Ejercicio 13.8

1) $\int_0^\infty x^k \cdot e^{-x}\,dx = k! \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Voy a intentar probarlo por inducción ya que tenemos que demostrar que la igualdad se cumple $\forall k \in \mathbb{N}$

$k=1$

$$\int_0^\infty x e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b x e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b x e^{-x}\,dx \quad (*)$$

$(*)$

$$\int x e^{-x}\,dx = -x e^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -x e^{-x} - e^{-x}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ v = -e^{-x} & dv = e^{-x}dx \end{array}}$$

Luego si continuamos $\lim_{b\to\infty}\int_0^b x e^{-x}\,dx =$

$$\lim_{b\to\infty}\left[-x e^{-x} - e^{-x}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty} \underbrace{-be^{-b}}_{\downarrow 0} - \underbrace{e^{-b}}_{\downarrow 0} + 1 =$$

Luego $\lim_{b\to\infty} -be^{-b} - e^{-b} + 1 = 1 = 1!$

$$\boxed{\int_0^\infty x e^{-x}\,dx = 1!}$$

Ahora suponemos que se verifica para k

$$\boxed{\int_0^\infty x^k \cdot e^{-x}\, dx = k!}$$ ← Hip inducción

Probemos que se verifica para $n = k+1$ es decir:

$$\int_0^\infty x^{k+1} \cdot e^{-x} dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b (k+1)!$$

$$\int_0^\infty x^{k+1} \cdot e^{-x} dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b x^{k+1} e^{-x} dx$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= x^{k+1} \\ du &= (k+1) \cdot x^k dx \\ v &= -e^{-x} \\ dv &= e^{-x} dx \end{aligned}}$$

Integral por partes

$$\int x^{k+1} e^{-x} dx = -x^{k+1} e^{-x} + (k+1) \int_0^b x^k e^{-x} dx$$

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b x^{k+1} e^{-x} dx = \lim_{b\to\infty} \left(-x^{k+1} \cdot e^{-x} \right]_0^b +$$

$$(k+1) \cdot \int_0^b x^k \cdot e^{-x} dx \Big) =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \underbrace{(-x^{b+1} \cdot e^{-b})}_{0} + (k+1) \lim_{b\to\infty} \int_0^b x^k e^{-x} dx$$

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b x^k e^{-x} dx = k! \Big\}$$ Hip inducción

$$= 0 + (k+1)k! = (k+1)!$$