# Grado en Matemáticas

## Examen de Cálculo I - Grupo B - Convocatoria de septiembre de 2013

**1.** Sean $A$ y $B$ conjuntos no vacíos de números reales positivos y $C = \left\{ \dfrac{a^2}{b} : a \in A,\ b \in B \right\}$. Supongamos que $A$ está mayorado y que $\text{ínf}(B) > 0$. Prueba que $\sup(C) = \dfrac{\alpha^2}{\beta}$ donde $\alpha = \sup(A)$ y $\beta = \text{ínf}(B)$.

**2.** Estudia la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ definida por por $x_1 = 2$, y para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = \frac{3x_n + 5}{x_n + 3}.$$

**3.** Calcula, enunciando en cada caso el resultado teórico que aplicas, los límites de las sucesiones:

$$\textbf{a)}\ x_n = \left( \frac{2\sqrt[n]{3} + 3\sqrt[n]{2}}{5} \right)^n ; \quad \textbf{b)}\ y_n = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}}{\sqrt{n^3}}.$$

**4.** Estudia, enunciando en cada caso los resultados teóricos que aplicas, la convergencia absoluta y la convergencia de las series:

$$\textbf{a)}\ \sum_{n \geqslant 1} \left( \frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \ldots (2n+2)}{9 \cdot 11 \cdot 13 \ldots (2n+7)} \right)^{\frac{1}{2}} ; \qquad \textbf{b)}\ \sum_{n \geqslant 1} (-1)^{n+1} \frac{\log(n+2)}{n+2}.$$

**5.** Sea $f : ]-1, 1] \to \mathbb{R}$ la función dada para todo $x \in ]-1, 1]$ por $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{\sqrt{1+x}}}$.

**a)** Calcula, haciendo uso del teorema del valor intermedio que debes enunciar, el conjunto $f(]-1,1])$.
**b)** Calcula, usando un resultado sobre continuidad y monotonía que debes enunciar, el conjunto $f([-1/2, 1/2])$.

**6.** Desarrolla uno de los temas siguientes:

Teorema de complitud de $\mathbb{R}$.
Teorema del valor intermedio para funciones continuas.

**7.** Explica si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas.

**a)** Toda función definida en un intervalo cuya imagen es un intervalo es continua.
**b)** Si $f$ es una función estrictamente monótona definida en un intervalo su función inversa es continua.
**c)** Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función inyectiva y continua en un intervalo no vacío $I$ entonces $f^{-1}$ es continua en $J = f(I)$.
**d)** Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función inyectiva, $I$ es un intervalo y $J = f(I)$ es un intervalo entonces su función inversa $f^{-1}$ es continua en $J$.

**Nota.** Los ejercicios 1 a 6 valen cada uno 1,5 puntos. Cuando un ejercicio tiene dos apartados cada uno de ellos vale 0,75 puntos. Cada apartado del ejercicio 7 vale 0,25 puntos.

Granada, 2 de septiembre de 2013

# Grado en Matemáticas

## Examen de Cálculo I - Grupo B - Convocatoria de febrero 2013

## Soluciones

**Ejercicio 1.** Sean $A$ y $B$ conjuntos no vacíos de números reales tales que $B \subset \mathbb{R}^+$ y $A$ está mayorado. Sea $\alpha = \sup(A)$ y $\beta = \text{ínf}(B)$. Supongamos que $\alpha < \beta^2$. Definamos:

$$C = \left\{ \frac{1}{b^2 - a} \,:\, b \in B,\, a \in A \right\}$$

Prueba que $\sup(C) = \dfrac{1}{\beta^2 - \alpha}$.

**Solución.** Para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$ se verifica que:

$$\left.\begin{array}{r} a \leqslant \alpha \\ 0 \leqslant \beta \leqslant b \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{c} -\alpha \leqslant -a \\ \beta^2 \leqslant b^2 \end{array}\right\} \implies 0 < \beta^2 - \alpha \leqslant b^2 - a \implies \frac{1}{b^2 - a} \leqslant \frac{1}{\beta^2 - \alpha}$$

Hemos probado así que $\dfrac{1}{\beta^2 - \alpha}$ es un mayorante de $C$. Sea $\gamma = \sup(C)$. Por definición de supremo, tenemos que $\gamma \leqslant \dfrac{1}{\beta^2 - \alpha}$.

Por otra parte, para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$ se verifica que:

$$0 < \frac{1}{b^2 - a} \leqslant \gamma \implies \frac{1}{\gamma} \leqslant b^2 - a \implies a \leqslant b^2 - \frac{1}{\gamma}$$

Esta última desigualdad nos dice que para cada $b \in B$ el número $b^2 - \dfrac{1}{\gamma}$ es un mayorante de $A$, luego, por definición de supremo, ha de ser $\alpha \leqslant b^2 - \dfrac{1}{\gamma}$.

Deducimos que para todo $b \in B$ se verifica que $\alpha + \dfrac{1}{\gamma} \leqslant b^2$. Como $\alpha + \dfrac{1}{\gamma} \geqslant \alpha + \beta^2 - \alpha = \beta^2 \geqslant 0$, deducimos que $\sqrt{\alpha + \dfrac{1}{\gamma}} \leqslant b$. Lo que nos dice que el número $\sqrt{\alpha + \dfrac{1}{\gamma}}$ es un minorante de $B$, luego, por definición de ínfimo, ha de de ser $\sqrt{\alpha + \dfrac{1}{\gamma}} \leqslant \beta$, es decir, $\alpha + \dfrac{1}{\gamma} \leqslant \beta^2$. Hemos probado así que $\dfrac{1}{\gamma} \leqslant \beta^2 - \alpha$, es decir, $\gamma \geqslant \dfrac{1}{\beta^2 - \alpha}$. Esta desigualdad y la anterior prueban la igualdad del enunciado. ☺

**Ejercicio 2.** Calcula los límites de las sucesiones:

$$\text{a)}\ x_n = \left(\sqrt[5]{n+1} - \sqrt[5]{n}\right)\sqrt{n} \qquad \text{b)}\ y_n = \left(\frac{\log(n+1)}{\log n}\right)^{n \log n} \qquad \text{c)}\ z_n = \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{(5n)^{3n}}}$$

**Solución.**

a) Como para toda sucesión $\{a_n\} \to 0$ se verifican las equivalencias asintóticas $\mathrm{e}^{a_n} - 1 \sim a_n$ y $\log(1+a_n) \sim a_n$, tenemos que:

$$x_n = \left(\sqrt[5]{n+1} - \sqrt[5]{n}\right)\sqrt{n} = \left(\sqrt[5]{1+\frac{1}{n}} - 1\right)\sqrt[5]{n}\sqrt{n} =$$
$$= \left(\exp\left(\frac{1}{5}\log(1+1/n)\right) - 1\right)n^{3/5} \sim \frac{1}{5}\log(1+1/n)n^{3/5} \sim \frac{1}{5}\frac{1}{n}n^{3/5} = \frac{1}{5n^{2/5}}$$

Por tanto $\lim\{x_n\} = 0$.

b) Como

$$\frac{\log(n+1)}{\log n} = \frac{\log(n(1+1/n))}{\log n} = \frac{\log n + \log(1+1/n)}{\log n} = 1 + \frac{\log(1+1/n)}{\log n} \to 1$$

La sucesión $\{y_n\}$ es una indeterminación del tipo $1^\infty$. Usaremos el criterio de equivalencia logarítmica. Tenemos que:

$$n\log n\left(\frac{\log(n+1)}{\log n} - 1\right) = n\log n\left(\frac{\log(n+1)-\log n}{\log n}\right) = n\big(\log(n+1) - \log n\big) =$$
$$= n\log\left(\frac{n+1}{n}\right) = n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \log(\mathrm{e}) = 1$$

Deducimos que $\lim\{y_n\} = \mathrm{e}$.

c) Pongamos $a_n = \dfrac{(3n)!}{(5n)^{3n}}$. Usaremos el criterio de la raíz para calcular el límite de la sucesión $z_n = \sqrt[n]{a_n}$. Tenemos:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(3(n+1))!}{(5(n+1))^{3(n+1)}}\frac{(5n)^{3n}}{(3n)!} = \frac{(3n+3)!}{(3n)!}\frac{(5n)^{3n}}{(5(n+1))^{3n+3}} =$$
$$\frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(5(n+1))^3}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{3n} = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(5(n+1))^3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{3n} \to \frac{27}{125}\,\mathrm{e}^{-3}$$

Por el criterio antes citado, concluimos que $\lim\{z_n\} = \dfrac{27}{125}\,\mathrm{e}^{-3}$. ☺

**Ejercicio 3.** Estudia la convergencia absoluta y la convergencia de las series:

$$\text{a)} \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1\right) \qquad \text{b)} \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{7\cdot 10\cdot 13\ldots(3n+4)}{14\cdot 17\cdot 20\ldots(3n+11)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

**Solución.**

a) Tenemos que $0 < \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1$ y $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \dfrac{1}{n}$. Como la serie armónica $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n}$ es divergente, deducimos, por el criterio límite de comparación para series de términos positivos, que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1\right)$ no es convergente. Por tanto, la serie dada no es absolutamente convergente.

La sucesión $\left\{e^{\frac{1}{n}} - 1\right\}$ converge a 0. Además, como la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ es decreciente y la exponencial es una función estrictamente creciente, es decir que conserva el orden, la sucesión $\left\{e^{\frac{1}{n}} - 1\right\}$ es decreciente. Concluimos, por el criterio de Leibniz para series alternadas, que la serie es convergente.

b) Es una serie de términos positivos. Pongamos $a_n = \left(\dfrac{7 \cdot 10 \cdot 13 \dots (3n+4)}{14 \cdot 17 \cdot 20 \dots (3n+11)}\right)^{\frac{1}{2}}$. Aplicaremos el criterio del cociente.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{3n+7}{3n+14}\right)^{\frac{1}{2}} \to 1$$

Converge a 1 por valores menores que 1. Como el criterio del cociente no proporciona información aplicaremos el criterio de Raabe.

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = n\left(1 - \frac{\sqrt{3n+7}}{\sqrt{3n+14}}\right) = n\frac{\sqrt{3n+14} - \sqrt{3n+7}}{\sqrt{3n+14}} =$$

$$= n\frac{(\sqrt{3n+14} - \sqrt{3n+7})(\sqrt{3n+14} + \sqrt{3n+7})}{(\sqrt{3n+14} + \sqrt{3n+7})\sqrt{3n+14}} = n\frac{7}{3n+14+\sqrt{9n^2+73n+98}} =$$

$$= \frac{7}{3 + \frac{14}{n} + \sqrt{9 + \frac{73}{n} + \frac{98}{n^2}}} \to \frac{7}{6}$$

Como $\frac{7}{6} > 1$, por el criterio de Raabe la serie es convergente. ☺

**Ejercicio 4.** Sea $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = \dfrac{3x+2}{2x+1}$ para todo $x \geqslant 0$.

a) Estudia, sin usar derivadas, la monotonía de $f$ y calcula su imagen $f([0, +\infty[)$.

b) Se define una sucesión $\{x_n\}$ por:

$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = \frac{3x_n + 2}{2x_n + 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Prueba que las sucesiones $\{x_{2n-1}\}$ y $\{x_{2n}\}$ son monótonas y convergen al mismo límite. Calcula el límite de la sucesión $\{x_n\}$.

**Solución.**

a) Como $f(0) = 2 > f(1) = \frac{5}{3}$, si la función es monótona debe ser decreciente. Comprobémoslo directamente. Supuesto que $0 \leqslant x < y$, tenemos que:

$$f(x) - f(y) = \frac{3x+2}{2x+1} - \frac{3y+2}{2y+1} = \frac{(3x+2)(2y+1) - (3y+2)(2x+1)}{(2x+1)(2y+1)} = \frac{y-x}{(2x+1)(2y+1)} > 0$$

Es decir, $f(x) > f(y)$. Luego la función es estrictamente decreciente.

También podemos razonar usando que $f$ es continua y está definida en un intervalo, por lo que para probar que es estrictamente monótona (decreciente, por lo antes visto) basta probar que es inyectiva. Pero eso es inmediato:

$$\frac{3x+2}{2x+1} = \frac{3y+2}{2y+1} \iff (3x+2)(2y+1) = (3y+2)(2x+1) \iff y = x$$

Pongamos $J = f([0,+\infty[)$. Como $f$ es continua, $J$ es un intervalo. Como $f$ es estrictamente decreciente en $[0,+\infty[$ el valor máximo que toma en dicho intervalo es $f(0)=2$. Es claro que $f$ no alcanza un valor mínimo en $[0,+\infty[$ pues para todo $x \geqslant 0$ se tiene que $f(x+1) < f(x)$. También es evidente que $f(x) > 0$ para todo $x \geqslant 0$. Por tanto, el intervalo $J$ debe ser de la forma $J = ]\alpha, 2]$ con $\alpha \geqslant 0$. Para calcular $\alpha$ debemos considerar los valores que toma $f$ en números positivos arbitrariamente grandes; esto nos lleva a considerar la sucesión $\{f(n)\} = \left\{\dfrac{3n+2}{2n+1}\right\}$. Tenemos que $\lim\{f(n)\} = \frac{3}{2}$.

Es inmediato comprobar que para todo $x \geqslant 0$ es $f(x) > \frac{3}{2}$. En consecuencia $J \subset ]\frac{3}{2}, 2]$. Para probar la inclusión contraria, sea $z \in ]\frac{3}{2}, 2[$. Como $\{f(n)\} \to \frac{3}{2}$ y $\frac{3}{2} < z$, se sigue que $\frac{3}{2} < f(n) < z$ para todo $n$ suficientemente grande. Luego $f$ toma en $[0,+\infty[$ valores menores que $z$ y, como $z < 2 = f(0)$, también toma en dicho intervalo valores mayores que $z$. Concluimos, por el teorema del valor intermedio, que $f$ toma el valor $z$. Luego $J = ]\frac{3}{2}, 2]$.

b) La sucesión está definida por $x_1 = 1$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Puesto que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $x_n > 0$ y $x_n \in f([0,+\infty[) = ]\frac{2}{3}, 2]$, la sucesión $\{x_n\}$ está acotada. Tenemos que $x_2 = \frac{5}{3}$ y $x_3 = \frac{21}{13}$. Como $x_3 > x_1$ será $x_4 = f(x_3) < f(x_1) = x_2$. Además:

$$x_{2n+2} = f(x_{2n+1}) = f(f(x_{2n})); \qquad x_{2n+1} = f(x_{2n}) = f(f(x_{2n-1})) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $f$ es estrictamente decreciente, la función $g = f \circ f$ es estrictamente creciente y, según acabamos de ver, $x_{2n+2} = g(x_{2n})$ y $x_{2n+1} = g(x_{2n-1})$. Como $x_1 < x_3$ se sigue (puede hacerse un elemental razonamiento por inducción) que la sucesión $\{x_{2n-1}\}$ es estrictamente creciente. Como $x_4 < x_2$ la sucesión $\{x_{2n}\}$ es estrictamente decreciente. Puesto que ambas son sucesiones acotadas, convergen.

Sea $\alpha = \lim\{x_{2n-1}\}$, $\beta = \lim\{x_{2n}\}$. Tomando límites en las igualdades:

$$x_{2n+1} = \frac{3x_{2n}+2}{2x_{2n}+1}, \qquad x_{2n} = \frac{3x_{2n-1}+2}{2x_{2n-1}+1}$$

deducimos que:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{3\beta+2}{2\beta+1} \\[2ex] \beta = \dfrac{3\alpha+2}{2\alpha+1} \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{l} 2\alpha\beta + \alpha = 3\beta + 2 \\ 2\alpha\beta + \beta = 3\alpha + 2 \end{array}\right\} \implies \alpha - \beta = 3(\beta - \alpha) \implies \alpha = \beta$$

Concluimos que $\{x_n\}$ converge y su límite $\ell = \lim\{x_n\}$ verifica que $\ell = f(\ell)$ y $\ell > 0$. Obtenemos fácilmente que $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. ☺

**Grado en Matemáticas – Cálculo I**
**Soluciones del examen de febrero de 2012**

**Ejercicio 1.** Sean $A$ y $B$ conjuntos no vacíos de números reales positivos y supongamos que $A$ está mayorado. Probar que el conjunto

$$C = \left\{a^2 - b \ : \ a \in A, \ b \in B\right\}$$

está mayorado y calcular su supremo.

**Solución.** Sea $\alpha = \sup(A)$. Como $B \subset \mathbb{R}^+$, $B$ está minorado. Sea $\beta = \inf(B)$. *Para todo* $a \in A$ y *para todo* $b \in B$ tenemos que:

$$\left.\begin{array}{c} 0 < a \leqslant \alpha \\ \beta \leqslant b \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{c} a^2 \leqslant \alpha^2 \\ -b \leqslant -\beta \end{array}\right\} \implies a^2 - b \leqslant \alpha^2 - \beta$$

Hemos probado que el número $\alpha^2 - \beta$ es un mayorante de $C$. Por tanto, $C$ está mayorado. Sea $\gamma = \sup(C)$. Como $\gamma$ es, por definición, el mínimo mayorante de $C$, tenemos que $\gamma \leqslant \alpha^2 - \beta$. Probaremos la desigualdad contraria.

*Para todo* $a \in A$ y *para todo* $b \in B$ tenemos que $a^2 - b \leqslant \gamma$, es decir, $a^2 \leqslant \gamma + b$. Consideremos ahora que $b \in B$ es un elemento fijo en $B$. Como $0 < a$ y las raíces conservan el orden en los reales positivos, tenemos que $a \leqslant \sqrt{\gamma + b}$. Esta desigualdad, válida para todo $a \in A$, nos dice que el número $\sqrt{\gamma + b}$ es un mayorante de $A$, luego $\alpha \leqslant \sqrt{\gamma + b}$. Como son números positivos, elevando al cuadrado, obtenemos que $\alpha^2 \leqslant \gamma + b$, es decir, $\alpha^2 - \gamma \leqslant b$. Como esta desigualdad es válida cualquiera sea $b \in B$, el número $\alpha^2 - \gamma$ es un minorante de $B$ y, por tanto, $\alpha^2 - \gamma \leqslant \beta$, porque $\beta$ es el máximo minorante de $B$. Hemos obtenido así que $\alpha^2 - \beta \leqslant \gamma$.

De las dos desigualdades obtenidas resulta $\gamma = \alpha^2 - \beta$. ☺

**Comentarios.** Hemos hecho en clase ejercicios parecidos a este y hemos dedicado muchas horas a los conceptos de supremo e ínfimo. Nada nuevo hay en este ejercicio que deberíais haberlo hecho bien todos. No ha sido así. Un fallo frecuente es no darse cuenta de que el conjunto $B$ está minorado. En el enunciado se dice que $B$ está formado por números positivos, luego 0 es un minorante de $B$. Parece que esto es difícil para algunos. Otros dicen que el ínfimo de $B$ es 0. Quien afirma tal cosa lo hace sin pensar, porque lo único que se sabe de $B$ es que es un conjunto no vacío de números positivos. ¿Acaso todo conjunto de números positivos tiene extremo inferior igual a 0? Claro que no. El conjunto $B$ podría ser el intervalo $[32, 45[$. Lo que no se puede suponer, ni falta que hace, es que $B$ está mayorado. *En matemáticas es muy importante saber leer*. He insistido en eso muchas veces. Hay que leer los conceptos, no los símbolos, y *hay que leer exactamente lo que está escrito ni más ni menos*. En el enunciado se dice que $A$ está mayorado pero no se dice nada de que $B$ esté mayorado. Puede estarlo o no. Eso no importa para lo que se pide.

Todavía algunos, demasiados, no saben lo que es un mayorante o un minorante de un conjunto. Para algunos un conjunto puede ser minorante o mayorante de otro conjunto. No sé qué es lo que entienden por eso. Tampoco es correcto decir que un número es mayorante o minorante de otro número. Un número puede ser menor o mayor que otro número pero no se dice que sea un minorante ni un mayorante de dicho número. Los términos “mayorante” y “minorante” son relaciones entre números y conjuntos. *Solamente tiene sentido decir que un número es mayorante o minorante de un conjunto dado*. A algunos les da igual usar $<$ que $\leqslant$. Pues no es lo mismo y ya deberían saberlo.

Hay quien no usa el hecho de que $A \subset \mathbb{R}^+$. Pues hay que usarlo para justificar que $a^2 \leqslant \alpha^2$ para todo $a \in A$. Las hipótesis se ponen porque son necesarias para probar lo que se pide. Si haces un ejercicio sin usar alguna de las hipótesis del enunciado lo más seguro es que te hayas equivocado o no entiendas lo que haces.

Para algunos $\sup(C)=\sup(A)$, para otros $\sup(C)=\sup(A)-\sup(B)$ y también $\sup(C)=(\sup(A))^2$. Hay quien *"deduce"* que el supremo de $C$ es 0. ¿Tan difícil es darse cuenta de que todo eso es falso? ¿Tan difícil es ponerse un ejemplo sencillo y ver lo que pasa? Por ejemplo, $A=\{2,3\}$ y $B=\{1,2\}$, en cuyo caso es $C=\{2,3,7,8\}$.

En un alarde de imaginación hay quien habla de "conjuntos decrecientes". Algunos dicen que $\sup(C)=(\sup(A))^2-b$ donde $b\in B$. Deben pensar que el supremo de un conjunto es un conjunto.

Este ejercicios podía deducirse de cosas conocidas. Así, llamando $D=\left\{a^2 \ a\in A\right\}$, sabemos que $\sup(D)=(\sup(A))^2$. Ahora tenemos que $C=D-B$ y sabemos que $\sup(C)=\sup(D)-\inf(B)$. Naturalmente, en este ejercicio lo que se evalúa es el uso correcto de los conceptos de supremo e ínfimo. Este ejercicio vale 2,5 puntos. ☹

**Ejercicio 2.** Estudiar la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ definida por:

$$x_1=2, \qquad x_{n+1}=\frac{x_n^2+1}{x_n+1} \qquad (n\in\mathbb{N})$$

**Solución.** Es evidente que $x_n>0$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Estudiaremos la monotonía. Como $x_2=\frac{5}{3}<2=x_1$, veremos si la sucesión es decreciente. Tenemos que:

$$x_n-x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2+1}{x_n+1}=\frac{x_n-1}{x_n+1} \qquad (n\in\mathbb{N}) \tag{1}$$

Por tanto, que la sucesión sea decreciente depende de que $x_n-1$ sea positivo. Vamos a probar que así es. Sea $A=\{n\in\mathbb{N}: x_n>1\}$. Como $x_1=2>1$, tenemos que $1\in A$. Probaremos que $n\in A\Longrightarrow n+1\in A$. *Supuesto que* $n\in A$, es decir que $x_n-1>0$, tenemos que:

$$x_{n+1}-1=\frac{x_n^2+1}{x_n+1}-1=\frac{x_n^2-x_n}{x_n+1}=\frac{x_n(x_n-1)}{x_n+1}>0$$

Lo que prueba que $n+1\in A$. Por el principio de inducción matemática es $A=\mathbb{N}$. Hemos probado así que $x_n>1$ para todo $n\in\mathbb{N}$. La igualdad (1) nos dice ahora que la sucesión es estrictamente decreciente. Por tanto, al ser decreciente y minorada, es convergente. Sea $\ell=\lim\{x_n\}$. Debe ser $\ell\geqslant 1$. Por los teoremas sobre límites debe verificarse que

$$\ell=\frac{\ell^2+1}{\ell+1} \implies \ell=1.$$

☺

**Comentarios.** Este ejercicios es un regalo. Hemos hecho ejercicios parecidos. No tiene ninguna dificultad y todos deberíais haberlo hecho bien. No ha sido así. Algunos dais por evidente que $x_n>1$. No es evidente. Hay que hacerlo. De eso depende todo. Muchos, para probar que la sucesión decrece lo hacéis más o menos como sigue:

$$x_n\geqslant x_{n+1} \ \Rightarrow\ x_n^2+1\geqslant x_{n+1}^2+1 \ \Rightarrow\ \frac{x_n^2+1}{x_n+1}\geqslant\frac{x_{n+1}^2+1}{x_{n+1}+1}$$

Naturalmente, la segunda implicación no está justificada porque, al ser $x_n+1\geqslant x_{n+1}+1$, se divide a la derecha por una cantidad menor. Otros evitan este inconveniente por el procedimiento de escribir:

$$x_n\geqslant x_{n+1} \ \Rightarrow\ x_n^2+1\geqslant x_{n+1}^2+1 \ \Rightarrow\ \frac{x_n^2+1}{x_n+1}\geqslant\frac{x_{n+1}^2+1}{x_n+1} \ \Rightarrow x_{n+1}\geqslant x_{n+2}$$

Sin importarles que $x_{n+2}$ no sea igual a $\frac{x_{n+1}^2+1}{x_n+1}$. En ambos casos se trata de lo mismo: se quiere probar algo de lo que se tiene el convencimiento de que es cierto y entonces *se hace lo que sea para* *probar lo que uno quiere*. Es decir: ***todo vale*** con tal de llegar a donde tengo que llegar. Pues, si ese es tu caso, no lo hagas más. En matemáticas ***no todo vale***. Da muy mala impresión esa forma de proceder. Siempre me queda la duda de si es un error o no. ¿Me explico? Insisto: no todo vale, hay que hacer las cosas bien y el hecho de que el resultado final sea correcto no justifica en absoluto los pasos incorrectos.

Hay quien prueba que $x_{n+1} > x_n \Leftrightarrow x_n > 1$ y no hace nada más. Con lo cual, claro está, nada ha probado. Ya advertimos esto en clase.

Cosas llamativas. Hay quien afirma que la sucesión diverge positivamente. Este ejercicio vale 2,5 puntos. ☹

**Ejercicio 3.** Estudiar la convergencia y la convergencia absoluta de las siguientes series:

$$\text{a)}\ \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right) \qquad\qquad \text{b)}\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{[(n+1)!]^3\,7^n}{(n+1)^{3n}}$$

**Solución.** a) Estudiemos la convergencia absoluta. Tenemos que:

$$\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}=\sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}-1\right)\sim\sqrt[3]{n}\frac{1}{3n}=\frac{1}{3}\frac{1}{n^{2/3}}$$

La serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{2/3}}$ es una serie de Riemann con exponente $2/3<1$ y, por tanto, no converge. Deducimos, por el criterio límite de comparación para series de términos positivos, que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)$ no es convergente. Hemos probado así que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)$ no es absolutamente convergente. Para estudiar si dicha serie converge, como es una serie alternada de la forma $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}a_n$ con $a_n=\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}$, aplicaremos el criterio de Leibniz.

Acabamos de ver que $a_n\sim\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{n^{2/3}}$ por lo que $\{a_n\}\to 0$. Veamos si $\{a_n\}$ es decreciente. Tenemos que:

$$\begin{aligned}a_{n+1}\leqslant a_n &\iff \sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n+1}\leqslant\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\iff\sqrt[3]{n+2}+\sqrt[3]{n}\leqslant 2\sqrt[3]{n+1}\\ &\iff\sqrt[3]{(n+2)^2n}+\sqrt[3]{(n+2)n^2}\leqslant 2n+2\end{aligned}$$

Pero esta última desigualdad es cierta porque usando la desigualdad de las medias para tres números $\sqrt[3]{abc}\leqslant\dfrac{a+b+c}{3}$, tenemos que:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt[3]{(n+2)^2n}=\sqrt[3]{(n+2)(n+2)n}\leqslant\frac{(n+2)+(n+2)+n}{3}=n+\frac{4}{3}\\ \sqrt[3]{(n+2)n^2}=\sqrt[3]{(n+2)nn}\leqslant\frac{(n+2)+n+n}{3}=n+\frac{2}{3}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ \sqrt[3]{(n+2)^2n}+\sqrt[3]{(n+2)n^2}\leqslant 2n+2$$

Por tanto, la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente y converge a 0. Por lo que la serie es convergente.

Otra manera de proceder en este ejercicio es como sigue.

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}&=\frac{\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n}}=\frac{\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{n^2}\right)\left(\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n}\right)}{\left(\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n}\right)^2}\\ &=\frac{1+\sqrt[3]{(n+1)^2n}-\sqrt[3]{n^2(n+1)}}{\left(\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n}\right)^2}=\frac{1+\sqrt[3]{(n+1)n}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)}{\left(\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n}\right)^2}\end{aligned}$$

Despejando en esta igualdad obtenemos:

$$\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}=\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{(n+1)n}+\sqrt[3]{n^2}} \tag{2}$$

De donde se deduce que la sucesión $\{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\}$ decrece y converge a 0. Y también se deduce que la serie no converge absolutamente pues:

$$\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\geqslant\frac{1}{3\sqrt[3]{(n+1)^2}}$$

Y se aplica el criterio de comparación para series de términos positivos.

La igualdad (2) también puede obtenerse recordando que $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ y sustituyendo $a=\sqrt[3]{n+1}$, $b=\sqrt[3]{n}$.

b) Para estudiar la serie dada, como es una serie de términos positivos, aplicaremos el criterio del cociente. Tenemos que $a_n=\dfrac{[(n+1)!]^3 7^n}{(n+1)^{3n}}$ por lo que:

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n}&=\frac{[(n+2)!]^3 7^{n+1}}{(n+2)^{3(n+1)}}\frac{(n+1)^{3n}}{[(n+1)!]^3 7^n}=\frac{7(n+2)^3(n+1)^{3n}}{(n+2)^3(n+2)^{3n}}=\\&=7\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{3n}=7\left[\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n\right]^{-3}=7\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\right]^{-3}\to 7\,\mathrm{e}^{-3}=\frac{7}{\mathrm{e}^3}<1\end{aligned}$$

Concluimos, por el criterio del cociente, que la serie es convergente. ☺

**Comentarios.** La serie del apartado b) no tiene ninguna dificultad. Basta reconocer la sucesión del número e que aparece al aplicar el criterio del cociente, algo en lo que he sido muy insistente. Lo que ocurre es que muchos os equivocáis al simplificar. Y también al poner el valor de $a_{n+1}$ algunos ponen en el denominador $(n+2)^{3n+1}$ en vez de $(n+2)^{3(n+1)}$. Debéis evitar esos fallos tan elementales. Este apartado valía 1,25 puntos.

La convergencia absoluta de la serie en el apartado a) podía haberla hecho cualquiera que haya leído mis apuntes de series (ver el ejemplo 3.16). La equivalencia asintótica $\left(\sqrt[k]{1+x_n}-1\right)\sim\dfrac{1}{k}x_n$, válida cuando $\{x_n\}\to 0$, se probó en clase y se ha usado varias veces en ejercicios de series y sucesiones. Esta parte del ejercicio valía 0,5 puntos. El estudio de la convergencia no absoluta valía 0,75 puntos. Y tiene dos partes: ver que la sucesión $\{a_n\}\to 0$ (algunos lo habéis hecho) y probar que dicha sucesión decrece (nadie lo ha hecho bien).

La igualdad $a^k-b^k=(a-b)\displaystyle\sum_{j=1}^{k-1}a^{k-j}b^j$ se ha utilizado varias veces en el curso y es importante para quitar raíces.

Los errores en este ejercicio son demasiado variados para recogerlos aquí. Lo que más me llama la atención es que a pesar de lo que yo he insistido en que una serie $\sum_{n\geqslant 1}a_n$ no se parece en nada a la sucesión $\{a_n\}$, algunos las confunden y creen que son la misma cosa. ☹

**Ejercicio 4.** Sea $f:[-1,1[\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\qquad\forall x\in[-1,1[$$

Calcular $f([-1,1[)$ y $f([-1/2,1/2])$.

**Solución.** La función $f$ es continua porque es la composición de la función racional $g(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ que es continua en $[-1,1[$ con la función raíz cuadrada $x \mapsto \sqrt{x}$ que es continua en $\mathbb{R}_o^+$. Observa que $g(x) \geqslant 0$ para todo $x \in [-1,1[$ por lo que dichas funciones pueden componerse. Como $f$ está definida en un intervalo y es continua, por el teorema del valor intermedio, su imagen, $J = f([-1,1[)$, es un intervalo. Claramente, $f$, toma valores mayores o iguales que 0 (recuerda que las raíces cuadradas nunca son negativas). Como $f(-1) = 0$, el valor mínimo que toma dicha función es 0. Es claro que si nos acercamos a 1 la función toma valores arbitrariamente grandes. Comprobémoslo. Para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que:

$$f(1-1/n) = \sqrt{\frac{2-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}} = \sqrt{2n-1} \to +\infty$$

Deducimos que $J$ es un intervalo no mayorado. Por tanto $J = [0, +\infty[$.

Para calcular $f([-1/2, 1/2])$ podemos proceder como sigue. Claramente $f(-1/2) = 1/\sqrt{3}$ y $f(1/2) = \sqrt{3}$ están en la imagen. Como, por el teorema del valor intermedio, dicha imagen tiene que ser un intervalo, deducimos que $f([-1/2, 1/2]) \supset [1/\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. Ahora es muy fácil probar directamente que para todo $x \in [-1/2, 1/2]$ se verifica que $1/\sqrt{3} \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{3}$. Con ello se tiene que $f([-1/2, 1/2]) = [1/\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

De otra forma, para calcular $f([-1/2, 1/2])$ podemos tener en cuenta que la imagen por una función continua de un intervalo cerrado y acotado es un intervalo cerrado y acotado. Por tanto $f([-1/2, 1/2]) = [\alpha, \beta]$ donde $\alpha = \text{mín} f([-1/2, 1/2])$ y $\beta = \text{máx} f([-1/2, 1/2])$. Para calcular dichos valores veamos si la función es monótona. Un resultado visto afirma que una función continua e inyectiva en un intervalo es estrictamente monótona. Comprobaremos que $f$ es inyectiva en $[-1, 1[$. Para $x, y \in [-1, 1[$ tenemos que:

$$f(x) = f(y) \Longrightarrow \frac{1+x}{1-x} = \frac{1+y}{1-y} \Longrightarrow (1+x)(1-y) = (1+y)(1-x) \Longrightarrow x - y = y - x \Longrightarrow x = y$$

Luego $f$ es inyectiva y como es continua y está definida en un intervalo, por el teorema antes citado, $f$ es estrictamente monótona en $[-1, 1[$. Como $f(-1/2) = 1/\sqrt{3} < f(1/2) = \sqrt{3}$, se sigue que $f$ es estrictamente creciente en $[-1, 1[$. Luego $\alpha = f(-1) = 1/\sqrt{3}$ y $\beta = f(1/2) = \sqrt{3}$. Por tanto $f([-1/2, 1/2]) = [1/\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

☺

**Comentarios.** Lo que más llama la atención es que muchos se ponen a calcular las imágenes pedidas sin decir nada de la continuidad de la función y sin explicar nada de lo que hacen. *Lo que se valora en este ejercicio es justamente eso: que sepas justificar lo que haces indicando los resultados teóricos que utilizas.* En el apartado segundo muchos afirmáis que $f([-1/2, 1/2]) = [1/\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ sin dar ninguna justificación. En este ejercicio hay afirmaciones insólitas. Hay quien dice que $f([-1, 1[) = \{0\}$ (o sea, la función es ¡constante igual a 0!); hay quien dice que $f([-1, 1[) = ]-\infty, \infty[$. Algunos tratan de calcular ¡$f(1)$! (que no está definido). Otros evalúan $f$ en $1 + 1/n$ donde no está definida pues $1 + 1/n \notin [-1, 1[$. Claro, les queda algo divertido $f(1 + 1/n) = \sqrt{-2n-1}$ ¡Una raíz cuadrada de un número negativo! Pero a ellos les da igual y afirman que $f(1 + 1/n) \to -\infty$. ¿Todo vale? Parece que sí, que para algunos todo vale. Este ejercicio valía 2,5 puntos.

**Cuestiones teóricas.** Dilucidar si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas, explicando brevemente las respuestas:

a) El conjunto $\left\{x + \sqrt{2} : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\right\}$ es numerable.

Evidentemente no porque sabemos que el conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ no es numerable y la aplicación $x \mapsto x + \sqrt{2} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es una biyección entre ambos conjuntos.

b) Toda sucesión de números reales admite una sucesión parcial convergente o una sucesión parcial divergente.

Cierto, porque toda sucesión de números reales tiene una sucesión parcial monótona la cual podrá ser convergente o divergente.

c) Si $\{x_n\}$ es una sucesión creciente tal que $\{x_{n+1} - x_n\} \to 0$, entonces $\{x_n\}$ es convergente.

Falso. Por ejemplo $x_n = \sqrt{n}$. Se tiene que $x_{n+1} - x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \to 0$, pero $\{\sqrt{n}\} \to +\infty$. También vale, claro está, $x_n = \sqrt[3]{n}$ (ver ejercicio 3). En general, basta darse cuenta de que la serie asociada a la sucesión $\{x_{n+1} - x_n\}$ es, salvo una constante, la sucesión $\{x_n\}$. Por tanto, como ejemplo vale cualquier sucesión $\{x_n\}$ que sea una serie divergente cuyo término general tienda a 0. Por ejemplo, la serie armónica.

d) Si $x_n \leqslant y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y la serie $\sum_{n \geqslant 1} y_n$ es convergente, entonces la serie $\sum_{n \geqslant 1} x_n$ también es convergente.

Falso. Por ejemplo, tomando $x_n = -1/n$ e $y_n = 1/2^n$, tenemos que la serie $\sum_{n \geqslant 1} y_n$ es convergente pero $\sum_{n \geqslant 1} x_n$ diverge negativamente. Lo que se afirma en el enunciado sería cierto si dijeran que $0 \leqslant x_n \leqslant y_n$ pero *eso no se dice en el enunciado*. Insisto una vez más: *en matemáticas es muy importante saber leer. Hay que leer exactamente lo que hay escrito; ni más ni menos.* A fuerza de repetirlo lo acabaréis aprendiendo.

e) Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función inyectiva, $f(A)$ es un intervalo, y $f^{-1}$ es continua, entonces $f$ es continua.

Cierto. Un resultado que hemos visto dice que la inversa de una función inyectiva y continua definida en un intervalo es continua. Como nos dicen que $f^{-1}$ es continua y está definida en un intervalo (y, evidente, es inyectiva), podemos aplicar el teorema citado para obtener que la inversa de $f^{-1}$, es decir la función $f$, es continua.

De otra forma. Como $f^{-1}$ es continua y está definida en un intervalo (y, evidente, es inyectiva) tiene que ser estrictamente monótona. Pero entonces también su inversa, $f$, es estrictamente monótona y como nos dicen que su imagen es un intervalo, deducimos que es continua. Pues hemos visto que una función monótona cuya imagen es un intervalo es continua.

Casi nadie ha respondido bien esta cuestión. ¿Sabéis por qué? Porque leéis los símbolos como si fueran letras con significado. No prestáis atención a los conceptos. Aprendéis los enunciados de los teoremas con símbolos y no sabéis aplicarlos cuando el símbolo no es el que habéis memorizado. No es lo mismo retener “si $f : I \to \mathbb{R}$ es continua e inyectiva en un intervalo su inversa $f^{-1}$ es continua” que retener “la inversa de una función continua e inyectiva definida en un intervalo es continua”. Esto ya deberías tenerlo bien claro.

# Examen de Cálculo I
# Curso 1º Grado en Matemáticas

1 de septiembre de 2011

**Ejercicio 1.**

a) Sean $A$, $B$, conjuntos no vacíos y mayorados de números reales positivos. Consideramos el conjunto $AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$. Prueba que $AB$ está mayorado y

$$\sup(AB) = \sup(A)\sup(B) \tag{1}$$

b) Considera ahora los conjuntos

$$A = \left\{2 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}, \quad B = \left\{3 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}, \quad C = \left\{\left(2 - \frac{1}{n}\right)\left(3 + \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Calcula el supremo de $A, B, C$ e indica cuáles de ellos tienen máximo. Comprueba si se verifican la igualdad

$$\sup(C) = \sup(A)\sup(B) \tag{2}$$

¿Hay alguna contradicción con lo afirmado en el apartado a)?

**Solución.** a) Sean $\alpha = \sup(A)$ (el mínimo mayorante de $A$) y $\beta = \sup(B)$ (el mínimo mayorante de $B$). Para todos $a \in A$ y $b \in B$ se verifica que:

$$\left.\begin{array}{l} 0 < a \leqslant \alpha \\ 0 < b \leqslant \beta \end{array}\right\} \implies ab \leqslant \alpha\beta \tag{3}$$

Por tanto $\alpha\beta$ es un mayorante de $AB$.

Sea $\gamma = \sup(AB)$. Como $\gamma$ es, por definición, el mínimo mayorante de $AB$, se tiene que $\gamma \leqslant \alpha\beta$.

Por otra parte, para todos $a \in A$ y $b \in B$ se verifica que $ab \leqslant \gamma$. Multiplicando esta desigualdad por $1/b$ (que es positivo) obtenemos $a \leqslant \gamma/b$. Esta desigualdad nos dice que para cada $b \in B$ el número $\gamma/b$ es un mayorante de $A$. Como $\alpha$ es el mínimo mayorante de $A$ debe ser $\alpha \leqslant \gamma/b$. Hemos obtenido que para todo $b \in B$ es $\alpha \leqslant \gamma/b$ o, lo que es igual, $b \leqslant \gamma/\alpha$. Por tanto, $\gamma/\alpha$ es un mayorante de $B$ y, en consecuencia, debe ser $\beta \leqslant \gamma/\alpha$ porque $\beta$ es el mínimo mayorante de $B$. Hemos probado que $\beta \leqslant \gamma/\alpha$ o, lo que es igual, $\alpha\beta \leqslant \gamma$. Como también sabemos que $\gamma \leqslant \alpha\beta$, concluimos que $\gamma = \alpha\beta$.

b) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $2 - \frac{1}{n} < 2$. Por tanto, 2 es un mayorante de $A$. Como la sucesión $\{x_n\}$ definida por $x_n = 2 - \frac{1}{n}$ converge a 2, dado un número $u < 2$ existirá un $n_0$ tal que para todo $n \geqslant n_0$ se tendrá que $u < x_n < 2$. Como para todo $n \in \mathbb{N}$ es $x_n \in A$ deducimos que $u$ no es mayorante de $A$. Hemos probado que el mínimo mayorante de $A$ es 2. Luego $\sup(A) = 2$. Como $2 \notin A$, $A$ no tiene máximo.

Tenemos que $4 \in B$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ es $3 + \dfrac{1}{n} \leqslant 4$. Luego $\text{máx}(B) = 4$. Por tanto $\sup(B) = \text{máx}(B) = 4$.

Tenemos que

$$\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{1}{n}\right)=6-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}<6 \qquad \text{para todo } n\in\mathbb{N}$$

Por tanto 6 es un mayorante de $C$. Como la sucesión $\{z_n\}$ dada por $z_n=6-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}$ converge a 6, dado un número $u<6$ existirá un $n_0$ tal que para todo $n\geqslant n_0$ se tendrá que $u<z_n<6$. Como para todo $n\in\mathbb{N}$ es $z_n\in C$ deducimos que $u$ no es mayorante de $C$. Hemos probado que el mínimo mayorante de $C$ es 6. Luego $\sup(C)=6$. Como $6\notin C$, $C$ no tiene máximo.

Evidentemente, no se cumple la igualdad $\sup(C)=\sup(A)\sup(B)$. Esto no contradice en nada el apartado a) porque el conjunto $C$ no es igual al conjunto $AB$. De hecho $C$ es un subconjunto estricto de $AB=\left\{\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{1}{m}\right):n\in\mathbb{N},m\in\mathbb{N}\right\}$ (los productos de *todos* los elementos de $A$ por *todos* los elementos de $B$). ☺

**Comentarios.** El apartado a) de este ejercicio está propuesto en la relación de ejercicios del Capítulo 1; concretamente, es el ejercicio número 21 de dicha relación. Dicho ejercicio se hizo en clase. También está propuesto en mi libro de Cálculo: es el ejercicio propuesto número 142. También está resuelto en dicho libro: es el ejercicio resuelto número 64. El apartado b) es formalmente igual al segundo ejercicio que puse en la evaluación de sucesiones cuya solución entregué escrita con todo detalle. Allí se consideraba el conjunto $A=\left\{(-1)^n\frac{n-1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}$ pero el razonamiento que se hacía allí es el mismo expuesto arriba.

Esta claro que cualquiera que hubiera estudiado un poquito habría hecho bien este ejercicio. Es un ejercicio básico y elemental. Quien no lo hace es porque no sabe trabajar con supremos y eso es algo que hay que saber hacer para aprobar esta asignatura.

Nadie utiliza las hipótesis de que $A$ y $B$ son conjuntos de números *positivos*. Lo repito: si al hacer un ejercicio no utilizas *todas* las hipótesis del enunciado, el ejercicio está mal hecho. Muchos afirmáis que como $A$ y $B$ son conjuntos de números reales mayorados entonces el conjunto $AB$ también está mayorado. Eso, así dicho, es *falso*. Basta considerar $A=B=\mathbb{R}^-$ con lo que $AB=\mathbb{R}^+$. La hipótesis de que $A$ y $B$ están formados por números positivos es esencial para probar la desigualdad (3). Para que lo veas claro aquí tienes paso a paso la prueba de dicha desigualdad:

> Como $b>0$ la desigualdad $a\leqslant\alpha$ se conserva al multiplicarla por $b$ y obtenemos que $ab\leqslant b\alpha$. Ahora, como $a>0$ también será $\alpha>0$; y multiplicando por $\alpha$ la desigualdad $b\leqslant\beta$ obtenemos $\alpha b\leqslant\alpha\beta$. Hemos obtenido así que $ab\leqslant b\alpha=\alpha b\leqslant\alpha\beta$, esto es, $ab\leqslant\alpha\beta$.

Llama la atención la enormidad de disparates en tan sencillo ejercicio. Por ejemplo, hay quien dice que $\sup(B)=3$ y $\text{máx}(B)=4$ y se queda tan contento. Para algunos $\sup(C)=8$ o $\sup(C)=3$. Hay quien afirma que el supremo de un conjunto es el mayor elemento del conjunto. Hay quien, después de “probar” la igualdad (1), comprueba que la igualdad (2) es falsa, concluye que esto contradice lo anterior y se queda tan feliz. Debe pensar que las Matemáticas son contradictorias. Algunos creen que los símbolos $<$ y $\leqslant$ significan lo mismo y prueban que $\gamma<\alpha\beta$ y $\alpha\beta<\gamma$ y no se sonrojan por ello. Hay quien afirma que $C=AB$ y

$6 = 2 \cdot 6$ (¡todo vale!) y que el conjunto $C$ tiene máximo. Hay quien afirma que el supremo de un conjunto pertenece al conjunto.

Este ejercicio lo he calificado como sigue: Probar *correctamente* la igualdad (1) 1,25 puntos. Calcular *de forma razonada* los supremos de $A, B, C$ 1,25 puntos. Responder *correctamente* a la última pregunta del apartado b) 0,5 puntos.

Nadie ha hecho bien este ejercicio. Es una vergüenza. ☹

**Ejercicio 2.** Sea $\{x_n\}$ la sucesión definida por:

$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 8} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Prueba que es convergente y calcula su límite.

**Solución.** Evidentemente $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que $x_1 = 1 < \sqrt{10} = x_2$. Usando que la función $x \mapsto \sqrt{x}$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$, tenemos que:

$$x_n < x_{n+1} \Longrightarrow x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 8} < \sqrt{2x_{n+1} + 8} = x_{n+2}$$

Concluimos, por el principio de inducción matemática, que la sucesión es estrictamente creciente.

*Supongamos* que es convergente y sea $\lim\{x_n\} = \ell$. Entonces, como $x_{n+1}^2 = 2x_n + 8$, debe verificarse que $\ell^2 = 2\ell + 8$, es decir $\ell^2 - 2\ell - 8 = 0$. Obtenemos que los posibles valores para $\ell$ son $-2$ y $4$. Como debe ser $\ell > 0$, ha de ser $\ell = 4$. Probaremos ahora que $x_n \leqslant 4$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, tenemos que $x_1 = 1 < 4$. Además:

$$x_n < 4 \Longrightarrow x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 8} < \sqrt{16} = 4$$

Concluimos, por el principio de inducción matemática, que $x_n \leqslant 4$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Hemos probado que $\{x_n\}$ es creciente y mayorada, luego es convergente. Su límite, por lo antes visto, es igual a 4. ☺

**Comentarios.** ¡Qué regalito! Es casi imposible poner una sucesión recurrente más sencilla. Todos los ejercicios de este tipo que hemos hecho en clase o que se han propuesto en las evaluaciones son más difíciles que este. ¡Compruébalo! Mira los ejercicios 3 y 4 de la evaluación de sucesiones o el ejercicio 1 del examen de febrero. Pues ni por esas. Muy pocos hacéis bien del todo este ejercicio que vale 2 puntos. ☹

**Ejercicio 3.** Estudia la convergencia y la convergencia absoluta de las siguientes series:

$$\text{a)} \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{((3n)!)^2}{4^{6n}(n!)^6} \qquad\qquad \text{b)} \quad \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}{n}$$

**Solución.**

a) Se trata de una serie de términos positivos. Pongamos $a_n = \dfrac{((3n)!)^2}{4^{6n}(n!)^6}$. La forma de $a_n$ sugiere aplicar el criterio del cociente. Tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{((3(n+1))!)^2}{4^{6(n+1)}((n+1)!)^6}\frac{4^{6n}(n!)^6}{((3n)!)^2} = \frac{((3n+3)!)^2}{((3n)!)^2}\frac{1}{4^6(n+1)^6} = \\ &= \frac{(3n+3)^2(3n+2)^2(3n+1)^2}{4^6(n+1)^6} = \frac{3^2(3n+2)^2(3n+1)^2}{4^6(n+1)^4} \quad \to \quad \frac{3^6}{4^6} < 1\end{aligned}$$

Concluimos, por el criterio del cociente, que la serie es convergente.

b) Empezaremos estudiando la convergencia absoluta. Tenemos que:

$$\frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}{n} \geqslant \frac{1}{n}$$

Como la serie armónica $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n}$ es divergente concluimos, por el criterio básico de comparación, que la serie $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}{n}$ también es divergente. Luego la serie considerada en b) no converge absolutamente.

Estudiemos ahora la convergencia de la serie. Como se trata de una serie alternada usaremos el criterio de Leibnitz. Pongamos $x_n = \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}{n}$. Recordando que la sucesión $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ es creciente y converge al número e, tenemos que:

$$0 < x_n < \frac{\mathrm{e}}{n}$$

Por el principio de las sucesiones encajadas deducimos que $\{x_n\} \to 0$. Veamos que $\{x_n\}$ es decreciente. Tenemos que:

$$\begin{aligned}x_{n+1} < x_n \quad &\Longleftrightarrow \frac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{n+1} < \frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}{n} \Longleftrightarrow \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+2}} < \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} \\ &\Longleftrightarrow ((n+2)n)^{n+1} < (n+1)^{n+2}(n+1)^n \Longleftrightarrow (n^2+2n)^{n+1} < (n+1)^{2n+2} \\ &\Longleftrightarrow (n^2+2n)^{n+1} < ((n+1)^2)^{n+1} \Longleftrightarrow (n^2+2n)^{n+1} < (n^2+2n+1)^{n+1}\end{aligned}$$

Como esta última desigualdad es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$, también lo es la primera. Por tanto $\{x_n\}$ es decreciente. Concluimos, por el criterio de Leibnitz, que la serie en b) es convergente. ☺

**Comentarios.** La serie en a) es muy fácil. Casi todos intentáis usar el criterio del cociente pero casi todos os equivocáis al simplificar ☹. Sois estudiantes de matemáticas, tenéis que saber simplificar expresiones sencillas. El estudio de la convergencia absoluta de la serie en b) es muy fácil. Pocos lo habéis hecho. Nadie ha probado que la sucesión $\{x_n\}$ antes considerada es decreciente. He calificado este ejercicio como sigue. El apartado a) 1 punto. La convergencia absoluta en b) 0,75 puntos. Aplicar correctamente el criterio de Leibnitz en b) 1,25 puntos.

**Ejercicio 4.** Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ Una función continua verificando que $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$ para todo $x \in [-1, 1]$. Prueba que hay algún $c \in [-1, 1]$ tal que $f(c) = c^3$.

**Solución.** La igualdad $f(c) = c^3$ podemos escribirla como $f(c) - c^3 = 0$. Es decir, se trata de probar que la función $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x) - x^3$ para todo $x \in [-1, 1]$ se anula en algún punto $c \in [-1, 1]$. Aplicaremos, claro está, el teorema de Bolzano. Como la función $f$ es, por hipótesis, continua en $[-1, 1]$, también la función $g$ es continua por ser suma de funciones continuas. Tenemos que $g(-1) = f(-1) - (-1)^3 = f(-1) + 1 \geqslant 0$ y $g(1) = f(1) - (1)^3 = f(1) - 1 \leqslant 0$. Si $g(-1) = 0$ entonces $f(-1) = -1 = (-1)^3$ y podemos tomar $c = -1$. Si $g(1) = 0$ entonces $f(1) = 1 = (1)^3$ y podemos tomar $c = 1$. En otro caso será $g(-1) > 0$ y $g(1) < 0$. Pero entonces el teorema de Bolzano asegura que hay algún punto $c \in ]-1, 1[$ tal que $g(c) = 0$, es decir, $f(c) = c^3$. ☺

**Comentarios.** ¡Qué regalito! Un ejercicio absolutamente típico de los que se hacen con el teorema de Bolzano. Hemos estudiado en clase, y la tenéis escrita en los apuntes, la estrategia a seguir, siempre la misma, en estos ejercicios. Pues para mi sorpresa casi nadie ha hecho bien este sencillo ejercicio que valía 2 puntos. ☹

**Cuestiones teóricas.** Decir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas, justificando brevemente las respuestas.

a) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ es un número irracional.

b) Una sucesión de números reales está acotada si, y sólo si, admite una sucesión parcial convergente.

c) Si $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ es una serie convergente de números reales positivos, entonces la sucesión $\{x_n\}$ es decreciente.

d) Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función real de variable real. Si $f$ es continua en $A$ y no está mayorada ni minorada, entonces $f(A) = \mathbb{R}$.

e) Hay un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ que no es vacío y cuyo conjunto de minorantes es un intervalo del tipo $]-\infty, a[$.

**Solución.**

a) Cierto. Pongamos $\alpha = \sqrt{3} + \sqrt{5}$. Entonces $\alpha^2 = 8 + 2\sqrt{15}$ de donde $\sqrt{15} = \frac{\alpha^2-8}{2}$. Esta igualdad prueba que si $\alpha$ fuera un número racional, entonces también $\sqrt{15}$ sería racional, cosa que no ocurre porque sabemos que si $n \in \mathbb{N}$ entonces $\sqrt{n}$ o bien es un número natural o irracional.

b) Una parte de la afirmación es correcta, a saber: si una sucesión de números reales está acotada entonces, por el teorema de Bolzano – Weierstrass, sabemos que admite alguna sucesión parcial convergente. La afirmación recíproca es falsa: una sucesión puede tener muchas sucesiones parciales convergentes y ella no estar acotada. Es fácil dar ejemplos. La sucesión $\{x_n\}$ definida por $x_{2n} = 1$, $x_{2n-1} = n$ tiene la sucesión parcial formada por los términos pares convergente pero no es una sucesión acotada.

c) Falso. Es fácil dar ejemplos. La serie $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ donde $x_{2n} = 1/2^n$ y $x_{2n-1} = 1/3^n$ es, evidentemente, convergente pero la sucesión $\{x_n\}$ no es decreciente.

d) Falso. Es fácil dar ejemplos. La función $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/x$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$ es continua y su imagen, evidentemente, no contiene a 0. De hecho, se tiene que $f(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}^*$. Lo que se afirma sí es cierto cuando $A$ es un intervalo pues en tal caso, por el teorema del valor intermedio, la imagen de $f$ es también un intervalo y si no está mayorado ni minorado tiene que ser todo $\mathbb{R}$.

e) Falso. Absolutamente falso. Si $A$ es cualquier conjunto de números reales no vacío y minorado, el principio del ínfimo asegura que el conjunto de los minorantes de $A$ tiene máximo y los conjuntos del tipo $]-\infty, a[$ no tienen máximo.

**Comentarios.** Un desastre. Nadie ha respondido bien a más de tres cuestiones. La mayoría solamente responden bien a una o a ninguna. Los disparates son de antología. Valgan como muestra los siguientes.

a) Según algunos, la suma de dos números irracionales es irracional. Claro, por ejemplo $\sqrt{2} + (2 - \sqrt{2}) = 2$.

c) Para casi todos la afirmación es cierta. Alguno, que confunde la serie $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ con la sucesión $\{x_n\}$, dice que la sucesión $\{x_n\}$ es creciente. Hay quien pone el siguiente ejemplo: la serie $\sum_{n\geqslant 1} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ es convergente ¡¡?? pero la sucesión $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ es creciente.

¿Para qué seguir? La pregunta de teoría valía 5 puntos y cada una de las cuestiones teóricas 1 punto. La nota final se calcula en la forma 0.8 NP + 0.2 NT, donde NP es la nota en problemas y NT la nota en teoría. Para terminar, solamente tres de vosotros han hecho la pregunta de teoría aceptablemente bien.

# Grado en Matemáticas – Cálculo I
# Soluciones ejercicios examen 02/02/2011

**Ejercicio 1.** Sea $\{x_n\}$ la sucesión definida por:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{4+3x_n}{3+2x_n} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Prueba que es convergente y calcula su límite.

**Solución.** Para estudiar la monotonía de la sucesión vamos a expresar $x_{n+1} - x_n$ en función de $x_n - x_{n-1}$. Tenemos que:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{4+3x_n}{3+2x_n} - \frac{4+3x_{n-1}}{3+2x_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{(3+2x_n)(3+2x_{n-1})} \tag{1}$$

Puesto que, evidentemente, para todo $n \in \mathbb{N}$ es $x_n > 0$, de la igualdad (1) se deduce que

$$x_n - x_{n-1} > 0 \Longleftrightarrow x_{n+1} - x_n > 0.$$

Como $x_2 = 7/5 > 1 = x_1$, concluimos, por el principio de inducción matemática, que $x_{n+1} - x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Hemos probado que $\{x_n\}$ es estrictamente creciente.

Como $x_n > 0$ se verifica que:

$$x_{n+1} = \frac{4+3x_n}{3+2x_n} < \frac{6+4x_n}{3+2x_n} = 2$$

Luego $x_n < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Hemos probado que $\{x_n\}$ está mayorada. Como es una sucesión creciente y mayorada, es convergente. Sea $\ell = \lim\{x_n\}$. Como debe ser $\ell > 0$, deducimos, aplicando resultados del álgebra de límites de sucesiones, que se debe verificar la igualdad:

$$\ell = \frac{4+3\ell}{3+2\ell} \quad \Longrightarrow \quad \ell^2 = 2 \quad \Longrightarrow \quad \ell = \sqrt{2}.$$

Luego $\lim\{x_n\} = \sqrt{2}$. ☺

**Comentario.** Este ejercicio se hizo en clase. Admite algunas variantes en su resolución. Lo hagas como lo hagas, no ofrece dificultad ninguna.

Por ejemplo, para estudiar la monotonía también puedes hacer lo siguiente:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{4+3x_n}{3+2x_n} - x_n = \frac{4-2x_n^2}{3+2x_n}.$$

Como $x_n > 0$, de esta igualdad se deduce que:

$$x_{n+1} - x_n > 0 \Longleftrightarrow 4 - 2x_n^2 > 0 \Longleftrightarrow x_n < \sqrt{2} \tag{2}$$

Observa que todavía no hemos probado nada, lo único que hemos hecho ha sido poner en equivalencia dos desigualdades sin probar ninguna de ellas. Probaremos seguidamente que $x_n < \sqrt{2}$. Tenemos que:

$$x_{n+1} < \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{4+3x_n}{3+2x_n} < \sqrt{2} \Leftrightarrow 4+3x_n < 3\sqrt{2}+2\sqrt{2}\,x_n \Leftrightarrow (3-2\sqrt{2})x_n < 3\sqrt{2}-4 \Leftrightarrow x_n < \frac{3\sqrt{2}-4}{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Donde hemos usado que $3 - 2\sqrt{2} > 0$. También puedes, si lo prefieres, trabajar sin raíces:

$$x_{n+1}^2 < 2 \Leftrightarrow \frac{(4+3x_n)^2}{(3+2x_n)^2} < 2 \Leftrightarrow 16 + 24x_n + 9x_n^2 < 18 + 24x_n + 8x_n^2 \Leftrightarrow x_n^2 < 2.$$

Hemos obtenido así que $x_{n+1} < \sqrt{2} \Longleftrightarrow x_n < \sqrt{2}$. Como $x_1 = 1 < \sqrt{2}$ concluimos, por el principio de inducción matemática, que $x_n < \sqrt{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora, por (2), deducimos que $\{x_n\}$ es estrictamente creciente y, como también hemos probado que está mayorada por $\sqrt{2}$, concluimos que es convergente. El límite se calcula como antes.

Un error bastante extraño que cometéis más de uno es afirmar que $\lim\{x_n\} = 3/2$. Puede que me equivoque, pero creo que quien afirma tal cosa lo hace porque piensa que $\{x_n\} \to +\infty$ ¡pero a la vez está afirmando que $\lim\{x_n\} = 3/2$! Observa que

$$\lim\left\{\frac{4+3x_n}{3+2x_n}\right\} = \frac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad \{x_n\} \to +\infty.$$

Esto se deduce de que

$$\lim\left\{\frac{4+3x_n}{3+2x_n}\right\} = \frac{3}{2} \Longleftrightarrow \frac{4+3x_n}{3+2x_n} = \frac{3}{2} - u_n \quad \text{donde } u_n > 0 \text{ y } \lim\{u_n\} = 0.$$

Y despejando obtenemos que:

$$x_n = \frac{1+6u_n}{4u_n} \to +\infty.$$

Pero los errores son tan variados e insólitos que llevaría demasiado tiempo recogerlos todos. Tengo la impresión, y quisiera equivocarme, de que muchos no sabéis sumar ni restar fracciones. ☹

**Ejercicio 2.** Estudia la convergencia de las siguientes series:

$$\text{a)} \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1} \qquad\qquad \text{b)} \sum_{n\geqslant 1}\frac{\sqrt{n!}}{n^{n+1}}.$$

**Solución.**

a) Estudiaremos en primer lugar la convergencia absoluta, es decir, la convergencia de la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ donde $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1}$. Tenemos que:

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1} = \frac{1}{n+1/\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n}$$

Donde hemos usado la evidente equivalencia asintótica $\left\{n+1/\sqrt{n}\right\} \sim \{n\}$. Como la serie $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n}$ es divergente, deducimos, por el criterio límite de comparación, que $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ también es divergente, es decir, la serie $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}a_n$ no es absolutamente convergente.

Para ver si es convergente, como se trata de una serie alternada, aplicaremos el criterio de Leibniz. De lo antes visto se sigue que $\{a_n\} \to 0$. Probaremos que la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente. Tenemos que:

$$\begin{aligned} a_{n+1} < a_n \quad &\Longleftrightarrow \frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1}+1} < \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1} \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow n\sqrt{n(n+1)} + \sqrt{n+1} < (n+1)\sqrt{n(n+1)} + \sqrt{n} \Longleftrightarrow \sqrt{n+1} < \sqrt{n(n+1)} + \sqrt{n} \end{aligned}$$

Como esta última desigualdad es evidentemente cierta para todo $n \in \mathbb{N}$, concluimos que $\{a_n\}$ es decreciente y, por el criterio de Leibniz, la serie $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}a_n$ es convergente.

b) Se trata de una serie de términos positivos. Aplicaremos el criterio del cociente. Pongamos $x_n = \dfrac{\sqrt{n!}}{n^{n+1}}$. Tenemos que:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\sqrt{n+1}\, n^{n+1}}{(n+1)^{n+2}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \to 0.$$

Porque es el producto de una sucesión que converge a 0, $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0$, por otra acotada, $0 < \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1} < 1$. También puede usarse que

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n-1} = \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \to \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Concluimos, por el criterio del cociente, que la serie es convergente.

**Comentario.** A muchos les lleva la vida probar que $\dfrac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1} \to 0$. Eso es trivial:

$$0 < \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1} < \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n}$$

Por otra parte, basta comparar los grados del numerador, $1/2$, y del denominador, $3/2$, para darse cuenta de que dicha sucesión se comporta como $n^{1/2-3/2} = n^{-1} = 1/n$. Parece que esto es muy difícil. Ni siquiera hace falta darse cuenta de eso porque basta poner:

$$\frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1} \geqslant \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{n+1} \geqslant \frac{1}{2n}$$

Para deducir, por el principio básico de comparación, que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1}$ no es convergente.

Casi nadie aplica correctamente el criterio de Leibniz. La mayoría olvidáis la hipótesis de que la sucesión debe ser decreciente. Algunos afirman que el criterio de Leibniz es un criterio de convergencia absoluta.

En el apartado b) la gran dificultad es simplificar $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$. Lo repito una vez más, nadie te puede enseñar a hacer cálculos elementales, solamente practicando puedes aprender, y eso tienes que hacerlo tú.

Hemos hecho en clase ejercicios casi iguales a estos. ☹

**Ejercicio 3.** Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función creciente y continua en $[a,b]$ tal que $a \leqslant f(x) \leqslant b$ para todo $x \in [a,b]$. Prueba que la sucesión $\{x_n\}$ definida por:

$$x_1 = f(a), \quad x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

converge a un punto $u \in [a,b]$ tal que $f(u) = u$.

**Solución.** Como, por hipótesis, para todo $x \in [a,b]$ se tiene que $a \leqslant f(x) \leqslant b$, deducimos que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $a \leqslant x_n \leqslant b$. Por tanto $\{x_n\}$ está acotada. Probaremos que es creciente, es decir, que $x_n \leqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Lo haremos por inducción. La desigualdad es cierta para $n = 1$ porque, como consecuencia de las hipótesis hechas, tenemos que $a \leqslant x_1 = f(a)$ y, como $f$ es creciente, tenemos que $x_1 = f(a) \leqslant f(x_1) = x_2$. Supuesto que para un valor de $n$ es $x_n \leqslant x_{n+1}$ deducimos, por ser $f$ creciente, que $x_{n+1} = f(x_n) \leqslant f(x_{n+1}) = x_{n+2}$. Concluimos que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $x_n \leqslant x_{n+1}$. Hemos probado así que la sucesión es creciente y acotada. Luego converge. Sea $u = \lim\{x_n\}$. Como para todo $n \in \mathbb{N}$ es $a \leqslant x_n \leqslant b$, deducimos que $a \leqslant u \leqslant b$. Como $f$ es continua tenemos que $\lim\{f(x_n)\} = f(u)$, pero también es $\lim\{f(x_n)\} = \lim\{x_{n+1}\} = u$. Concluimos, por la unicidad del límite de una sucesión, que $f(u) = u$. ☺

**Comentario.** Sin comentarios.

**Ejercicio 4.** Sea $f:]0,1[\to\mathbb{R}$ la función definida para todo $x\in]0,1[$ por $f(x)=\dfrac{2x-1}{x(x-1)}$. Calcula el conjunto imagen $f(]0,1[)$.

**Solución.** Sabemos que toda función racional es continua en su dominio natural de definición y, por tanto, también es continua en cualquier conjunto contenido en él. Nuestra función $f$ es racional y el intervalo $]0,1[$ está contenido en su dominio natural de definición, por tanto $f$ es continua en $]0,1[$. Como $]0,1[$ es un intervalo, por el teorema del valor intermedio, se sigue que $J=f(]0,1[)$ es un intervalo. Es evidente que cuando $x\in]0,1[$ está muy próximo a 1 se tiene que $f(x)$ es un número negativo que puede ser tan pequeño como queramos, y si $x\in]0,1[$ está muy próximo a 0 entonces $f(x)$ es un número positivo tan grande como queramos. Todo lo que tenemos que hacer es justificar esta evidencia (si para ti esto no es *evidente* mal asunto) porque entonces habremos probado que $J$ es un intervalo que no está minorado ni mayorado y, por tanto, $J=\mathbb{R}$.

Números $x\in]0,1[$ muy próximos a 0 son, por ejemplo, los de la forma $1/n$ para $n\geqslant 2$ suficientemente grande. Para $n\geqslant 2$ tenemos que:

$$f(1/n)=\frac{2/n-1}{1/n(1/n-1)}=n\frac{n-2}{n-1}\geqslant n\frac{n-2}{n}=n(1-2/n)=n-2 \tag{3}$$

Números $x\in]0,1[$ muy próximos a 1 son, por ejemplo, los de la forma $1-1/n$ para $n\geqslant 2$ suficientemente grande. Para $n\geqslant 2$ tenemos que:

$$f(1-1/n)=\frac{1-2/n}{(1-1/n)(-1/n)}=-n\frac{n-2}{n-1}\leqslant -n\frac{n-2}{n}=-n(1-2/n)=-n+2 \tag{4}$$

De (3) se sigue que $J=f(]0,1[)$ no está mayorado porque para todo $n\geqslant 2$ $f(1/n)\in J$ y $f(1/n)\geqslant n-2$. De (4) se sigue que $J=f(]0,1[)$ no está minorado porque para todo $n\geqslant 2$ $f(1-1/n)\in J$ y $f(1-1/n)\leqslant -n+2$. Luego $J=\mathbb{R}$. ☺

**Comentario.** Sin comentarios.

**Cuestiones de teoría.** Explica si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas.

a) Toda función continua en un intervalo alcanza en algún punto de dicho intervalo un valor mínimo.
b) Toda función $f:A\to\mathbb{R}$, inyectiva en $A$ y cuya imagen es un intervalo, es continua.
c) Si un conjunto de números reales no tiene máximo entonces tiene supremo.
d) Existe una sucesión de números reales $\{x_n\}$ que es acotada y que verifica que $|x_n-x_m|\geqslant 10^{-10}$ siempre que $n\neq m$.
e) Toda serie convergente es una sucesión acotada.

**Solución.** a) Evidentemente falsa. Basta considerar la función identidad definida en cualquier intervalo abierto.

b) Evidentemente falsa. Basta considerar la función $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x$ para $0\leqslant x<1$ y $f(x)=3-x$ para $1\leqslant x\leqslant 2$. Dicha función no es continua, pues tiene una discontinuidad en 1. Claramente, $f$ es inyectiva y su imagen es $f([0,1[)\cup f([1,2])=[0,1[\cup[1,2]=[0,2]$. Observa que $f$ no es monótona.

c) Evidentemente falsa. Ejemplo $\mathbb{R}$. Cualquier conjunto no vacío y no mayorado no tiene máximo y tampoco supremo.

d) Falsa. En efecto, como $\{x_n\}$ está acotada, por el teorema de Bolzano - Weierstrass, tiene alguna sucesión parcial convergente, $\{x_{\sigma(n)}\}$. Pongamos $y_n=x_{\sigma(n)}$. Como $\{y_n\}$ converge debe verificar la condición de Cauchy, es decir, dado cualquier $\varepsilon>0$, debe existir un $m_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tal que para todos $p,q\geqslant m_\varepsilon$ se verifica que $|y_p-y_q|<\varepsilon$. En particular, tomando $\varepsilon=10^{-10}$, para todos $p,q$ suficientemente grandes deberá ser $|x_{\sigma(p)}-x_{\sigma(q)}|=|y_p-y_q|<10^{-10}$ lo que contradice la hipótesis hecha.

e) Cierta. Porque una serie *es* una sucesión y sabemos que toda sucesión convergente está acotada.