Cálculo I – Grupo B

Soluciones evaluación 31/10/2013

Ejercicio 1. Prueba que las sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ dadas para todo $n\in\mathbb{N}$ por:

$$x_1=1,\ \ x_{n+1}=\frac{5x_n+7}{x_n+5};\qquad y_1=1,\ \ y_{n+1}=\frac{2y_n+3}{5y_n+2}$$

son convergentes y calcula sus límites.

Solución. Tenemos que $x_{n+1}=f(x_n)$ donde $f(x)=\dfrac{5x+7}{x+5}$, es decir, $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ con $a=5$, $b=7, c=1, d=5$. Como $ad-bc=18>0$, sabemos que la función f es estrictamente creciente en cada uno de los intervalos $]-\infty,-5[$ y $]-5,+\infty[$. Es evidente que $f(\mathbb{R}^+)\subset\mathbb{R}^+$, $x_1=1\in\mathbb{R}^+$ y $\mathbb{R}^+\subset]-5,+\infty[$, por lo que podemos aplicar un resultado visto en clase[1] tomando $I=\mathbb{R}^+$. Como $x_2=2>x_1$ se verifica que la sucesión es estrictamente creciente. Además, es claro que si $x>0$ entonces

$$f(x)=\frac{5x+7}{x+5}<\frac{5(x+5)}{x+5}=5$$

por lo que la sucesión está mayorada y, al ser creciente, es convergente. Sea $\lim\{x_n\}=\ell$. Debe ser $\ell>0$, por lo que, aplicando los resultados conocidos de álgebra de límites, debe cumplirse la igualdad:

$$\ell=\frac{5\ell+7}{\ell+5}$$

de donde resulta $\ell=\sqrt{7}$.

Tenemos que $y_{n+1}=f(y_n)$ donde $f(y)=\dfrac{2y+3}{5y+2}$, es decir, $f(y)=\dfrac{ay+b}{cy+d}$ con $a=2$, $b=3$, $c=5, d=2$. Como $ad-bc=-11<0$, sabemos que la función f es estrictamente decreciente en cada uno de los intervalos $]-\infty,-2/5[$ y $]-2/5,+\infty[$. Es evidente que $f(\mathbb{R}^+)\subset\mathbb{R}^+$, $y_1=1\in\mathbb{R}^+$ y $\mathbb{R}^+\subset]-5,+\infty[$, por lo que podemos aplicar un resultado visto en clase[2] tomando $I=\mathbb{R}^+$. Como $y_1>y_3$ se sigue que la sucesión $\{y_{2n-1}\}$ es estrictamente decreciente y la sucesión $\{y_{2n}\}$ es estrictamente creciente. Puesto que para $y>0$ es $0<f(y)<2$, ambas son sucesiones acotadas y, al ser monótonas, convergen.

Sea $\alpha=\lim\{y_{2n-1}\}$, $\beta=\lim\{y_{2n}\}$. Tomando límites en las igualdades:

$$y_{2n+1}=\frac{2y_{2n}+3}{5y_{2n}+2},\qquad y_{2n}=\frac{2y_{2n-1}+3}{5y_{2n-1}+2}$$

[1] Sea I un intervalo y $f:I\to I$ una función verificando que f es estrictamente creciente en I y $f(I)\subset I$. Sea $a\in I$ y definamos una sucesión $\{x_n\}$ por $x_1=a$ y $x_{n+1}=f(x_n)$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Entonces si $x_1<x_2$ la sucesión $\{x_n\}$ es estrictamente creciente y si $x_1>x_2$ la sucesión $\{x_n\}$ es estrictamente decreciente.

[2] Sea I un intervalo y $f:I\to I$ una función verificando que f es estrictamente decreciente en I y $f(I)\subset I$. Sea $a\in I$ y definamos una sucesión $\{x_n\}$ por $x_1=a$ y $x_{n+1}=f(x_n)$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Entonces:

a) Si $x_1<x_3$ la sucesión $\{x_{2n-1}\}$ es estrictamente creciente y la sucesión $\{x_{2n}\}$ es estrictamente decreciente.

b) Si $x_1>x_3$ la sucesión $\{x_{2n-1}\}$ es estrictamente decreciente y la sucesión $\{x_{2n}\}$ es estrictamente creciente.

deducimos que:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{2\beta+3}{5\beta+2} \\[2ex] \beta = \dfrac{2\alpha+3}{5\alpha+2} \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{l} 5\alpha\beta+2\alpha = 2\beta+3 \\ 5\alpha\beta+2\beta = 2\alpha+3 \end{array}\right\} \implies 2(\alpha-\beta) = 2(\beta-\alpha) \implies \alpha = \beta$$

Concluimos que $\{x_n\}$ converge y su límite $\ell = \text{lím}\{x_n\}$ verifica que $\ell > 0$ y $\ell = \dfrac{2\ell+3}{5\ell+2}$. Obtenemos fácilmente que $\ell = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$. ☺

Comentario. Hemos hecho en clase ejercicios como este usando diferentes técnicas y en el archivo de ejercicios de sucesiones que puse en el SWAD hay ejemplos similares resueltos. La técnica seguida arriba es la más cómoda porque, al apoyarse en los resultados citados, ahorra algunos cálculos, pero, precisamente por eso, cuando la uses debes explicar lo que haces con claridad y con detalle. En particular, siempre que utilices un resultado visto en clase debes enunciarlo pues así queda claro que lo conoces y sabes aplicarlo en una situación concreta. Claro está, como hemos hecho en los días anteriores al examen ejercicios muy parecidos, a casi todos os suena lo que hay que hacer en este, pero muchos lo hacéis a mocosuena de forma descuidada e imprecisa. Ése es el principal fallo en este ejercicio. Hay otros errores: alguno se equivoca al copiar el ejercicio, otro se equivoca al resolver la ecuación $5\ell^2 - 3 = 0$. Me ha llamado la atención que muchos escriben $+\sqrt{7}$. Deben pensar que la raíz cuadrada de un número positivo puede tomar unas veces valores positivos y otras negativos; que se trata de una operación caprichosa y tontiloca que nunca se sabe qué valor va a tomar. ¿Qué vale $\sqrt{(-4)^2}$? ¿Vale 4? ¿Vale -4? Seguro que muchos lo dudan porque de otra forma no se entiende que escriban $+\sqrt{7}$ ¿Acaso escribes +12? ☹

Ejercicio 2. Calcula los límites de las sucesiones $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ y $\{z_n\}$ dadas para todo $n \in \mathbb{N}$ por:

$$x_n = \left(3\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}\right)^n, \quad y_n = \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{(5n)^{3n}}}, \quad z_n = n\left(\sqrt[5]{\frac{3n+12}{3n+7}} - 1\right)$$

Solución. $\{x_n\}$ es una sucesión de potencias $x_n = u_n^{v_n}$ donde $u_n = 3\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$ y $v_n = n$. Claramente $\{v_n\} \to +\infty$. Estudiemos el comportamiento de la sucesión $\{u_n\}$. Para ello como $u_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ donde $a_n = 3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)$ y $b_n = n^3$ y la sucesión $\{b_n\}$ es estrictamente creciente y divergente positivamente, podemos aplicar el criterio de Stolz. Tenemos que:

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{3(n+1)^2}{(n+1)^3-n^3} = \frac{3n^2+6n+3}{3n^2+3n+1} \to 1$$

y, por el citado criterio, deducimos que $\{u_n\} \to 1$. Por tanto la sucesión $\{x_n\}$ es una indeterminación del tipo 1^∞. Aplicaremos ahora el criterio de equivalencia logarítmica según el cual si $\{v_n(u_n-1)\} \to \ell$ entonces $\{x_n\} \to \mathrm{e}^\ell$. Tenemos:

$$v_n(u_n-1) = n\left(3\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3} - 1\right) = \frac{3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)-n^3}{n^2}$$

Para calcular el límite de la sucesión $v_n(u_n-1)=\dfrac{A_n}{B_n}$ con $A_n=3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)-n^3$ y $B_n=n^2$ usaremos el criterio de Stolz.

$$\frac{A_{n+1}-A_n}{B_{n+1}-B_n}=\frac{3(n+1)^2-(n+1)^3+n^3}{(n+1)^2-n^2}=\frac{3n+2}{2n+1}\to\frac{3}{2}$$

Concluimos que $\{v_n(u_n-1)\}\to 3/2$ y $\{x_n\}\to \mathrm{e}^{3/2}$.

La sucesión $y_n=\sqrt[n]{\dfrac{(3n)!}{(5n)^{3n}}}$ es del tipo $y_n=\sqrt[n]{z_n}$ donde $z_n=\dfrac{(3n)!}{(5n)^{3n}}$. Aplicaremos el criterio de la media geométrica que dice que si $\left\{\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right\}\to\ell$ entonces $\{y_n\}\to\ell$. Tenemos:

$$\frac{z_{n+1}}{z_n}=\frac{(3(n+1))!}{(5(n+1))^{3(n+1)}}\frac{(5n)^{3n}}{(3n)!}=\frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{5^3(n+1)^3}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{3n}$$

Como:

$$\frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{5^3(n+1)^3}\to\frac{3^3}{5^3},\qquad \left(\frac{n}{n+1}\right)^{3n}=\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}\right]^{-3}\to\mathrm{e}^{-3}$$

obtenemos que $\lim\dfrac{z_{n+1}}{z_n}=\lim\{y_n\}=\left(\dfrac{3}{5\,\mathrm{e}}\right)^3$.

Para el tercer límite podemos proceder usando las equivalencias asintóticas, válidas cuando $\{x_n\}\to 0$, $\mathrm{e}^{x_n}-1\sim x_n$ y $\log(1+x_n)\sim x_n$. Tenemos:

$$z_n=n\left(\sqrt[5]{\frac{3n+12}{3n+7}}-1\right)=n\left(\exp\left(\frac{1}{5}\log\frac{3n+12}{3n+7}\right)-1\right)\sim n\frac{1}{5}\log\frac{3n+12}{3n+7}=$$
$$=n\frac{1}{5}\log\left(1+\frac{5}{3n+7}\right)\sim\frac{1}{5}n\frac{5}{3n+7}\to\frac{1}{3}$$

También podemos proceder observando que la sucesión $z_n=n\left(\sqrt[5]{\dfrac{3n+12}{3n+7}}-1\right)$ es del tipo $z_n=v_n(u_n-1)$ donde $\{v_n\}=\{n\}\to+\infty$ y $\{u_n\}=\left\{\sqrt[5]{\dfrac{3n+12}{3n+7}}\right\}\to 1$. Podemos aplicar el criterio de equivalencia logarítmica que nos dice que si $\{u_n^{v_n}\}\to\mathrm{e}^{\ell}$ entonces $\{v_n(u_n-1)\}\to\ell$. Tenemos:

$$u_n^{v_n}=\sqrt[5]{\left(\frac{3n+12}{3n+7}\right)^n}=\sqrt[5]{\left(1+\frac{5}{3n+7}\right)^n}\to\mathrm{e}^{1/3}$$

Donde hemos usado que $\lim\left(1+\dfrac{5}{3n+7}\right)^n=\mathrm{e}^{5/3}$. Concluimos que $\lim\{z_n\}=\lim\{v_n(u_n-1)\}=\dfrac{1}{3}$. ☺

Comentario. Los errores de cálculo son los más frecuentes. El primer límite es muy parecido al 80)-f de los apuntes de la asignatura el cual está prácticamente resuelto en el archivo que subí al SWAD de ejercicios de sucesiones. El segundo límite es un caso particular del 80)-j de los apuntes de la asignatura el cual se hizo en clase dos días antes del examen. El tercer límite es muy parecido a otros que hemos hecho en clase usando las mismas equivalencias asintóticas ¿cuántas veces he dicho que escribáis las raíces como exponenciales?

Algunos errores frecuentes se deben a usar mal las equivalencias asintóticas. Por ejemplo, si $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ eso no permite afirmar que $\{x_n^n\} \sim \{y_n^n\}$. Por ejemplo $\{n+1\} \sim \{n\}$ pero $\{(n+1)^n\}$ no es asintóticamente equivalente a $\{n^n\}$ porque el cociente de dichas sucesiones no converge a 1 sino a e. Otro ejemplo: las sucesiones dadas por $x_n = \mathrm{e}^{1/\sqrt{n}}$ y $y_n = \mathrm{e}^{1/n}$ son asintóticamente equivalentes (ambas convergen a 1) pero $x_n^n = \mathrm{e}^{\sqrt{n}} \to +\infty$ no es asintóticamente equivalente a $y_n^n = \mathrm{e}$. Tampoco es cierto en general que si $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, y f es una función, se verifique que las sucesiones $\{f(x_n)\}$ y $\{f(y_n)\}$ sean asintóticamente equivalentes. Por ejemplo, las sucesiones dadas por $x_n = n^2 + n$, $y_n = n^2$ son asintóticamente equivalentes pero no lo son las sucesiones $\mathrm{e}^{x_n} = \mathrm{e}^{n^2+n}$ y $\mathrm{e}^{y_n} = \mathrm{e}^n$ cuyo cociente diverge positivamente. En resumen, ***las equivalencias asintóticas solamente pueden usarse para sustituir en un producto de varias sucesiones una de ellas por otra asintóticamente equivalente***. ☹

Ejercicio 3. Sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ sucesiones acotadas. Prueba que:

$$\underline{\text{lím}}\{x_n\} + \overline{\text{lím}}\{y_n\} \leqslant \overline{\text{lím}}\{x_n + y_n\} \tag{1}$$

Y, supuesto que $x_n \geqslant 0$ e $y_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, prueba que:

$$\underline{\text{lím}}\{x_n y_n\} \leqslant \underline{\text{lím}}\{x_n\}\, \overline{\text{lím}}\{y_n\} \tag{2}$$

Prueba con un ejemplo que las desigualdades (1) y (2) pueden ser estrictas.

Solución. Para la primera desigualdad pongamos $z_n = x_n + y_n$ y

$$X_n = \{x_k : k \geqslant n\},\ \alpha_n = \text{ínf}(X_n), \quad Y_n = \{y_k : k \geqslant n\},\ \beta_n = \sup(Y_n), \quad Z_n = \{z_k : k \geqslant n\},\ \gamma_n = \sup(Z_n)$$

Para todo $k \geqslant n$ tenemos que $\alpha_n + y_k \leqslant x_k + y_k = z_k \leqslant \gamma_n$, de donde $y_k \leqslant \gamma_n - \alpha_n$. Esta ultima desigualdad, válida para todo $k \geqslant n$, nos dice que el número $\gamma_n - \alpha_n$ es un mayorante del conjunto Y_n y por tanto será mayor o igual que el mínimo mayorante de dicho conjunto, es decir $\beta_n \leqslant \gamma_n - \alpha_n$ o, lo que es igual, $\alpha_n + \beta_n \leqslant \gamma_n$. Tomando límites se obtiene la desigualdad (1).

Para la segunda desigualdad pongamos además $w_n = x_n y_n$ y

$$W_n = \{w_k : k \geqslant n\},\ \delta_n = \text{ínf}(W_n)$$

Teniendo en cuenta que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $y_n \geqslant 0$, se sigue que si para algún $n \in \mathbb{N}$ es $\beta_n = 0$ entonces se tiene que $y_k = 0$ para todo $k \geqslant n$ y la desigualdad (2) se cumple de manera evidente. Supondremos, pues, que $\beta_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como para todo $k \geqslant n$ es $y_k \leqslant \beta_n$ y $x_k \geqslant 0$, se sigue que $\delta_n \leqslant w_k = x_k y_k \leqslant x_k \beta_n$, es decir $\dfrac{\delta_n}{\beta_n} \leqslant x_k$. Esta ultima desigualdad, válida para todo $k \geqslant n$, nos dice que el número $\dfrac{\delta_n}{\beta_n}$ es un minorante del conjunto X_n y por tanto será menor o igual que el máximo minorante de dicho conjunto, es decir, $\dfrac{\delta_n}{\beta_n} \leqslant \alpha_n$ o, lo que es igual, $\delta_n \leqslant \alpha_n \beta_n$. Tomando límites se obtiene la desigualdad (2).

Para las sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ dadas por $x_{2n-1}=1$, $x_{2n}=2$, $y_{2n-1}=2$, $y_{2n}=3$ se tiene que:

$$\underline{\lim}\{x_n\}=1,\quad \overline{\lim}\{y_n\}=3,\quad \overline{\lim}\{x_n+y_n\}=5,\quad \underline{\lim}\{x_n y_n\}=2$$

☺

Comentario. Casi nadie ha hecho bien este ejercicio a pesar de que, para quien sepa escuchar, en clase quedó claro que se iba a preguntar en el examen algo relacionado con los límites superior e inferior e hicimos en clase un ejercicio parecido. Muchos intentan hacer el ejercicio sin ni siquiera saber cómo se definen dichos límites y, claro está, cometen disparates asombrosos. Os informo que los disparates pueden quitar puntos. Es preferible no escribir nada a escribir cosas a barullo y sin sentido. Muchos hacéis con las desigualdades lo que os da la gana, parece que todo vale para lograr vuestro propósito. Incluso hay quien, en un alarde de ingenio, inventa palabras como *Minínfimo* o *Maxsupremo*. Esa forma de proceder da muy mala impresión, en matemáticas no todo vale.

Un error frecuente es pensar que se verifican las desigualdades $\underline{\lim}\{x_n\}\leqslant x_n\leqslant\overline{\lim}\{x_n\}$. Eso no tiene por qué ser así. Por ejemplo, para la sucesión $\{x_n\}$ dada por $x_{2n-1}=2+1/n$, $x_{2n}=1-1/n$ se tiene que $\underline{\lim}\{x_n\}=1$ y $\overline{\lim}\{x_n\}=2$ pero para todo $n\in\mathbb{N}$ se tiene que $x_{2n}<1$ y $2<x_{2n-1}$.

Finalmente, la pregunta de teoría fue la más corta y la más sencilla que se podía proponer. Pues bastantes no la responden bien. Hay afirmaciones divertidas como, por ejemplo, que *el número* e *es un número real estrictamente creciente* o que *el número* e *se usa para denotar el ¡¡límite de una sucesión acotada no convergente!!*. Habéis leído bien. Eso lo ha escrito uno de vosotros. ¿A que es insuperable? ☹