RELACIÓN 3 ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA E INTRODUCCIÓN A LA PROBABILIDAD

UNIVERSIDAD DE GRANADA

David Muñoz Sánchez
Higinio Paterna Ortiz
Tomás Rodríguez Hernáez
Mario Rubio Venzal
Hugo Teruel Muñoz

1. Durante un año, las personas de una ciudad utilizan 3 tipos de transportes: metro (M), autobús (A), y coche particular (C). Las probabilidades de que durante el año hayan usado unos u otros los transportes son:

M: 0,3 A: 0,2 C: 0,15 M y A: 0,1 M y C: 0,05 A y C: 0,06 M, A y C: 0,01

Calcular las probabilidades siguientes:

- **a) que una persona viaje en metro y no en autobús;**
- **b) que una persona tome al menos dos medios de transporte;**
- **c) que una persona viaje en metro o en coche, pero no en autobús;**
- **d) que viaje en metro, o bien en autobús y en coche;**
- **e) que una persona vaya a pie;**

a)

$$P(M\cap\bar{A}) = P(M) - P(A\cap M) = 0{,}3-0{,}1 = 0{,}2$$

b)

$$P(A\cap M) + [P(C\cap M)-P(A\cap C\cap M)] + [P(A\cap C) - P(A\cap C\cap M)] =$$

$$= 0{,}1+0{,}5-0{,}01+0{,}06-0{,}01 = 0{,}19$$

c)

$$P((C\cup M)\cap\bar{A}) = P((C\cap\bar{A})\cup(M\cap\bar{A})) = P(C\cap\bar{A}) + P(M\cap\bar{A}) - P(M\cap C\cap\bar{A}) =$$

$$= P(C) - P(A\cap C) + P(M) - P(A\cap M) - P(M\cap C) + P(M\cap C\cap A) =$$
$$= 0{,}15-0{,}06+0{,}3-0{,}1-0{,}05+0{,}01 = 0{,}25$$

d)

$$P(M\cup(A\cap C)) = P(M) + P(A\cap C) - P(A\cap C\cap M) = 0{,}3+0{,}6-0{,}01 = 0{,}35$$

e) Es imposible calcularlo, pues en el espacio muestral no se nos indica que ir a pie sea complementario de los tres sucesos indicados. Si se afirmara que nuestro espacio muestral estuviera formado por ir en metro, ir en autobús, ir en coche e ir a pie, podríamos calcular la probabilidad de ir a pie como:

$$P(ir\,a\,pie) = 1 - P(M\cup A\cup C)$$

2. Sean A, B y C tres sucesos de un espacio probabilístico (Ω, A, P), tales que *P(A) = 0,4, P(B) = 0,2, P(C) = 0,3,* $P(A \cap B) = 0{,}1$, $(A \cup B) \cap C = \Phi$. Calcular las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) **Solo ocurre A.**
b) **Ocurren los tres sucesos.**
c) **Ocurren A y B pero no C.**
d) **Por los menos dos ocurren.**
e) **Ocurren dos y no más.**
f) **No ocurren más de dos.**
g) **Ocurre por los menos uno.**
h) **Ocurre solo uno.**
i) **No ocurre ninguno.**

a) Como tenemos que $(A \cup B) \cap C = \Phi$, es claro que cuando A ocurra no ocurrirá C. Por tanto solo tenemos que calcular $P(A \cap \bar{B})$.

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}4 - 0{,}1 = 0{,}3$$

b)

$$(A \cup B) \cap C = \Phi \Rightarrow P((A \cup B) \cap C) = 0$$

Por tanto, es evidente que $P(A \cap B \cap C) = 0$.

c) Tenemos que calcular:

$$P((A \cap B) \cap \bar{C}) = P((A \cap B) - C) = P(A \cap B) - P(A \cap B \cap C) = 0{,}1 - 0 = 0{,}1$$

d)

$$P(A \cap B \cap C) \cup P((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) =$$

$$= P(A \cap B \cap C) + P((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) - P(A \cap B \cap C) = P((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) =$$

$$= P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) - P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap C) =$$

$$= P(A \cap B) = 0{,}1$$

e) Como tenemos que:

$$P((A \cup B) \cap C) = 0$$

La única opción que podemos evaluar es $P(A \cap B) = 0{,}1$.

f) Como vimos en el apartado b), $P(A \cap B \cap C) = 0$, es decir, la probabilidad de que ocurran los tres sucesos es 0.

Por tanto, la probabilidad de que no ocurran más de 2(o la probabilidad de que no ocurran 3) es su complementario.

$$1 - P(A \cap B \cap C) = 1$$

g)

$$P(A\cup B\cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P(B\cap C) + P(A\cap B\cap C) =$$

$$= 0{,}4+0{,}2+0{,}3-0{,}1 = 0{,}8$$

h) Como sabemos que $P((A\cup B)\cap C) = 0$, basta con calcular:

$$P(A\cap \bar{B}) + P(B\cap \bar{A}) + P(C) = P(A) - P(A\cap B) + P(B) - P(A\cap B) + P(C) =$$

$$= 0{,}4-0{,}1+0{,}2-0{,}1+0{,}3 = 0{,}7$$

i) Como ya vimos, la probabilidad de que ocurra por lo menos uno era $P(A\cup B\cup C) = 0{,}8$.

Solamente tenemos que calcular su complementario:

$$1 - P(A\cup B\cup C) = 0{,}2$$

3. Se sacan dos bolas sucesivamente sin devolución de una urna que contiene 3 bolas rojas distinguibles y 2 blancas distinguibles.

a) Describir el espacio de probabilidad asociado a este experimento.
b) Descomponer en sucesos elementales los sucesos: *la primera bola es roja*, *la segunda bola es blanca* y calcular la probabilidad de cada uno de ellos.
c) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra alguno de los sucesos considerados en el apartado anterior?

a) Podemos calcular el número de elementos del espacio de probabilidad Ω sabiendo que no hay repetición (no se devuelve la bola a la urna), se toman 2 bolas por extracción e importa el orden, es decir, una variación sin repetición:

$$V_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$$

b) *A = primera bola roja.*

$$A = \{R1R2, R1R3, R1B1, R1B2, R2R1, R2R3, R2B1, R2B2, R3R1, R3R2, R3B1, R3B2\}$$

A se descompone en 12 sucesos elementales.

B = segunda bola blanca.

$$B = \{R1B1, R1B2, R2B1, R2B2, R3B1, R3B2\}$$

B se descompone en 8 sucesos elementales.

$$P(A) = \frac{12}{20} \qquad P(B) = \frac{8}{20}$$

4. Una urna contiene a bolas blancas y b bolas negras. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer dos bolas simultáneamente sean de distinto color?

Tenemos a bolas blancas y b bolas negras, si sacamos dos simultáneamente, el número de casos posibles y el número de casos favorables a nuestro experimento, se podrá obtener con combinación de elementos sin repetición.

$$P(Colores \;\; distintos) = \frac{\binom{a}{1}\binom{b}{1}}{\binom{a+b}{2}} = \frac{\frac{a!}{(a-1)!}\frac{b!}{(b-1)!}}{\frac{(a+b)!}{2!(a+b-2)!}} = \frac{a \cdot b}{\frac{(a+b)(a+b-1)}{2}} = \frac{2ab}{(a+b)(a+b-1)}$$

5. Una urna contiene 5 bolas blancas y 3 rojas. Se extraen 2 bolas simultáneamente. Calcular la probabilidad de obtener:

a) **Dos bolas rojas.**
b) **Dos bolas blancas.**
c) **Una blanca y otra roja.**

a) Vamos a utilizar la regla de Laplace. Para determinar el número de casos favorables y el número de casos posibles, vamos a hacerlo mediante combinaciones sin repetición, pues no importa el orden en que salgan las bolas y no hay repeticiones, pues no se puede sacar 2 veces la misma bola si extraes dos simultáneamente.

Para los casos favorables usaremos el conjunto formado por las bolas rojas y para los casos posibles el formado por todas las bolas:

$$P(2R) = \frac{C_3^2}{C_8^2} = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{28}$$

b) En este caso en los casos favorables usamos el conjunto formado por las bolas blancas:

$$P(2B) = \frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{5}{14}$$

c)

$$P(una\, blanca\ y\ otra\, roja) = \frac{C_5^1 \cdot C_3^1}{C_8^2} = \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{15}{28}$$

6. En una lotería de 100 billetes hay 2 que tienen premio.

a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar al menos un premio si se compran 12 billetes?

b) ¿Cuántos billetes habrá que comprar para que la probabilidad de ganar al menos un premio sea mayor de 4/5?

a) Sea A = *ganar al menos un premio.* Su complementario, $\bar{A}$, sería no ganar ningún premio, luego:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{C_{98}^{12}}{C_{100}^{12}} = 1 - \frac{\binom{98}{12}}{\binom{100}{12}} = 0{,}227$$

b)

$$P(A) > \frac{4}{5} \Rightarrow P(\bar{A}) < \frac{1}{5}$$

$$P(\bar{A}) < \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{\binom{98}{x}}{\binom{100}{x}} \Leftrightarrow \frac{\frac{98!}{x!(98-x)!}}{\frac{100!}{x!(100-x)!}} < \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{(100-x)(99-x)}{99\cdot 100} < \frac{1}{5}$$

$$(100-x)(99-x) < 1980 \Leftrightarrow x^2-199x+7920 < 0$$

$$x_1 = 144(\mathit{imposible}) \qquad x_2 = 55$$

Habrá que comprar al menos 56 billetes de lotería.

7. Se consideran los 100 primeros números naturales. Se sacan 3 al azar.

a) **¿Cuál es la probabilidad de que en los 3 números obtenidos no exista ningún cuadrado perfecto?**
b) **Calcular la probabilidad de que exista al menos un cuadrado perfecto.**
c) **Calcular la probabilidad de que exista un sólo cuadrado perfecto, de que existan dos, y la de que los tres lo sean.**

a) En los 100 primeros números naturales hay 10 cuadrados perfectos. Por tanto, haciendo uso de combinaciones sin repetición, podemos calcular la probabilidad de que no exista ningún cuadrado perfecto entre los tres que saquemos al azar.

$$P(\textit{Ningún cuadrado perfecto}) = \frac{\binom{90}{3}}{\binom{100}{3}} = 0{,}7265$$

b) La probabilidad de que salga al menos un cuadrado perfecto será el complementario de la que hemos calculado anteriormente.

$$P(\textit{Al menos uno}) = 1 - P(\textit{Ningún cuadrado perfecto}) = 0{,}2735$$

c) Para hacer estos tres, hacemos uso de combinatoria, como en el primer ejercicio.

$$P(\textit{Un cuadrado perfecto}) = \frac{\binom{10}{1}\binom{90}{2}}{\binom{100}{3}} = 0{,}2477$$

Como se puede observar, extraemos una bola de los 10 cuadrados, y dos de las 90 bolas restantes. Para los siguientes apartados, procedemos de igual forma.

$$P(\textit{Dos cuadrados perfectos}) = \frac{\binom{10}{2}\binom{90}{1}}{\binom{100}{3}} = 0{,}02504$$

$$P(\textit{Tres cuadrados perfectos}) = \frac{\binom{10}{3}}{\binom{100}{3}} = 0{,}0007421$$

8. En una carrera de relevos cada equipo se compone de 4 atletas. La sociedad deportiva de un colegio cuenta con 10 corredores y su entrenador debe formar un equipo de relevos que disputará el campeonato, y el orden en que participarán los seleccionados.

a) **¿Entre cuántos equipos distintos habrá de elegir el entrenador si los 10 corredores son de igual valía? (Dos equipos con los mismos atletas en orden distinto se consideran diferentes).**
b) **Calcular la probabilidad de que una alumno cualquiera sea seleccionado.**

a) Para ver cuántos equipos distintos tendrá el entrenador para elegir, hay que notar que nos encontramos frente a una variación sin repetición:

$$V_{10}^{4} = \frac{10!}{(10-4)!} = 5040$$

El entrenador podrá elegir entre 5040 posibles equipos para el campeonato de relevos.

b) Lo que vamos a hacer es elegir que atleta va al equipo y vamos a formar todos los equipos posibles con ese atleta dentro del equipo, teniendo en cuenta, como antes, que son variaciones sin repetición:

A = ir seleccionado un alumno cualquiera

$$P(A) = \frac{V_4^1 \cdot V_9^3}{V_{10}^4} = \frac{\frac{4!}{3!} \cdot \frac{9!}{6!}}{5040} = 0{,}4$$

9. Una tienda compra bombillas en lotes de 300 unidades. Cuando un lote llega, se comprueban 60 unidades elegidas al azar, rechazándose el envío si se supera la cifra de 5 defectuosas. ¿Cuál es la probabilidad de aceptar un lote en el que haya 10 defectuosas?

Buscamos la probabilidad de *P($A_{i:}$ i defectuosas en el lote de 60)* $i = 0,\dots,5$. Para ello, hacemos uso de combinaciones sin repetición. Partimos de que hay 10 defectuosas, entonces, si de esas diez tomamos un numero de bombillas del 0 al 5, ambos inclusive, la caja será aceptada con 10 bombillas defectuosas.

$$P(A_i) = \frac{\binom{10}{i}\binom{290}{60-i}}{\binom{300}{60}} = \frac{1}{\binom{300}{60}}\sum_{i=0}^{5}\binom{10}{i}\binom{290}{60-i} \approx 0{,}9944$$

10. Una secretaria debe echar al correo 3 cartas; para ello, introduce cada carta en un sobre y escribe las direcciones al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una carta llegue a su destino?

Para hacer los casos favorables y posibles de este problema haré uso de permutaciones sin repetición, puesto que importa el orden e intervienen todos los elementos.

$$La\ carta\ i\ está\ dentro\ del\ sobre\ i = A_i \Rightarrow llega\ a\ su\ destino \quad i = 1,\dots,3$$

Que al menos una carta llegue a su destino se traduce en:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$$P(A_1) = \frac{P_2}{P_3} = \frac{2!}{3!} = \frac{1}{3} = P(A_2) = P(A_3)$$

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{P_3} = \frac{1}{3!} = P(A_2 \cap A_3) = P(A_1 \cap A_3)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{P_3} = \frac{1}{3!}$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \frac{3 \cdot 1}{3} - \frac{3 \cdot 1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$