GEOMETRÍA I. RELACIÓN DE PROBLEMAS 1

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1. Decidir cuáles de los siguientes sistemas de ecuaciones son lineales. Para los que lo sean, escribir la matriz de coeficientes y la matriz ampliada del sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+\sqrt{z} & = & 0 \\ y-z & = & 3x \\ x+y+z & = & 0 \end{array}\right. , \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x+y+2z & = & 0 \\ y-z & = & 35 \\ x+2y+3z & = & 2007 \end{array}\right. ,$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2z & = & -3y \\ \operatorname{sen}(2)z & = & 35-2x \\ y+x & = & \sqrt{3}z \end{array}\right. , \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 28 \\ z^2 & = & 35 \\ \operatorname{sen}(x)+\cos(y) & = & \operatorname{tg}(z) \end{array}\right. .$$

Solución: Los sistemas segundo y tercero (contando de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha) son de ecuaciones lineales. Los otros no. Las matrices de coeficientes y ampliada del segundo sistema son:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad (A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 35 \\ 1 & 2 & 3 & 2007 \end{array}\right).$$

Las matrices de coeficientes y ampliada del tercer sistema son:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & \operatorname{sen}(2) \\ 1 & 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad (A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & \operatorname{sen}(2) & 35 \\ 1 & 1 & -\sqrt{3} & 0 \end{array}\right).$$

2. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales escalonados:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t & = & 1 \\ y+z+t & = & 2 \\ z+t & = & 3 \end{array}\right. , \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & -z-t \\ y+z+t & = & 3 \end{array}\right. , \qquad \{x-y+10z=8 .$$

Solución: Todos son compatibles e indeterminados. Las soluciones del primero son:

$$x=-1, \quad y=-1, \quad z=3-\lambda, \quad t=\lambda, \qquad \lambda\in\mathbb{R}.$$

Las soluciones del segundo son:

$$x=-3,\quad y=3-\lambda-\mu,\quad z=\lambda,\quad t=\mu,\qquad \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

Las soluciones del tercero son:

$$x=8+\lambda-10\mu,\quad y=\lambda,\quad z=\mu,\qquad \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

3. Discutir y resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2x+2y+10z &=& 18\\ 2x+3y+12z &=& 23\\ 2y+5z &=& 11\end{array}\right.,\qquad \left\{\begin{array}{rcr} x+2y-3z &=& -1\\ 3x-y+2z &=& 1\\ 5x+3y-4z &=& 2\end{array}\right.,$$

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+2y-3z &=& 6\\ 2x-y+4z &=& 2\\ 4x+3y-2z &=& 14\end{array}\right.,\qquad \left\{\begin{array}{rcr} x-3y+4z-2t &=& 5\\ 2y+5z+t &=& 2\\ y-3z &=& 4\end{array}\right..$$

Solución: El primer sistema es compatible determinado con solución:

$$x=1,\quad y=3,\quad z=1.$$

El segundo sistema (el que está a la derecha del primero) es incompatible. El tercer sistema es compatible indeterminado con soluciones:

$$x=2-\lambda,\quad y=2+2\lambda,\quad z=\lambda,\qquad \lambda\in\mathbb{R}.$$

El último sistema es compatible indeterminado con soluciones:

$$x=\frac{157+17\lambda}{11},\quad y=\frac{26-3\lambda}{11},\quad z=\frac{-6-\lambda}{11},\quad t=\lambda,\qquad \lambda\in\mathbb{R}.$$

4. Discutir y resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rcr} -4y-z &=& -7\\ x+y+z &=& 2\\ x-2y+z &=& -2\\ -x+2y &=& 3\end{array}\right.,\qquad \left\{\begin{array}{rcr} y+z-2s+t &=& 2\\ x+2y+s &=& 7\\ 2x-y+z+4s+t &=& 0\end{array}\right..$$

Solución: El primer sistema es incompatible. El segundo es compatible indeterminado con soluciones:

$$x=\frac{5-7\lambda}{3},\quad y=\frac{8+2\lambda}{3},\quad z=\frac{-2+4\lambda-3\mu}{3},\quad s=\lambda,\quad t=\mu,\qquad \lambda\in\mathbb{R}.$$

5. Discutir y resolver, cuando sea posible, los sistemas de ecuaciones lineales siguientes en función de los parámetros a y b:

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+2y+z &=& 1 \\ -x-y+z &=& -2 \\ x+az &=& -1 \end{array}\right., \qquad \left\{\begin{array}{rcr} x+y+z &=& 1 \\ 3x+ay+az &=& 5 \\ 4x+ay &=& 5 \end{array}\right.,$$

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+t &=& a \\ x-2y+z &=& 1 \\ -x+y+az-t &=& 0 \end{array}\right., \qquad \left\{\begin{array}{rcr} az &=& b \\ y+z &=& 0 \\ x+ay+z &=& 0 \end{array}\right.,$$

$$\left\{\begin{array}{rcr} ax+y+z &=& 1 \\ x+ay+z &=& a \\ x+y+az &=& a^2 \end{array}\right., \qquad \left\{\begin{array}{rcr} x-3y+z &=& 1 \\ 2x-3z &=& a \\ x+y+2z &=& 0 \\ 2x+y-z &=& 1 \end{array}\right.,$$

$$\left\{\begin{array}{rcr} ax+y+z &=& 1 \\ x+y+z &=& b \\ ax+by+z &=& 1 \end{array}\right., \qquad \left\{\begin{array}{rcr} ax+y+z &=& 1 \\ x+y+z &=& 2 \end{array}\right..$$

Solución: Contaremos los sistemas de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha.

Primer sistema. Si $a=-3$ es incompatible. Si $a \neq -3$ es compatible determinado con solución:

$$x=\frac{3a-3}{a+3}, \quad y=\frac{5-a}{a+3}, \quad z=\frac{-4}{a+3}.$$

Segundo sistema. Si $a=0$ o $a=3$ es incompatible. Si $a \neq 0,3$ es compatible determinado con solución:

$$x=\frac{a-5}{a-3}, \quad y=\frac{a+5}{a(a-3)}, \quad z=\frac{a-5}{a(a-3)}.$$

Tercer sistema. Siempre es compatible indeterminado. Si $a=-1/2$ las soluciones son:

$$x=0, \quad y=\frac{\lambda-1}{2}, \quad z=\lambda, \quad t=\frac{-1}{2}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si $a \neq -1/2$ entonces las soluciones son:

$$x=a-\lambda, \quad y=\frac{a(a-\lambda)}{2a+1}, \quad z=\frac{a+\lambda+1}{2a+1}, \quad t=\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Cuarto sistema. Si $a=0$ y $b \neq 0$ es incompatible. Si $a=0$ y $b=0$ es compatible indeterminado con soluciones:

$$x=-\lambda, \quad y=-\lambda, \quad z=\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si $a \neq 0$ es compatible determinado con solución:

$$x = \frac{b(a-1)}{a}, \quad y = \frac{-b}{a}, \quad z = \frac{b}{a}.$$

Quinto sistema. Si $a = -2$ es incompatible. Si $a = 1$ es compatible indeterminado con soluciones:

$$x = 1 - \lambda - \mu, \quad y = \lambda, \quad z = \mu, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Si $a \neq -2, 1$ es compatible determinado con solución (tras varias simplificaciones):

$$x = -\frac{a+1}{a+2}, \quad y = \frac{1}{a+2}, \quad z = \frac{(a+1)^2}{a+2}.$$

Sexto sistema. Si $a \neq 29/19$ es incompatible. Si $a = 29/19$ es compatible determinado con solución:

$$x = \frac{10}{19}, \quad y = \frac{-4}{19}, \quad z = \frac{-3}{19}.$$

Séptimo sistema. Si $a = 1$ y $b \neq 1$ es incompatible. Si $a = 1$ y $b = 1$ es compatible indeterminado con soluciones:

$$x = 1 - \lambda - \mu, \quad y = \lambda, \quad z = \mu, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Si $a \neq 1$ y $b \neq 1$ es compatible determinado con solución:

$$x = \frac{b-1}{1-a}, \quad y = 0, \quad z = \frac{1-ab}{1-a}.$$

Si $a \neq 1$ y $b = 1$ es compatible indeterminado con soluciones:

$$x = 0, \quad y = 1 - \lambda, \quad z = \lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Octavo sistema. Si $a = 1$ es incompatible. Si $a \neq 1$ es compatible indeterminado con soluciones:

$$x = \frac{1}{1-a}, \quad y = \frac{1-2a}{1-a} - \lambda, \quad z = \lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

6. Las tres cifras de un número suman 21. Si a ese número se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras se obtiene 198. Se sabe también que la cifra de las decenas coincide con la media aritmética entre las otras dos. Calcular dicho número.

   Solución: El número buscado es el 876.

7. Dados tres puntos planos (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) de forma que sus primeras coordenadas son dos a dos distintas, probar que existe una única parabola $y = ax^2 + bx + c$ (incluyendo el caso límite de rectas, esto es, $a = 0$) cuya gráfica contiene a dichos puntos. ¿Qué parábola se obtiene para los puntos $(2,0)$, $(3,0)$ y $(-1,12)$?

   Solución: Queremos probar que hay una única parábola de tipo $y = c + bx + ax^2$ que pasa por (x_1,y_1), (x_2,y_2) y (x_3,y_3). Esto significa que los 3 puntos cumplen la ecuación de la parábola. Se llega así a un SEL con matriz ampliada:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & x_1 & x_1^2 & y_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & y_2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & y_3 \end{array}\right).$$

   Realizamos transformaciones elementales por filas hasta obtener un SEL escalonado. Como $x_1 \neq x_2$, $x_1 \neq x_3$ y $x_2 \neq x_3$, este SEL es compatible determinado, lo que concluye la primera parte. La segunda parte es un caso particular de la primera. Resolviendo el SEL se llega a la parábola $y = x^2 - 5x + 6$. Es inmediato comprobar que, efectivamente, esta parábola pasa por $(2,0)$, $(3,0)$ y $(-1,12)$.

8. Para la construcción de un almacén se necesita una unidad de hierro y ninguna de madera. Para la construcción de un piso se necesita una unidad de cada material y para la construcción de una torre se necesitan cuatro unidades de hierro y una de madera. Si poseemos en reserva 14 unidades de hierro y cuatro de madera, decidir cuántos almacenes, pisos y torres se pueden construir de manera que se utilicen todas las reservas.

   Solución: Hay 4 posibilidades, a saber:

   - 10 almacenes, 4 pisos y ninguna torre,
   - 7 almacenes, 3 pisos y una torre,
   - 4 almacenes, 2 pisos y 2 torres,
   - 1 almacén, un piso y 3 torres.

9. En un examen tipo test de 50 preguntas se dan 2 puntos por cada acierto y se quita medio punto por cada fallo. Para aprobar hay que obtener al menos 40 puntos y es obligatorio contestar a todas las preguntas. Si se quiere aprobar, ¿cuántas preguntas hay que contestar correctamente y cuántas se pueden fallar?

   Solución: Hay que acertar 26 y fallar 24.

10. En una ciudad los taxis cobran 1 euro por la bajada de bandera y 10 céntimos por cada 200 metros recorridos. En otra ciudad, la bajada de bandera es de 90 céntimos y por cada 200 metros que se recorran se cobran 12 céntimos. ¿Existe alguna distancia para la que coincidan los precios de las carreras en ambas ciudades?

    Solución: Hay exactamente una: 1 km. El precio sería $1'5$ euros en ambas ciudades.

11. ¿Existe un SEL con 2 ecuaciones y 3 incógnitas que sea compatible determinado? ¿Y si el SEL tiene 3 ecuaciones y 2 incógnitas?

    Solución: La respuesta a la primera cuestión es NO. Para ello hay que argumentar que, al aplicar el método de Gauss a cualquier SEL con 2 ecuaciones y 3 incógnitas, se llega siempre a un SEL escalonado que es incompatible o compatible indeterminado. La respuesta a la segunda cuestión es SÍ. Para construir un ejemplo, basta con tomar un SEL compatible determinado y añadir una ecuación que no aporte nada nuevo. Por ejemplo, el SEL:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y & = & 2 \\ x-y & = & 0 \\ 2x-2y & = & 0 \end{array} \right.$$

    es compatible determinado con solución $x = 1$, $y = 1$.