RELACIÓN 5 ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA E INTRODUCCIÓN A LA PROBABILIDAD

UNIVERSIDAD DE GRANADA

David Muñoz Sánchez
Higinio Paterna Ortiz
Tomás Rodríguez Hernáez
Mario Rubio Venzal
Hugo Teruel Muñoz

(1) Sea X una variable aleatoria con función masa de probabilidad $P(X=i) = ki$; $i = 1, \dots, 20$.

a) Determinar el valor de k, la función de distribución y las probabilidades:

$$P(X=4),\ P(X<4),\ P(3 \leq X \leq 10),\ P(3 < X \leq 10),\ P(3<X<10).$$

Para calcular el valor "k", usaremos la definición de la función masa de probabilidad, sabiendo que:

$$\sum_{i=1}^{20} P[X = x_i] = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{20} P[X=x_i] = 1 \Leftrightarrow k \cdot \sum_{i=1}^{20} i = 1 \Leftrightarrow k \cdot 210 \Leftrightarrow k = \frac{1}{210}.$$

Luego:

$$P(X=i) = \frac{1}{210} \cdot i,\ \forall i \in \{1, \dots, 20\}$$

Procedamos a calcular las probabilidades:

$$P(X=4) = \frac{1}{210} \cdot 4 = \frac{2}{105} = 0{,}019$$

$$P(X<4) = \frac{1}{210} + \frac{2}{210} + \frac{3}{210} = \frac{6}{210} = \frac{1}{35} = 0{,}0286$$

$$P(3 \leq X \leq 10) = \frac{1}{210} \cdot \sum_{i=3}^{10} i = \frac{52}{210} = \frac{26}{105} = 0{,}2476$$

$$P(3 < X \leq 10) = \frac{1}{210} \cdot \sum_{i=4}^{10} i = \frac{49}{210} = \frac{7}{30} = 0{,}2333$$

$$P(3 < X < 10) = \frac{1}{210} \cdot \sum_{i=4}^{9} i = \frac{78}{210} = \frac{13}{35} = 0{,}3714$$

$\Rightarrow$ La función de distribución quedaría de la siguiente manera:

$$F_X(X) = F[X \leq x] = \sum_{i=1}^{x} \frac{i}{210}.$$

Scanned by TapScanner

b) Supongamos que un jugador gana 20 monedas si al observar esta variable obtiene un valor menor que 4, gana 24 monedas si obtiene el valor 4 y, en caso contrario, pierde una moneda. Calcular la ganancia esperada del jugador y decir si el juego le es favorable.

Primero debemos calcular las siguientes probabilidades:

$$P(X<4) = \frac{1}{35} = 0{,}0286 \quad ; \quad P(X=4) = \frac{2}{105} = 0{,}019$$

$$P(X \geq 5) = \frac{1}{210} \cdot \sum_{i=5}^{20} i = \frac{200}{210} = 0{,}9523 .$$

Calculamos ahora la esperanza matemática de la variable aleatoria X:

$$E[X] = \sum_{i} x_i \cdot P[X = x_i] = \sum_{i=1}^{3} x_i \cdot P[X = x_i] = \frac{20}{35} + \frac{48}{105} - \frac{20}{21}$$

$$E[X] = \frac{8}{105}$$

Como $E[X] > 0$, el juego le es favorable, siempre que su apuesta inicial sea menor a 8/105.

2. Sea X el número de bolas blancas obtenidas al sacar dos de una urna con 10 bolas de las que 8 son blancas. Calcular:

   a) Función masa de probabilidad y función de distribución.
   b) Media, mediana y moda, dando la interpretación de cada una de estas medidas.
   c) Intervalo intercuartílico, especificando su interpretación.

Sea X = "nº de bolas blancas obtenidas al sacar 2 de una urna con 10 bolas de las que 8 son blancas".

a)

- Primero calculamos la función masa de probabilidad:

Los posibles valores de la variable aleatoria X son $\{0,1,2\}$

$$P(X=0) = \frac{\binom{2}{2}\binom{8}{0}}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{45}$$

$$P(X=1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{8}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{16}{45} \qquad \Rightarrow \qquad p_X(x) = P(X=x) = \frac{\binom{2}{2-x}\cdot\binom{8}{x}}{\binom{10}{2}}$$

$$P(X=2) = \frac{\binom{2}{0}\binom{8}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{28}{45}$$

- Calculamos ahora la función de distribución:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{1}{45} & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{17}{45} & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

b)

- Calculamos la media de X:

La media de X viene dada por:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{3} x_i \cdot P[X=x_i] = 0\cdot\frac{1}{45} + 1\cdot\frac{17}{45} + 2\cdot\frac{28}{45} = 1{,}6\bar{2} \simeq 2 \text{ bolas blancas se sacan.}$$

Por tanto, la media de X será la suma de cada uno de los posibles valores de X multiplicados por sus respectivas probabilidades.

• Calculamos la mediana de X:

La mediana viene dada por:

$$M_e \in \mathbb{R} : \quad P(X \leq M_e) \geq \frac{1}{2} \quad \wedge \quad P(X \geq M_e) \geq \frac{1}{2}$$

Es evidente que el valor que lo cumple es $x_i = 2 \Rightarrow M_e(X) = 2$

No nos aporta demasiada información, ya que nos dice que en una mitad saldrán 2 bolas blancas o menos y en la otra mitad exactamente 2 bolas.

• Calculamos la moda de X:

La moda de X es el valor que maximiza la función masa de probabilidad.

$M_o(X) = 2$

c)

Vamos a considerar el intervalo o recorrido intercuartílico como $R = Q_3 - Q_1$.

$Q_3 = 2 \ , \ Q_1 = 1 \Rightarrow R = Q_3 - Q_1 = 2 - 1 = 1$

Es en este intervalo donde se encuentra el 50% central de los datos.

3 → X = nº de lanzamientos de una moneda hasta salir cara.

$P(X=x) = 2^{-x}; \quad x = 1, 2, \ldots$

a) ¿Está bien definida? Está bien definida $\Leftrightarrow \sum_x P(X=x) = 1$

$$\sum_x P(X=x) = \sum_x 2^{-x} = \frac{1/2}{1-1/2} = \frac{1/2}{1/2} = 1$$ → la función masa de probabilidad está bien definida.

b) $P(4 \le X \le 10) = \sum_{i=4}^{10} P(X=i) = \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{10}} = \frac{127}{1024} = 0{,}124023$

c) - La moda será aquel valor de X con mayor probabilidad, es decir: Moda = 1 (dado que $P(X=x)$ es decreciente).

- Q_1: ~~$2^{-x} \le 0{,}25$~~ 1 porque $P[x=1] = 1/2 > 1/4$

- Q_2: 1 porque $P[x=1] = 1/2$

- Q_3: 2 porque $\underbrace{P[x=2] = 1/4 + P[x=1] = 1/2}$ $= \frac{3}{4}$

d) $$\sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{1}{2^x} = \frac{e^t/2}{1-\frac{e^t}{2}} \quad \forall\, t \in [-\infty, \log 2]$$

Media: m_1 $$E[x] = \frac{M_x'(t)}{dt} = \frac{\frac{e^t}{2}\left(1-\frac{e^t}{2}\right) - \frac{e^t}{2}\left(-\frac{e^t}{2}\right)}{\left(1-\frac{e^t}{2}\right)^2} \to t=0 = 2 \text{ lanzamientos}$$

$$Var(x) = E[x^2] - E[x]^2 = m_2 - m_1^2$$

$$E[x^2] = m_2 = \frac{d'' M_x(t)}{dt} = \frac{2e^t(2-e^t)^2 + 4e^{2t}(2-e^t)}{(2-e^t)^4} \to t=0 = 6 \text{ lanzamientos}^2$$

→ $Var(x) = 6 - 2^2 = 2$ lanzamientos^2

$\sigma_x = \sqrt{2}$ lanzamientos.

4. Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} k_1(x+1) & 0 \leq x \leq 4 \\ k_2 x^2 & 4 < x \leq 6 \end{cases}$$

Sabiendo que $P(0 \leq X \leq 4) = 2/3$, determinar k_1, k_2, y deducir su función de distribución.

$$f(x) = \begin{cases} k_1(x+1) & 0 \leq x \leq 4 \\ k_2 x^2 & 4 < x \leq 6 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

→ Fuera de los límites de determinado que es 0.

$$P(0 \leq X \leq 4) = \frac{2}{3}$$

k_1? k_2? F. Distribución

1) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow k_1, k_2 \geq 0$

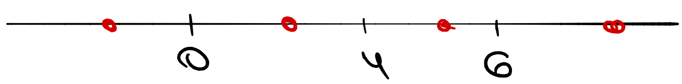
ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \cancel{\int_{-\infty}^{0} 0\,dx} + \int_0^4 k_1(x+1)dx + \int_4^6 k_2 x^2 dx + \cancel{\int_6^{+\infty} 0\,dx} = k_1\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_0^4 + k_2 \frac{x^3}{3}\Big|_4^6 = 12k_1 + \frac{152}{3}k_2 = 1$

$$P(0 \leq X \leq 4) = \frac{2}{3} = \int_0^4 k_1(x+1)dx = k_1\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_0^4 = 12k_1 = \frac{2}{3}$$

$k_1 = \frac{1}{18}$, $k_2 = \frac{1}{152}$

Estos valores hacen que sea una función de densidad.

$F(x) = P(X \le x)$ Función distribución



$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{18}\int_0^x x+1 & 0 \le x < 4 \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{152}\int_4^x x^2 & 4 \le x < 6 \\ 1 & x > 6 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{18}\left(\frac{x^2}{2} + x\right) & 0 \le x < 4 \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{152}\frac{x^3 - 4^3}{3} & 4 \le x < 6 \\ 1 & x > 6 \end{cases}$$

5. La dimensión en centímetros de los tornillos que salen de cierta fábrica es una variable aleatoria X, con función de densidad

$$f(x) = \frac{k}{x^2}, \quad 1 \leq x \leq 10.$$

a) Determinar el valor de k, y obtener la función de distribución.

b) Hallar la probabilidad de que la dimensión de un tornillo esté entre 2 y 5 cm.

c) Determinar la dimensión máxima del 50 % de los tornillos con menor dimensión y la dimensión mínima del 5 % con mayor dimensión.

d) Si Y denota la dimensión de los tornillos producidos en otra fábrica, con la misma media y desviación típica que X, dar un intervalo en el que tome valores la variable Y con una probabilidad mínima de 0.99.

Sea X = "La dimensión en centímetros de los tornillos que salen de cierta fábrica".

a)

Como tenemos que la función de densidad de X es $f(x) = \frac{K}{x^2}$ si $1 \leq x \leq 10$ tenemos que $f_X(x) = \int_1^{10} \frac{K}{x^2}\,dx = 1$

Por tanto:

$$\int_1^{10} \frac{K}{x^2}\,dx = 1 \Rightarrow K\int_1^{10} \frac{1}{x^2}\,dx = K \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg]_1^{10} = K \cdot \left(\frac{-1}{10} - \left(-\frac{1}{1}\right)\right) = K \cdot \left(1 - \frac{1}{10}\right) = \frac{K \cdot 9}{10} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K = \frac{10}{9}$$

• La función de distribución viene dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \int_1^x \frac{10}{9x^2} & \text{si } 1 \leq x \leq 10 \\ 1 & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

b)

$$P(2 \leq x \leq 5) = F_X(5) - F_X(2) = \int_1^5 \frac{10}{9x^2} - \int_1^2 \frac{10}{9x^2} = \frac{10}{9} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg]_1^5 - \frac{10}{9} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg]_1^2 =$$

$$= \frac{10}{9} \cdot \left(-\frac{1}{5} - (-1)\right) - \frac{10}{9} \cdot \left(-\frac{1}{2} - (-1)\right) = \frac{10}{9} \cdot \frac{4}{5} - \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{40}{45} - \frac{10}{18} = \frac{1}{3}$$

c) • Calculamos la mediana:

$$P(X \leq M_e) = 0{,}5 \Rightarrow \int_1^{M_e} \frac{10}{9x^2} = 0{,}5 \Rightarrow \frac{10}{9} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg]_1^{M_e} = \frac{10}{9} \cdot \left(-\frac{1}{M_e} - (-1)\right) = \frac{10}{9} \cdot \left(-\frac{1}{M_e} + 1\right)$$

$$\frac{10}{9} \cdot \left(-\frac{1}{M_e} + 1\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow +\frac{1}{M_e} = 0{,}55 \Rightarrow M_e = 1{,}\overline{81}$$

- Calculamos el percentil 95:

$$P(X \leq P_{95}) = 0{,}95 \Rightarrow \int_1^{P_{95}} \frac{10}{9x^2} = 0{,}95 \Rightarrow \frac{10}{9}\cdot\left(\frac{-1}{x}\right)\Bigg]_1^{P_{95}} = \frac{10}{9}\cdot\left(-\frac{1}{P_{95}}+1\right)$$

$$\frac{10}{9}\cdot\left(\frac{-1}{P_{95}}+1\right) = 0{,}95 \Rightarrow \frac{1}{P_{95}} = 0{,}145 \Rightarrow P_{95} = 6{,}89655$$

d) Usando la desigualdad de Chebychev:

$$P\left(E[X] - k\sqrt{Var(X)} < Y < E[X] + k\sqrt{Var(X)}\right) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Tenemos que:

$$1 - \frac{1}{k^2} \geq 0{,}99 \rightarrow k \geq 10 \rightarrow \text{Para } K = 10:$$

$$P\left(E[X] - k\sqrt{Var(X)} < Y < E[X] + k\sqrt{Var(X)}\right) = 0{,}99$$

- Vamos a calcular las medias de X e Y:

$$E[X] = \int_1^{10} x \cdot \frac{10}{9x^2}\,dx = \frac{10}{9}\left[\log(x)\right]_1^{10} = \frac{10}{9}\log(10) = 2{,}5584$$

$$E[X^2] = \int_1^{10} x^2 \cdot \frac{10}{9x^2}\,dx = \int_1^{10} \frac{10}{9}\,dx = \frac{10x}{9}\Bigg]_1^{10} = \frac{100}{9} - \frac{10}{9} = 10$$

- Calculamos ahora la varianza y desviación típica de X:

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = 10 - (2{,}5584)^2 = 3{,}4558$$

$$\sqrt{Var[X]} = 1{,}859$$

Sabemos que $E[X] = E[Y]$ y $\sqrt{Var[X]} = \sqrt{Var[Y]}$.

- Como $E[X^2] = \int_1^{10} x^2 \cdot \frac{10}{9x^2} = 10 < +\infty$ es claro que $\exists\, E[X^2]$ y por tanto podemos aplicar la desigualdad de Chebychev.

Por tanto, el intervalo es:

$$\left]0, E[Y] + 10\sqrt{Var[Y]}\right] = \left]0, 21{,}1484\right]$$

6- $f(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{10} & 1 < x \leq 2 \\ 0,4 & 4 < x \leq 6 \end{cases}$

$$P(1,5 \leq x \leq 2) = \int_{1,5}^{2} \frac{2x-1}{10}\, dx = \frac{1}{10}\left[x^2 - x\right]_{1,5}^{2} = \frac{1,75-0,5}{10} = 0,125$$

$P(2,5 \leq X \leq 3,5) = 0$ (No definido)

$$P(4,5 \leq x \leq 5,5) = \int_{4,5}^{5,5} 0,4\, dx = \left[0,4x\right]_{4,5}^{5,5} = 0,4$$

$$P(1,2 \leq X \leq 5,2) = \int_{1,2}^{2} \frac{2x-1}{10} + \int_{4}^{5,2} 0,4\, dx = \frac{1}{10}(2,56-0,8) + 0,48 =$$

$$= 0,656$$

b) $E[x] = \int_1^2 x \frac{2x-1}{10}\, dx + \int_4^6 0,4x\, dx =$

$$= \frac{1}{10}\left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 + 0,4\left[\frac{x^2}{2}\right]_4^6 = 0,31667 + 4 = 4,31667$$

c) $M_x[t] = E[e^{tx}] = \int_1^2 e^{tx} \cdot \frac{2x-1}{10}\, dx + \int_4^6 e^{tx}\, 0,4\, dx =$

$$= \frac{1}{10}\left[\frac{2xe^{tx}}{t} - \frac{2e^{tx}}{t^2}\right]_1^2 - \left[\frac{e^{tx}}{t}\right]_1^2 + 0,4\left(\left[\frac{e^{tx}}{t}\right]_4^6\right) =$$

$$= \frac{1}{10}\left(\frac{3e^{2t} - e^t}{t} - \frac{2e^{2t}}{t^2} + \frac{2e^t}{t^2}\right) + \frac{0,4e^{4t}(e^{2t}-1)}{t}$$

7. Con objeto de establecer un plan de producción, una empresa ha estimado que la demanda de sus clientes, en miles de unidades del producto, se comporta semanalmente con arreglo a una ley de probabilidad dada por la función de densidad:

$$f(x) = \frac{3}{4}(2x - x^2), \quad 0 \le x \le 2.$$

a) ¿Qué cantidad deberá tener dispuesta a la venta al comienzo de cada semana para poder satisfacer plenamente la demanda con probabilidad 0.5?

b) Pasado cierto tiempo, se observa que la demanda ha crecido, estimándose que en ese momento se distribuye según la función de densidad:

$$f(y) = \frac{3}{4}(4y - y^2 - 3), \quad 1 \le y \le 3.$$

Los empresarios sospechan que este crecimiento no ha afectado a la dispersión de la demanda, ¿es cierta esta sospecha?

a) Sabemos que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{\cancel{\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx}}_{\to 0} + \underbrace{\int_{0}^{T} f(x)\,dx}_{= 0{,}5} + \underbrace{\int_{T}^{2} f(x)\,dx}_{= 0{,}5} + \underbrace{\cancel{\int_{2}^{+\infty} f(x)\,dx}}_{\to 0} = 1$$

Nos valdría cualquiera de las dos integrales que dan 0,5.

$$\frac{3}{4}\int_{T}^{2}(2x - x^2)\,dx = -\frac{3}{4}\int_{T}^{2} x^2\,dx + \frac{3}{4}\int_{T}^{2} 2x\,dx =$$

$$= -\frac{3}{4}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{T}^{2} + \frac{6}{4}\,\frac{x^2}{2}\Bigg|_{T}^{2} = -\frac{3}{4}\left(\frac{8}{3} - \frac{T^3}{3}\right) + \frac{6}{4}\left(2 - \frac{T^2}{2}\right) =$$

$$= -\frac{24}{12} + \frac{3T^3}{12} + 3 - \frac{3T^2}{4} = 1 - \frac{3}{4}T^2 + \frac{T^3}{4}$$

$$\frac{T^3}{4} - \frac{3}{4}T^2 + 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} T = 1 - \sqrt{3} \notin [0,2] \\ T = 1 + \sqrt{3} \notin [0,2] \\ T = 1 \in [0,2] \end{array}$$

Deberán tener puestas 1000 uds a la venta.

b) Vamos a hallar el coeficiente de variación de Pearson de ambas funciones de densidad

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \cancel{\int_{-\infty}^{0} x f(x)\,dx}^{\,0} + \int_{0}^{2} x f(x)\,dx + \cancel{\int_{2}^{+\infty} x f(x)\,dx}^{\,0}$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^2 (2x^2 - x^3)\,dx = \frac{3}{4}\left|\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right|_0^2 = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{3}\right) = 1$$

$$EY = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y)\,dy = \cancel{\int_{-\infty}^{1} y f(y)\,dy}^{\,0} + \int_{1}^{3} y f(y)\,dy + \cancel{\int_{3}^{+\infty} y f(y)\,dy}^{\,0} =$$

$$= \frac{3}{4}\int_1^3 (4y^2 - y^3 - 3y)\,dy = \frac{3}{4}\left(\frac{4y^3}{3} - \frac{y^4}{4} - \frac{3y^2}{2}\right)_1^3 =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{8}{3}\right) = 2$$

Tras calcular las esperanzas, calculamos las varianzas.

$$Var = m_2 - m_1^2$$

$$Var[x] = E(x^2) - E(x)^2 = \frac{6}{5} - 1^2 = 0{,}2$$

$$E(x^2) = \int_0^2 x^2 f(x)\,dx = \frac{3}{4}\int_0^2 (2x^3 - x^4)\,dx =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{5}\right)_0^2 = \frac{3}{4}\left(\frac{8}{5}\right) = \frac{6}{5}$$

$$E(y^2) = \int_1^3 y^2 f(y)\,dy = \frac{3}{4}\int_1^3 (4y^3 - y^4 - 3y^2)\,dy =$$

$$= \frac{3}{4}\left(y^4 - \frac{y^5}{5} - y^3\right)\Big|_1^3 = \frac{3}{4}\left(\frac{28}{5}\right) = \frac{21}{5}$$

$$Var(y) = \frac{21}{5} - 2^2 = \frac{1}{5} = 0,2$$

$$CV_x = \frac{\sigma_x}{E_x} = \frac{+\sqrt{\sigma_x^2}}{E_x} = 0,447$$

$$CV_y = \frac{\sigma_y}{E_y} = \frac{+\sqrt{\sigma_y^2}}{E_y} = 0,223$$

Como poseen distintos coeficientes de variación, podemos asegurar que el crecimiento sí ha afectado a la dispersión de la demanda.

8. Calcular las funciones masa de probabilidad de las variables $Y = X + 2$ y $Z = X^2$, siendo X una variable aleatoria con distribución:

$$P(X=-2) = \frac{1}{5}, \quad P(X=-1) = \frac{1}{10}, \quad P(X=0) = \frac{1}{5}, \quad P(X=1) = \frac{2}{5}, \quad P(X=2) = \frac{1}{10}.$$

¿Cómo afecta el cambio de X a Y en el coeficiente de variación?

$\underline{X}$ r.a. $\qquad Y = \underline{X} + 2 \qquad Z = \underline{X}^2$

x_i	p_i
-2	$1/5$
-1	$1/10$
0	$1/5$
1	$2/5$
2	$1/10$

a) $Y = \underline{X} + 2 \qquad \Sigma = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

y_i	p_i'
0	$1/5$
1	$1/10$
2	$1/5$
3	$2/5$
4	$1/10$

$\Sigma' = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$p_i' = P(Y = y) = \sum_{x/h(x)=y} p_i =$

$= P(\underline{X} = y - 2) \quad \forall y = 0, 1, 2, \dots y.$

b) $Z = \underline{X}^2 \qquad \Sigma'' = \{0, 1, 4\}$

z_i	p_i''
0	$1/5$
1	$1/2$
4	$3/10$
	1

$p_i'' = P(Z = 0) =$

$= \sum_{x/x^2=0} P(\underline{X} = x) = P(x = 0) = \frac{1}{5}$

$P(Z = 1) = P(\underline{X} = -1) + P(\underline{X} = 1) = \frac{1}{2}$

$P(Z = 4) = P(x = -2) + P(x = 2) =$

$= 3/10$

Sabemos lo siguiente sobre la varianza y la esperanza.

$Y = aX + b \Rightarrow E[Y] = aE[X] + b$

$Var[Y] = a^2 Var[X] \Rightarrow \sigma_y = a\sigma_x$

En este caso $a = 1$ y $b = 2$

$E[Y] = E[X] + 2$

$\sigma_y = \sigma_x$

$$CV[Y] = \frac{\sigma_y}{E[Y]} = \frac{\sigma_x}{E[X]+2}$$

Vamos a calcular $E[X]$

$$E[X] = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

$$E[X] = -\frac{2}{5} + \frac{-1}{10} + \frac{2}{5} + \frac{2}{10} = \frac{1}{10}$$

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

$$E[X^2] = \frac{4}{5} + \frac{1}{10} + \frac{2}{5} + \frac{4}{10} = \frac{17}{10}$$

$$Var[X] = \frac{17}{10} - \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{169}{100} = Var[Y]$$

$$\sigma_X = +\sqrt{\frac{169}{100}} = \frac{13}{10} = \sigma_y$$

$$E[Y] = \frac{1}{10} + 2 = \frac{21}{10}$$

$$CV(X) = \frac{13/10}{1/10} = 13 \qquad CV(Y) = \frac{13/10}{21/10} = \frac{13}{21}$$

$$\boxed{CV(Y) = \frac{1}{21} CV(X)}$$

9) Calcular las funciones de densidad de las variables $Y = 2X + 3$ y $Z = |X|$, siendo X una variable continua con función de densidad:

$$f_X(x) = \frac{1}{4}, \quad -2 < x < 2.$$

$$x = \frac{Y-3}{2} = h^{-1}(y), \quad y \in]-1, 7[$$

$$x = -2 \Rightarrow y = 1 \; ; \quad x = 2 \Rightarrow y = 7.$$

Sea:

$$g(y) = f(h^{-1}(y)) \cdot |(h^{-1})'(y)|, \text{ si } y \in]-1, 7[$$

$$g(y) = 0, \quad \text{otro caso}$$

$$g(y) = f\left(\frac{y-3}{2}\right) \cdot \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}, \text{ si } -1 < y < 7$$

Para $z = |x|$, $z \in [0, 2[$: Al ser valor absoluto se tienen dos ramas:

$$g(z) = f(h^{-1}(z)) \cdot |(h^{-1})'(z)|$$

$$g_1(z) = f(x) \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

$$g_2(z) = f(-x) \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow g(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \quad \text{si } 0 \leq z < 2$$

10. Si X es una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}, \quad -\infty < x < \infty,$$

hallar su función de distribución y las probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:

a) $\{|X| \leq 2\}$.
b) $\{|X| \leq 2 \quad \text{ó} \quad X \geq 0\}$.
c) $\{|X| \leq 2 \quad \text{y} \quad X \leq -1\}$.
d) $\{X^3 - X^2 - X - 2 \leq 0\}$.
e) $\{X \text{ es irracional}\}$.

Al tener un valor absoluto, podemos dividir la función de densidad en dos trozos:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x}}{2} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{e^{-x}}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Luego la función de distribución será:

$$F(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} \frac{e^x}{2} & \text{si } x < 0 \\ \int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{2} + \int_{0}^{x} \frac{e^{-x}}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{2} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{x} e^t dt = \frac{1}{2} e^t \Big]_{-\infty}^{x} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(e^x - e^{-\infty} \right) = \frac{1}{2} \left(e^x - \underbrace{\frac{1}{e^{\infty}}}_{\to 0} \right) = \frac{1}{2} e^x$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^t}{2} dt = \frac{1}{2} e^t \Big]_{-\infty}^{0} = \frac{1}{2} \left(e^0 - \underbrace{\frac{1}{e^{\infty}}}_{\to 0} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^x \frac{e^{-t}}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^x e^{-t}\,dt = \frac{1}{2}\left(-e^{-t}\right)\Big]_0^x =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-e^{-x} + e^{0}\right) = -\frac{e^{-x}}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{t}}{2}\,dt + \int_0^x \frac{e^{-t}}{2}\,dt = \frac{1}{2} - \frac{e^{-x}}{2} + \frac{1}{2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}e^{-x}$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x} & \text{Si } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & \text{Si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) $\{|x| \leq 2\}$

$$P(|X| \leq 2) = P(-2 \leq X \leq 2) =$$

$$= F(2) - F(-2) = 1 - \frac{1}{2} e^{-2} - \frac{1}{2} e^{-2} =$$

$$= 0,86467$$

b) $\{|X| \leq 2$ o $X \geq 0\}$

$$P((-2 \leq X \leq 2) \cup (X \geq 0)) =$$

$$= P(X \geq -2) = 1 - P(X < -2) = 1 - F(-2) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} e^{-2} = 0,93233$$

c) $\{|X| \leq 2$ y $X \leq -1\}$

$$P((-2 \leq X \leq 2) \cap (X \leq -1)) =$$

$= P(-2 \leq X \leq -1) = F(-1) - F(-2) =$

$= \frac{1}{2} e^{-1} - \frac{1}{2} e^{-2} = 0,11627$

d) $\{ X^3 - X^2 - X - 2 \leq 0 \}$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & & 2 & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$X^2 + X + 1 = 0$

$X = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$ No tiene sol

Luego tendremos que calcular:

$P(X \leq 2) = F(2) = 1 - \frac{1}{2} e^{-2} = 0,93233$

e) ¿X es irracional?

La probabilidad de que la variable aleatoria X tome un valor irracional es 1, debido a que los irracionales son un conjunto no numerable, frente a los racionales que sí lo son, por lo que hay infinitamente más irracionales que racionales.

11. Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = 1, \quad 0 \le x \le 1.$$

Encontrar la distribución de las variables:

a) $Y = \dfrac{X}{1+X}$.

b) $Z = \begin{cases} -1, & X < 3/4 \\ 0, & X = 3/4 \\ 1, & X > 3/4. \end{cases}$

a) Tenemos que la función de densidad $f > 0$ $\forall x \in [0,1]$.

Tenemos $Y = h(x) = \dfrac{x}{1+x}$ Derivable en $[0,1]$

$Y' = \dfrac{1+x-x}{(1+x)^2} = \dfrac{1}{1+x^2} > 0$ estrictamente creciente en todo $\mathbb{R}$, en particular en $[0,1]$

Por tanto $y = h(x)$ es una variable aleatoria con función de densidad:

$$g(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \notin h([0,1]) = [0, \frac{1}{2}] \\ f(h^{-1}(y)) \cdot |(h^{-1})'(y)| & \text{si } y \in [0, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

$y = \dfrac{x}{1+x} \Rightarrow y + yx = x$

$y = x - yx \Rightarrow y = x(1-y) \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{y}{1-y} \Rightarrow h^{-1}(y)$

$(h^{-1})'(y) = \dfrac{1-y+y}{(1-y)^2} = \dfrac{1}{(1-y)^2}$

$$|(h^{-1})'(y)| = \frac{1}{(y-1)^2}$$

$$f(h^{-1}(y)) = 1$$

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{(y-1)^2} & \text{si } y \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{si } y \notin [0, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

e) Tenemos el caso de cambio de variable de continua a discreta.

$Z = h(X)$, con valores en un conjunto numerable $h(A)$, $A \subset \mathbb{R}$, f toma valores en A.

$$\forall z \in h(A),\ P\{Z = z\} = \int_{\{x \in \mathbb{R} \,/\, h(x) = z\}} f(x)\,dx$$

$$P(Z = z) = 0 \quad \text{si } z \notin h(A)$$

La función masa de probabilidad de la v.a. discreta es:

$$P(Z=-1) = P(X < \frac{3}{4}) = \int_0^{3/4} f(x)\,dx = \int_0^{3/4} 1\,dx =$$

$$= x\Big|_0^{3/4} = \frac{3}{4}$$

$$P(Z=0) = 0$$

$$P(Z=1) = P(X > \frac{3}{4}) = \int_{3/4}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{4}$$

12. Sea X una variable aleatoria simétrica con respecto al punto 2, y con coeficiente de variación 1. ¿Qué puede decirse acerca de las siguientes probabilidades?:

- $P(-8 < X < 12)$
- $P(-6 < X < 10)$.

Si X es una variable aleatoria simétrica alrededor de un punto $a \in \mathbb{R}$, de existir $E[X]$, su valor es a. Como en este caso $a = 2$, tenemos que $E[X] = 2$. Además, sabemos que $C.V(X) = 1$:

$$C.V(X) = \frac{\sigma_X}{E[X]}$$

$$\sigma_X = 1 \cdot 2 = 2$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma^2_X = 4 = Var(X)$$

a) $P(-8 < X < 12)$

Supongamos que este intervalo es de la forma $(E[X]-K, E[X]+K)$. Puesto que $E[X]=2$, concluimos que $K=10$.

Aplicando la desigualdad de Chebychev:

$$P(-8<X<12) \geq 1-\frac{Var(X)}{K^2}$$

$$P(-8<X<12) \geq 1-\frac{4}{100}$$

$$P(-8<X<12) \geq 0,96$$

b) $P(-6<X<10)$

Supongamos que este intervalo se ha obtenido también de la forma $(E[X]-K, E[X]+K)$. Entonces $K=8$.

Aplicando la desigualdad de Chebyshev:

$$P(-6 < X < 10) \geq 1 - \frac{Var(X)}{K^2}$$

$$P(-6 < X < 10) \geq 1 - \frac{4}{64}$$

$$P(-6 < X < 10) \geq 0,984375$$