Doble Grado en Informática y Matemáticas

Ejercicios de Cálculo I – Relación 3

Racionales e irracionales. Principio de Inducción. Desigualdad de las medias.

1. Indica de forma razonada si los siguientes números son racionales o irracionales:

   a) La suma o el producto de un número irracional con un número racional distinto de cero.

   b) La suma o el producto de dos números irracionales.

   c) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\sqrt{6}-\sqrt{2}-\sqrt{3}$, $\dfrac{\sqrt{5}+2}{3\sqrt{5}+4}$.

2. Sean $a,b,c,d\in\mathbb{Q}$ con $c^2+d^2>0$ y $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. ¿Qué condiciones deben cumplir a,b,c,d para que el número $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ sea racional?

3. Sea $x\in\mathbb{R}$. Prueba que $\sup\{r\in\mathbb{Q}: r<x\} = x = \inf\{s\in\mathbb{Q}: x<s\}$. ¿Permanece válido este resultado si se sustituye $\mathbb{Q}$ por un conjunto denso en $\mathbb{R}$?

4. Sea $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función monótona y supongamos que $\varphi(z)=z$ para todo $z\in\mathbb{Q}$. Prueba que para todo $x\in\mathbb{R}$ es $\varphi(x)=x$.

   Sugerencia: la suposición de que $\varphi(x)\neq x$ para algún $x\in\mathbb{R}$ lleva a una contradicción.

5. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función no idénticamente nula verificando, para todos x,y en $\mathbb{R}$ que $f(x+y)=f(x)+f(y)$ (f es aditiva) y $f(x\,y)=f(x)f(y)$ (f es multiplicativa). Prueba que $f(x)=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

   Sugerencia: la existencia en $\mathbb{R}^+$ de la raíz cuadrada permite probar que f es monótona.

6. Prueba, usando el principio de inducción, que para todo $n\in\mathbb{N}$ se verifican las siguientes relaciones.

   a) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   b) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

   c) $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

   d) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n\cdot(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

   e) $\sqrt{n}\leqslant 1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\leqslant 2\sqrt{n}$

   f) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\geqslant 1+\dfrac{n}{2}$

   g) $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{1+3n}}$

   h) $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\geqslant\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

7. Prueba que para todo número natural $n\in\mathbb{N}$ se verifica que n^5-n es divisible por 5.

8. Prueba que la suma de los cubos de tres números naturales consecutivos es múltiplo de 9.

9. **Principio de inducción completa.** Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ y p un número natural. Supongamos que se verifican las dos condiciones siguientes:

   i) $p \in A$,

   ii) Si $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant p$, y el conjunto $\{k \in \mathbb{N} : p \leqslant k \leqslant n\}$ está contenido en A, entonces $(n+1) \in A$.

   Entonces se verifica que el conjunto A contiene a todos los números naturales mayores o iguales que p. En particular, si $p = 1$ es $A = \mathbb{N}$.

10. Prueba que todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant 8$ puede escribirse en la forma $n = 3p + 5q$ donde $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

11. Prueba que el triángulo equilátero es el triángulo que tiene máxima área para un perímetro dado y de mínimo perímetro para un área dada.

    Sugerencia. Si a, b, c son las longitudes de los lados de un triángulo y $p = (a + b + c)/2$ es el semiperímetro, entonces, según la fórmula de Heron de Alejandría, el área del triángulo viene dada por $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

12. Calcula el rectángulo de mayor área inscrito en la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

13. Concluida la primera vuelta de la liga de un país con gran afición al fútbol, se observa que no se ha producido ningún empate. Probar que puede hacerse una lista de todos los equipos participantes, de forma que cada equipo de la lista haya ganado el partido que jugó contra el siguiente en la lista.

14. Sea α irracional. Prueba que el conjunto $\{n\alpha - E(n\alpha) : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $[0, 1]$, es decir, dados $x, y \in [0, 1]$ con $x < y$, hay algún número natural $k \in \mathbb{N}$ tal que $x < k\alpha - E(k\alpha) < y$.

15. Supongamos que en un circuito hay n coches separados por distintas distancias y que entre todos ellos tienen la gasolina justa para dar una vuelta al circuito. Prueba que hay algún coche que empezando desde donde se encuentra y recogiendo al pasar la gasolina de los demás vehículos puede dar una vuelta completa al circuito.

Los dos últimos ejercicios son de bastante mayor dificultad que el resto y los propongo como un pequeño desafío por si alguien se atreve con ellos.