Estadística Descriptiva e Introducción a la Probabilidad

Juan Antonio Maldonado Jurado

Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Universidad de Granada

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas. 2014/15

Tema 6. Algunos modelos de distribuciones discretas

- Introducción
- Distribución degenerada
- Distribución uniforme discreta
- Distribución de Bernoulli
- Distribución Binomial
- Distribución Binomial Negativa
- Distribución Hipergeométrica
- Distribución de Poisson

Introducción: Modelos de distribuciones y sus aplicaciones

Una vez expuesta la teoría general sobre variables aleatorias y sus distribuciones de probabilidad, vamos a describir algunas distribuciones particulares que han demostrado, empíricamente, ser modelos apropiados para situaciones que ocurren en la vida real. A pesar de ello tales distribuciones presentan un carácter teórico en el sentido de que sus funciones de probabilidad o de densidad se deducen matemáticamente en base a ciertas hipótesis que se suponen válidas para los fenómenos aleatorios.

La elección de una distribución de probabilidad para representar un fenómeno de interés práctico debe estar motivada tanto por la comprensión de la naturaleza del fenómeno en sí, como por la posible verificación de la distribución seleccionada a través de la evidencia empírica. En todo momento debe evitarse aceptar de manera tácita una determinada distribución de probabilidad como modelo de un problema práctico.

Una distribución de probabilidad está caracterizada, de forma general, por una o más cantidades que reciben el nombre de parámetros de la distribución. Un parámetro puede tomar cualquier valor de un conjunto dado y, en ese sentido, se define una familia de distribuciones de probabilidad que tendrán la misma función genérica de probabilidad o función de densidad.

6.1 Distribución degenerada

La distribución discreta más sencilla es la correspondiente a una variable aleatoria degenerada o constante, es decir, la asociada a un experimento aleatorio que da lugar siempre al mismo resultado. Por tanto, dicha variable aleatoria tomará un único valor c.

Su **función masa de probabilidad** es

$$P[X = x] = \begin{cases} 1 & x = c \\ 0 & x \neq c \end{cases}$$

Algunas de sus características son:

- **Función de distribución**:

$$F(x) = P[X \leq x] = \begin{cases} 0 & x < c \\ 1 & x \geq c \end{cases}$$

6.1 Distribución degenerada

- **Momentos no centrados**:

$$m_k = E[X^k] = c^k \mathrm{P}[X = c] = c^k, \qquad k = 1, 2, \cdots$$

Y, en particular, la MEDIA

$$\mathrm{E}[X] = c.$$

- **Momentos centrados**:

$$\mu_k = E[(X - c)^k] = 0, \qquad k = 1, 2, \cdots$$

Y, en particular, la VARIANZA

$$\mathrm{Var}[X] = 0.$$

Esta propiedad caracteriza a las distribuciones degeneradas; es decir, una variable aleatoria tiene varianza cero si y solamente si es degenerada en un punto (Propiedades de la varianza).

- **Función generatriz de momentos**:

$$M(t) = E[\mathrm{e}^{tX}] = \mathrm{e}^{tc} \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

6.2 Distribución uniforme discreta

Esta es la distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta que toma un número finito de valores que son equiprobables y se utiliza para modelizar variables aleatorias asociadas a experimentos aleatorios que tienen un número finito de posibles resultados equiprobables. Su **función masa de probabilidad** es

$$\mathrm{P}[X = x_i] = \begin{cases} \frac{1}{n} & i = 1, 2, \cdots, n \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Se dice entonces que la variable aleatoria X se distribuye uniformemente sobre los puntos $x_1, x_2, \cdots, x_n$ y se notará $X \sim U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Algunas de sus características son:

- **Función de distribución**:

$$F(x) = \frac{1}{n}(\text{Número de valores } x_i \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_1 \\ \frac{1}{n} & \text{si } x_1 \leq x < x_2 \\ \vdots & \\ \frac{n-1}{n} & \text{si } x_{n-1} \leq x < x_n \\ 1 & \text{si } x \geq x_n \end{cases}$$

6.2 Distribución uniforme discreta

- **Momentos no centrados**:

$$m_k = \mathrm{E}[X^k] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k, \qquad k = 1, 2, \cdots$$

Y, en particular, la MEDIA

$$\mathrm{E}[X] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}.$$

- **Momentos centrados**:

$$\mu_k = \mathrm{E}[(X - EX)^k] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^k, \qquad k = 1, 2, \cdots$$

Y, en particular, la VARIANZA

$$\mathrm{Var}[X] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2.$$

- **Función generatriz de momentos**:

$$M(t) = \mathrm{E}[\mathrm{e}^{tX}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{tx_i} \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

6.2 Distribución uniforme discreta

En el caso particular $x_i = i, \; i = 1, 2, \ldots, n$

$$E[X] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

$$E[X^2] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{Var}[X] = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n^2-1}{12}$$

6.3 Distribución de Bernoulli

Supongamos un experimento aleatorio que da lugar, únicamente, a dos posibles resultados que son mutuamente excluyentes y exhaustivos, que denotaremos por éxito (E), que será el suceso objeto de estudio, y fracaso (F), que es el complementario de E.
A este tipo de experimentos aleatorios se les llama **experimentos o pruebas de Bernoulli**.
Asociado a un experimento o prueba de Bernoulli y a su correspondiente espacio muestral $\Omega = \{E, F\}$, se define la variable aleatoria con distribución de Bernoulli como

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si ocurre el suceso } E \\ 0 & \text{si no ocurre el suceso } E \text{ (ocurre } F) \end{cases}$$

Si se denota por p a la probabilidad del suceso éxito (E), su función masa de probabilidad es

$$\begin{gathered} \mathrm{P}[X=1] = p \\ \mathrm{P}[X=0] = 1-p \end{gathered}$$

o bien, $\mathrm{P}[X=x] = p^x(1-p)^{1-x}; \quad x = 0, 1; \quad 0 < p < 1$ y se notará $X \sim B(1, p)$.
$\mathrm{E}[X] = p$, $\mathrm{E}[X^2] = p$, $\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2 = p - p^2 = p(1-p)$

6.4 Distribución binomial

Se dice que una variable aleatoria X sigue una **distribución binomial** de parámetros n y p, $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$ si modela el número de éxitos en n repeticiones independientes de un ensayo de Bernoulli con probabilidad p de éxito, manteniéndose ésta constante en las n repeticiones del experimento. Su función masa de probabilidad es

$$\mathrm{P}[X = x] = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \qquad x = 0, 1, \cdots, n.$$

Se notará como $X \sim B(n,p)$.

$$\mathrm{E}[X] = np; \;\; \mathrm{Var}[X] = np(1-p)$$

Propiedad de simetría.- Si $X \sim B(n,p)$, entonces la variable aleatoria que contabiliza el número de fracasos, $Y = n - X \sim B(n, 1-p)$ y, además

$$\mathrm{P}[X = x] = \mathrm{P}[Y = n - x]$$

6.4 Distribución binomial

Modelos probabilísticos discretos

Distribución Binomial

Distribución Binomial ***B(n,p)***

Valores: $P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k};\quad k=0,1,2,3,\ldots,n$

n	k p	0.01	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	1/3	0.35	0.40	0.45	0.49	0.50
2	0	0.9801	0.9025	0.8100	0.7225	0.6400	0.5625	0.4900	0.4444	0.4225	0.3600	0.3025	0.2601	0.2500
	1	0.0198	0.0950	0.1800	0.2550	0.3200	0.3750	0.4200	0.4444	0.4550	0.4800	0.4950	0.4998	0.5000
	2	0.0001	0.0025	0.0100	0.0225	0.0400	0.0625	0.0900	0.1111	0.1225	0.1600	0.2025	0.2401	0.2500
3	0	0.9703	0.8574	0.7290	0.6141	0.5120	0.4219	0.3430	0.2963	0.2746	0.2160	0.1664	0.1327	0.1250
	1	0.0294	0.1354	0.2430	0.3251	0.3840	0.4219	0.4410	0.4444	0.4436	0.4320	0.4084	0.3823	0.3750
	2	0.0003	0.0071	0.0270	0.0574	0.0960	0.1406	0.1890	0.2222	0.2389	0.2880	0.3341	0.3674	0.3750
	3	0.0000	0.0001	0.0010	0.0034	0.0080	0.0156	0.0270	0.0370	0.0429	0.0640	0.0911	0.1176	0.1250
4	0	0.9606	0.8145	0.6561	0.5220	0.4096	0.3164	0.2401	0.1975	0.1785	0.1296	0.0915	0.0677	0.0625
	1	0.0388	0.1715	0.2916	0.3685	0.4096	0.4219	0.4116	0.3951	0.3845	0.3456	0.2995	0.2600	0.2500
	2	0.0006	0.0135	0.0486	0.0975	0.1636	0.2109	0.2646	0.2963	0.3105	0.3456	0.3675	0.3747	0.3750
	3	0.0000	0.0005	0.0036	0.0115	0.0256	0.4609	0.0756	0.0988	0.1115	0.1536	0.2005	0.2400	0.2500
	4	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0016	0.0039	0.0081	0.0123	0.0150	0.0256	0.0410	0.0576	0.0625
5	0	0.9510	0.7738	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1317	0.1160	0.0778	0.0503	0.0345	0.0312
	1	0.0480	0.2036	0.3280	0.3915	0.4096	0.3855	0.3602	0.3292	0.3124	0.2592	0.2059	0.1657	0.1562
	2	0.0010	0.0214	0.0729	0.1382	0.2048	0.2637	0.3087	0.3292	0.3364	0.3456	0.3369	0.3185	0.3125
	3	0.0000	0.0011	0.0081	0.0244	0.0512	0.0879	0.1323	0.1646	0.1811	0.2304	0.2757	0.3060	0.3125
	4	0.0000	0.0000	0.0004	0.0022	0.0064	0.0146	0.0284	0.0412	0.0488	0.0768	0.1128	0.1470	0.1562
	5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010	0.0024	0.0041	0.0053	0.0102	0.0185	0.0283	0.0312
6	0	0.9415	0.7351	0.5314	0.3771	0.2621	0.1780	0.1176	0.0878	0.0754	0.0467	0.0277	0.0176	0.0156
	1	0.0571	0.2321	0.3543	0.3993	0.3932	0.3560	0.3025	0.2634	0.2437	0.1866	0.1359	0.1014	0.0938
	2	0.0014	0.0305	0.0984	0.1762	0.2458	0.2966	0.3241	0.3292	0.3280	0.3110	0.2780	0.2437	0.2344
	3	0.0000	0.0021	0.0146	0.0415	0.0819	0.1318	0.1852	0.2195	0.2355	0.2765	0.3032	0.3121	0.3125
	4	0.0000	0.0001	0.0012	0.0055	0.0154	0.0330	0.0595	0.0823	0.0951	0.1382	0.1861	0.2249	0.2344
	5	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0015	0.0044	0.0102	0.0165	0.0205	0.0369	0.0609	0.0864	0.0938
	6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0007	0.0014	0.0018	0.0041	0.0083	0.0139	0.0156
7	0	0.9321	0.6983	0.4783	0.3206	02097	0.1335	0.0824	0.0585	0.0490	0.0280	0.0152	0.0090	0.0078
	1	0.0659	0.2573	0.3720	0.3960	0.3670	0.3115	0.2471	0.2048	0.1848	0.1306	0.0872	0.0603	0.0574
	2	0.0020	0.0406	0.1240	0.2097	0.2753	0.3115	0.3177	0.3073	0.2985	0.2613	0.2140	0.1740	0.1641
	3	0.0000	0.0036	0.0230	0.0617	0.1147	0.1730	0.2269	0.2561	0.2679	0.2903	0.2918	0.2786	0.2734
	4	0.0000	0.0002	0.0026	0.0109	0.0287	0.0577	0.0972	0.1280	0.1442	0.1935	0.2388	0.2676	0.2734
	5	0.0000	0.0000	0.0002	0.0012	0.0043	0.0115	0.0250	0.0384	0.0466	0.0774	0.1172	0.1543	0.1641
	6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0013	0.0036	0.0064	0.0084	0.0172	0.0320	0.0494	0.0547
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0005	0.0006	0.0016	0.0037	0.0068	0.0078
8	0	0.9227	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.0390	0.0319	0.0168	0.0084	0.0046	0.0039
	1	0.0746	0.2793	0.3826	0.3847	0.3355	0.2670	0.1977	0.1561	0.1373	0.0896	0.0548	0.0352	0.0312
	2	0.0026	0.0515	0.1488	0.2376	0.2936	0.3115	0.2965	0.2731	0.2587	0.2090	0.1569	0.1183	0.1094
	3	0.0001	0.0054	0.0331	0.0839	0.1468	0.2076	0.2541	0.2731	0.2786	0.2787	0.2568	0.2273	0.2188
	4	0.0000	0.0004	0.0046	0.0185	0.0459	0.0865	0.1361	0.1707	0.1875	0.2322	0.2627	0.2730	0.2734
	5	0.0000	0.0000	0.0004	0.0026	0.0092	0.0231	0.0467	0.0683	0.0808	0.1239	0.1719	0.2098	0.2188
	6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0038	0.0100	0.0171	0.0217	0.0413	0.0703	0.1008	0.1094
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0012	0.0024	0.0033	0.0079	0.0164	0.0277	0.0312
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0002	0.0007	0.0017	0.0033	0.0039
9	0	0.9135	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0260	0.0207	0.0101	0.0046	0.0023	0.0020
	1	0.0830	0.2985	0.3874	0.3679	0.3020	0.2253	0.1556	0.1171	0.1004	0.0605	0.0339	0.0202	0.0176
	2	0.0034	0.0629	0.1722	0.2597	0.3020	0.3003	0.2688	0.2341	0.2162	0.1612	0.1110	0.0776	0.0703
	3	0.0001	0.0077	0.0446	0.1069	0.1762	0.2336	0.2668	0.2731	0.2716	0.2508	0.2119	0.1739	0.1641
	4	0.0000	0.0006	0.0074	0.0283	0.0661	0.1168	0.1715	0.2048	0.2194	0.2508	0.2600	0.2506	0.2461
	5	0.0000	0.0000	0.0008	0.0050	0.0165	0.0389	0.0735	0.1024	0.1181	0.1672	0.2128	0.2408	0.2461
	6	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0028	0.0087	0.0210	0.0341	0.0424	0.0743	0.1160	0.1542	0.1641
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0012	0.0039	0.0073	0.0098	0.0212	0.0407	0.0635	0.0703
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0009	0.0013	0.0035	0.0083	0.0153	0.0176
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0003	0.0008	0.0016	0.0020
10	0	0.9044	0.5987	0.3487	0.1969	0.1074	0.0563	0.0282	0.0173	0.0135	0.0060	0.0025	0.0012	0.0010
	1	0.0914	0.3151	0.3874	0.3474	0.2684	0.1877	0.1211	0.0867	0.0725	0.0403	0.0207	0.0114	0.0098
	2	0.0042	0.0746	0.1937	0.2759	0.3020	0.2816	0.2335	0.1951	0.1757	0.1209	0.0763	0.0495	0.0439
	3	0.0001	0.0105	0.0574	0.1298	0.2013	0.2503	0.2668	0.2601	0.2522	0.2150	0.1665	0.1267	0.1172
	4	0.0000	0.0010	0.0112	0.0401	0.0881	0.1460	0.2001	0.2276	0.2377	0.2508	0.2384	0.2130	0.2051
	5	0.0000	0.0001	0.0015	0.0085	0.0264	0.0584	0.1029	0.1366	0.1536	0.2007	0.2340	0.2456	0.2461
	6	0.0000	0.0000	0.0001	0.0012	0.0055	0.0162	0.0368	0.0596	0.0689	0.1115	0.1596	0.1966	0.2051
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0008	0.0031	0.0090	0.0163	0.0212	0.0425	0.0746	0.1080	0.1172
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0014	0.0030	0.0043	0.0106	0.0229	0.0389	0.0439
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0005	0.0016	0.0042	0.0083	0.0098
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0008	0.0010

6.5 Distribución binomial negativa

Consideremos un experimento aleatorio consistente en repeticiones independientes de ensayos de Bernoulli con probabilidad de éxito constante, hasta que aparezca el éxito r-ésimo. Es decir, en lugar de fijar el número de ensayos y observar el número de éxitos en esas realizaciones, se repiten las realizaciones hasta obtener un número determinado de éxitos y contabilizamos los fracasos.

Definimos la variable aleatoria con **distribución binomial negativa** como aquella que modela el número de fracasos antes de que aparezca el éxito r-ésimo.
La variable aleatoria X puede tomar los valores $x = 0, 1, 2, \ldots$ y r será un entero positivo; es decir, $r = 1, 2, \ldots$.
la función masa de probabilidad de esta variable aleatoria es

$$\mathrm{P}[X = x] = \binom{x + r - 1}{x}(1-p)^x p^r, \qquad x = 0, 1, 2, \cdots \quad (r = 1, 2, \cdots; \quad 0 < p < 1)$$

y se notará como $X \sim BN(r, p)$.

$\mathrm{E}[X] = \frac{r(1-p)}{p}$; $\mathrm{Var}[X] = \frac{r(1-p)}{p^2}$

6.6 Distribución Hipergeométrica

Supongamos una población de N individuos divididos en dos categorías de N_1 y $N_2 = N - N_1$ individuos cada uno. Se elige una muestra de n individuos de la población (sin reemplazamiento o simultáneamente). La variable aleatoria X que contabiliza el número de individuos de la 1^a categoría en la muestra se dice que tiene distribución **hipergeométrica** de parámetros N, N_1 y n y se nota

$$X \sim H(N, N_1, n), \qquad n, N_1, N \in \mathbb{N} - \{0\}, \; n, N_1 \leq N$$

La función masa de probabilidad de esta variable aleatoria es

$$\mathrm{P}[X = x] = \frac{\binom{N_1}{x}\binom{N-N_1}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad \text{máx}(0, n - (N - N_1)) \leq x \leq \text{mín}(n, N_1)$$

$\mathrm{E}[X] = np$; $\quad \mathrm{Var}[X] = \frac{n(N-n)N_1(N-N_1)}{N^2(N-1)}$

6.7 Distribución de Poisson

Representa el número de ocurrencias de un determinado suceso durante un periodo de tiempo fijo o en una región fija del espacio, cuando el número de ocurrencias sigue unas determinadas pautas:

- El número de ocurrencias en un intervalo o región especificada debe ser independiente del número de ocurrencias en cualquier otro intervalo o región.
- Si se considera un intervalo de tiempo muy pequeño (o una región muy pequeña), la probabilidad de una ocurrencia es proporcional a la longitud del intervalo (al volumen de la región) y la probabilidad de dos o más ocurrencias es prácticamente nula (despreciable).

Con estas consideraciones, si por X_t denotamos el número de ocurrencias del suceso en un intervalo de longitud t (región de volumen t), puede probarse que

$$\mathrm{P}\{X_t = k\} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \ \lambda > 0$$

La colección de variables aleatorias $\{X_t;\ t \geq 0\}$ constituyen lo que se denomina un PROCESO DE POISSON y cada variable X_t se dice que tiene una distribución de Poisson de parámetro λt.
En particular, la variable aleatoria que especifica el número de ocurrencias en un intervalo de longitud unidad (o región de volumen unidad), se dice que tiene una distribución de Poisson de parámetro λ y se nota $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.
Su **función masa de probabilidad** es

$$\mathrm{P}[X = x] = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \qquad x = 0, 1, \ldots, \ \lambda > 0$$

$\mathrm{E}[X] = \lambda;\quad \mathrm{Var}[X] = \lambda$

6.7 Distribución de Poisson

Distribución de Poisson $P(\lambda)$

Valores: $P\{X=k\}=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!};\quad k=0,1,2,3,\ldots$

λ \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0.1	0.9048	0.0905	0.0045	0.0002	0.0000								
0.2	0.8187	0.1637	0.0164	0.0011	0.0001	0.0000							
0.3	0.7408	0.2222	0.0333	0.0033	0.0002	0.0000							
0.4	0.6703	0.2681	0.0536	0.0072	0.0007	0.0001	0.0000						
0.5	0.6065	0.3033	0.0758	0.0126	0.0016	0.0002	0.0000						
0.6	0.5488	0.3293	0.0988	0.0198	0.0030	0.0004	0.0000	0.0000					
0.7	0.4966	0.3476	0.1217	0.0284	0.0050	0.0007	0.0001	0.0000					
0.8	0.4493	0.3595	0.1438	0.0383	0.0077	0.0012	0.0002	0.0000					
0.9	0.4066	0.3659	0.1647	0.0494	0.0111	0.0020	0.0003	0.0001	0.0000				
1.0	0.3679	0.3679	0.1839	0.0613	0.0153	0.0031	0.0005	0.0000	0.0000				
1.1	0.3329	0.3662	0.2014	0.0738	0.0203	0.0045	0.0008	0.0001	0.0000				
1.2	0.3012	0.3614	0.2169	0.0867	0.0260	0.0062	0.0012	0.0002	0.0000				
1.3	0.2725	0.3543	0.2303	0.0998	0.0324	0.0084	0.0018	0.0003	0.0001	0.0000			
1.4	0.2466	0.3452	0.2417	0.1128	0.0395	0.0111	0.0026	0.0005	0.0001	0.0000			
1.5	0.2231	0.3347	0.2510	0.1255	0.0471	0.0141	0.0035	0.0008	0.0001	0.0000			
1.6	0.2019	0.3230	0.2584	0.1378	0.0551	0.0176	0.0047	0.0011	0.0002	0.0000			
1.7	0.1827	0.3106	0.2640	0.1496	0.0636	0.0216	0.0061	0.0015	0.0003	0.0001	0.0000		
1.8	0.1653	0.2975	0.2678	0.1607	0.0723	0.0260	0.0078	0.0020	0.0005	0.0001	0.0000		
1.9	0.1496	0.2842	0.2700	0.1710	0.0812	0.0309	0.0098	0.0027	0.0006	0.0001	0.0000		
2.0	0.1353	0.2707	0.2707	0.1804	0.0902	0.0361	0.0120	0.0034	0.0009	0.0002	0.0000		
2.2	0.1108	0.2438	0.2681	0.1966	0.1082	0.0476	0.0174	0.0055	0.0015	0.0004	0.0001	0.0000	
2.4	0.0907	0.2177	0.2613	0.2090	0.1254	0.0602	0.0241	0.0083	0.0025	0.0007	0.0002	0.0000	
2.6	0.0743	0.1931	0.2510	0.2176	0.1414	0.0735	0.0319	0.0118	0.0038	0.0011	0.0003	0.0001	0.0000
2.8	0.0608	0.1703	0.2384	0.2225	0.1557	0.0872	0.0407	0.0163	0.0057	0.0018	0.0005	0.0001	0.0000
3.0	0.0498	0.1494	0.2240	0.2240	0.1680	0.1008	0.0504	0.0216	0.0081	0.0027	0.0008	0.0002	0.0001
3.2	0.0408	0.1304	0.2087	0.2226	0.1781	0.1140	0.0608	0.0278	0.0111	0.0040	0.0013	0.0004	0.0001
3.4	0.0334	0.1135	0.1929	0.2186	0.1858	0.1264	0.0176	0.0348	0.0148	0.0056	0.0019	0.0006	0.0002
3.6	0.0273	0.0984	0.1771	0.2125	0.1912	0.1377	0.0826	0.0425	0.0191	0.0076	0.0028	0.0009	0.0003
3.8	0.0224	0.0850	0.1615	0.2046	0.1944	0.1477	0.0936	0.0508	0.0241	0.0102	0.0039	0.0013	0.0004
4.0	0.0183	0.0733	0.1465	0.1954	0.1954	0.1563	0.1042	0.0595	0.0298	0.0132	0.0053	0.0019	0.0006
5.0	0.0067	0.0337	0.0842	0.1404	0.1755	0.1755	0.1462	0.1044	0.0653	0.0363	0.0181	0.0082	0.0034
6.0	0.0025	0.0149	0.0446	0.0892	0.1339	0.1606	0.1606	0.1377	0.1033	0.0688	0.0413	0.0225	0.0113
7.0	0.0009	0.0064	0.0223	0.0521	0.0912	0.1277	0.1490	0.1490	0.1304	0.1014	0.0710	0.0452	0.0264
8.0	0.0003	0.0027	0.0107	0.0286	0.0573	0.0916	0.1221	0.1396	0.1396	0.1241	0.0993	0.0722	0.0481
9.0	0.0001	0.0011	0.0050	0.0157	0.0337	0.0607	0.0911	0.1171	0.1318	0.1381	0.1186	0.0970	0.0728
10.0	0.0000	0.0005	0.0023	0.0076	0.0189	0.0378	0.0631	0.0901	0.1126	0.1251	0.1251	0.1137	0.0948

λ \ k	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
5.0	0.0013	0.0005	0.0002									
6.0	0.0052	0.0022	0.0009	0.0003	0.0001							
7.0	0.0142	0.0071	0.0033	0.0014	0.0006	0.0002	0.0001					
8.0	0.0296	0.0169	0.0090	0.0045	0.0021	0.0009	0.0004	0.0002	0.0001			
9.0	0.0504	0.0324	0.0193	0.0109	0.0058	0.0029	0.0014	0.0006	0.0003	0.0001		
10.0	0.0729	0.0521	0.0347	0.0217	0.0128	0.0071	0.0037	0.0019	0.0009	0.0004	0.0002	0.0001