Problema 1.

Hallar $t \in \mathbb{R}$ para que el vector $\vec{x} = (3, 8, t)$ pertenezca al subespacio engendrado por los vectores $\vec{u} = (1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (1, 3, -1)$.

Solución del problema 1. $\vec{x} \in L\{\vec{u}, \vec{v}\}$ si, y sólo si, existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, es decir,

$$(3, 8, t) = \alpha(1, 2, 3) + \beta(1, 3, -1) = (\alpha, 2\alpha, 3\alpha) + (\beta, 3\beta, -\beta) = (\alpha + \beta, 2\alpha + 3\beta, 3\alpha - \beta).$$

Luego, obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 3 & \text{(Ec.1)} \\ 2\alpha + 3\beta = 8 & \text{(Ec.2)} \\ 3\alpha - \beta = t & \text{(Ec.3)} \end{cases}$$

De (Ec.1), tenemos que $\alpha = 3 - \beta$. Sustituyendo en (Ec.2)

$$2(3 - \beta) + 3\beta = 8 \Longleftrightarrow \beta = 2.$$

Luego, $\alpha = 1$. Finalmente, por (Ec.3), deducimos que $t = 1$. Por tanto, $\vec{x}$ pertenece al subespacio engendrado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ si, y sólo si, $t = 1$.

Problema 2.

Determinar a y b para que el vector $(1, 4, a, b)$ sea combinación lineal de $(1, 2, -1, -2)$ y de $(0, 1, 2, 1)$.

Solución del problema 2. $(1, 4, a, b)$ es combinación lineal de $(1, 2, -1, -2)$ y de $(0, 1, 2, 1)$ si, y sólo si, existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$(1, 4, a, b) = \alpha(1, 2, -1, -2) + \beta(0, 1, 2, 1) \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 & \text{(Ec.1)} \\ 2\alpha + \beta = 4 & \text{(Ec.2)} \\ -\alpha + 2\beta = a & \text{(Ec.3)} \\ -2\alpha + \beta = b & \text{(Ec.4)} \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de α en la (Ec.2) obtenemos $\beta = 2$. Luego, de la (Ec.3) y (Ec.4) deducimos que $a = 3$ y $b = 0$, respectivamente.

Por tanto, el vector $(1, 4, a, b)$ es combinación lineal de $(1, 2, -1, -2)$ y de $(0, 1, 2, 1)$ si, y sólo si, $a = 3$ y $b = 0$.

Problema 3.

Demostrar que los vectores $\vec{u}_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{u}_2 = (1, 0, 1)$, $\vec{u}_3 = (0, 1, 1)$ forman una base de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ y encontrar las coordenadas de los vectores de la base canónica respecto a dicha base.

Solución del problema 3.

a) Veamos que $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$. En primer lugar, son linealmente independientes ya que si disponemos los vectores en forma matricial, resulta:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y se verifica que $rg(A) = 3$ (puesto que $\det(A) = -2 \neq 0$), por lo que los tres vectores que conforman la matriz son linealmente independientes.

Como $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ y $\text{card}(\mathcal{B}) = 3$, entonces $\mathcal{B}$ forma una base de $\mathbb{R}^3$.

b) Sean $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$, es decir, $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$ y $\vec{e}_3 = (0,0,1)$. Tenemos que encontrar las coordenadas de $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ y $\vec{e}_3$ en la base $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$.

- <u>Para $\vec{e}_1$</u>. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tales que $\vec{e}_1 = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \alpha_3\vec{u}_3$. Es decir,

$$(1,0,0) = (\alpha_1+\alpha_2, \alpha_1+\alpha_3, \alpha_2+\alpha_3) \iff \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \end{array} \right. \quad (S)$$

  Resolviendo el sistema (S), obtenemos que $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$ y $\alpha_3 = -\frac{1}{2}$. Por tanto, las coordenadas de $\vec{e}_1$ con respecto de la base $\mathcal{B}$ son $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})_{\mathcal{B}}$.

- <u>Para $\vec{e}_2$</u>. Sean $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$ tales que $\vec{e}_2 = \beta_1\vec{u}_1 + \beta_2\vec{u}_2 + \beta_3\vec{u}_3$. Es decir,

$$(0,1,0) = (\beta_1+\beta_2, \beta_1+\beta_3, \beta_2+\beta_3) \iff \left\{ \begin{array}{l} \beta_1 + \beta_2 = 0, \\ \beta_1 + \beta_3 = 1, \\ \beta_2 + \beta_3 = 0, \end{array} \right. \quad (S)$$

  Resolviendo el sistema (S), obtenemos que $\beta_1 = \frac{1}{2}$, $\beta_2 = -\frac{1}{2}$ y $\beta_3 = \frac{1}{2}$. Por tanto, las coordenadas de $\vec{e}_2$ con respecto de la base $\mathcal{B}$ son $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})_{\mathcal{B}}$.

- <u>Para $\vec{e}_3$</u>. Sean $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \mathbb{R}$ tales que $\vec{e}_3 = \delta_1\vec{u}_1 + \delta_2\vec{u}_2 + \delta_3\vec{u}_3$. Es decir,

$$(0,0,1) = (\delta_1+\delta_2, \delta_1+\delta_3, \delta_2+\delta_3) \iff \left\{ \begin{array}{l} \delta_1 + \delta_2 = 0, \\ \delta_1 + \delta_3 = 0, \\ \delta_2 + \delta_3 = 1, \end{array} \right. \quad (S)$$

  Resolviendo el sistema (S), obtenemos que $\delta_1 = -\frac{1}{2}$, $\delta_2 = \frac{1}{2}$ y $\delta_3 = \frac{1}{2}$. Por tanto, las coordenadas de $\vec{e}_3$ con respecto de la base $\mathcal{B}$ son $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})_{\mathcal{B}}$.

Problema 4.

Determinar qué conjuntos son subespacios vectoriales de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$:

$$A = \{(x,y,z) : x - y + z = 0\}, \qquad B = \{(x,y,z) : x + 2y + z = 1\},$$

$$C = \{(x,y,z) : x - y = 0, x - z = 0\}, \qquad D = \{(x,y,z) : x - y + z = 0, y + z = 1\},$$

$$E = \{(x,y,z) : x = 0, y = z\}, \qquad F = \{(x,y,z) : x \cdot y = 0\}.$$

Solución del problema 4.

a) Veamos que $A = \{(x, y, z) : x - y + z = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Para ello, sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in A$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tenemos que demostrar que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in A$. Notar que

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = (\alpha u_1 + \beta v_1, \alpha u_2 + \beta v_2, \alpha u_3 + \beta v_3),$$

y

$$\begin{cases} u_1 - u_2 + u_3 = 0 & \text{ya que } \vec{u} \in A, \\ v_1 - v_2 + v_3 = 0 & \text{ya que } \vec{v} \in A. \end{cases}$$

Como

$$\alpha u_1 + \beta v_1 - (\alpha u_2 + \beta v_2) + \alpha u_3 + \beta v_3 = \alpha(\cancelto{0}{u_1 - u_2 + u_3}) + \beta(\cancelto{0}{v_1 - v_2 + v_3}) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0,$$

deducimos que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in A$.

b) Observamos que $B = \{(x, y, z) : x + 2y + z = 1\}$ no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ ya que $\vec{0} \notin B$, debido a a que $0 + 2 \cdot 0 + 0 = 0 \neq 1$.

c) Veamos que $C = \{(x, y, z) : x - y = 0, x - z = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Para ello, sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in C$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tenemos que demostrar que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in C$. Notar que

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = (\alpha u_1 + \beta v_1, \alpha u_2 + \beta v_2, \alpha u_3 + \beta v_3),$$

y

$$\left\{ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} u_1 - u_2 = 0 \\ u_1 - u_3 = 0 \end{array}\right\} \text{ ya que } \vec{u} \in C, \\ \left.\begin{array}{l} v_1 - v_2 = 0 \\ v_1 - v_3 = 0 \end{array}\right\} \text{ ya que } \vec{v} \in C. \end{array} \right.$$

Como

$$\textit{(1º cond.)} \quad \alpha u_1 + \beta v_1 - (\alpha u_2 + \beta v_2) = \alpha(\cancelto{0}{u_1 - u_2}) + \beta(\cancelto{0}{v_1 - v_2}) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0,$$

$$\textit{(2º cond.)} \quad \alpha u_1 + \beta v_1 - (\alpha u_3 + \beta v_3) = \alpha(\cancelto{0}{u_1 - u_3}) + \beta(\cancelto{0}{v_1 - v_3}) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0,$$

deducimos que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in C$.

d) $D = \{(x, y, z) : x - y + z = 0, y + z = 1\}$ no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, porque $\vec{0} \notin D$ (aunque se satisface la primera condición, $0 - 0 = 0$, no se satisface la segunda $0 + 0 = 0 \neq 1$).

e) Veamos que $E = \{(x, y, z) : x = 0, y = z\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Para ello, sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in E$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tenemos que demostrar que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in E$. Notar que

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = (\alpha u_1 + \beta v_1, \alpha u_2 + \beta v_2, \alpha u_3 + \beta v_3),$$

y

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = 0 \\ \\ u_2 = u_3 \end{array}\right\} \text{ya que } \vec{u} \in E, \qquad \left.\begin{array}{l} v_1 = 0 \\ \\ v_2 = v_3 \end{array}\right\} \text{ya que } \vec{v} \in E.$$

Como

$$\begin{array}{ll} \textit{(1º cond.)} & \alpha u_1 + \beta v_1 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0, \\ \textit{(2º cond.)} & \alpha u_2 + \beta v_2 = \alpha u_3 + \beta v_3, \end{array}$$

deducimos que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in E$.

f) $F = \{(x, y, z) : x \cdot y = 1\}$ no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, ya que si tomamos $u = (1, 0, 0)$ y $v = (0, 1, 0)$, tenemos que $u, v \in F$ pero $u + v = (1, 1, 0) \notin F$.

NOTA: En este ejemplo, tenemos que $\vec{0} \in F$ y sin embargo F no es subespacio vectorial.

Problema 5.

Demostrar que el conjunto $E = \{(a, 0, a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio vectorial de $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$. En caso afirmativo, hállese una base del mismo.

Solución del problema 5.

a) Veamos que E es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$. Para ello, sean $\vec{u} = (a, 0, b, a), \vec{v} = (a', 0, b', a') \in E$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Como

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \alpha(a, 0, b, a) + \beta(a', 0, b', a') = (\alpha a + \beta a', 0, \alpha b + \beta b', \alpha a + \beta a') \in E,$$

concluimos que E es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

b) Calculemos una base de E. Como

$$\vec{u} \in E \Longleftrightarrow \vec{u} = (a, 0, b, a) = (a, 0, 0, a) + (0, 0, b, 0) = a(1, 0, 0, 1) + b(0, 0, 1, 0),$$

y los vectores $(1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0)$ son linealmente independientes, $\{(1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\}$ es una base de E.

Problema 6.

Calcular una base, unas ecuaciones paramétricas, unas ecuaciones implícitas y la dimensión de los siguientes subespacios vectoriales:

a) $H_1 = L\{(1, 0, 1), (-1, 1, 0)\}$.

b) $H_2 = L\{(1, 1, 1), (-1, 0, 1), (0, 1, 2)\}$.

c) $H_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y - z\}$.

d) $H_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0, x - 2z = 0\}$.

Solución del problema 6.

a) $H_1 = L\{(1,0,1),(-1,1,0)\}$.

- Como
$$rg\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$
tenemos que los vectores que generan el subespacio son linealmente independientes. Por tanto, dichos vectores forman una base de H_1 y $\dim(H_1) = 2$.

- Ecuaciones paramétricas. Escribimos un vector genérico $\vec{v} = (x,y,z) \in H_1$ como combinación lineal de los vectores de la base
$$(x,y,z) = \lambda(1,0,1) + \mu(-1,1,0) = (\lambda - \mu, \mu, \lambda),$$
de donde obtenemos las ecuaciones paramétricas de H_1:
$$\left\{ \begin{array}{l} x = \lambda - \mu \\ y = \mu \\ z = \lambda \end{array} \right. \qquad \text{con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$
NOTA: Observar que deben aparecer tantos parámetros (en este caso, λ y μ) como dimensión tiene el subespacio vectorial.

- Ecuaciones implícitas. Para hallar las ecuaciones implícitas tomamos un vector cualquiera $(x,y,z) \in H_1$ y observamos que los vectores (x,y,z), $(1,0,1)$, $(-1,1,0)$ son linealmente dependientes, luego
$$rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{pmatrix} = 2 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow x + y - z = 0.$$
Luego,
$$H_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}.$$

b) $H_2 = L\{(1,1,1),(-1,0,1),(0,1,2)\}$.

- Consideremos la matriz formada por estos tres vectores, es decir,
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Como $rg(A) = 2$ y un menor principal de A es $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, tenemos que los vectores $\{$(1,1,1),(-1,0,1),(0,1,2)$\}$ son linealmente dependientes y los vectores $\{$(1,1,1),(-1,0,1)$\}$ son linealmente independientes. Entonces,
$$H_2 = L\{(1,1,1),(-1,0,1)\},$$
$\dim(H_2) = 2$ y $\{(1,1,1),(-1,0,1)\}$ es una base de H_2.

- Ecuaciones paramétricas. Escribimos un vector genérico $\vec{v} = (x, y, z) \in H_2$ como combinación lineal de los vectores de la base
$$(x, y, z) = \lambda(1, 1, 1) + \mu(-1, 0, 1) = (\lambda - \mu, \lambda, \lambda + \mu),$$
de donde obtenemos las ecuaciones paramétricas de H_1:
$$\left\{ \begin{array}{l} x = \lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \lambda + \mu \end{array} \right. \quad \text{con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- Ecuaciones implícitas. Para hallar las ecuaciones implícitas tomamos un vector cualquiera $(x, y, z) \in H_2$ y observamos que los vectores (x, y, z), $(1, 1, 1)$, $(-1, 0, 1)$ son linealmente dependientes, luego
$$rg \begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 1 & 1 & z \end{pmatrix} = 2 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow x - 2y + z = 0.$$
Luego,
$$H_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\}.$$

c) $H_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y - z\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$.

- Ecuaciones implícitas. El rango de la matriz del sistema formado por la ecuación que define a H_3 es uno:
$$rg \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$
por lo que la ecuación que define a H_3 es su ecuación implícita.

- Ecuaciones paramétricas. Tenemos que resolver el sistema formado por la ecuación $x - y + z = 0$. Como el rango de la matriz de este sistema es 1, como se vio anteriormente, le damos a las variables y y z el valor de dos parámetros, respectivamente. Es decir, $y = \lambda$ y $z = \mu$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Luego, obtenemos
$$\left\{ \begin{array}{l} x = \lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{array} \right. \quad \text{con } \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$
que son las ecuaciones paramétricas del subespacio H_3.

- Para obtener una base de H_3 usamos las ecuaciones paramétricas.
$$\begin{aligned} (x, y, z) \in H_3 \Longleftrightarrow (x, y, z) &= (\lambda - \mu, \lambda, \mu) = (\lambda, \lambda, 0) + (-\mu, 0, \mu) \\ &= \lambda(1, 1, 0) + \mu(-1, 0, 1). \end{aligned}$$
Como los vectores $(1, 1, 0)$ y $(-1, 0, 1)$ son linealmente independientes, deducimos que $\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ es una base de H_3 y por tanto $\dim(H_3) = 2$.

d) $H_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0, x - 2z = 0\}$.

- Ecuaciones implícitas. El rango de la matriz del sistema formado por las ecuaciones que definen a H_4 es dos:
$$rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 2$$
por lo que las dos ecuaciones que definen a H_4 son sus ecuaciones implícitas.
- Ecuaciones paramétricas. Tenemos que resolver el siguiente sistema.
$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ \\ x-2z=0 \end{cases}$$
Como el rango de la matriz de este sistema es 2, como se vio anteriormente, y como un menor principal de la matriz es
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix},$$
le damos a la variable z el valor de un parámetro, es decir, $z=\lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. Luego, obtenemos el siguiente sistema
$$\begin{cases} x+y=-\lambda, \\ \\ x=2\lambda, \end{cases}$$
cuya solución es $x=2\lambda$, $y=-3\lambda$, $z=\lambda$, que son las ecuaciones paramétricas del subespacio H_4.
- Para obtener una base de H_4 usamos las ecuaciones paramétricas.
$$(x,y,z) \in H_4 \Longleftrightarrow (x,y,z) = (2\lambda, -3\lambda, \lambda) = \lambda(2,-3,1).$$
Por lo que cualquier vector de H_4 esta generado por $(2,-3,1)$. Luego, deducimos que $\{(2,-3,1)\}$ es una base de H_4 y por tanto $\dim(H_4)=1$.

Problema 7.

Sea $P_3[x]$ el espacio vectorial de los polinomios en la indeterminada x de grado menor o igual a 3.

a) Probar que si $p(x)$ es un polinomio de grado 3, entonces $\mathcal{B} = \{p(x), p'(x), p''(x), p'''(x)\}$ es una base.

b) Tómese $p(x) = x^3 - 3x$ y hállense las coordenadas de $q(x) = x^3 + x - 2$ respecto de dicha base.

Solución del problema 7.

a) Como $p(x)$ es un polinomio de grado 3, $p(x)$ se escribe de la forma
$$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \qquad a_3 \neq 0,$$

donde $a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. Derivando, tenemos que

$$p'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1, \qquad p''(x) = 6a_3x + 2a_2, \qquad p'''(x) = 6a_3.$$

Veamos que $\mathcal{B} = \{p(x), p'(x), p''(x), p'''(x)\}$ es un sistema linealmente independiente. Para ello, consideremos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1 p(x) + \alpha_2 p'(x) + \alpha_3 p''(x) + \alpha_4 p'''(x) \\ &= \alpha_1\big(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0\big) + \alpha_2\big(3a_3x^2 + 2a_2x + a_1\big) + \alpha_3\big(6a_3x + 2a_2\big) + \alpha_4\big(6a_3\big) \\ &= \alpha_1 a_3\, x^3 + (\alpha_1 a_2 + \alpha_2 3a_3)\, x^2 + (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 2a_2 + \alpha_3 6a_3)\, x \\ &\qquad\qquad + \alpha_1 a_0 + \alpha_2 a_1 + \alpha_3 2a_2 + \alpha_4 6a_3 \iff \end{aligned}$$

$$\iff (S) \equiv \begin{cases} \alpha_1 a_3 = 0 \\ \alpha_1 a_2 + \alpha_2 3a_3 = 0 \\ \alpha_1 a_1 + \alpha_2 2a_2 + \alpha_3 6a_3 = 0 \\ \alpha_1 a_0 + \alpha_2 a_1 + \alpha_3 2a_2 + \alpha_4 6a_3 = 0 \end{cases}$$

De la 1º ecuación, obtenemos que $\alpha_1 = 0$, ya que $a_3 \neq 0$. Luego,

$$(S) \equiv \begin{cases} \alpha_2 3a_3 = 0 \\ \alpha_2 2a_2 + \alpha_3 6a_3 = 0 \\ \alpha_2 a_1 + \alpha_3 2a_2 + \alpha_4 6a_3 = 0 \end{cases}$$

Ahora, de la 1º ecuación, deducimos que $\alpha_2 = 0$, ya que $a_3 \neq 0$. Así pues,

$$(S) \equiv \begin{cases} \alpha_3 6a_3 = 0 \\ \alpha_3 2a_2 + \alpha_4 6a_3 = 0 \end{cases}$$

Como $a_3 \neq 0$, de la 1º ecuación tenemos que $\alpha_3 = 0$ y sustituyendo en la 2º ecuación llegamos a que $\alpha_4 = 0$. Por tanto, hemos demostrado que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha 3 = \alpha_4 = 0$. Luego, $\mathcal{B}$ es un sistema linealmente independiente.

Como $\mathrm{card}(\mathcal{B}) = 4 = \dim(P_3[x])$ y los elementos de $\mathcal{B}$ son linealmente independientes, deducimos que $\mathcal{B}$ es una base de $P_3[x]$.

NOTA. Si no sabemos que $\dim(P_3[x]) = 4$, para poder afirmar que $\mathcal{B}$ es una base de $P_3[x]$ tenemos que ver que $\mathcal{B}$ es un sistema generador de $P_3[x]$, es decir, ver que todo elemento $q(x)$ de $P_3[x]$ se pone como combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}$. Hagámoslo:

Sea $q(x) \in P_3[x]$, es decir, $q(x) = b_3\, x^3 + b_2\, x^2 + b_1\, x + b_0$ con $b_3, b_2, b_1, b_0 \in \mathbb{R}$. Tenemos que demostrar que existen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ tales que

$$q(x) = \alpha_1 p(x) + \alpha_2 p'(x) + \alpha_3 p''(x) + \alpha_4 p'''(x). \tag{1}$$

Observando que

$$\begin{aligned} \alpha_1 p(x) + \alpha_2 p'(x) + \alpha_3 p''(x) + \alpha_4 p'''(x) = \alpha_1 a_3\, x^3 + (\alpha_1 a_2 + \alpha_2 3a_3)\, x^2 + \\ + (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 2a_2 + \alpha_3 6a_3)\, x \\ + \alpha_1 a_0 + \alpha_2 a_1 + \alpha_3 2a_2 + \alpha_4 6a_3 \end{aligned}$$

(véase los cálculos anteriormente realizados), obtenemos el siguiente sistema lineal

$$(1) \iff \begin{cases} \alpha_1 a_3 = b_3 \\ \alpha_1 a_2 + \alpha_2 3a_3 = b_2 \\ \alpha_1 a_1 + \alpha_2 2a_2 + \alpha_3 6a_3 = b_1 \\ \alpha_1 a_0 + \alpha_2 a_1 + \alpha_3 2a_2 + \alpha_4 6a_3 = b_0 \end{cases}$$

el cual es compatible determinado, siendo su única solución

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{b_3}{a_3} \\[2ex] \alpha_2 = \frac{b_2 - \frac{b_3}{a_3} a_2}{3a_3} \\[2ex] \alpha_3 = \frac{b_1 - \frac{b_3}{a_3} a_1 - \frac{b_2 - \frac{b_3}{a_3} a_2}{3a_3} 2a_2}{6a_3} \\[2ex] \alpha_4 = \frac{b_0 - \frac{b_3}{a_3} a_0 - \frac{b_2 - \frac{b_3}{a_3} a_2}{3a_3} a_1 - \frac{b_1 - \frac{b_3}{a_3} a_1 - \frac{b_2 - \frac{b_3}{a_3} a_2}{3a_3} 2a_2}{6a_3} 2a_2}{6a_3} \end{cases}$$

Simplificando, llegamos a que

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{b_3}{a_3} \\[2ex] \alpha_2 = \frac{a_3 b_2 - a_2 b_3}{3a_3^2} \\[2ex] \alpha_3 = \frac{2a_2^2 b_3 + 3a_3^2 b_1 - a_3(2a_2 b_2 + 3a_1 b_3)}{18a_3^3} \\[2ex] \alpha_4 = \frac{a_3(a_3(9b_0 - 3b_1) + (2a_2 - 3a_1)b_2) + \left(-2a_2^2 - 9a_0 a_3 + 3a_1(a_2 + a_3)\right)b_3}{54a_3^3} \end{cases}$$

Observar que las coordenadas de $q(x)$ con respecto a la base $\mathcal{B}$ son $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)_{\mathcal{B}}$.

FIN DE LA NOTA

b) Notar que en este caso, $p'(x) = 3x^2 - 3$, $p''(x) = 6x$ y $p'''(x) = 6$. Luego,

$$\mathcal{B} = \{x^3 - 3x, 3x^2 - 3, 6x, 6\}.$$

Tenemos que hallar $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ tales que

$$q(x) = \alpha_1 p(x) + \alpha_2 p'(x) + \alpha_3 p''(x) + \alpha_4 p'''(x).$$

Es decir,

$$\begin{aligned} x^3 + x - 2 &= \alpha_1 \cdot (x^3 - 3x) + \alpha_2 \cdot (3x^2 - 3) + \alpha_3 \cdot 6x + \alpha_4 \cdot 6 \\ &= \alpha_1\, x^3 + 3\alpha_2\, x^2 + (-3\alpha_1 + 6\alpha_3)\, x + (-3\alpha_2 + 6\alpha_4) \iff \end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ 3\alpha_2 = 0 \\ -3\alpha_1 + 6\alpha_3 = 1 \\ -3\alpha_2 + 6\alpha_4 = -2 \end{cases}$$

cuya solución es $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = \frac{2}{3}$ y $\alpha_4 = -\frac{1}{3}$. Por tanto las coordenadas del polinomio $q(x) = x^3 + x - 2$ en la base $\mathcal{B}$ son $(1, 0, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})_{\mathcal{B}}$.

Problema 8.

Sean los conjuntos

$$F[x] = \{p(x) \in P_3[x] : p(0) + p'(0) = 0\}, \quad G[x] = \{p(x) \in P_3[x] : p''(x) = 0\}$$

Demostrar que $F[x]$ y $G[x]$ son subespacios vectoriales de $P_3[x]$, y encontrar sendas bases para cada uno de ellos.

Solución del problema 8. A un polinomio genérico de $P_3[x]$ lo denotaremos por

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3.$$

Así, las coordenadas de este polinomio $p(x)$ en la base (canónica de $P_3[x]$) $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ son (a_0, a_1, a_2, a_3).

a) Veamos que $F[x]$ es un subespacio vectorial de $F[x]$. Como es obvio que $F[x] \neq \emptyset$ (pues, por ejemplo, $0 \in F[x]$) deberemos comprobar (solamente) que, si $p(x), q(x) \in F[x]$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, el polinomio $r(x) = \alpha\, p(x) + \beta\, q(x)$ también es de $F[x]$; así ocurre en efecto, pues, además de tener grado menor o igual que 3, se tiene que

$$r(0) + r'(0) = \alpha\, p(0) + \beta\, q(0) + \alpha\, p'(0) + \beta\, q'(0) = \alpha \left(\cancelto{0}{p(0) + p'(0)}\right) + \beta \left(\cancelto{0}{q(0) + q'(0)}\right) = 0,$$

ya que $r'(x) = \alpha\, p'(x) + \beta\, q'(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Por tanto, $F[x]$ es un subespacio vectorial de $P_3[x]$.

Hallemos ahora una base de dicho subespacio. Notar que un polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ pertenece a $F[x]$ si $p(0) + p'(0) = 0$, lo cual es equivalente a decir que $a_0 + a_1 = 0$, ya que $p'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$. Luego,

$$F[x] = \big\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 : a_0 + a_1 = 0\big\}, \qquad \big(\text{Expresión implícita}\big)$$

es decir,

$$F[x] = \big\{a_1(x-1) + a_2x^2 + a_3x^3 : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\big\} = L\{x-1, x^2, x^3\}.$$

Como los polinomios $x-1, x^2, x^3$ son linealmente independientes (véase la siguiente nota), resulta que $\{x-1, x^2, x^3\}$ es una base de $F[x]$.

NOTA

Para ver que los polinomios $x-1$, x^2 y x^3 son linealmente independientes basta observar que

$$\alpha_1\,(x-1) + \alpha_2\,x^2 + \alpha_3\,x^3 = 0 \iff -\alpha_1\,x + \alpha_1\,x + \alpha_2\,x^2 + \alpha_3\,x^3 = 0$$
$$\iff \begin{cases} -\alpha_1 = 0, \\ \alpha_1 = 0, \\ \alpha_2 = 0, \\ \alpha_3 = 0, \end{cases}$$

es decir, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

b) Primeramente demostraremos que $G[x]$ es un subespacio vectorial de $P_3[x]$. Como, por ejemplo, $x \in G[x]$, se tiene que $G[x] \neq \emptyset$. Tenemos que comprobar que, si $p(x), q(x) \in G[x]$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, el polinomio $r(x) = \alpha\, p(x) + \beta\, q(x)$ pertenece a $G[x]$. Basta observar que $r(x)$ tiene grado menor o igual que 3 y además (usando las propiedades de la derivación) se tiene que

$$r''(x) = \alpha\, p''(x) + \beta\, q''(x) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0, \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, $G[x]$ es un subespacio vectorial de $P_3[x]$.

Hallemos ahora una base de dicho subespacio. Observamos que

$$\begin{aligned} p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in G[x] &\iff p''(x) = 0, \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \\ &\iff 2a_2 + 6a_3 x = 0, \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \\ &\iff a_2 = a_3 = 0. \end{aligned}$$

Luego,

$$G[x] = \left\{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 : a_2 = a_3 = 0 \right\}, \qquad (\text{Expresión implícita})$$

es decir,

$$G[x] = \left\{ a_0 + a_1 x : a_0, a_1 \in \mathbb{R} \right\} = L\{1, x\}.$$

Como los polinomios $1, x$ son linealmente independientes, deducimos que $\{1, x\}$ es una base de $G[x]$.