Ejercicio 2: (4 puntos) Discute y resuelve, cuando sea posible, en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema:

$$ax + y + z + t + u = 1$$

$$x + ay + z + t + u = 1$$

$$x + y + az + t + u = -1$$

Tomamos la matriz de coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A/b = \left(\begin{array}{ccccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Vamos a calcular el rango de A:

He quitado la última fila

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a(a^2-1) - (a-1) + (1-a) =$$
$$= a^3 - a - a + 1 + 1 - a =$$
$$= a^3 - 3a + 2$$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} - \cancel{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} \to 0 + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a(1-a) + (a-1) =$$
$$= a - a^2 + a - 1$$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \cancel{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} \to 0 + \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a(a-1) + (1-a) =$$
$$= a^2 - 1 + 1 - a = a^2 - a$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = (1-a) - (a-1) + (a^2-1) =$$
$$= a^2 \cancel{-1} + 1 - a - a \cancel{+1} =$$
$$= a^2 - 2a + 1$$

$a^3 - 3a + 2 = 0 \quad a = -2 \quad a = 1$

$a - a^2 + a - 1 = 0 \quad a = 1$

$a^2 - a = 0 \quad a = 0 \quad a = 1$

$a^2 - 2a + 1 = 0 \quad a = 1$

Por tanto, si $a = 1$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \text{rango}(A) = 1 \\ \text{rango}(A^*) = 2 \end{array}$$

$rg(A) < rg(A^*) \Rightarrow$ SI.

Si $a \neq 1$

$rg(A) = rg(A^*) = 3 <$ nº incógnitas $= 5$

SCI.

Procedemos a resolverlo por Cramer, hay que tomar dos parámetros

$$\begin{cases} ax + y + z = -u - t + 1 \\ x + ay + z = -t - u + 1 \\ x + y + az = -u - t - 1 \end{cases} \quad a \neq 1$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -u-t+1 & 1 & 1 \\ -t-u+1 & a & 1 \\ -u-t-1 & 1 & a \end{vmatrix}}{\underset{\substack{\parallel \\ |A|}}{a^3 - 3a + 2}}$$

$$|\,| = (-u-t+1)(a^2-1) - ((-t-u+1)\cdot a + u + t + 1) + ((-t-u+1) - a(-u-t-1)) =$$