Cambio de variable continuo

Cambio de variable continuo

A diferencia del caso discreto, una variable de tipo continuo puede ser transformada en variables no necesariamente del mismo tipo.

Cambio de variable continuo

A diferencia del caso discreto, una variable de tipo continuo puede ser transformada en variables no necesariamente del mismo tipo.

Ejemplo 1: *Sea X una variable aleatoria de tipo continuo, con función de densidad*

$$f_X(x) = \frac{1}{2}, \quad -1 < x < 1.$$

Vamos a analizar distintas transformaciones de esta variable, que toma valores en $(-1, 1)$.

Cambio de variable continuo

A diferencia del caso discreto, una variable de tipo continuo puede ser transformada en variables no necesariamente del mismo tipo.

Ejemplo 1: *Sea X una variable aleatoria de tipo continuo, con función de densidad*

$$f_X(x) = \frac{1}{2}, \quad -1 < x < 1.$$

Vamos a analizar distintas transformaciones de esta variable, que toma valores en $(-1, 1)$.

$a)$ $Y_1 = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ 1 & X \geq 0. \end{cases}$

Cambio de variable continuo

A diferencia del caso discreto, una variable de tipo continuo puede ser transformada en variables no necesariamente del mismo tipo.

Ejemplo 1: *Sea X una variable aleatoria de tipo continuo, con función de densidad*

$$f_X(x) = \frac{1}{2}, \quad -1 < x < 1.$$

Vamos a analizar distintas transformaciones de esta variable, que toma valores en $(-1, 1)$.

a) $Y_1 = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ 1 & X \geq 0. \end{cases}$

Ya que Y_1 sólo toma los valores 0 y 1, es una variable de tipo discreto y su distribución está determinada por su función masa de probabilidad, que calculamos a continuación:

Cambio de variable continuo

A diferencia del caso discreto, una variable de tipo continuo puede ser transformada en variables no necesariamente del mismo tipo.

Ejemplo 1: *Sea X una variable aleatoria de tipo continuo, con función de densidad*

$$f_X(x) = \frac{1}{2}, \quad -1 < x < 1.$$

Vamos a analizar distintas transformaciones de esta variable, que toma valores en $(-1, 1)$.

a) $Y_1 = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ 1 & X \geq 0. \end{cases}$

Ya que Y_1 sólo toma los valores 0 y 1, es una variable de tipo discreto y su distribución está determinada por su función masa de probabilidad, que calculamos a continuación:

- $P(Y_1 = 0) = P(X < 0) = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}.$

Cambio de variable continuo

A diferencia del caso discreto, una variable de tipo continuo puede ser transformada en variables no necesariamente del mismo tipo.

Ejemplo 1: *Sea X una variable aleatoria de tipo continuo, con función de densidad*

$$f_X(x) = \frac{1}{2}, \quad -1 < x < 1.$$

Vamos a analizar distintas transformaciones de esta variable, que toma valores en $(-1, 1)$.

a) $Y_1 = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ 1 & X \geq 0. \end{cases}$

Ya que Y_1 sólo toma los valores 0 y 1, es una variable de tipo discreto y su distribución está determinada por su función masa de probabilidad, que calculamos a continuación:

- $P(Y_1 = 0) = P(X < 0) = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}.$
- $P(Y_1 = 1) = P(X \geq 0) = 1 - P(X < 0) = \frac{1}{2}.$

Cambio de variable continuo

A diferencia del caso discreto, una variable de tipo continuo puede ser transformada en variables no necesariamente del mismo tipo.

Ejemplo 1: *Sea X una variable aleatoria de tipo continuo, con función de densidad*

$$f_X(x) = \frac{1}{2}, \quad -1 < x < 1.$$

Vamos a analizar distintas transformaciones de esta variable, que toma valores en $(-1, 1)$.

a) $Y_1 = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ 1 & X \geq 0. \end{cases}$

Ya que Y_1 sólo toma los valores 0 y 1, es una variable de tipo discreto y su distribución está determinada por su función masa de probabilidad, que calculamos a continuación:

- $P(Y_1 = 0) = P(X < 0) = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}.$
- $P(Y_1 = 1) = P(X \geq 0) = 1 - P(X < 0) = \frac{1}{2}.$

b) $Y_2 = |X|.$

Cambio de variable continuo

A diferencia del caso discreto, una variable de tipo continuo puede ser transformada en variables no necesariamente del mismo tipo.

Ejemplo 1: *Sea X una variable aleatoria de tipo continuo, con función de densidad*

$$f_X(x) = \frac{1}{2}, \quad -1 < x < 1.$$

Vamos a analizar distintas transformaciones de esta variable, que toma valores en $(-1, 1)$.

a) $Y_1 = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ 1 & X \geq 0. \end{cases}$

Ya que Y_1 sólo toma los valores 0 y 1, es una variable de tipo discreto y su distribución está determinada por su función masa de probabilidad, que calculamos a continuación:

- $P(Y_1 = 0) = P(X < 0) = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}.$
- $P(Y_1 = 1) = P(X \geq 0) = 1 - P(X < 0) = \frac{1}{2}.$

b) $Y_2 = |X|.$

Esta variable toma valores en el intervalo $[0, 1)$ y, por lo tanto, no es de tipo discreto. Analicemos su función de distribución, $F_{Y_2}(y) = P(Y_2 \leq y)$:

Cambio de variable continuo

A diferencia del caso discreto, una variable de tipo continuo puede ser transformada en variables no necesariamente del mismo tipo.

Ejemplo 1: *Sea X una variable aleatoria de tipo continuo, con función de densidad*

$$f_X(x) = \frac{1}{2}, \quad -1 < x < 1.$$

Vamos a analizar distintas transformaciones de esta variable, que toma valores en $(-1, 1)$.

a) $Y_1 = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ 1 & X \geq 0. \end{cases}$

Ya que Y_1 sólo toma los valores 0 y 1, es una variable de tipo discreto y su distribución está determinada por su función masa de probabilidad, que calculamos a continuación:

- $P(Y_1 = 0) = P(X < 0) = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}.$
- $P(Y_1 = 1) = P(X \geq 0) = 1 - P(X < 0) = \frac{1}{2}.$

b) $Y_2 = |X|.$

Esta variable toma valores en el intervalo $[0, 1)$ y, por lo tanto, no es de tipo discreto. Analicemos su función de distribución, $F_{Y_2}(y) = P(Y_2 \leq y)$:

- Si $y < 0$, $\ P(Y_2 \leq y) = 0$ ya que Y_2 no toma valores negativos.

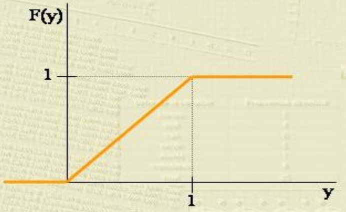
- Si $y \geq 1$, $P(Y_2 \leq y) = 1$ ya que Y_2 siempre toma valores menores o iguales que 1.

- Si $y \geq 1$, $P(Y_2 \leq y) = 1$ ya que Y_2 siempre toma valores menores o iguales que 1.
- Si $0 \leq y < 1$, $P(Y_2 \leq y) = P(|X| \leq y) = P(-y \leq X \leq y) = \int_{-y}^{y} \frac{1}{2} dx = y.$

- Si $y \geq 1$, $P(Y_2 \leq y) = 1$ ya que Y_2 siempre toma valores menores o iguales que 1.
- Si $0 \leq y < 1$, $P(Y_2 \leq y) = P(|X| \leq y) = P(-y \leq X \leq y) = \int_{-y}^{y} \frac{1}{2} dx = y.$

Así, la función de distribución es

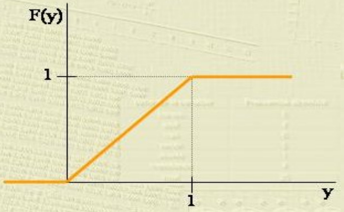
$$F_{Y_2}(y) = \begin{cases} 0 & y \in (-\infty, 0] \\ y & y \in [0, 1] \\ 1 & y \in (1, +\infty) \end{cases}$$



- Si $y \geq 1$, $P(Y_2 \leq y) = 1$ ya que Y_2 siempre toma valores menores o iguales que 1.
- Si $0 \leq y < 1$, $P(Y_2 \leq y) = P(|X| \leq y) = P(-y \leq X \leq y) = \int_{-y}^{y} \frac{1}{2} dx = y.$

Así, la función de distribución es

$$F_{Y_2}(y) = \begin{cases} 0 & y \in (-\infty, 0] \\ y & y \in [0, 1] \\ 1 & y \in (1, +\infty) \end{cases}$$



y, por lo tanto, Y_2 es una variable de tipo continuo, con función de densidad

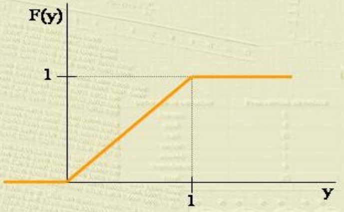
$$f_{Y_2}(y) = 1, \; 0 < y < 1.$$

- Si $y \geq 1, \quad P(Y_2 \leq y) = 1$ ya que Y_2 siempre toma valores menores o iguales que 1.

- Si $0 \leq y < 1, \quad P(Y_2 \leq y) = P(|X| \leq y) = P(-y \leq X \leq y) = \int_{-y}^{y} \frac{1}{2} dx = y.$

Así, la función de distribución es

$$F_{Y_2}(y) = \begin{cases} 0 & y \in (-\infty, 0] \\ y & y \in [0, 1] \\ 1 & y \in (1, +\infty) \end{cases}$$



y, por lo tanto, Y_2 es una variable de tipo continuo, con función de densidad

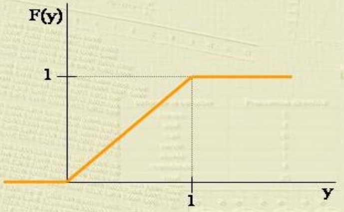
$$f_{Y_2}(y) = 1, \; 0 < y < 1.$$

c) $Y_3 = \begin{cases} X & X < 0 \\ 1 & X \geq 0. \end{cases}$

- Si $y \geq 1$, $P(Y_2 \leq y) = 1$ ya que Y_2 siempre toma valores menores o iguales que 1.
- Si $0 \leq y < 1$, $P(Y_2 \leq y) = P(|X| \leq y) = P(-y \leq X \leq y) = \int_{-y}^{y} \frac{1}{2} dx = y.$

Así, la función de distribución es

$$F_{Y_2}(y) = \begin{cases} 0 & y \in (-\infty, 0] \\ y & y \in [0, 1] \\ 1 & y \in (1, +\infty) \end{cases}$$



y, por lo tanto, Y_2 es una variable de tipo continuo, con función de densidad

$$f_{Y_2}(y) = 1, \; 0 < y < 1.$$

c) $Y_3 = \begin{cases} X & X < 0 \\ 1 & X \geq 0. \end{cases}$

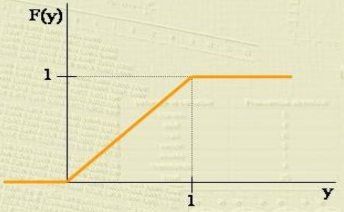
La variable Y_3 toma valores en el conjunto $(-1, 0) \cup \{1\}$. Calculamos su función de distribución:

- Si $y \geq 1$, $P(Y_2 \leq y) = 1$ ya que Y_2 siempre toma valores menores o iguales que 1.

- Si $0 \leq y < 1$, $P(Y_2 \leq y) = P(|X| \leq y) = P(-y \leq X \leq y) = \int_{-y}^{y} \frac{1}{2} dx = y.$

Así, la función de distribución es

$$F_{Y_2}(y) = \begin{cases} 0 & y \in (-\infty, 0] \\ y & y \in [0, 1] \\ 1 & y \in (1, +\infty) \end{cases}$$



y, por lo tanto, Y_2 es una variable de tipo continuo, con función de densidad

$$f_{Y_2}(y) = 1, \; 0 < y < 1.$$

c) $Y_3 = \begin{cases} X & X < 0 \\ 1 & X \geq 0. \end{cases}$

La variable Y_3 toma valores en el conjunto $(-1, 0) \cup \{1\}$. Calculamos su función de distribución:

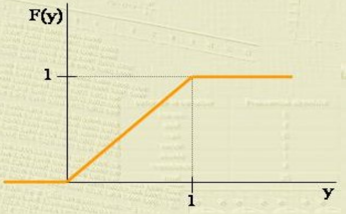
- Si $y < -1$, $P(Y_3 \leq y) = 0$ ya que el mínimo valor de Y_3 es -1.

- Si $y \geq 1$, $P(Y_2 \leq y) = 1$ ya que Y_2 siempre toma valores menores o iguales que 1.

- Si $0 \leq y < 1$, $P(Y_2 \leq y) = P(|X| \leq y) = P(-y \leq X \leq y) = \int_{-y}^{y} \frac{1}{2} dx = y.$

Así, la función de distribución es

$$F_{Y_2}(y) = \begin{cases} 0 & y \in (-\infty, 0] \\ y & y \in [0,1] \\ 1 & y \in (1, +\infty) \end{cases}$$



y, por lo tanto, Y_2 es una variable de tipo continuo, con función de densidad

$$f_{Y_2}(y) = 1, \; 0 < y < 1.$$

c) $Y_3 = \begin{cases} X & X < 0 \\ 1 & X \geq 0. \end{cases}$

La variable Y_3 toma valores en el conjunto $(-1,0) \cup \{1\}$. Calculamos su función de distribución:

- Si $y < -1$, $P(Y_3 \leq y) = 0$ ya que el mínimo valor de Y_3 es -1.

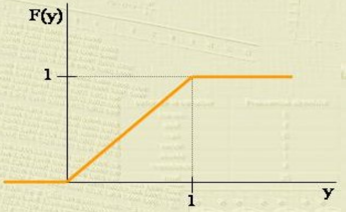
- Si $y \geq 1$, $P(Y_3 \leq y) = 1$ ya que el máximo valor de Y_3 es 1.

- Si $y \geq 1$, $P(Y_2 \leq y) = 1$ ya que Y_2 siempre toma valores menores o iguales que 1.

- Si $0 \leq y < 1$, $P(Y_2 \leq y) = P(|X| \leq y) = P(-y \leq X \leq y) = \int_{-y}^{y} \frac{1}{2} dx = y.$

Así, la función de distribución es

$$F_{Y_2}(y) = \begin{cases} 0 & y \in (-\infty, 0] \\ y & y \in [0, 1] \\ 1 & y \in (1, +\infty) \end{cases}$$



y, por lo tanto, Y_2 es una variable de tipo continuo, con función de densidad

$$f_{Y_2}(y) = 1, \; 0 < y < 1.$$

c) $Y_3 = \begin{cases} X & X < 0 \\ 1 & X \geq 0. \end{cases}$

La variable Y_3 toma valores en el conjunto $(-1, 0) \cup \{1\}$. Calculamos su función de distribución:

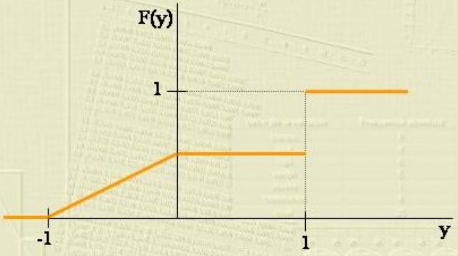
- Si $y < -1$, $P(Y_3 \leq y) = 0$ ya que el mínimo valor de Y_3 es -1.
- Si $y \geq 1$, $P(Y_3 \leq y) = 1$ ya que el máximo valor de Y_3 es 1.
- Si $-1 \leq y < 0$, $P(Y_3 \leq y) = P(X \leq y) = \int_{-1}^{y} \frac{1}{2} dx = \frac{y+1}{2}.$

- Si $0 \leq y < 1$, $\quad P(Y_3 \leq y) = P(Y_3 \leq 0) = P(X < 0) = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}.$

- Si $0 \leq y < 1$, $P(Y_3 \leq y) = P(Y_3 \leq 0) = P(X < 0) = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}$.

Por lo tanto, la función de distribución es

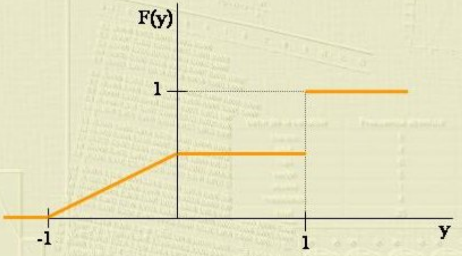
$$F_{Y_3}(y) = \begin{cases} 0 & y \in (-\infty, -1) \\ \frac{y+1}{2} & y \in [-1, 0) \\ \frac{1}{2} & y \in [0, 1) \\ 1 & y \in [1, +\infty) \end{cases}$$



- Si $0 \le y < 1$, $P(Y_3 \le y) = P(Y_3 \le 0) = P(X < 0) = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}$.

Por lo tanto, la función de distribución es

$$F_{Y_3}(y) = \begin{cases} 0 & y \in (-\infty, -1) \\ \frac{y+1}{2} & y \in [-1, 0) \\ \frac{1}{2} & y \in [0, 1) \\ 1 & y \in [1, +\infty) \end{cases}$$

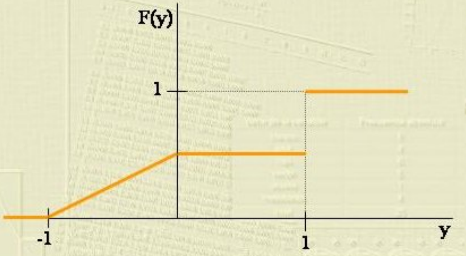


y observando que esta función tiene un punto de salto y, además, puntos de crecimiento que no son de salto, deducimos que la variable Y_3 es una variable mixta.

- Si $0 \leq y < 1$, $P(Y_3 \leq y) = P(Y_3 \leq 0) = P(X < 0) = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}$.

Por lo tanto, la función de distribución es

$$F_{Y_3}(y) = \begin{cases} 0 & y \in (-\infty, -1) \\ \frac{y+1}{2} & y \in [-1, 0) \\ \frac{1}{2} & y \in [0, 1) \\ 1 & y \in [1, +\infty) \end{cases}$$



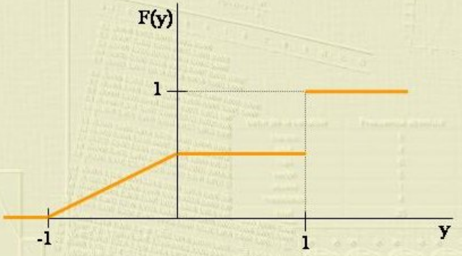
y observando que esta función tiene un punto de salto y, además, puntos de crecimiento que no son de salto, deducimos que la variable Y_3 es una variable mixta. ■

A la vista de este ejemplo comprobamos que una variable continua puede transformarse en variables de cualquier tipo y, en general, debe acudirse a la fórmula general de cambio de variable para calcular su distribución.

- Si $0 \leq y < 1$, $P(Y_3 \leq y) = P(Y_3 \leq 0) = P(X < 0) = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}$.

Por lo tanto, la función de distribución es

$$F_{Y_3}(y) = \begin{cases} 0 & y \in (-\infty, -1) \\ \dfrac{y+1}{2} & y \in [-1, 0) \\ \dfrac{1}{2} & y \in [0, 1) \\ 1 & y \in [1, +\infty) \end{cases}$$



y observando que esta función tiene un punto de salto y, además, puntos de crecimiento que no son de salto, deducimos que la variable Y_3 es una variable mixta.

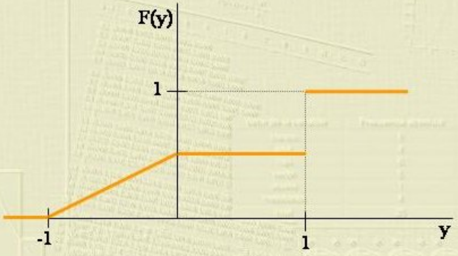
A la vista de este ejemplo comprobamos que una variable continua puede transformarse en variables de cualquier tipo y, en general, debe acudirse a la fórmula general de cambio de variable para calcular su distribución.

Centrándonos, como venimos haciendo, en variables discretas y continuas, exponemos seguidamente la fórmula general que permite obtener la función masa de probabilidad de una transformación discreta de una variable continua, y posteriormente, considerando cierto tipo de transformaciones que conducen a variables continuas, veremos cómo obtener la función de densidad de éstas en términos de la función de densidad de la primera.

- Si $0 \leq y < 1$, $P(Y_3 \leq y) = P(Y_3 \leq 0) = P(X < 0) = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}$.

Por lo tanto, la función de distribución es

$$F_{Y_3}(y) = \begin{cases} 0 & y \in (-\infty, -1) \\ \dfrac{y+1}{2} & y \in [-1, 0) \\ \dfrac{1}{2} & y \in [0, 1) \\ 1 & y \in [1, +\infty) \end{cases}$$



y observando que esta función tiene un punto de salto y, además, puntos de crecimiento que no son de salto, deducimos que la variable Y_3 es una variable mixta. ■

A la vista de este ejemplo comprobamos que una variable continua puede transformarse en variables de cualquier tipo y, en general, debe acudirse a la fórmula general de cambio de variable para calcular su distribución.

Centrándonos, como venimos haciendo, en variables discretas y continuas, exponemos seguidamente la fórmula general que permite obtener la función masa de probabilidad de una transformación discreta de una variable continua, y posteriormente, considerando cierto tipo de transformaciones que conducen a variables continuas, veremos cómo obtener la función de densidad de éstas en términos de la función de densidad de la primera.

Teorema: cambio de variable continua a discreta

Si $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ es una variable aleatoria de tipo continuo con función de densidad f_X, y consideramos una función medible $g : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ tal que la variable $Y = g(X)$ es de tipo discreto y toma valores

en el conjunto E_Y, su función masa de probabilidad se obtiene a partir de f_X mediante la relación

$$P(Y = y) = \int_{g^{-1}(y)} f_X(x)dx, \ \forall y \in E_Y.$$

en el conjunto E_Y, su función masa de probabilidad se obtiene a partir de f_X mediante la relación

$$P(Y = y) = \int_{g^{-1}(y)} f_X(x)dx, \ \forall y \in E_Y.$$

Demostración:

en el conjunto E_Y, su función masa de probabilidad se obtiene a partir de f_X mediante la relación

$$P(Y = y) = \int_{g^{-1}(y)} f_X(x)dx, \ \forall y \in E_Y.$$

Demostración:

La demostración es inmediata a partir de la siguiente equivalencia

$$g(X) = y \Leftrightarrow X \in g^{-1}(y), \ \forall y \in E_Y,$$

en el conjunto E_Y, su función masa de probabilidad se obtiene a partir de f_X mediante la relación

$$P(Y = y) = \int_{g^{-1}(y)} f_X(x)dx, \ \forall y \in E_Y.$$

Demostración:

La demostración es inmediata a partir de la siguiente equivalencia

$$g(X) = y \Leftrightarrow X \in g^{-1}(y), \ \forall y \in E_Y,$$

que implica

$$P(Y = y) = P(g(X) = y) = P\left(X \in g^{-1}(y)\right), \ \forall y \in E_Y.$$

en el conjunto E_Y, su función masa de probabilidad se obtiene a partir de f_X mediante la relación

$$P(Y = y) = \int_{g^{-1}(y)} f_X(x)dx, \ \forall y \in E_Y.$$

Demostración:

La demostración es inmediata a partir de la siguiente equivalencia

$$g(X) = y \Leftrightarrow X \in g^{-1}(y), \ \forall y \in E_Y,$$

que implica

$$P(Y = y) = P(g(X) = y) = P\left(X \in g^{-1}(y)\right), \ \forall y \in E_Y.$$

Ya que X es de tipo continuo, la probabilidad de que tome valores en cualquier conjunto de Borel se obtiene integrando la función de densidad en dicho conjunto;

en el conjunto E_Y, su función masa de probabilidad se obtiene a partir de f_X mediante la relación

$$P(Y = y) = \int_{g^{-1}(y)} f_X(x)dx, \ \forall y \in E_Y.$$

Demostración:

La demostración es inmediata a partir de la siguiente equivalencia

$$g(X) = y \Leftrightarrow X \in g^{-1}(y), \ \forall y \in E_Y,$$

que implica

$$P(Y = y) = P(g(X) = y) = P\left(X \in g^{-1}(y)\right), \ \forall y \in E_Y.$$

Ya que X es de tipo continuo, la probabilidad de que tome valores en cualquier conjunto de Borel se obtiene integrando la función de densidad en dicho conjunto; así,

$$P\left(X \in g^{-1}(y)\right) = \int_{g^{-1}(y)} f_X(x)dx, \ \forall y \in E_Y,$$

en el conjunto E_Y, su función masa de probabilidad se obtiene a partir de f_X mediante la relación

$$P(Y = y) = \int_{g^{-1}(y)} f_X(x)dx, \ \forall y \in E_Y.$$

Demostración:

La demostración es inmediata a partir de la siguiente equivalencia

$$g(X) = y \Leftrightarrow X \in g^{-1}(y), \ \forall y \in E_Y,$$

que implica

$$P(Y = y) = P(g(X) = y) = P\left(X \in g^{-1}(y)\right), \ \forall y \in E_Y.$$

Ya que X es de tipo continuo, la probabilidad de que tome valores en cualquier conjunto de Borel se obtiene integrando la función de densidad en dicho conjunto; así,

$$P\left(X \in g^{-1}(y)\right) = \int_{g^{-1}(y)} f_X(x)dx, \ \forall y \in E_Y,$$

lo que permite concluir la fórmula de cambio de variable especificada en el teorema. ■

en el conjunto E_Y, su función masa de probabilidad se obtiene a partir de f_X mediante la relación

$$P(Y=y)=\int_{g^{-1}(y)} f_X(x)dx,\ \forall y\in E_Y.$$

Demostración:

La demostración es inmediata a partir de la siguiente equivalencia

$$g(X)=y \Leftrightarrow X\in g^{-1}(y),\ \forall y\in E_Y,$$

que implica

$$P(Y=y)=P(g(X)=y)=P\left(X\in g^{-1}(y)\right),\ \forall y\in E_Y.$$

Ya que X es de tipo continuo, la probabilidad de que tome valores en cualquier conjunto de Borel se obtiene integrando la función de densidad en dicho conjunto; así,

$$P\left(X\in g^{-1}(y)\right)=\int_{g^{-1}(y)} f_X(x)dx,\ \forall y\in E_Y,$$

lo que permite concluir la fórmula de cambio de variable especificada en el teorema. ■

Ejemplo 2: *Sea X una variable aleatoria continua, con función de densidad $f_X(x)=\frac{1}{2}$, $-1<x<1$ y sea*

$$Y=\begin{cases}-1 & X<0\\ 0 & X=0\\ 1 & X>0.\end{cases}$$

en el conjunto E_Y, su función masa de probabilidad se obtiene a partir de f_X mediante la relación

$$P(Y = y) = \int_{g^{-1}(y)} f_X(x)dx, \ \forall y \in E_Y.$$

Demostración:

La demostración es inmediata a partir de la siguiente equivalencia

$$g(X) = y \Leftrightarrow X \in g^{-1}(y), \ \forall y \in E_Y,$$

que implica

$$P(Y = y) = P(g(X) = y) = P\left(X \in g^{-1}(y)\right), \ \forall y \in E_Y.$$

Ya que X es de tipo continuo, la probabilidad de que tome valores en cualquier conjunto de Borel se obtiene integrando la función de densidad en dicho conjunto; así,

$$P\left(X \in g^{-1}(y)\right) = \int_{g^{-1}(y)} f_X(x)dx, \ \forall y \in E_Y,$$

lo que permite concluir la fórmula de cambio de variable especificada en el teorema. ■

Ejemplo 2: *Sea X una variable aleatoria continua, con función de densidad $f_X(x) = \frac{1}{2}, \quad -1 < x < 1$ y sea*

$$Y = \begin{cases} -1 & X < 0 \\ 0 & X = 0 \\ 1 & X > 0. \end{cases}$$

Ya que Y toma valores en el conjunto $\{-1, 0, 1\}$, esta variable es de tipo discreto y su función masa de probabilidad se obtiene integrando f_X en el conjunto de valores de X que se aplican en cada valor de Y. Por tanto:

- $P(Y=-1)=P(X<0)=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}.$

- $P(Y = -1) = P(X < 0) = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}$.

- $P(Y = 0) = P(X = 0) = 0$.

- $P(Y=-1) = P(X<0) = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}.$
- $P(Y=0) = P(X=0) = 0.$
- $P(Y=1) = P(X>0) = \int_{0}^{1} \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}.$

- $P(Y=-1)=P(X<0)=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}.$
- $P(Y=0)=P(X=0)=0.$
- $P(Y=1)=P(X>0)=\int_{0}^{1}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}.$ ■

Teorema: cambio de variable continua a continua

Sea $X:(\Omega,\mathcal{A},P)\longrightarrow(\mathbb{R},\mathcal{B},P_X)$ una variable aleatoria de tipo continuo con valores en el intervalo (a,b), $(a,b\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\})$ y función de densidad f_X. Si $g:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ es una función derivable y estrictamente monótona, $Y=g(X)$ es una variable aleatoria de tipo continuo cuya función de densidad puede obtenerse a partir de f_X mediante la siguiente relación

$$f_Y(y)=f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|,\quad\forall y\in g((a,b)).$$

- $P(Y=-1) = P(X<0) = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}.$
- $P(Y=0) = P(X=0) = 0.$
- $P(Y=1) = P(X>0) = \int_{0}^{1} \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}.$

Teorema: cambio de variable continua a continua

Sea $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ una variable aleatoria de tipo continuo con valores en el intervalo (a,b), $(a,b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})$ y función de densidad f_X. Si $g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función derivable y estrictamente monótona, $Y = g(X)$ es una variable aleatoria de tipo continuo cuya función de densidad puede obtenerse a partir de f_X mediante la siguiente relación

$$f_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|, \quad \forall y \in g((a,b)).$$

Demostración:

- $P(Y=-1) = P(X<0) = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}.$
- $P(Y=0) = P(X=0) = 0.$
- $P(Y=1) = P(X>0) = \int_{0}^{1} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}.$

Teorema: cambio de variable continua a continua

Sea $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ una variable aleatoria de tipo continuo con valores en el intervalo (a,b), $(a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})$ y función de densidad f_X. Si $g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función derivable y estrictamente monótona, $Y = g(X)$ es una variable aleatoria de tipo continuo cuya función de densidad puede obtenerse a partir de f_X mediante la siguiente relación

$$f_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right) \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right|, \quad \forall y \in g((a,b)).$$

Demostración:

• Consideremos en primer lugar el caso en que **g es estrictamente creciente**.

- $P(Y=-1)=P(X<0)=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}.$
- $P(Y=0)=P(X=0)=0.$
- $P(Y=1)=P(X>0)=\int_{0}^{1}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}.$

Teorema: cambio de variable continua a continua

Sea $X:(\Omega,\mathcal{A},P)\longrightarrow(\mathbb{R},\mathcal{B},P_X)$ una variable aleatoria de tipo continuo con valores en el intervalo (a,b), $(a,b\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\})$ y función de densidad f_X. Si $g:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ es una función derivable y estrictamente monótona, $Y=g(X)$ es una variable aleatoria de tipo continuo cuya función de densidad puede obtenerse a partir de f_X mediante la siguiente relación

$$f_Y(y)=f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|,\quad\forall y\in g((a,b)).$$

Demostración:

• Consideremos en primer lugar el caso en que **g es estrictamente creciente**.

Comenzamos probando que Y es una variable aleatoria, para lo cual, según las caracterizaciones de medibilidad, basta ver que

$$Y^{-1}((-\infty,y])\in\mathcal{A},\ \forall y\in\mathbb{R}.$$

- $P(Y=-1)=P(X<0)=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}.$
- $P(Y=0)=P(X=0)=0.$
- $P(Y=1)=P(X>0)=\int_{0}^{1}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}.$

Teorema: cambio de variable continua a continua

Sea $X:(\Omega,\mathcal{A},P)\longrightarrow(\mathbb{R},\mathcal{B},P_X)$ una variable aleatoria de tipo continuo con valores en el intervalo (a,b), $(a,b\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\})$ y función de densidad f_X. Si $g:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ es una función derivable y estrictamente monótona, $Y=g(X)$ es una variable aleatoria de tipo continuo cuya función de densidad puede obtenerse a partir de f_X mediante la siguiente relación

$$f_Y(y)=f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|,\quad\forall y\in g((a,b)).$$

Demostración:

• Consideremos en primer lugar el caso en que **g es estrictamente creciente**.

Comenzamos probando que Y es una variable aleatoria, para lo cual, según las caracterizaciones de medibilidad, basta ver que

$$Y^{-1}((-\infty,y])\in\mathcal{A},\ \forall y\in\mathbb{R}.$$

Notando que g es creciente, se tiene

$$Y^{-1}((-\infty,y])=\{Y\leq y\}=\{g(X)\leq y\}=\left\{X\leq g^{-1}(y)\right\}\in\mathcal{A},$$

- $P(Y=-1)=P(X<0)=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}.$
- $P(Y=0)=P(X=0)=0.$
- $P(Y=1)=P(X>0)=\int_{0}^{1}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}.$

Teorema: cambio de variable continua a continua

Sea $X:(\Omega,\mathcal{A},P)\longrightarrow(\mathbb{R},\mathcal{B},P_X)$ una variable aleatoria de tipo continuo con valores en el intervalo (a,b), $(a,b\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\})$ y función de densidad f_X. Si $g:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ es una función derivable y estrictamente monótona, $Y=g(X)$ es una variable aleatoria de tipo continuo cuya función de densidad puede obtenerse a partir de f_X mediante la siguiente relación

$$f_Y(y)=f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|,\quad \forall y\in g((a,b)).$$

Demostración:

• Consideremos en primer lugar el caso en que **g es estrictamente creciente**.

Comenzamos probando que Y es una variable aleatoria, para lo cual, según las caracterizaciones de medibilidad, basta ver que

$$Y^{-1}((-\infty,y])\in\mathcal{A},\ \forall y\in\mathbb{R}.$$

Notando que g es creciente, se tiene

$$Y^{-1}((-\infty,y])=\{Y\leq y\}=\{g(X)\leq y\}=\left\{X\leq g^{-1}(y)\right\}\in\mathcal{A},$$

lo que implica que Y es variable aleatoria.

- $P(Y=-1)=P(X<0)=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}.$
- $P(Y=0)=P(X=0)=0.$
- $P(Y=1)=P(X>0)=\int_{0}^{1}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}.$

Teorema: cambio de variable continua a continua

Sea $X:(\Omega,\mathcal{A},P)\longrightarrow(\mathbb{R},\mathcal{B},P_X)$ una variable aleatoria de tipo continuo con valores en el intervalo (a,b), $(a,b\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\})$ y función de densidad f_X. Si $g:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ es una función derivable y estrictamente monótona, $Y=g(X)$ es una variable aleatoria de tipo continuo cuya función de densidad puede obtenerse a partir de f_X mediante la siguiente relación

$$f_Y(y)=f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|,\quad\forall y\in g((a,b)).$$

Demostración:

• Consideremos en primer lugar el caso en que **g es estrictamente creciente**.

Comenzamos probando que Y es una variable aleatoria, para lo cual, según las caracterizaciones de medibilidad, basta ver que

$$Y^{-1}((-\infty,y])\in\mathcal{A},\ \forall y\in\mathbb{R}.$$

Notando que g es creciente, se tiene

$$Y^{-1}((-\infty,y])=\{Y\leq y\}=\{g(X)\leq y\}=\left\{X\leq g^{-1}(y)\right\}\in\mathcal{A},$$

lo que implica que Y es variable aleatoria. Calculemos ahora su función de distribución,

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(X \leq g^{-1}(y)\right) = F_X\left(g^{-1}(y)\right), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(X \leq g^{-1}(y)\right) = F_X\left(g^{-1}(y)\right), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Teniendo en cuenta que $X \in (a, b)$ y, por tanto, $F_X(x) = 0,\ \forall x \leq a$ y $F_X(x) = 1,\ \forall x \geq b$, se tiene

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \in (-\infty, g(a)] \\ \\ F_X\left(g^{-1}(y)\right) & y \in (g(a), g(b)) \\ \\ 1 & y \in [g(b), +\infty), \end{cases}$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(X \leq g^{-1}(y)\right) = F_X\left(g^{-1}(y)\right), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Teniendo en cuenta que $X \in (a,b)$ y, por tanto, $F_X(x) = 0$, $\forall x \leq a$ y $F_X(x) = 1$, $\forall x \geq b$, se tiene

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \in (-\infty, g(a)] \\ \\ F_X\left(g^{-1}(y)\right) & y \in (g(a), g(b)) \\ \\ 1 & y \in [g(b), +\infty), \end{cases}$$

que es una función continua y, evidentemente, derivable y con derivada nula en $(-\infty, g(a)) \cup (g(b), +\infty)$.

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(X \leq g^{-1}(y)\right) = F_X\left(g^{-1}(y)\right), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Teniendo en cuenta que $X \in (a,b)$ y, por tanto, $F_X(x) = 0, \ \forall x \leq a$ y $F_X(x) = 1, \ \forall x \geq b$, se tiene

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \in (-\infty, g(a)] \\ F_X\left(g^{-1}(y)\right) & y \in (g(a), g(b)) \\ 1 & y \in [g(b), +\infty), \end{cases}$$

que es una función continua y, evidentemente, derivable y con derivada nula en $(-\infty, g(a)) \cup (g(b), +\infty)$. Si $y \in (g(a), g(b))$ (lo que equivale a que $g^{-1}(y) \in (a,b)$) se tiene

$$F_Y(y) = F_X\left(g^{-1}(y)\right) = \int_{-\infty}^{g^{-1}(y)} f_X(x)dx \underset{\substack{\uparrow \\ f_X(x)=0, \ \forall x<a}}{=} \int_a^{g^{-1}(y)} f_X(x)dx \underset{\substack{\uparrow \\ t=g(x)}}{=} \int_{g(a)}^{y} f_X(g^{-1}(t)) \frac{dg^{-1}(t)}{dt} dt$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(X \leq g^{-1}(y)\right) = F_X\left(g^{-1}(y)\right), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Teniendo en cuenta que $X \in (a, b)$ y, por tanto, $F_X(x) = 0, \ \forall x \leq a$ y $F_X(x) = 1, \ \forall x \geq b$, se tiene

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \in (-\infty, g(a)] \\ F_X\left(g^{-1}(y)\right) & y \in (g(a), g(b)) \\ 1 & y \in [g(b), +\infty), \end{cases}$$

que es una función continua y, evidentemente, derivable y con derivada nula en $(-\infty, g(a)) \cup (g(b), +\infty)$. Si $y \in (g(a), g(b))$ (lo que equivale a que $g^{-1}(y) \in (a, b)$) se tiene

$$F_Y(y) = F_X\left(g^{-1}(y)\right) = \int_{-\infty}^{g^{-1}(y)} f_X(x)dx \underset{\substack{\uparrow \\ f_X(x)=0, \ \forall x<a}}{=} \int_a^{g^{-1}(y)} f_X(x)dx \underset{\substack{\uparrow \\ t=g(x)}}{=} \int_{g(a)}^{y} f_X(g^{-1}(t))\frac{dg^{-1}(t)}{dt}dt$$

Entonces, definiendo la función

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y))\dfrac{dg^{-1}(y)}{dy} & y \in (g(a), g(b)) \\ 0 & y \notin (g(a), g(b)), \end{cases}$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(X \leq g^{-1}(y)\right) = F_X\left(g^{-1}(y)\right), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Teniendo en cuenta que $X \in (a, b)$ y, por tanto, $F_X(x) = 0, \ \forall x \leq a$ y $F_X(x) = 1, \ \forall x \geq b$, se tiene

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \in (-\infty, g(a)] \\ F_X\left(g^{-1}(y)\right) & y \in (g(a), g(b)) \\ 1 & y \in [g(b), +\infty), \end{cases}$$

que es una función continua y, evidentemente, derivable y con derivada nula en $(-\infty, g(a)) \cup (g(b), +\infty)$. Si $y \in (g(a), g(b))$ (lo que equivale a que $g^{-1}(y) \in (a, b)$) se tiene

$$F_Y(y) = F_X\left(g^{-1}(y)\right) = \int_{-\infty}^{g^{-1}(y)} f_X(x)dx \underset{\substack{\uparrow \\ f_X(x)=0, \ \forall x<a}}{=} \int_a^{g^{-1}(y)} f_X(x)dx \underset{\substack{\uparrow \\ t=g(x)}}{=} \int_{g(a)}^{y} f_X(g^{-1}(t))\frac{dg^{-1}(t)}{dt}dt$$

Entonces, definiendo la función

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y))\dfrac{dg^{-1}(y)}{dy} & y \in (g(a), g(b)) \\ 0 & y \notin (g(a), g(b)), \end{cases}$$

es evidente que

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)dt, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

De esta expresión se deduce que la variable aleatoria Y es de tipo continuo y su función de densidad es f_Y (que coincide con la indicada en el teorema, teniendo en cuenta que, por ser g creciente, g^{-1} también lo es y, por tanto, su derivada es positiva).

De esta expresión se deduce que la variable aleatoria Y es de tipo continuo y su función de densidad es f_Y (que coincide con la indicada en el teorema, teniendo en cuenta que, por ser g creciente, g^{-1} también lo es y, por tanto, su derivada es positiva).

• Supongamos ahora que **g es estrictamente decreciente**, caso que tratamos de forma similar.

De esta expresión se deduce que la variable aleatoria Y es de tipo continuo y su función de densidad es f_Y (que coincide con la indicada en el teorema, teniendo en cuenta que, por ser g creciente, g^{-1} también lo es y, por tanto, su derivada es positiva).

• Supongamos ahora que **g es estrictamente decreciente**, caso que tratamos de forma similar. Comenzamos probando que $Y = g(X)$ es una variable aleatoria.

De esta expresión se deduce que la variable aleatoria Y es de tipo continuo y su función de densidad es f_Y (que coincide con la indicada en el teorema, teniendo en cuenta que, por ser g creciente, g^{-1} también lo es y, por tanto, su derivada es positiva).

• Supongamos ahora que **g es estrictamente decreciente**, caso que tratamos de forma similar. Comenzamos probando que $Y = g(X)$ es una variable aleatoria. Teniendo en cuenta que la función g es decreciente, se tiene

$$Y^{-1}((-\infty, y]) = \{Y \leq y\} = \{g(X) \leq y\} = \left\{X \geq g^{-1}(y)\right\} \in \mathcal{A},$$

De esta expresión se deduce que la variable aleatoria Y es de tipo continuo y su función de densidad es f_Y (que coincide con la indicada en el teorema, teniendo en cuenta que, por ser g creciente, g^{-1} también lo es y, por tanto, su derivada es positiva).

• Supongamos ahora que **g es estrictamente decreciente**, caso que tratamos de forma similar. Comenzamos probando que $Y = g(X)$ es una variable aleatoria. Teniendo en cuenta que la función g es decreciente, se tiene

$$Y^{-1}((-\infty, y]) = \{Y \leq y\} = \{g(X) \leq y\} = \left\{X \geq g^{-1}(y)\right\} \in \mathcal{A},$$

lo que implica que Y es variable aleatoria.

De esta expresión se deduce que la variable aleatoria Y es de tipo continuo y su función de densidad es f_Y (que coincide con la indicada en el teorema, teniendo en cuenta que, por ser g creciente, g^{-1} también lo es y, por tanto, su derivada es positiva).

• Supongamos ahora que **g es estrictamente decreciente**, caso que tratamos de forma similar. Comenzamos probando que $Y = g(X)$ es una variable aleatoria. Teniendo en cuenta que la función g es decreciente, se tiene

$$Y^{-1}((-\infty, y]) = \{Y \leq y\} = \{g(X) \leq y\} = \left\{X \geq g^{-1}(y)\right\} \in \mathcal{A},$$

lo que implica que Y es variable aleatoria. Calculemos ahora su función de distribución,

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(X \geq g^{-1}(y)\right) = 1 - F_X\left(g^{-1}(y)\right), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

De esta expresión se deduce que la variable aleatoria Y es de tipo continuo y su función de densidad es f_Y (que coincide con la indicada en el teorema, teniendo en cuenta que, por ser g creciente, g^{-1} también lo es y, por tanto, su derivada es positiva).

• Supongamos ahora que **g es estrictamente decreciente**, caso que tratamos de forma similar. Comenzamos probando que $Y = g(X)$ es una variable aleatoria. Teniendo en cuenta que la función g es decreciente, se tiene

$$Y^{-1}((-\infty, y]) = \{Y \leq y\} = \{g(X) \leq y\} = \left\{X \geq g^{-1}(y)\right\} \in \mathcal{A},$$

lo que implica que Y es variable aleatoria. Calculemos ahora su función de distribución,

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(X \geq g^{-1}(y)\right) = 1 - F_X\left(g^{-1}(y)\right), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Teniendo en cuenta que $X \in (a, b)$ y, por tanto, $F_X(x) = 0$, $\forall x \leq a$ y $F_X(x) = 1$, $\forall x \geq b$, se tiene

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \in (-\infty, g(b)] \\ 1 - F_X\left(g^{-1}(y)\right) & y \in (g(b), g(a)) \\ 1 & y \in [g(a), +\infty), \end{cases}$$

De esta expresión se deduce que la variable aleatoria Y es de tipo continuo y su función de densidad es f_Y (que coincide con la indicada en el teorema, teniendo en cuenta que, por ser g creciente, g^{-1} también lo es y, por tanto, su derivada es positiva).

• Supongamos ahora que **g es estrictamente decreciente**, caso que tratamos de forma similar. Comenzamos probando que $Y = g(X)$ es una variable aleatoria. Teniendo en cuenta que la función g es decreciente, se tiene

$$Y^{-1}((-\infty, y]) = \{Y \leq y\} = \{g(X) \leq y\} = \left\{X \geq g^{-1}(y)\right\} \in \mathcal{A},$$

lo que implica que Y es variable aleatoria. Calculemos ahora su función de distribución,

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(X \geq g^{-1}(y)\right) = 1 - F_X\left(g^{-1}(y)\right), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Teniendo en cuenta que $X \in (a, b)$ y, por tanto, $F_X(x) = 0$, $\forall x \leq a$ y $F_X(x) = 1$, $\forall x \geq b$, se tiene

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \in (-\infty, g(b)] \\ 1 - F_X\left(g^{-1}(y)\right) & y \in (g(b), g(a)) \\ 1 & y \in [g(a), +\infty), \end{cases}$$

que es una función continua y, claramente, derivable y con derivada nula en $(-\infty, g(b)) \cup (g(a), +\infty)$.

De esta expresión se deduce que la variable aleatoria Y es de tipo continuo y su función de densidad es f_Y (que coincide con la indicada en el teorema, teniendo en cuenta que, por ser g creciente, g^{-1} también lo es y, por tanto, su derivada es positiva).

• Supongamos ahora que **g es estrictamente decreciente**, caso que tratamos de forma similar. Comenzamos probando que $Y = g(X)$ es una variable aleatoria. Teniendo en cuenta que la función g es decreciente, se tiene

$$Y^{-1}((-\infty, y]) = \{Y \le y\} = \{g(X) \le y\} = \left\{X \ge g^{-1}(y)\right\} \in \mathcal{A},$$

lo que implica que Y es variable aleatoria. Calculemos ahora su función de distribución,

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P\left(X \ge g^{-1}(y)\right) = 1 - F_X\left(g^{-1}(y)\right), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Teniendo en cuenta que $X \in (a, b)$ y, por tanto, $F_X(x) = 0$, $\forall x \le a$ y $F_X(x) = 1$, $\forall x \ge b$, se tiene

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \in (-\infty, g(b)] \\ 1 - F_X\left(g^{-1}(y)\right) & y \in (g(b), g(a)) \\ 1 & y \in [g(a), +\infty), \end{cases}$$

que es una función continua y, claramente, derivable y con derivada nula en $(-\infty, g(b)) \cup (g(a), +\infty)$.

Si $y \in (g(b), g(a))$ (lo que equivale a que $g^{-1}(y) \in (a, b)$) se tiene

$$F_Y(y) = 1 - F_X\left(g^{-1}(y)\right) = \int_{g^{-1}(y)}^{+\infty} f_X(x)dx \underset{\substack{\uparrow \\ f_X(x)=0,\ \forall x>b}}{=} \int_{g^{-1}(y)}^{b} f_X(x)dx \underset{\substack{\uparrow \\ t=g(x)}}{=} \int_{y}^{g(b)} f_X(g^{-1}(t)) \frac{dg^{-1}(t)}{dt} dt,$$

y, puesto que g es decreciente y, por tanto, g^{-1} también, cambiando de signo en la última integral se deduce que

$$F_Y(y) = \int_{g(b)}^{y} f_X(g^{-1}(t)) \left| \frac{dg^{-1}(t)}{dt} \right| dt, \quad \forall y \in (g(b), g(a)).$$

y, puesto que g es decreciente y, por tanto, g^{-1} también, cambiando de signo en la última integral se deduce que

$$F_Y(y) = \int_{g(b)}^{y} f_X(g^{-1}(t)) \left| \frac{dg^{-1}(t)}{dt} \right| dt, \quad \forall y \in (g(b), g(a)).$$

Entonces, definiendo la función

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y)) \left| \dfrac{dg^{-1}(y)}{dy} \right| & y \in (g(b), g(a)) \\ 0 & y \notin (g(b), g(a)), \end{cases}$$

y, puesto que g es decreciente y, por tanto, g^{-1} también, cambiando de signo en la última integral se deduce que

$$F_Y(y) = \int_{g(b)}^{y} f_X(g^{-1}(t)) \left| \frac{dg^{-1}(t)}{dt} \right| dt, \quad \forall y \in (g(b), g(a)).$$

Entonces, definiendo la función

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y)) \left| \dfrac{dg^{-1}(y)}{dy} \right| & y \in (g(b), g(a)) \\ 0 & y \notin (g(b), g(a)), \end{cases}$$

es evidente que

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)dt, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

y, puesto que g es decreciente y, por tanto, g^{-1} también, cambiando de signo en la última integral se deduce que

$$F_Y(y) = \int_{g(b)}^{y} f_X(g^{-1}(t)) \left| \frac{dg^{-1}(t)}{dt} \right| dt, \quad \forall y \in (g(b), g(a)).$$

Entonces, definiendo la función

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y)) \left| \dfrac{dg^{-1}(y)}{dy} \right| & y \in (g(b), g(a)) \\ 0 & y \notin (g(b), g(a)), \end{cases}$$

es evidente que

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t) dt, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

De esta expresión se deduce que la variable Y es continua y que f_Y es su función de densidad. ∎

y, puesto que g es decreciente y, por tanto, g^{-1} también, cambiando de signo en la última integral se deduce que

$$F_Y(y) = \int_{g(b)}^{y} f_X(g^{-1}(t)) \left| \frac{dg^{-1}(t)}{dt} \right| dt, \quad \forall y \in (g(b), g(a)).$$

Entonces, definiendo la función

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y)) \left| \dfrac{dg^{-1}(y)}{dy} \right| & y \in (g(b), g(a)) \\ 0 & y \notin (g(b), g(a)), \end{cases}$$

es evidente que

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)dt, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

De esta expresión se deduce que la variable Y es continua y que f_Y es su función de densidad. ∎

Ejemplo 3: *Sea X una variable aleatoria de tipo continuo, con función de densidad*

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \ x > 0$$

y consideremos la variable $Y = X^2$.

y, puesto que g es decreciente y, por tanto, g^{-1} también, cambiando de signo en la última integral se deduce que

$$F_Y(y) = \int_{g(b)}^{y} f_X(g^{-1}(t)) \left| \frac{dg^{-1}(t)}{dt} \right| dt, \quad \forall y \in (g(b), g(a)).$$

Entonces, definiendo la función

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y)) \left| \dfrac{dg^{-1}(y)}{dy} \right| & y \in (g(b), g(a)) \\ 0 & y \notin (g(b), g(a)), \end{cases}$$

es evidente que

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)dt, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

De esta expresión se deduce que la variable Y es continua y que f_Y es su función de densidad. ■

Ejemplo 3: *Sea X una variable aleatoria de tipo continuo, con función de densidad*

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \; x > 0$$

y consideremos la variable $Y = X^2$.

Notemos que la variable X toma valores en el intervalo $(0, +\infty)$, en el que la transformación considerada, $g(x) = x^2$, es derivable y estrictamente creciente.

y, puesto que g es decreciente y, por tanto, g^{-1} también, cambiando de signo en la última integral se deduce que

$$F_Y(y) = \int_{g(b)}^{y} f_X(g^{-1}(t)) \left| \frac{dg^{-1}(t)}{dt} \right| dt, \quad \forall y \in (g(b), g(a)).$$

Entonces, definiendo la función

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y)) \left| \dfrac{dg^{-1}(y)}{dy} \right| & y \in (g(b), g(a)) \\ 0 & y \notin (g(b), g(a)), \end{cases}$$

es evidente que

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)dt, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

De esta expresión se deduce que la variable Y es continua y que f_Y es su función de densidad. ∎

Ejemplo 3: *Sea X una variable aleatoria de tipo continuo, con función de densidad*

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \; x > 0$$

y consideremos la variable $Y = X^2$.

Notemos que la variable X toma valores en el intervalo $(0, +\infty)$, en el que la transformación considerada, $g(x) = x^2$, es derivable y estrictamente creciente. Por lo tanto, aplicando la fórmula de cambio de variable, tenemos

$$f_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right) \frac{dg^{-1}(y)}{dy}, \quad \forall y \in g((0, +\infty)).$$

Entonces, teniendo en cuenta que:

Entonces, teniendo en cuenta que:

- $g((0, +\infty)) = (g(0), g(+\infty)) = (0, +\infty)$,

Entonces, teniendo en cuenta que:

- $g((0, +\infty)) = (g(0), g(+\infty)) = (0, +\infty)$,
- $g^{-1}(y) = \sqrt{y}, \quad \forall y \in (0, +\infty)$,

Entonces, teniendo en cuenta que:

- $g((0,+\infty)) = (g(0), g(+\infty)) = (0,+\infty)$,
- $g^{-1}(y) = \sqrt{y}, \quad \forall y \in (0,+\infty)$,
- $\dfrac{dg^{-1}(y)}{dy} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}, \quad \forall y \in (0,+\infty)$,

Entonces, teniendo en cuenta que:

- $g((0,+\infty)) = (g(0), g(+\infty)) = (0,+\infty)$,
- $g^{-1}(y) = \sqrt{y}, \quad \forall y \in (0,+\infty)$,
- $\dfrac{dg^{-1}(y)}{dy} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}, \quad \forall y \in (0,+\infty)$,

se tiene

$$f_Y(y) = \frac{\lambda e^{-\lambda\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}, \quad \forall y > 0.$$

Entonces, teniendo en cuenta que:

- $g((0,+\infty)) = (g(0), g(+\infty)) = (0,+\infty)$,
- $g^{-1}(y) = \sqrt{y}, \quad \forall y \in (0,+\infty)$,
- $\dfrac{dg^{-1}(y)}{dy} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}, \quad \forall y \in (0,+\infty)$,

se tiene

$$f_Y(y) = \frac{\lambda e^{-\lambda\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}, \quad \forall y > 0.$$

Extensión del teorema de cambio de variable continua a continua

Notemos que las condiciones exigidas a la transformación g considerada en el teorema (derivabilidad y monotonía estricta) equivalen a la exigencia de tales condiciones a la función g^{-1}. El teorema puede extenderse al caso en que la función g tenga un conjunto numerable de inversas, $\{g_n^{-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$, y cada una de ellas satisfaga tales condiciones. En esta situación, la función de densidad de la variable $Y = g(X)$ se obtiene aplicando la fórmula especificada en el teorema a cada función g_n^{-1} y sumando las funciones resultantes

$$f_Y(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_X\left(g_n^{-1}(y)\right)\left|\frac{dg_n^{-1}(y)}{dy}\right|, \quad \forall y \in g((a,b)).$$

Entonces, teniendo en cuenta que:

- $g((0,+\infty)) = (g(0), g(+\infty)) = (0,+\infty)$,
- $g^{-1}(y) = \sqrt{y}, \quad \forall y \in (0,+\infty)$,
- $\dfrac{dg^{-1}(y)}{dy} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}, \quad \forall y \in (0,+\infty)$,

se tiene

$$f_Y(y) = \frac{\lambda e^{-\lambda\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}, \quad \forall y > 0.$$

Extensión del teorema de cambio de variable continua a continua

Notemos que las condiciones exigidas a la transformación g considerada en el teorema (derivabilidad y monotonía estricta) equivalen a la exigencia de tales condiciones a la función g^{-1}. El teorema puede extenderse al caso en que la función g tenga un conjunto numerable de inversas, $\{g_n^{-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$, y cada una de ellas satisfaga tales condiciones. En esta situación, la función de densidad de la variable $Y = g(X)$ se obtiene aplicando la fórmula especificada en el teorema a cada función g_n^{-1} y sumando las funciones resultantes

$$f_Y(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_X\left(g_n^{-1}(y)\right)\left|\frac{dg_n^{-1}(y)}{dy}\right|, \quad \forall y \in g((a,b)).$$

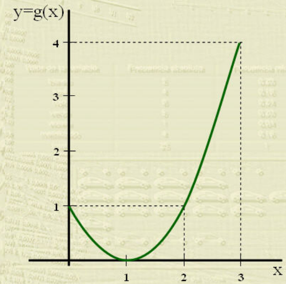
Ejemplo 4: *Sea X una variable aleatoria de tipo continuo, con función de densidad*

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \; x > 0$$

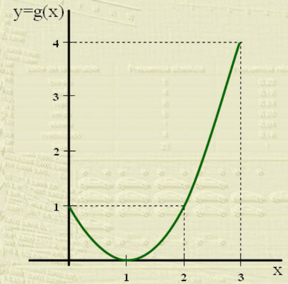
y consideremos la variable $Y = (X-1)^2$.

Ya que la variable X toma valores en $\mathbb{R}^+$, el conjunto de valores de la nueva variable Y es $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Ya que la variable X toma valores en $\mathbb{R}^+$, el conjunto de valores de la nueva variable Y es $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Sin embargo, la transformación considerada, $g(x) = (x-1)^2$, no es estrictamente monótona, como se muestra en el gráfico:

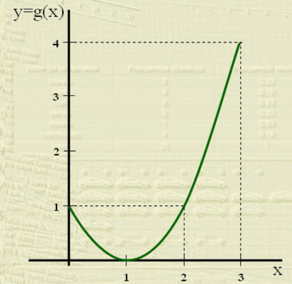


Ya que la variable X toma valores en $\mathbb{R}^+$, el conjunto de valores de la nueva variable Y es $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Sin embargo, la transformación considerada, $g(x) = (x-1)^2$, no es estrictamente monótona, como se muestra en el gráfico:



De hecho, $y = g(x) \;\Rightarrow \begin{cases} g_1^{-1}(y) = 1 - \sqrt{y} & \text{derivable y estrictamente decreciente} \\ g_2^{-1}(y) = 1 + \sqrt{y} & \text{derivable y estrictamente creciente.} \end{cases}$

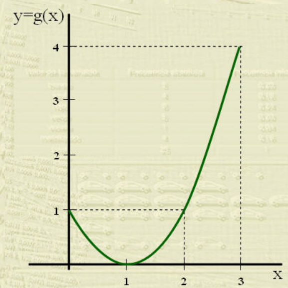
Ya que la variable X toma valores en $\mathbb{R}^+$, el conjunto de valores de la nueva variable Y es $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Sin embargo, la transformación considerada, $g(x) = (x-1)^2$, no es estrictamente monótona, como se muestra en el gráfico:



De hecho, $y = g(x) \;\Rightarrow\; \begin{cases} g_1^{-1}(y) = 1 - \sqrt{y} & \text{derivable y estrictamente decreciente} \\ g_2^{-1}(y) = 1 + \sqrt{y} & \text{derivable y estrictamente creciente.} \end{cases}$

Entonces, aplicando la extensión del teorema de cambio de variable,

Ya que la variable X toma valores en $\mathbb{R}^+$, el conjunto de valores de la nueva variable Y es $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Sin embargo, la transformación considerada, $g(x) = (x-1)^2$, no es estrictamente monótona, como se muestra en el gráfico:

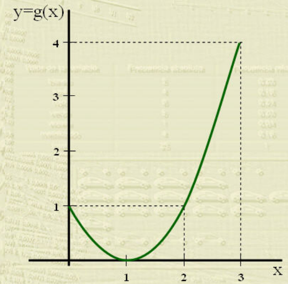


$$\text{De hecho, } y = g(x) \;\Rightarrow \begin{cases} g_1^{-1}(y) = 1 - \sqrt{y} & \text{derivable y estrictamente decreciente} \\ g_2^{-1}(y) = 1 + \sqrt{y} & \text{derivable y estrictamente creciente.} \end{cases}$$

Entonces, aplicando la extensión del teorema de cambio de variable,

$$f_Y(y) = f_X\left(g_1^{-1}(y)\right)\left|\frac{dg_1^{-1}(y)}{dy}\right| + f_X\left(g_2^{-1}(y)\right)\left|\frac{dg_2^{-1}(y)}{dy}\right| = f_X\left(1-\sqrt{y}\right)\left|-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right| + f_X\left(1+\sqrt{y}\right)\left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right|, \quad \forall y \geq 0.$$

Ya que la variable X toma valores en $\mathbb{R}^+$, el conjunto de valores de la nueva variable Y es $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Sin embargo, la transformación considerada, $g(x) = (x-1)^2$, no es estrictamente monótona, como se muestra en el gráfico:



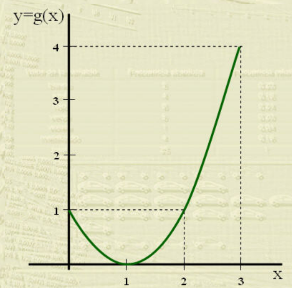
De hecho, $y = g(x) \;\Rightarrow \begin{cases} g_1^{-1}(y) = 1 - \sqrt{y} & \text{derivable y estrictamente decreciente} \\ g_2^{-1}(y) = 1 + \sqrt{y} & \text{derivable y estrictamente creciente.} \end{cases}$

Entonces, aplicando la extensión del teorema de cambio de variable,

$$f_Y(y) = f_X\left(g_1^{-1}(y)\right)\left|\frac{dg_1^{-1}(y)}{dy}\right| + f_X\left(g_2^{-1}(y)\right)\left|\frac{dg_2^{-1}(y)}{dy}\right| = f_X\left(1-\sqrt{y}\right)\left|-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right| + f_X\left(1+\sqrt{y}\right)\left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right|, \quad \forall y \geq 0.$$

- Si $y \in [0,1) \;\Rightarrow \begin{cases} g_1^{-1}(y) = 1 - \sqrt{y} \in (0,1] \longrightarrow f_X(1-\sqrt{y}) = \lambda e^{-\lambda(1-\sqrt{y})} \\ g_2^{-1}(y) = 1 + \sqrt{y} \in [1,2) \longrightarrow f_X(1+\sqrt{y}) = \lambda e^{-\lambda(1+\sqrt{y})}. \end{cases}$

Ya que la variable X toma valores en $\mathbb{R}^+$, el conjunto de valores de la nueva variable Y es $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Sin embargo, la transformación considerada, $g(x) = (x-1)^2$, no es estrictamente monótona, como se muestra en el gráfico:



De hecho, $y = g(x) \;\Rightarrow\; \begin{cases} g_1^{-1}(y) = 1-\sqrt{y} & \text{derivable y estrictamente decreciente} \\ g_2^{-1}(y) = 1+\sqrt{y} & \text{derivable y estrictamente creciente.} \end{cases}$

Entonces, aplicando la extensión del teorema de cambio de variable,

$$f_Y(y) = f_X\left(g_1^{-1}(y)\right)\left|\frac{dg_1^{-1}(y)}{dy}\right| + f_X\left(g_2^{-1}(y)\right)\left|\frac{dg_2^{-1}(y)}{dy}\right| = f_X\left(1-\sqrt{y}\right)\left|-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right| + f_X\left(1+\sqrt{y}\right)\left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right|, \quad \forall y \geq 0.$$

- Si $y \in [0,1) \;\Rightarrow\; \begin{cases} g_1^{-1}(y) = 1-\sqrt{y} \in (0,1] \;\longrightarrow\; f_X(1-\sqrt{y}) = \lambda e^{-\lambda(1-\sqrt{y})} \\ g_2^{-1}(y) = 1+\sqrt{y} \in [1,2) \;\longrightarrow\; f_X(1+\sqrt{y}) = \lambda e^{-\lambda(1+\sqrt{y})}. \end{cases}$

- Si $y \in (1,+\infty) \;\Rightarrow\; \begin{cases} g_1^{-1}(y) = 1-\sqrt{y} < 0 \;\longrightarrow\; f_X(1-\sqrt{y}) = 0 \\ g_2^{-1}(y) = 1+\sqrt{y} \in (2,+\infty) \;\longrightarrow\; f_X(1+\sqrt{y}) = \lambda e^{-\lambda(1+\sqrt{y})}. \end{cases}$

En resumen, asignando un valor arbitrario a $y = 1$, se deduce que

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{\lambda e^{-\lambda(1-\sqrt{y})} + \lambda e^{-\lambda(1+\sqrt{y})}}{2\sqrt{y}} & 0 < y < 1 \\[2ex] \dfrac{\lambda e^{-\lambda(1+\sqrt{y})}}{2\sqrt{y}} & y \geq 1. \end{cases}$$