambda_1 = a - b$ y $\lambda_2 = a + (n-1)b$ son valores propios de A. (Ayuda: Para λ_1 comprueba que $\det(A - \lambda_1 I_n) = 0$ y para λ_2 comprueba que $(1, 1, \dots, 1)$ es un vector propio asociado a λ_2).
   b) Se definen los vectores $v_1 = (1, -1, 0, \dots, 0)$, $v_2 = (1, 1, -2, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $v_{n-1} = (1, 1, 1, \dots, 1, -(n-1))$, $v_n = (1, 1, 1, \dots, 1, 1)$. Prueba que
      i) $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ son vectores propios asociados a λ_1 y que v_n es un vector propio asociado a λ_2.
      ii) $v_i \cdot v_j = 0$ para $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$.
      iii) La matriz que tiene por columnas los vectores $v_1, v_2, \dots, v_n$ tiene determinante $n!$. (Ayuda: utiliza inducción sobre n).
      iv) Como consecuencia de i) y iii) se tiene que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores propios de A, A es diagonalizable, los únicos valores propios de A son λ_1 con multiplicidad $n-1$ y λ_2 con multiplicidad 1, el polinomio característico de A es $p_A(t) = (a - b - t)^{n-1} \cdot (a + (n-1)b - t)$, el subespacio propio asociado a λ_1 es $L(\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\})$ y el subespacio propio asociado a λ_2 es $L(\{v_n\})$.
   c) Se definen los vectores $w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, \dots, 0)$, $w_2 = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}}(1, 1, -2, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $w_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{(n-1) \cdot n}}(1, 1, 1, \dots, 1, -(n-1))$, $w_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, 1, 1, \dots, 1, 1)$. Prueba que la matriz P que tiene por columnas los vectores $w_1, w_2, \dots, w_n$ verifica:
      i) $P^t \cdot P = P \cdot P^t = I_n$. (Ayuda: utiliza el apartado 2.ii)).
      ii)
$$P^{-1} \cdot A \cdot P = P^t \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+(n-1)b \end{pmatrix}.$$

21. Discute de forma razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

    a) Si $f : V \to V$ es un endomorfismo diagonalizable, entonces el endomorfismo traspuesto $f^t : V^* \to V^*$ también es diagonalizable.

    b) La suma de dos valores propios de un endomorfismo es siempre un valor propio del mismo endomorfismo.

    c) Si A es diagonalizable, entonces A^n también lo es para cada $n \in \mathbb{N}$.

    d) Si una matriz de orden dos es singular, entonces es diagonalizable.

    e) Si el polinomio característico de un endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es $(1-\lambda)(1+\lambda^2)$ entonces f no es diagonalizable.

    f) Si dos endomorfismos son diagonalizables y tienen los mismos valores propios, entonces son iguales.

    g) Toda matriz cuadrada regular es diagonalizable.

    h) Si un endomorfismo f de un espacio vectorial V cumple $f \circ f = f$, y 0 no es un valor propio de f, entonces $f = I_V$.

    i) Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ con $\mathrm{Im}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x - y + 2z = 0\}$, y tal que $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 13$ son valores propios de f. Entonces, f es diagonalizable.

    j) Si dos matrices tienen la misma traza, el mismo determinante y el mismo polinomio característico, entonces son semejantes.

    k) Un endomorfismo diagonalizable puede ser diagonalizado en varias bases diferentes.

    l) Si A y C son matrices cuadradas diagonalizables entonces $A + C$ y $A \cdot C$ son diagonalizables.

    m) Existe un endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ que verifica:

        1) 2 y 5 son los únicos valores propios de f.
        2) Las multiplicidades algebraicas y geométricas de dichos valores coinciden.
        3) f no es diagonalizable.

    n) Si λ es un valor propio de una matriz regular $M \in M_n(\mathbb{K})$, entonces $\lambda \neq 0$ y $\frac{1}{\lambda}$ es un valor propio de M^{-1}.

    ñ) Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$. Entonces A es diagonalizable si y sólo si $A + aI_n$ es diagonalizable $\forall a \in \mathbb{K}$.

    o) Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ que verifica $A(A - I_n) = 0_n$, donde I_n es la matriz identidad de orden n y 0_n la matriz nula de orden $n \times n$. Si λ es un valor propio de A entonces $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$ y A es diagonalizable.