Cálculo II, Grado Matemáticas-Informática

1) Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

   a) El polinomio de Taylor de la función $f(x) = x^2 - 3$ de orden 3 (centrado) en 1 es $x^2 - 3$.

   b) Si f es una función integrable en $[a, b]$ tal que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$, entonces $f(x) \geq 0$ para cualquier $x \in [a, b]$.

   c) Sea f una función derivable en un intervalo. Si f' se anula en dos puntos, entonces la función f se puede anular en cuatro puntos.

2) Demuestra que $x - \frac{x^3}{3} \leq \arctan(x) \leq x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}_0^+$.

3) Calcula $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)\operatorname{sen}(x) - x^2 + x^3}{x^3}$.

4) Sea $f\colon [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ una función continua tal que $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$. Supongamos además que

$$f(x)^2 = 2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

   a) Prueba que f es derivable y calcula su derivada.

   b) Demuestra que $f(x) = x$, para todo $x \geq 0$.

5) Calcula la longitud de la gráfica de la función $f : [0, \frac{\pi}{6}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(\cos x)$. Fórmula a aplicar: si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es $C^1[a, b]$, la longitud de la gráfica entre los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ viene dada por

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$$

Granada, a 9 de junio de 2020