10. Si X es una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}, \quad -\infty < x < \infty,$$

hallar su función de distribución y las probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:

a) $\{|X| \leq 2\}$.

b) $\{|X| \leq 2 \quad \text{ó} \quad X \geq 0\}$.

c) $\{|X| \leq 2 \quad \text{y} \quad X \leq -1\}$.

d) $\{X^3 - X^2 - X - 2 \leq 0\}$.

e) $\{X \text{ es irracional}\}$.

Al tener un valor absoluto, podemos dividir la función de densidad en dos trozos:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x}}{2} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{e^{-x}}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Luego la función de distribución será:

$$F(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\frac{e^{x}}{2} & \text{si } x<0\\[2ex] \displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{x}}{2}+\int_{0}^{x}\frac{e^{-x}}{2} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{x}\frac{e^{t}}{2}dt=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}e^{t}dt=\frac{1}{2}e^{t}\Big]_{-\infty}^{x}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-\infty}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{x}-\underbrace{\frac{1}{e^{\infty}}}_{0}\right)=\frac{1}{2}e^{x}$$

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{t}}{2}dt=\frac{1}{2}e^{t}\Big]_{-\infty}^{0}=\frac{1}{2}\left(e^{0}-\underbrace{\frac{1}{e^{\infty}}}_{0}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\int_0^x \frac{e^{-t}}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^x e^{-t}\,dt = \frac{1}{2}\left(-e^{-t}\right)\Big]_0^x =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-e^{-x} + e^{0}\right) = -\frac{e^{-x}}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{t}}{2}\,dt + \int_0^x \frac{e^{-t}}{2}\,dt = \frac{1}{2} - \frac{e^{-x}}{2} + \frac{1}{2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}e^{-x}$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x} & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) $\{|X| \leq 2\}$

$P(|X| \leq 2) = P(-2 \leq X \leq 2) =$

$= F(2) - F(-2) = 1 - \frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{2}e^{-2} =$

$= 0,86467$

b) $\{|X| \leq 2$ o $X \geq 0\}$

$P((-2 \leq X \leq 2) \cup (X \geq 0)) =$

$= P(X \geq -2) = 1 - P(X < -2) = 1 - F(-2) =$

$= 1 - \frac{1}{2}e^{-2} = 0,93233$

c) $\{|X| \leq 2$ y $X \leq -1\}$

$P((-2 \leq X \leq 2) \cap (X \leq -1)) =$

$$= P(-2 \leq X \leq -1) = F(-1) - F(-2) =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-1} - \frac{1}{2} e^{-2} = 0,11627$$

d) $\{X^3 - X^2 - X - 2 \leq 0\}$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & & 2 & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$$X^2 + X + 1 = 0$$

$$X = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$ No tiene sol

Luego tendremos que calcular:

$$P(X \leq 2) = F(2) = 1 - \frac{1}{2} e^{-2} = 0,93233$$

e) {X es irracional}

La probabilidad de que la variable aleatoria X tome un valor irracional es 1, debido a que los irracionales son un conjunto no numerable, frente a los racionales que sí lo son, por lo que hay infinitamente más irracionales que racionales.