3. Demuestra las siguientes afirmaciones.

(a) (1,5 PUNTOS) No existe $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que $\{I_3, A, A^2, \ldots, A^8\}$ sea una base de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(b) (1,5 PUNTOS) Si $\overset{n \times n}{A}$ es una matriz ortogonal y ninguno de sus elementos es nulo, entonces A tiene al menos $n-1$ elementos negativos y $n-1$ elementos positivos.

(c) (PUNTOS EXTRA) Sea $A = (a_{ij})$ una matriz simétrica real de orden n tal que $A^2 = A$. Entonces,

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}| \leq n\sqrt{\operatorname{tr}(A)}.$$

a) Usando el Tª de Cayley-Hamilton

Sea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \Rightarrow$

$\Rightarrow p_A(\lambda) = -A^3 + k_2 A^2 + k_1 A + k_0 I_n = O_n$

$\Rightarrow$ Como tenemos k_2, k_1, k_0 tq $\{A^3, A^2, A, I_n\}$ son L.D., no pueden formar base $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$