

Sucesiones por recurrencia

3. Estudia la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ definida para todo $n \in \mathbb{N}$ por:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{3x_n + 4}{2x_n + 3}$$

Parcial 2019/2020

$$x_1 = 1 \quad x_{n+1} = \frac{3x_n + 4}{2x_n + 3} \quad x_n > 0$$

Sabemos que $x_2 = \frac{7}{5} > x_1 = 1$, todo parece apuntar a que nuestra sucesión es creciente, vamos a demostrarlo:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{3x_n + 4}{2x_n + 3} - x_n = \frac{3x_n + 4 - 2x_n^2 - 3x_n}{2x_n + 3} = \frac{-2x_n^2 + 4}{2x_n + 3} = \\ &= 2 \frac{2 - x_n^2}{2x_n + 3} \end{aligned}$$

$$\text{Para que } x_{n+1} - x_n > 0 \Leftrightarrow 2 - x_n^2 > 0 \Leftrightarrow 2 > x_n^2$$

$$x_n < \sqrt{2}$$

$$A = \{n \in \mathbb{N} : x_n < \sqrt{2}\}$$

$$1 \in A$$

$$n \in A \quad x_n < \sqrt{2}$$

$$x_{n+1} = \frac{3x_n + 4}{2x_n + 3} < \sqrt{2} \stackrel{DP}{\Leftrightarrow} 3x_n + 4 < \sqrt{2}(2x_n + 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x_n - 2\sqrt{2}x_n < 3\sqrt{2} - 4 \Leftrightarrow x_n < \frac{3\sqrt{2} - 4}{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Nuestra sucesión es creciente y está acotada por raíz de dos y, por tanto, converge.

$$l = \frac{3l + 4}{2l + 3} \Rightarrow 2l^2 + 3l - 3l - 4 = 0 \Rightarrow l = \sqrt{2}$$

2. Prueba que la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene tres soluciones reales. Para todo $n \in \mathbb{N}$ definamos

$$x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_{n+1} = \frac{1}{3 - x_n^2}$$

Prueba que $0 < x_n < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, que $\{x_n\}$ es convergente y que su límite es la única solución de dicha ecuación en el intervalo $]0, 1[$.

Segunda parte. Ej 3 Ordinario 2017/2018

$$x_1 = \frac{1}{3} \quad x_{n+1} = \frac{1}{3 - x_n^2}$$

Prueba que $0 < x_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y que $\{x_n\}$ es convergente

Para probar que $0 < x_n < 1$ procederé por inducción

Propongo $A = \{n \in \mathbb{N} : 0 < x_n < 1\}$. Como $0 < \underset{\substack{1 \\ 1 \\ 1/3}}{x_1} < 1$,

se verifica que $1 \in A$.

Supongamos que $n \in A$ y comprobemos $n+1$.

$$0 < \frac{1}{3 - x_n^2} < 1 \quad ??$$

$$0 < x_n < 1 \Rightarrow 0 < x_n^2 < 1 \Rightarrow 3 - x_n^2 > 2 \Rightarrow 0 < x_{n+1} = \frac{1}{3 - x_n^2} < \frac{1}{2} < 1$$

En consecuencia $n+1 \in A$.

Tramos nuestra sucesión acotada, vamos a probar la monotonía.

$$x_1 = \frac{1}{3} \quad x_2 = \frac{3}{8} \quad \frac{3}{8} > \frac{1}{3} \quad \text{Todo apunta a que será creciente.}$$

$$\text{Demostramos } 0 < x_n < x_{n+1} < 1 \Rightarrow x_n^2 < x_{n+1}^2 < 1 \Rightarrow 3 - x_n^2 > 3 - x_{n+1}^2 > 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3 - x_n^2} < \frac{1}{3 - x_{n+1}^2} \Rightarrow x_{n+1} < x_{n+2} \Rightarrow \text{La sucesión es estrictamente creciente y}$$

como está acotada por 1, converge

$$l = \frac{1}{3 - l^2} \Rightarrow l^3 - 3l + 1 = 0 \quad \text{Será la solución en }]0, 1[\text{ nuestro límite.}$$

2. Estudiar la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ definida por:

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{\sqrt{x_n} + 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ej 2 Ordinarios 2011/2013

$$x_1 = 2 \quad x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{\sqrt{x_n} + 1} \quad x_1 > 0 \quad \text{Suponemos } x_n > 0$$

$$x_{n+1} > 0 \text{ ya que } x_n + 1 > 0 \text{ y } \sqrt{x_n} + 1 > 0$$

$x_1 = 2 \quad x_2 = \frac{3}{\sqrt{2} + 1} < 2$. Tal como se ve que nuestra sucesión es decreciente, vamos a demostrarlo.

$$x_{n+1} - x_n < 0 \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{\sqrt{x_n} + 1} - x_n < 0 \Rightarrow \frac{x_{n+1} - x_n(\sqrt{x_n} + 1)}{\sqrt{x_n} + 1} < 0$$

Estudiamos el numerador $1 - x_n \sqrt{x_n} < 0$ (l.o.)
 $x_n \sqrt{x_n} > 1$?

Vamos a demostrar por inducción que $x_n \sqrt{x_n} > 1 \Rightarrow x_n > 1$

$$B = \{n \in \mathbb{N} : x_n > 1\}$$

$$x_1 > 1 \Rightarrow 1 \in B$$

$$x_n > 1 \Rightarrow n \in B$$

$$x_{n+1} > 1 \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{\sqrt{x_n} + 1} > 1 \Rightarrow \text{lo que siempre es verdad porque } x_n > \sqrt{x_n}$$

Como $x_n > 1 \Rightarrow x_n \sqrt{x_n} > 1$. Viendo (l.o.), vemos que nuestra sucesión es decreciente y que está acotada por 1, por tanto, converge.

$$\text{Sabemos por álgebra de límites que } l = \frac{l+1}{\sqrt{l}+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l\sqrt{l} + l = l + 1 \Rightarrow l\sqrt{l} = 1 \Rightarrow l = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$