# ELEMENTOS MATEMÁTICOS

Apéndice

A

## A.1. Vectores y números complejos

Un número complejo es un número que está compuesto de dos partes: una llamada real y otra llamada imaginaria. La parte imaginaria se distingue porque va precedida por la letra $j$ que se define como:

$$j = \sqrt{-1} \tag{A.1}$$

Gracias a la definición de $j$ los números complejos permiten, entre otras cosas, resolver ecuaciones donde aparecen raíces cuadradas de números negativos.

Si los números reales se pueden representar como una recta, la **recta real**, los números complejos se representan como un plano, el **plano complejo**. En este plano el eje de abscisas corresponde a los números reales (sin parte imaginaria) y el eje de ordenadas a los números imaginarios puros (sin parte real); el resto de números complejos se extiende por todo el plano. Así, por ejemplo, el número complejo $A = a + jb$ se representa en el plano complejo como un punto de coordenadas $(a, b)$, tal y como se muestra en la Figura A.1. Como se observa es fácil e inmediato establecer una analogía entre el plano complejo y el sistema de coordenadas rectangulares, por lo que a esa representación del número complejo como suma de un número real y otro imaginario puro se le llama **forma rectangular**.

Se dice que dos números complejos $A = a + jb$ y $B = c + jd$ son iguales si sus partes reales son iguales, $a = c$, y sus partes imaginarias también son iguales, $b = d$.

El mismo número complejo $A$ anterior, que se ha definido como un punto del plano complejo, también puede representarse de forma unívoca en ese plano, tal y como muestra la Figura A.2, mediante la distancia $r$ sobre una línea recta desde el punto hasta el origen y el ángulo $\theta$ que forma esa línea recta con el eje real. A esta manera de representar un número

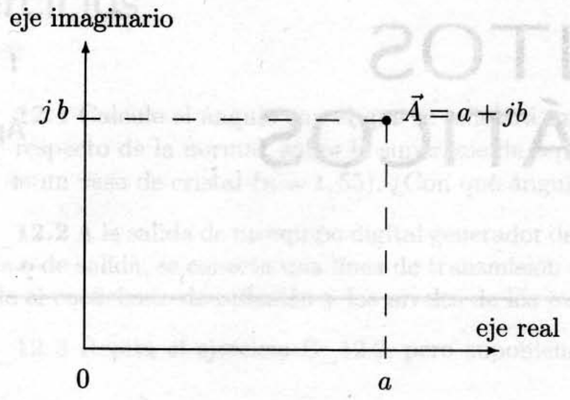


Figura A.1

imaginario $A = r\angle\theta$ se la llama **forma polar**, donde $r$ es el módulo y $\theta$ el argumento o ángulo.

A la vista de las figuras anteriores y aplicando un poquito de trigonometría, expresar un número complejo en forma rectangular o en forma polar es inmediato:

$$A = a + jb = r\angle\theta \left\{ \begin{array}{ll} \text{Parte real:} & a = Re(A) = r\cos\theta \\ \text{Parte imaginaria:} & b = Im(A) = r\,\text{sen}\,\theta \\ \text{Módulo:} & r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \text{Argumento:} & \theta = \arctan\dfrac{b}{a} \end{array} \right. \tag{A.2}$$

Las operaciones elementales de adición, sustracción, multiplicación y división se aplican a los números complejos exactamente igual que a los números reales, aunque hay que operar con cuidado y teniendo en cuenta la definición del número $j$ dada en (A.1).

Para realizar las operaciones de adición y de sustracción es más cómodo utilizar la forma rectangular. Así, para sumar (restar) dos números complejos $A$ y $B$, basta con sumar (restar) sus partes reales y sus partes imaginarias:

$$\begin{aligned} A + B &= (a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j(b + d) \\ A - B &= (a + jb) - (c + jd) = (a - c) + j(b - d) \end{aligned} \tag{A.3}$$

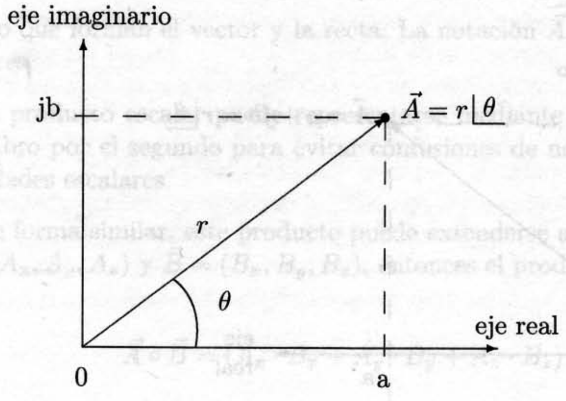


Figura A.2

Para realizar las operaciones de multiplicación y de división es más cómodo utilizar la forma polar. Así, para multiplicar (dividir) dos números complejos $A$ y $B$, basta con multiplicar (dividir) sus módulos y sumar (restar) sus argumentos:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (r_a\underline{\lfloor\theta_a}) \cdot (r_b\underline{\lfloor\theta_b}) = (r_a \cdot r_b)\underline{\lfloor(\theta_a + \theta_b)} \\ \frac{A}{B} &= \frac{r_a\underline{\lfloor\theta_a}}{r_b\underline{\lfloor\theta_b}} = \frac{r_a}{r_b}\underline{\lfloor(\theta_a - \theta_b)} \end{aligned} \tag{A.4}$$

De todas formas, se pueden realizar las cuatro operaciones anteriores utilizando cualquiera de las dos formas vistas, bien la forma rectangular o bien la forma polar (lo que dejamos como ejercicio para el lector, que puede hacerlo tanto analíticamente como utilizando la representación de los números en el plano complejo).

Por último, se define el **conjugado** de un número complejo $A$ como otro número complejo, que se escribe $A^*$ y que viene dado por:

$$\begin{aligned} A &= (a + jb) = r\underline{\lfloor\theta} \\ A^* &= a - jb = r\underline{\lfloor-\theta} \end{aligned} \tag{A.5}$$

En la Figura A.3 se representan $A$ y $A^*$. A partir de la definición anterior, se comprueba fácilmente que el producto de un número complejo por su conjugado es un número real de valor el cuadrado de su módulo:

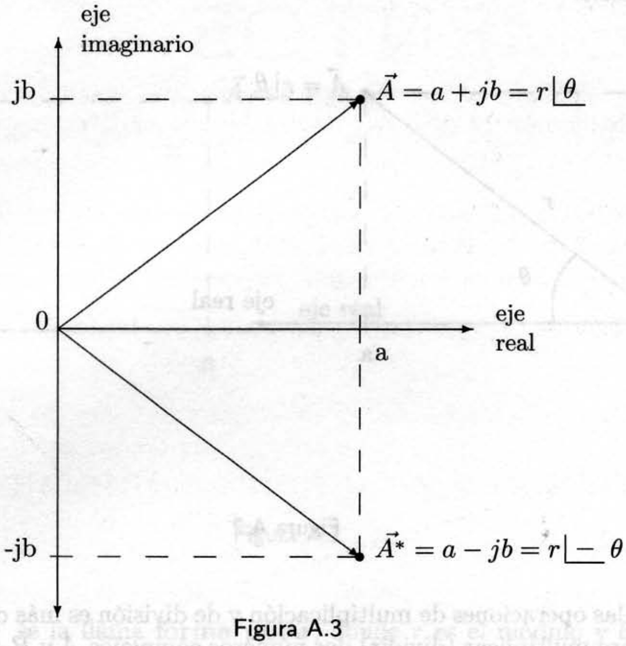


Figura A.3

$$A \cdot A^* = (a + jb) \cdot (a - jb) = \\ (a^2 - (-1)b^2) + j(ab - ab) = a^2 + b^2 \tag{A.6}$$

o también:

$$A \cdot A^* = r\underline{|\theta} \cdot r\underline{|-\theta} = r^2 \tag{A.7}$$

# A.2. Producto escalar

El producto escalar de dos vectores $\vec{A} = (A_x, A_y)$ y $\vec{B} = (B_x, B_y)$, de un plano coordenado con ejes X, Y, se define como una cantidad escalar que es igual al producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman:

$$\vec{A} \circ \vec{B} = \vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y) = |\vec{A}|\,|\vec{B}| \cos\left(\widehat{\vec{A}, \vec{B}}\right) \tag{A.8}$$

El producto escalar de dos vectores corresponde al producto de uno de ellos ($|\vec{A}|$, por ejemplo) por la proyección del otro sobre la dirección del primero, ya que la proyección de