1. Sea $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas, reales, de orden dos. En él se consideran los vectores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea U el subespacio vectorial de V definido como

$$U = \{M \in V : \text{traza}(M \cdot A_1) = \text{traza}(M \cdot A_2) = 0\}$$

a) **(2 puntos)** Calcula dos subespacios vectoriales, U_1 y U_2, complementarios de U en V que, a su vez, sean complementarios entre sí en V.

b) **(2 puntos)** Calcula dos subespacios vectoriales, W_1 y W_2, complementarios de U en V, cuya intersección sea la recta generada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En este caso, calcula además el subespacio $W_1 + W_2$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

U subespacio vectorial de $V \Rightarrow \dim U \leq \dim V$

$$U = (M \in V : Tr(M \cdot A_1) = Tr(M \cdot A_2) = 0)$$

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \quad M \cdot A_1 = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x-y \\ z & z-t \end{pmatrix}$$

$$M \cdot A_2 = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y & \\ & 2z \end{pmatrix}$$

$$Tr(M \cdot A_1) = x + z - t$$
$$Tr(M \cdot A_2) = -x + y + 2z$$

$$\left.\begin{array}{l} x+z-t=0 \\ -x+y+2z=0 \end{array}\right\}$$ Nuestro subespacio tiene dimensión 2

Dejamos estas dos ecuaciones en función de z y t

$x = -z + t$

$+z+t+y+2z = 0 \Rightarrow y = -3z - t$

$B_U = \{(-1,-3,1,0),(1,-1,0,1)\}$

$B_U = \{(-1,-3,1,0),(1,-1,0,1)\}$

a) Tengo que buscar U_1, cuya base puesta en conjunto con B_U, de lugar a una base de $M_2(\mathbb{R})$, pero además que en conjunto con la base de U_2 también debe dar una base de $M_2(\mathbb{R})$

$U_1 = \langle\{(1,0,0,0),(0,1,0,0)\}$

$U_2 = \langle\{(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

e) $W_1 = \langle\{(1,1,1,1),(1,0,0,0)\}$

$W_2 = \langle\{(1,1,1,1),(0,0,0,1)\}$

$W_1 + W_2 = \langle(\{(1,1,1,1),(1,0,0,0),(1,1,1,1),(0,0,0,1)\}$

$Base = ((1,1,1,1),(0,0,0,1),(1,0,0,0))$

$\dim W_1 \cap W_2 = 1$

$\dim W_1 + W_2 = 3$

2. a) (~~2~~ 1 **puntos**) Encuentra una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, expresada en coordenadas de la base canónica, cuya imagen sea $L(\{(1,2,3)\})$ y cuyo núcleo sea el subespacio $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$.

Con la aplicación f encontrada, resuelve los dos siguentes apartados:

b) (**1 punto**) Halla bases B y $\bar{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tales que la matriz asociada a f en las bases B (en el espacio inicial) y $\bar{B}$ (en el espacio final) sea:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) (**1 punto**) Calcula la imagen por la aplicación traspuesta de f de la forma lineal $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^*$, dada por $\varphi(x,y,z) = x + 2y - z$.

2.a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad Im(f) = L(\{(1,2,3)\})$

$Ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$

Lo primero es calcular una base para $Ker(f)$ que tendrá dos elementos, por ser dimensión 2.

$B_{Ker(f)} = \{(-1,1,1), (1,0,1)\}$

$f(-1,1,1) = (0,0,0)$

$f(1,0,1) = (0,0,0)$

$f(0,0,1) = (1,2,3)$

Sea $B = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$

$-f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = 0$

$f(e_1) + f(e_3) = 0$

$f(e_3) = e_1 + e_2 + e_3$

$f(e_1) = -e_1 - e_2 - e_3$

$f(e_2) = -2e_1 - 2e_2 - 2e_3$

$f(1,0,0) = (-1,-1,-1)$

$f(0,1,0) = (-2,-2,-2)$

$f(0,0,1) = (1,1,1)$

$$M(f : Bu_{\mathbb{R}^3} \leftarrow Bu_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $B = ((0,0,1),(-1,1,1),(1,0,1))$

$B' = ((1,2,3),(1,0,0),(0,1,0))$

$f(0,0,1) = (1,2,3)_{Bu} = (1,0,0)_{B'}$

$f(-1,1,1) = (0,0,0)_{Bu} = (0,0,0)_{B'}$

$f(1,0,1) = (0,0,0)_{Bu} = (0,0,0)_{B'}$

$$M(f, B' \leftarrow B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) $M(f^t, Bu_{\mathbb{R}^{3*}}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$(1,2,-1)\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (-6,-6,-6)$$