

RELACIÓN 5

ESTADÍSTICA

DESCRIPTIVA E

INTRODUCCIÓN A LA

PROBABILIDAD



**UNIVERSIDAD
DE GRANADA**

David Muñoz Sánchez
Higinio Paterna Ortiz
Tomás Rodríguez Hernández
Mario Rubio Venzal
Hugo Teruel Muñoz

① Sea X una variable aleatoria con función masa de probabilidad $P(X=i) = k_i$, $i = 1, \dots, 20$.

a) Determinar el valor de k , la función de distribución y las probabilidades:

$$P(X=4), P(X < 4), P(3 \leq X \leq 10), P(3 < X \leq 10), P(3 < X < 10).$$

Para calcular el valor " k ", usaremos la definición de la función masa de probabilidad, sabiendo que:

$$\sum_{i=1}^{20} P[X = x_i] = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{20} P[X = x_i] = 1 \Leftrightarrow k \cdot \sum_{i=1}^{20} i = 1 \Leftrightarrow k \cdot 210 \Leftrightarrow k = \frac{1}{210}$$

Luego:

$$P(X=i) = \frac{1}{210} \cdot i, \forall i \in \{1, \dots, 20\}$$

Procedamos a calcular las probabilidades:

$$P(X=4) = \frac{1}{210} \cdot 4 = \frac{2}{105} = 0,019$$

$$P(X < 4) = \frac{1}{210} + \frac{2}{210} + \frac{3}{210} = \frac{6}{210} = \frac{1}{35} = 0,0286$$

$$P(3 \leq X \leq 10) = \frac{1}{210} \cdot \sum_{i=3}^{10} i = \frac{52}{210} = \frac{26}{105} = 0,2476$$

$$P(3 < X \leq 10) = \frac{1}{210} \cdot \sum_{i=4}^{10} i = \frac{49}{210} = \frac{7}{30} = 0,2333$$

$$P(3 < X < 10) = \frac{1}{210} \cdot \sum_{i=4}^9 i = \frac{78}{210} = \frac{13}{35} = 0,3714$$

\Rightarrow La función de distribución quedaría de la siguiente manera:

$$F_X(x) = F[X \leq x] = \sum_{i=1}^x \frac{i}{210}$$

b) Supongamos que un jugador gana 20 monedas si al observar esta variable obtiene un valor menor que 4, gana 24 monedas si obtiene el valor 4 y, en caso contrario, pierde una moneda. Calcular la ganancia esperada del jugador y decir si el juego le es favorable.

Primero debemos calcular las siguientes probabilidades:

$$P(X < 4) = \frac{1}{35} = 0,0286 ; \quad P(X = 4) = \frac{2}{105} = 0,019$$

$$P(X \geq 5) = \frac{1}{210} \cdot \sum_{i=5}^{20} i = \frac{200}{210} = 0,9523 .$$

Calculamos ahora la esperanza matemática de la variable aleatoria X:

$$E[X] = \sum_i x_i \cdot P[X = x_i] = \sum_{i=1}^3 x_i \cdot P[X = x_i] = \frac{20}{35} + \frac{48}{105} - \frac{20}{21}$$

$$E[X] = \frac{8}{105}$$

Como $E[X] > 0$, el juego le es favorable, siempre que su apuesta inicial sea menor a $8/105$.

2. Sea X el número de bolas blancas obtenidas al sacar dos de una urna con 10 bolas de las que 8 son blancas. Calcular:

- Función masa de probabilidad y función de distribución.
- Media, mediana y moda, dando la interpretación de cada una de estas medidas.
- Intervalo intercuartílico, especificando su interpretación.

Sea \underline{X} = "nº de bolas blancas obtenidas al sacar 2 de una urna con 10 bolas de las que 8 son blancas".

a)

- Primero calculamos la función masa de probabilidad:

Los posibles valores de la variable aleatoria \underline{X} son $\{0, 1, 2\}$

$$P(\underline{X}=0) = \frac{\binom{2}{2} \binom{8}{0}}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{45}$$

$$P(\underline{X}=1) = \frac{\binom{2}{1} \binom{8}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{16}{45} \quad \Rightarrow \quad P_{\underline{X}}(x) = P(\underline{X}=x) = \frac{\binom{2}{2-x} \cdot \binom{8}{x}}{\binom{10}{2}}$$

$$P(\underline{X}=2) = \frac{\binom{2}{0} \binom{8}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{28}{45}$$

- Calculamos ahora la función de distribución:

$$F_{\underline{X}}(x) = P(\underline{X} \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{45} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{17}{45} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

b)

- Calculamos la media de \underline{X} :

La media de \underline{X} viene dada por:

$$\mathbb{E}[\underline{X}] = \sum_{i=1}^3 x_i \cdot P[\underline{X}=x_i] = 0 \cdot \frac{1}{45} + 1 \cdot \frac{16}{45} + 2 \cdot \frac{28}{45} = 1,62 \simeq 2 \text{ bolas blancas se sacan.}$$

Por tanto, la media de \underline{X} será la suma de cada uno de los posibles valores de \underline{X} multiplicados por sus respectivas probabilidades.

- Calculamos la mediana de \bar{X} :

La mediana viene dada por:

$$M_e \in \mathbb{R} : P(\bar{X} \leq M_e) \geq \frac{1}{2} \wedge P(\bar{X} \geq M_e) \geq \frac{1}{2}$$

Es evidente que el valor que lo cumple es $X_i=2 \Rightarrow M_e(\bar{X})=2$

No nos aporta demasiada información, ya que nos dice que en una mitad saldrán 2 bolas blancas o menos y en la otra mitad exactamente 2 bolas.

- Calculamos la moda de \bar{X} :

La moda de \bar{X} es el valor que maximiza la función masa de probabilidad.

$$M_o(\bar{X}) = 2$$

c)

Vamos a considerar el intervalo o recorrido intercuartílico como $R = Q_3 - Q_1$.

$$Q_3 = 2, Q_1 = 1 \Rightarrow R = Q_3 - Q_1 = 2 - 1 = 1$$

Es en este intervalo donde se encuentra el 50% central de los datos.

3) $\bar{X} = \text{nº de lanzamientos de una moneda hasta salir cara.}$

$$P(\bar{X}=x) = 2^{-x}; \quad x=1, 2, \dots$$

a) ¿Está bien definido? Está bien definida $\Leftrightarrow \sum_x P(\bar{X}=x) = 1$

$$\sum_x P(\bar{X}=x) = \sum_x 2^{-x} = \frac{1/2}{1-1/2} = \frac{1/2}{1/2} = 1 \rightarrow \text{La función masa de probabilidad está bien definida.}$$

b) $P(4 \leq \bar{X} \leq 10) = \sum_{i=4}^{10} P(\bar{X}=i) = \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{10}} = \frac{127}{1024} = 0,124023$

c) - La moda será aquel valor de \bar{X} con mayor probabilidad, es decir: Moda = 1 (debido que $P(\bar{X}=x)$ es decreciente).

- Q_1 : ~~2/7~~ 1/2/2/1/4 porque $P[\bar{X}=1] = 1/2 > 1/4$

- Q_2 : 1 porque $P[\bar{X}=1] = 1/2$

- Q_3 : 2 porque $P[\bar{X}=2] = 1/4 + \underbrace{P[\bar{X}=1]}_{1/2} = 1/2 = 3/4$

d) $\sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{1}{2^x} = \frac{e^t/2}{1 - \frac{e^t}{2}} \quad \forall t \in [-\infty, \log 2]$

Media: $E[\bar{X}] = \frac{M'_x(t)}{m_1} = \frac{\frac{e^t}{2}(1 - \frac{e^t}{2}) - \frac{e^t}{2}(-\frac{e^t}{2})}{(1 - \frac{e^t}{2})^2} \rightarrow t=0 = 2 \text{ lanzamientos}$

$$\text{Var}(\bar{X}) = E[\bar{X}^2] - E[\bar{X}]^2 = m_2 - m_1^2$$

$$E[\bar{X}^2] = m_2 = \frac{d''M_x(t)}{dt} = \frac{2e^t(2-e^t)^2 + 4e^{2t}(2-e^t)}{(2-e^t)^4} \rightarrow t=0 = 6 \text{ lanzamientos}^2$$

$$\rightarrow \text{Var}(\bar{X}) = 6 - 2^2 = 2 \text{ lanzamientos}^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{2} \text{ lanzamientos.}$$

4. Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} k_1(x+1) & 0 \leq x \leq 4 \\ k_2x^2 & 4 < x \leq 6 \end{cases}$$

Sabiendo que $P(0 \leq X \leq 4) = 2/3$, determinar k_1 , k_2 , y deducir su función de distribución.

$$g(x) = \begin{cases} k_1(x+1) & 0 \leq x \leq 4 \\ k_2x^2 & 4 < x \leq 6 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

→ Fuera de los límites se determina que es 0.

$$P(0 \leq \bar{x} \leq u) = \frac{2}{3}$$

k_1 ? k_2 ? F. Distribución

$$\text{i}) g(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow k_1, k_2 \geq 0$$

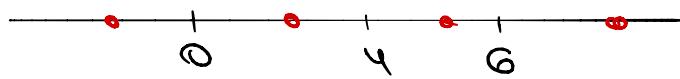
$$\text{ii}) \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^0 \cancel{0} dx + \int_0^4 k_1(x+1) dx + \int_4^6 k_2x^2 dx + \int_6^{+\infty} \cancel{0} dx = k_1 \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^4 + k_2 \frac{x^3}{3} \Big|_4^6 = 12k_1 + \frac{152}{3}k_2$$

$$P(0 \leq \bar{x} \leq 4) = \frac{2}{3} = \int_0^4 k_1(x+1) dx = k_1 \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^4 = 12k_1 = \frac{2}{3}$$

$$k_1 = \frac{1}{18}, \quad k_2 = \frac{1}{152}$$

Estos valores hacen que sea una función de densidad

$F(x) = P(X \leq x)$ Función distribución



$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{18} \int_0^x x+1 & 0 \leq x < 4 \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{152} \int_4^x 2 & 4 \leq x < 6 \\ 1 & x > 6 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{18} \left(\frac{x^2}{2} + x \right) & 0 \leq x < 4 \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{152} \frac{x^3 - 4^3}{3} & 4 \leq x < 6 \\ 1 & x > 6 \end{cases}$$

5. La dimensión en centímetros de los tornillos que salen de cierta fábrica es una variable aleatoria X , con función de densidad

$$f(x) = \frac{k}{x^2}, \quad 1 \leq x \leq 10.$$

- a) Determinar el valor de k , y obtener la función de distribución.
 - b) Hallar la probabilidad de que la dimensión de un tornillo esté entre 2 y 5 cm.
 - c) Determinar la dimensión máxima del 50 % de los tornillos con menor dimensión y la dimensión mínima del 5 % con mayor dimensión.
 - d) Si Y denota la dimensión de los tornillos producidos en otra fábrica, con la misma media y desviación típica que X , dar un intervalo en el que tome valores la variable Y con una probabilidad mínima de 0.99.
-

Sea \underline{X} = "La dimensión en centímetros de los tornillos que salen de cierta fábrica".

a)

Como tenemos que la función de densidad de \underline{X} es $f(x) = \frac{k}{x^2}$ si $1 \leq x \leq 10$ tenemos que $\int_1^{10} \frac{k}{x^2} dx = 1$

Por tanto:

$$\int_1^{10} \frac{k}{x^2} dx = 1 \Rightarrow k \int_1^{10} \frac{1}{x^2} dx = k \cdot \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^{10} = k \cdot \left(-\frac{1}{10} - \left(-\frac{1}{1} \right) \right) = k \cdot \left(1 - \frac{1}{10} \right) = \frac{k \cdot 9}{10} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{k = \frac{10}{9}}$$

• La función de distribución viene dada por:

$$F_{\underline{X}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \int_1^x \frac{10}{9x^2} & \text{si } 1 \leq x \leq 10 \\ 1 & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

b)

$$\begin{aligned} P(2 \leq x \leq 5) &= F_{\underline{X}}(5) - F_{\underline{X}}(2) = \int_1^5 \frac{10}{9x^2} - \int_1^2 \frac{10}{9x^2} = \left[\frac{10}{9} \cdot \left(-\frac{1}{x} \right) \right]_1^5 - \left[\frac{10}{9} \cdot \left(-\frac{1}{x} \right) \right]_1^2 = \\ &= \frac{10}{9} \cdot \left(-\frac{1}{5} - (-1) \right) - \frac{10}{9} \cdot \left(-\frac{1}{2} - (-1) \right) = \frac{10}{9} \cdot \frac{4}{5} - \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{40}{45} - \frac{10}{18} = \boxed{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

c) Calculamos la mediana:

$$P(\underline{X} \leq M_e) = 0,5 \Rightarrow \int_1^{M_e} \frac{10}{9x^2} = 0,5 \Rightarrow \left[\frac{10}{9} \cdot \left(-\frac{1}{x} \right) \right]_1^{M_e} = \frac{10}{9} \cdot \left(-\frac{1}{M_e} - (-1) \right) = \frac{10}{9} \cdot \left(-\frac{1}{M_e} + 1 \right)$$

$$\frac{10}{9} \cdot \left(-\frac{1}{M_e} + 1 \right) = \frac{1}{2} \Rightarrow +\frac{1}{M_e} = 0,55 \Rightarrow \boxed{M_e = 1,81}$$

- Calculamos el percentil 95:

$$P(\bar{X} \leq P_{95}) = 0,95 \Rightarrow \int_1^{P_{95}} \frac{10}{9x^2} = 0,95 \Rightarrow \left[\frac{10}{9} \cdot \left(-\frac{1}{x} \right) \right]_1^{P_{95}} = \frac{10}{9} \cdot \left(-\frac{1}{P_{95}} + 1 \right)$$

$$\frac{10}{9} \cdot \left(-\frac{1}{P_{95}} + 1 \right) = 0,95 \Rightarrow \frac{1}{P_{95}} = 0,145 \Rightarrow P_{95} = 6,89655$$

- d) Usando la desigualdad de Chebychev:

$$P(E[\bar{X}] - k\sqrt{\text{Var}(\bar{X})} < Y < E[\bar{X}] + k\sqrt{\text{Var}(\bar{X})}) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Tenemos que:

$$1 - \frac{1}{k^2} \geq 0,99 \rightarrow k \geq 10 \rightarrow \text{Para } k=10 :$$

$$P(E[\bar{X}] - k\sqrt{\text{Var}(\bar{X})} < Y < E[\bar{X}] + k\sqrt{\text{Var}(\bar{X})}) = 0,99$$

- Vamos a calcular las medias de \bar{X} e Y :

$$E[\bar{X}] = \int_1^{10} x \cdot \frac{10}{9x^2} dx = \frac{10}{9} [\log(x)]_1^{10} = \frac{10}{9} \log(10) = 2,5584$$

$$E[\bar{X}^2] = \int_1^{10} x^2 \cdot \frac{10}{9x^2} dx = \int_1^{10} \frac{10}{9} dx = \left[\frac{10x}{9} \right]_1^{10} = \frac{100}{9} - \frac{10}{9} = 10$$

- Calculamos ahora la varianza y desviación típica de \bar{X} :

$$\text{Var}[\bar{X}] = E[\bar{X}^2] - E[\bar{X}]^2 = 10 - (2,5584)^2 = 3,4558$$

$$\sqrt{\text{Var}[\bar{X}]} = 1,859$$

Sabemos que $E[\bar{X}] = E[Y]$ y $\sqrt{\text{Var}[\bar{X}]} = \sqrt{\text{Var}[Y]}$.

- Como $E[\bar{X}^2] = \int_1^{10} x^2 \cdot \frac{10}{9x^2} dx = 10 < +\infty$ es claro que $\exists E[\bar{X}^2]$ y por tanto podemos aplicar la desigualdad de Chebychev.

Por tanto, el intervalo es:

$$[0, E[Y] + 10\sqrt{\text{Var}[Y]}] = [0, 21,1484]$$

$$6- f(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{10} & 1 \leq x \leq 2 \\ 0,4 & 4 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

$$P(1,5 \leq X \leq 2) = \int_{1,5}^2 \frac{2x-1}{10} dx = \frac{1}{10} \left[x^2 - x \right]_{1,5}^2 = \frac{3,75 - 0,5}{10} = 0,125$$

$$P(2,5 \leq X \leq 3,5) = 0 \quad (\text{No density})$$

$$P(4,5 \leq X \leq 5,5) = \int_{4,5}^{5,5} 0,4 dx = [0,4x]_{4,5}^{5,5} = 0,4$$

$$P(1,2 \leq X \leq 5,2) = \int_{1,2}^2 \frac{2x-1}{10} dx + \int_{4}^{5,2} 0,4 dx = \frac{1}{10} (2,56 - 0,8) + 0,48 = 0,656$$

$$\text{b)} E[X] = \int_1^2 x \cdot \frac{2x-1}{10} dx + \int_4^6 0,4x dx =$$

$$= \frac{1}{10} \left[\left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \right]_1^2 + 0,4 \left[\frac{x^2}{2} \right]_4^6 = 0,31667 + 4 = 4,31667$$

$$\text{c)} M_x(t) = E[e^{tx}] = \int_0^2 e^{tx} \cdot \frac{2x-1}{10} dx + \int_4^6 e^{tx} 0,4 dx =$$

$$= \frac{1}{10} \left[\left(\frac{2xe^{tx}}{t} - \frac{2e^{tx}}{t^2} \right) \right]_1^2 - \left[\frac{e^{tx}}{t} \right]_1^2 + 0,4 \left[\frac{e^{tx}}{t} \right]_4^6 =$$

$$= \frac{1}{10} \left(\frac{3e^{2t} - e^t}{t} - \frac{2e^{2t}}{t^2} + \frac{2e^t}{t^2} \right) + \frac{0,4 e^{4t} (e^{2t} - 1)}{t}$$

7. Con objeto de establecer un plan de producción, una empresa ha estimado que la demanda de sus clientes, en miles de unidades del producto, se comporta semanalmente con arreglo a una ley de probabilidad dada por la función de densidad:

$$f(x) = \frac{3}{4}(2x - x^2), \quad 0 \leq x \leq 2.$$

- a) ¿Qué cantidad deberá tener dispuesta a la venta al comienzo de cada semana para poder satisfacer plenamente la demanda con probabilidad 0.5?
- b) Pasado cierto tiempo, se observa que la demanda ha crecido, estimándose que en ese momento se distribuye según la función de densidad:

$$f(y) = \frac{3}{4}(4y - y^2 - 3), \quad 1 \leq y \leq 3.$$

Los empresarios sospechan que este crecimiento no ha afectado a la dispersión de la demanda, ¿es cierta esta sospecha?

a) Sabemos que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \int_T^2 f(x) dx + \int_2^{+\infty} f(x) dx = 1$$

O, S O, S

Nos valdría cualquiera de los dos integrals que dan 0.5.

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} \int_T^2 (2x - x^2) dx &= -\frac{3}{4} \int_T^2 x^2 dx + \frac{3}{4} \int_T^2 2x dx = \\ &= -\frac{3}{4} \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_T^2 + \frac{6}{4} \frac{x^2}{2} \Big|_T^2 = -\frac{3}{4} \left(\frac{8}{3} - \frac{T^3}{3} \right) + \frac{6}{4} \left(2 - \frac{T^2}{2} \right) = \\ &= -\frac{24}{12} + \frac{3T^3}{12} + 3 - \frac{3T^2}{4} = 1 - \frac{3T^2}{4} + \frac{T^3}{4} \end{aligned}$$

$$\frac{T^3}{4} - \frac{3}{4} T^2 + 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{aligned} T &= 1 - \sqrt{3} \notin [0, 2] \\ T &= 1 + \sqrt{3} \notin [0, 2] \\ T &= s \in [0, 2] \end{aligned}$$

Deberán tener $\sqrt{3}$ mil unidades a la venta.

b) Vamos a calcular el coeficiente de variación de Pearson de ambas funciones de densidad

$$\Sigma x = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 x f(x) dx + \int_0^2 x f(x) dx + \int_2^{+\infty} x f(x) dx$$

$$= \frac{3}{4} \int_0^2 (2x^2 - x^3) dx = \frac{3}{4} \left| \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right|_0^2 = \left(\frac{3}{4} \right) \left(\frac{4}{3} \right) = 1$$

$$\Sigma y = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y) dy = \int_{-\infty}^1 y f(y) dy + \int_1^3 y f(y) dy + \int_3^{+\infty} y f(y) dy =$$

$$= \frac{3}{4} \int_1^3 (4y^2 - y^3 - 3y) dy = \frac{3}{4} \left(\frac{4y^3}{3} - \frac{y^4}{4} - \frac{3y^2}{2} \right)_1^3 =$$

$$= \frac{3}{4} \left(\frac{8}{3} \right) = 2$$

Tras calcular las esperanzas, calcular las varianzas.

$$\text{Var} = m_2 - m_1^2$$

$$\text{Var}(x) = \Sigma(x^2) - \Sigma(x)^2 = \frac{6}{5} - 1^2 = 0,2$$

$$\Sigma(x^2) = \int_0^2 x^2 f(x) dx = \frac{3}{4} \int_0^2 (2x^3 - x^4) dx =$$

$$= \frac{3}{4} \left(\frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{5} \right)_0^2 = \frac{3}{4} \left(\frac{8}{5} \right) = \frac{6}{5}$$

$$\Sigma(y^2) = \int_1^3 y^2 f(y) dy = \frac{3}{4} \int_1^3 (4y^3 - y^4 - 3y^2) dy =$$

$$= \frac{3}{4} (y^4 - \frac{y^5}{5} - y^3) \Big|_1^3 = \frac{3}{4} \left(\frac{21}{5} \right) = \frac{21}{5}$$

$$\text{Var}(y) = \frac{21}{5} - 2^2 = \frac{1}{5} = 0,2$$

$$CV_x = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} = + \frac{\sqrt{\sigma_{x^2}}}{\bar{x}} = 0,447$$

$$CV_y = \frac{\sigma_y}{\bar{y}} = + \frac{\sqrt{\sigma_{y^2}}}{\bar{y}} = 0,223$$

Como poseen distintos coeficientes de variación, podemos asegurar que el crecimiento se ha afectado a la dispersión de la demanda.

8. Calcular las funciones masa de probabilidad de las variables $Y = X + 2$ y $Z = X^2$, siendo X una variable aleatoria con distribución:

$$P(X = -2) = \frac{1}{5}, \quad P(X = -1) = \frac{1}{10}, \quad P(X = 0) = \frac{1}{5}, \quad P(X = 1) = \frac{2}{5}, \quad P(X = 2) = \frac{1}{10}.$$

¿Cómo afecta el cambio de X a Y en el coeficiente de variación?

$$\underline{X} \text{ r.a.} \quad Y = \underline{X} + 2 \quad Z = \underline{X}^2$$

x_i	p_i
-2	1/5
-1	1/10
0	1/5
1	2/5
2	1/10

a) $Y = \underline{X} + 2 \quad \Sigma \equiv \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$$\begin{array}{c|c} y_i & p'_i \\ \hline 0 & 1/5 \\ 1 & 1/10 \\ 2 & 1/5 \\ 3 & 2/5 \\ 4 & 1/10 \end{array} \quad \Sigma' = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$\begin{aligned} p'_i &= P(Y = y_i) = \sum_{x/h(x)=y} p_i = \\ &= P(\underline{X} = y_i - 2) \quad \forall y_i = 0, 1, 2, \dots, 4. \end{aligned}$$

b) $Z = \underline{X}^2 \quad \Sigma'' = \{0, 1, 4\}$

$$\begin{array}{c|c} z_i & p''_i \\ \hline 0 & 1/5 \\ 1 & 1/2 \\ 4 & 3/10 \end{array} \quad \begin{aligned} p''_i &= P(Z = z_i) = \\ &= \sum_{x/x^2=z_i} P(\underline{X} = x) = P(x=0) = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$P(Z = 1) = P(\underline{X} = -1) + P(\underline{X} = 1) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} P(Z = 4) &= P(\underline{X} = -2) + P(\underline{X} = 2) = \\ &= 3/10 \end{aligned}$$

Sabemos lo siguiente sobre la varianza y la esperanza.

$$Y = ax + b \Rightarrow E[Y] = aE[X] + b$$

$$\text{Var}[Y] = a^2 \text{Var}[x] \Rightarrow \sigma_y = a\sigma_x$$

En este caso $a=1$ y $b=2$

$$E[Y] = E[X] + 2$$

$$\sigma_y = \sigma_x$$

$$CV[Y] = \frac{\sigma_y}{E[Y]} = \frac{\sigma_x}{E[X] + 2}$$

Vamos a calcular $E[X]$

$$E[X] = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

$$E[X] = -\frac{2}{5} + \frac{-1}{10} + \frac{2}{5} + \frac{7}{10} = \frac{1}{10}$$

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

$$E[X^2] = \frac{4}{5} + \frac{1}{10} + \frac{2}{5} + \frac{4}{10} = \frac{17}{10}$$

$$\text{Var}[X] = \frac{17}{10} - \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{169}{100} = \text{Var}[Y]$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{169}{100}} = \frac{13}{10} = \sigma_y$$

$$E[Y] = \frac{1}{10} + 2 = \frac{21}{10}$$

$$CV(x) = \frac{13/10}{1/10} = 13 \quad CV(Y) = \frac{13/10}{21/10} = \frac{13}{21}$$

$$CV(Y) = \frac{1}{21} CV(x)$$

⑨ Calcular las funciones de densidad de las variables $Y = 2X + 3$ y $Z = |X|$, siendo X una variable continua con función de densidad:

$$f_X(x) = \frac{1}{4}, \quad -2 < x < 2.$$

$$x = \frac{y-3}{2} = h^{-1}(y), \quad y \in [-1, 7]$$

$$x = -2 \Rightarrow y = 1; \quad x = 2 \Rightarrow y = 7.$$

Sea:

$$g(y) = f(h^{-1}(y)) \cdot |(h^{-1})'(y)|, \quad \text{si } y \in [-1, 7]$$

$$g(y) = 0, \quad \text{otro caso}$$

$$g(y) = f\left(\frac{y-3}{2}\right) \cdot \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}, \quad \text{si } -1 < y < 7$$

Para $Z = |X|, z \in [0, 2]$: Al ser valor absoluto se tienen dos ramas:

$$g(z) = f(h^{-1}(z)) \cdot |(h^{-1})'(z)|$$

$$g_1(z) = f(x) \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

$$g_2(z) = f(-x) \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow g(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \quad \text{si } 0 \leq z < 2$$

10. Si X es una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}, \quad -\infty < x < \infty,$$

hallar su función de distribución y las probabilidades de los siguientes sucesos:

- a) $\{|X| \leq 2\}.$
- b) $\{|X| \leq 2 \text{ ó } X \geq 0\}.$
- c) $\{|X| \leq 2 \text{ y } X \leq -1\}.$
- d) $\{X^3 - X^2 - X - 2 \leq 0\}.$
- e) $\{X \text{ es irracional}\}.$

Al tener un valor absoluto, podemos dividir la función de densidad en dos trozos:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{e^{-x}}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Luego la función de distribución será:

$$F(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{2} dt & \text{Si } x < 0 \\ \int_{-\infty}^0 \frac{e^t}{2} dt + \int_0^x \frac{e^{-t}}{2} dt & \text{Si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^x \frac{e^t}{2} dt = \frac{1}{2} \left[e^t \right]_{-\infty}^x =$$

$$= \frac{1}{2} (e^x - e^{-\infty}) = \frac{1}{2} \left(e^x - \frac{1}{e^\infty} \right) = \frac{1}{2} e^x$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^t}{2} dt = \frac{1}{2} \left[e^t \right]_{-\infty}^0 = \frac{1}{2} \left(e^0 - \frac{1}{e^\infty} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^x \frac{e^{-t}}{2} dt = \frac{1}{2} \int_0^x e^{-t} dt = \frac{1}{2} (-e^{-t}) \Big|_0^x =$$

$$= \frac{1}{2} (-e^{-x} + e^0) = -\frac{e^{-x}}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^t}{2} dt + \int_0^x \frac{e^{-t}}{2} dt = \frac{1}{2} - \frac{e^{-x}}{2} + \frac{1}{2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} e^{-x}$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^x & \text{Si } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-x} & \text{Si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) $\{ |x| \leq 2 \}$

$$P(|X| \leq 2) = P(-2 \leq X \leq 2) =$$

$$= F(2) - F(-2) = 1 - \frac{1}{2} e^{-2} - \frac{1}{2} e^2 =$$

$$\approx 0,86467$$

$$b) \{ |X| \leq 2 \cap X \geq 0 \}$$

$$P((-2 \leq X \leq 2) \cap (X \geq 0)) =$$

$$= P(X \leq -2) = 1 - P(X < -2) = 1 - F(-2) \approx$$

$$= 1 - \frac{1}{2} e^{-2} \approx 0,93233$$

$$c) \{ |X| \leq 2 \wedge X \leq -1 \}$$

$$P((-2 \leq X \leq 2) \cap (X \leq -1)) \approx$$

$$= P(-2 \leq X \leq -1) = F(-1) - F(-2) =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-1} - \frac{1}{2} e^{-2} \approx 0,11627$$

d) $\{X^3 - X^2 - X - 2 \leq 0\}$

$$\begin{array}{r|rrrr}
& 1 & -1 & -1 & -2 \\
2 & & 2 & 2 & 2 \\
\hline
& 1 & 1 & 1 & 0
\end{array}$$

$$X^2 + X + 1 = 0$$

$$X = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \text{ No finite sol}$$

Luego funciones que calcular:

$$P(X \leq 2) = F(2) = 1 - \frac{1}{2} e^{-2} \approx 0,98233$$

e) $\{X \text{ es irracional}\}$

La probabilidad de que la variable aleatoria X tome un valor irracional es 1, debido a que los irracionales son un conjunto numerable, frente a los racionales que sí lo son, por lo que hay infinitamente más irracionales que racionales.

11. Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Encontrar la distribución de las variables:

$$a) Y = \frac{X}{1+X}.$$

$$b) Z = \begin{cases} -1, & X < 3/4 \\ 0, & X = 3/4 \\ 1, & X > 3/4. \end{cases}$$

a) Trazos que la función es obviaida $f > 0$
 $\forall x \in [0, 1]$.

Trazos $Y = h(x) = \frac{x}{1+x}$ Derivable en $[0, 1]$

$$Y' = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{1+x^2} > 0 \text{ estrictamente}$$

creciente en todo \mathbb{R} , en particular en $[0, 1]$

Por tanto $y = h(x)$ es una variable aleatoria con función de densidad.

$$g(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \notin h([0, 1]) = [0, \frac{1}{2}] \\ g(h^{-1}(y)) \cdot |(h^{-1})'(y)| & \text{si } y \in [0, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

$$y = \frac{x}{1+x} \Rightarrow y + yx = x$$

$$\begin{aligned} y &= x - yx \Rightarrow y = x(1-y) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = \frac{y}{1-y} \Rightarrow h^{-1}(y) \end{aligned}$$

$$(h^{-1})'(y) = \frac{1-y+y}{(1-y)^2} = \frac{1}{(1-y)^2}$$

$$|(h^{-1})'(y)| = \frac{1}{(y-1)^2}$$

$$g(h^{-1}(y)) = 1$$

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{(y-1)^2} & \text{si } y \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{si } y \notin [0, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

2) Tenemos el caso de cambio de variable de continua a discreta.

$Z = h(x)$, con valores en un conjunto numerable $h(A)$, $A \subset \mathbb{R}$, f toma valores en A .

$$\forall z \in h(A), P\{Z = z\} = \int_{\{x \in \mathbb{R} \mid h(x) = z\}} f(x) dx$$

$$P(Z = z) = 0 \quad \text{se } z \notin h(A)$$

La función masa de probabilidad de la v.a. discreta es:

$$P(Z = -1) = P(x < \frac{3}{4}) = \int_0^{3/4} f(x) dx = \int_0^{3/4} 1 dx =$$

$$= x \Big|_0^{3/4} = \frac{3}{4}$$

$$P(Z = 0) = 0$$

$$P(Z = 1) = P(x > \frac{3}{4}) = \int_{3/4}^1 f(x) dx = \frac{1}{4}$$

12. Sea X una variable aleatoria simétrica con respecto al punto 2, y con coeficiente de variación 1.

¿Qué puede decirse acerca de las siguientes probabilidades?:

- $P(-8 < X < 12)$

- $P(-6 < X < 10)$.

Si X es una variable aleatoria simétrica
alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$, de existir
 $E[X]$, su valor es α . Como en este caso
 $\alpha = 2$, tenemos que $E[X] = 2$. Además,
sabemos que $C.V(X) = 1$:

$$C.V(X) = \frac{\sigma_X}{E[X]}$$

$$\sigma_X = 1 \cdot 2 = 2$$



$$\sigma^2_X = 4 = \text{Var}(X)$$

a) $P(-8 < X < 12)$

Supongamos que este intervalo es de la forma $(E[X] - K, E[X] + K)$. Puesto que $E[X] = 2$, concluimos que $K = 10$.

Aplicando la desigualdad de Chebychev:

$$P(-8 < X < 12) \geq 1 - \frac{\text{Var}(X)}{K^2}$$

$$P(-8 < X < 12) \geq 1 - \frac{4}{100}$$

$$P(-8 < X < 12) \geq 0,96$$

b) $P(6 < X < 10)$

Supongamos que este intervalo se ha obtenido también de la forma $(E[X] - K, E[X] + K)$. Entonces $K = 8$.

Aplicando la desigualdad de Cheby舍v:

$$P(-6 < X < 10) \geq 1 - \frac{\text{Var}(X)}{K^2}$$

$$P(-6 < X < 10) \geq 1 - \frac{4}{64}$$

$$P(-6 < X < 10) \geq 0,984375$$