

1. Sea $V = M_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas, reales, de orden dos. En él se consideran los vectores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea U el subespacio vectorial de V definido como

$$U = \{M \in V : \text{traza}(M \cdot A_1) = \text{traza}(M \cdot A_2) = 0\}$$

- a) (2 puntos) Calcula dos subespacios vectoriales, U_1 y U_2 , complementarios de U en V que, a su vez, sean complementarios entre sí en V .
- b) (2 puntos) Calcula dos subespacios vectoriales, W_1 y W_2 , complementarios de U en V , cuya intersección sea la recta generada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En este caso, calcula además el subespacio $W_1 + W_2$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

U subespacio vectorial de $V \Rightarrow \dim U \leq \dim V$

$$U = \{M \in V : \text{tr}(M \cdot A_1) = \text{tr}(M \cdot A_2) = 0\}$$

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \quad M \cdot A_1 = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x-y \\ z & z-t \end{pmatrix}$$

$$M \cdot A_2 = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y & 2x \\ z & z-t \end{pmatrix}$$

$$\text{tr}(M \cdot A_1) = x + z - t$$

$$\text{tr}(M \cdot A_2) = -x + y + 2z$$

$$\begin{cases} x + z - t = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases} \quad \text{Nuestro subespacio tiene dimensión 2}$$

Dejamos estas dos ecuaciones en función de z y t

$$x = -z + t$$

$$-x + y + 2z = 0 \Rightarrow y = -3z - t$$

$$B_U = \{(-1, -3, 1, 0), (1, -1, 0, 1)\}$$

$$B_U = \{(-1, -3, 1, 0), (1, -1, 0, 1)\}$$

a) Tengo que buscar U_1 , cuya base ~~muera~~ en conjunto con B_U , de lugar a una base de $M_2(\mathbb{R})$, pero además que en conjunto con la base de U_2 , también de dar una base de $M_2(\mathbb{R})$

$$U_1 = \langle \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\} \rangle$$

$$U_2 = \langle \{(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\} \rangle$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$e) \quad W_1 = \langle \{(1, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 0)\} \rangle$$

$$W_2 = \langle \{(1, 1, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\} \rangle$$

$$W_1 + W_2 = \langle \{(1, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\} \rangle$$

$$\text{Base} = \{(1, 1, 1, 1), (0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 0)\}$$

$$\dim W_1 \cap W_2 = 1$$

$$\dim W_1 + W_2 = 3$$

2. a) (2 puntos) Encuentra una aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, expresada en coordenadas de la base canónica, cuya imagen sea $L(\{(1,2,3)\})$ y cuyo núcleo sea el subespacio $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+2y-z=0\}$.

Con la aplicación f encontrada, resuelve los dos siguientes apartados:

- b) (1 punto) Halla bases B y \tilde{B} de \mathbb{R}^3 tales que la matriz asociada a f en las bases B (en el espacio inicial) y \tilde{B} (en el espacio final) sea:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- c) (1 punto) Calcula la imagen por la aplicación traspuesta de f de la forma lineal $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^*$, dada por $\varphi(x,y,z) = x+2y-z$.

$$\text{Def: } \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{Im}(f) = L(\{(1,2,3)\}) \\ \text{Ker}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+2y-z=0\}$$

Lo primero es calcular una base para $\text{Ker}(f)$ que tendrá dos elementos, por ser dimensión 2.

$$B_{\text{Ker}(f)} = \{(-1,1,1), (1,0,1)\}$$

$$f(-1,1,1) = (0,0,0)$$

$$f(1,0,1) = (0,0,0)$$

$$f(0,0,1) = (1,2,3)$$

$$\text{Sea } B = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$$

$$-f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = 0$$

$$f(e_1) + f(e_3) = 0$$

$$f(e_3) = e_1 + e_2 + e_3$$

$$f(e_1) = -e_1 - e_2 - e_3$$

$$f(e_2) = -2e_1 - 2e_2 - 2e_3$$

$$f(1,0,0) = (-1, -1, -1)$$

$$f(0,1,0) = (-2, -2, -2)$$

$$f(0,0,1) = (1, 1, 1)$$

$$\mathcal{M}(f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad B = ((0,0,1), (-1,1,1), (1,0,1))$$

$$B' = ((1,2,3), (1,0,0), (0,1,0))$$

$$f(0,0,1) = (1,2,3)_{B'} = (1,0,0)_{B'}$$

$$f(-1,1,1) = (0,0,0)_{B'} = (0,0,0)_{B'}$$

$$f(1,0,1) = (0,0,0)_{B'} = (0,0,0)_{B'}$$

$$\mathcal{M}(f, B' \leftarrow B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c) \quad \mathcal{M}(f^T, \mathbb{R}^{3*}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(1, 2, -1) \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (-6, -6, -6)$$