11. Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = 1, \quad 0 \le x \le 1.$$

Encontrar la distribución de las variables:

a) $Y = \dfrac{X}{1+X}$.

b) $Z = \begin{cases} -1, & X < 3/4 \\ 0, & X = 3/4 \\ 1, & X > 3/4. \end{cases}$

a) Tenemos que la función de densidad $f > 0$ $\forall x \in [0,1]$.

Tenemos $Y = h(x) = \dfrac{x}{1+x}$ Derivable en $[0,1]$

$Y' = \dfrac{1+x-x}{(1+x)^2} = \dfrac{1}{(1+x)^2} > 0$ estrictamente creciente en todo $\mathbb{R}$, en particular en $[0,1]$

Por tanto $y = h(x)$ es una variable aleatoria con función de densidad:

$$g(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \notin h([0,1]) = [0, \frac{1}{2}] \\ f(h^{-1}(y)) \cdot |(h^{-1})'(y)| & \text{si } y \in [0, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

$y = \dfrac{x}{1+x} \Rightarrow y + yx = x$

$y = x - yx \Rightarrow y = x(1-y) \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{y}{1-y} = h^{-1}(y)$

$(h^{-1})'(y) = \dfrac{1-y+y}{(1-y)^2} = \dfrac{1}{(1-y)^2}$

$$|(h^{-1})'(y)| = \frac{1}{(y-1)^2}$$

$$f(h^{-1}(y)) = 1$$

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{(y-1)^2} & \text{si } y \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{si } y \notin [0, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

e) Tenemos el caso de cambio de variable de continua a discreta.

$Z = h(X)$, con valores en un conjunto numerable $h(A)$, $A \subset \mathbb{R}$, f toma valores en A.

$$\forall z \in h(A),\ P\{Z = z\} = \int_{\{x \in \mathbb{R} \,/\, h(x) = z\}} f(x)\,dx$$

$$P(Z = z) = 0 \quad \text{si } z \notin h(A)$$

La función masa de probabilidad de la v.a. discreta es:

$$P(Z = -1) = P(X < \frac{3}{4}) = \int_0^{3/4} f(x)\,dx = \int_0^{3/4} 1\,dx =$$

$$= x \Big|_0^{3/4} = \frac{3}{4}$$

$$P(Z = 0) = 0$$

$$P(Z = 1) = P(X > \frac{3}{4}) = \int_{3/4}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{4}$$