3 → X = nº de lanzamientos de una moneda hasta salir cara.

$P(X=x) = 2^{-x}$; $x = 1, 2, \ldots$

a) ¿Está bien definida? Está bien definida $\Leftrightarrow \sum_x P(X=x) = 1$

$$\sum_x P(X=x) = \sum_x 2^{-x} = \frac{1/2}{1-1/2} = \frac{1/2}{1/2} = 1$$ → la función masa de probabilidad está bien definida.

b) $P(4 \leq X \leq 10) = \sum_{i=4}^{10} P(X=i) = \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{10}} = \frac{127}{1024} = 0{,}124023$

c) - La moda será aquel valor de X con mayor probabilidad, es decir: Moda $= 1$ (dado que $P(X=x)$ es decreciente).

- Q_1: ~~2^{-x} ≤ 0,25~~ 1 porque $P[x=1] = 1/2 > 1/4$

- Q_2: 1 porque $P[x=1] = 1/2$

- Q_3: 2 porque $\underbrace{P[x=2] = 1/4 + P[x=1] = 1/2}$ $= \frac{3}{4}$

d) $$\sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{1}{2^x} = \frac{e^t/2}{1-\frac{e^t}{2}} \quad \forall t \in [-\infty, \log 2]$$

Media: m_1 $$E[x] = \frac{M_x'(t)}{dt} = \frac{\frac{e^t}{2}\left(1-\frac{e^t}{2}\right) - \frac{e^t}{2}\left(-\frac{e^t}{2}\right)}{\left(1-\frac{e^t}{2}\right)^2} \to t=0 = 2 \text{ lanzamientos}$$

$$Var(x) = E[x^2] - E[x]^2 = m_2 - m_1^2$$

$$E[x^2] = m_2 = \frac{d'' M_x(t)}{dt} = \frac{2e^t(2-e^t)^2 + 4e^{2t}(2-e^t)}{(2-e^t)^4} \to t=0 = 6 \text{ lanzamientos}^2$$

→ $Var(x) = 6 - 2^2 = 2$ lanzamientos^2

$\sigma_x = \sqrt{2}$ lanzamientos.

Scanned with CamScanner