Geometría 2 – Grado en Matemáticas

Soluciones a la prueba de clase del tema 1 – Grupo B

27 de abril de 2020

Instrucciones para realizar el examen.

1. Lee detenidamente estas instrucciones y el examen.
2. Si tienes alguna pregunta sobre el examen o sobre su realización, puedes hacerla **antes de las 16:00** a través del chat de PRADO o por correo electrónico a `jmmanzano@ugr.es` y será respondida lo antes posible.
3. Al finalizar el examen, escanea o fotografía tus soluciones manuscritas bien iluminadas, de forma que que se lea sin dificultad todo lo que has escrito. En cada página o foto debe aparecer tu DNI/pasaporte (no el número, sino el documento físico).
4. Envía los documentos generados (en formato PDF/TIFF/PNG/JPG/... o similar) desde tu cuenta `@correo.ugr.es` a la dirección `jmmanzano@ugr.es` **antes de las 17:00**. No se valorarán las soluciones pasadas las 17:10 (hora del servidor de correo).

Si experimentas incidencias técnicas que no te permitan cumplir estas normas, notifícalas a la mayor brevedad por correo electrónico y se te hará un examen oral alternativo.

Instrucciones para responder al examen.

En el examen hay dos parámetros en rojo para generar los ejercicios, correspondientes a los dos últimos dígitos de tu DNI (o pasaporte en su defecto) omitiendo todas las letras.

- El parámetro $\mathtt{a}$ es el penúltimo dígito.
- El parámetro $\mathtt{b}$ es el último dígito.

Por ejemplo, si tu DNI es 93175486H, entonces $\mathtt{a} = 8$ y $\mathtt{b} = 6$.

Presta atención ya que no se valorarán respuestas con parámetros erróneos ni tampoco respuestas para todo valor de los parámetros.

Ejercicio 1. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ el endomorfismo cuya matriz en la base usual es

$$A = \begin{pmatrix} 2\,\mathtt{a}+1 & -\,\mathtt{a}-1 & -\,\mathtt{a}-1 & 1 \\ 4\,\mathtt{a}+4 & -2\,\mathtt{a}-3 & -2\,\mathtt{a}-2 & 2 \\ -2\,\mathtt{a}-2 & \mathtt{a}+1 & \mathtt{a} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathtt{a} \end{pmatrix}.$$

(a) **(2 puntos)** Calcular los valores propios de f.

(b) **(3 puntos)** Halla una base de cada subespacio propio de f.

(c) **(1 puntos)** ¿Es f diagonalizable?

Ejercicio 2 (1 punto por apartado). Se consideran un espacio vectorial real V de dimensión n, un endomorfismo $f : V \to V$ y dos matrices cuadradas $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Si $0 \leq \mathtt{b} \leq 3$, razona la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:
  (a) Si U es un subespacio propio de f, entonces $f(U) = U$.
  (b) La suma de las multiplicidades geométricas de los valores propios de f no puede superar la dimensión de V.
  (c) Si A y B son diagonalizables, entonces $A + B$ es diagonalizable.
  (d) Si A es diagonalizable y $\lambda = 1$ y $\lambda = -1$ son los únicos valores propios de A, entonces A^2 es la matriz identidad.

- Si $4 \leq \mathtt{b} \leq 6$, razona la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:
  (a) El endomorfismo f tiene al menos un valor propio real.
  (b) Si la suma de las multiplicidades algebraicas de todos los valores propios reales de f es igual a n, entonces f es diagonalizable.
  (c) Si $A^3 = 3A^2 - A$, entonces $\lambda = 2$ no es valor propio de A.
  (d) Si $\lambda = 0$ es el único valor propio complejo de A, entonces A^n es la matriz nula.

- Si $7 \leq \mathtt{b} \leq 9$, razona la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:
  (a) Existe $u \in V$ no nulo tal que u y $f(u)$ son linealmente dependientes.
  (b) Si f es diagonalizable, entonces existe una única base de V en la que la matriz de f es diagonal.
  (c) Si A y B son diagonalizables y semejantes, entonces $A = B$.
  (d) Si $A^2 = A$, entonces cualquier vector columna $x \in \mathbb{R}^n$ se expresa de forma única como $x = x_0 + x_1$, siendo $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ tales que $Ax_0 = 0$ y $Ax_1 = x_1$.

Solución al ejercicio 1. Vamos a resolverlo para todo valor del parámetro $\mathtt{a}$, aunque en el examen sólo se pedía la resolución siendo $\mathtt{a}$ el penúltimo dígito del DNI.

Comenzamos calculando el polinomio característico de A. Aunque no es estrictamente necesario hacerlo para el apartado (a), lo vamos a necesitar responder al apartado (b).

$$\begin{aligned} p_A(\mathtt{t}) &= \det\begin{pmatrix} 2\,\mathtt{a}+1-\mathtt{t} & -\mathtt{a}-1 & -\mathtt{a}-1 & 1 \\ 4\,\mathtt{a}+4 & -2\,\mathtt{a}-3-\mathtt{t} & -2\,\mathtt{a}-2 & 2 \\ -2\,\mathtt{a}-2 & \mathtt{a}+1 & \mathtt{a}-\mathtt{t} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathtt{a}-\mathtt{t} \end{pmatrix} \\ &= (\mathtt{a}-\mathtt{t})\det\begin{pmatrix} 2\,\mathtt{a}+1-\mathtt{t} & -\mathtt{a}-1 & -\mathtt{a}-1 \\ 4\,\mathtt{a}+4 & -2\,\mathtt{a}-3-\mathtt{t} & -2\,\mathtt{a}-2 \\ -2\,\mathtt{a}-2 & \mathtt{a}+1 & \mathtt{a}-\mathtt{t} \end{pmatrix} \\ &= (\mathtt{a}-\mathtt{t})(\mathtt{a}+(2\mathtt{a}-1)\mathtt{t}+(\mathtt{a}-2)\mathtt{t}^2-\mathtt{t}^3), \end{aligned}$$

donde hemos desarrollado el determinante por la última fila. Evaluando en -1, tenemos que $p_A(-1) = 0$, luego -1 es un valor propio. También $\mathtt{a}$ es otro valor propio ya que tenemos el factor $\mathtt{a}-\mathtt{t}$. Esto nos permite factorizar el polinomio, obteniendo que

$$p_A(\mathtt{t}) = (\mathtt{t}-\mathtt{a})^2(\mathtt{t}+1)^2,$$

luego tenemos dos valores propios, $\mathtt{a}$ y -1, ambos con multiplicidad algebraica 2. Para calcular su multiplicidad geométrica, calculamos los subespacios propios:

$$V_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} 2\,\mathtt{a}+2 & -\mathtt{a}-1 & -\mathtt{a}-1 & 1 \\ 4\,\mathtt{a}+4 & -2\,\mathtt{a}-2 & -2\,\mathtt{a}-2 & 2 \\ -2\,\mathtt{a}-2 & \mathtt{a}+1 & \mathtt{a}+1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathtt{a}+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

La segunda y la tercera filas de la matriz anterior son múltiplos de la primera, luego nos quedan las ecuaciones $t = 0$ y $(\mathtt{a}+1)(2x-y-z) = 0$. Como $\mathtt{a} \neq -1$ (ya que es un dígito del DNI), se tiene que $2x-y-z = 0$. A partir de estas ecuaciones independientes, obtenemos que $m_g(-1) = \dim(V_{-1}) = 2$ y que

$$V_{-1} = \mathrm{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}\right).$$

Análogamente, tenemos que

$$V_{\mathtt{a}} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} \mathtt{a}+1 & -\mathtt{a}-1 & -\mathtt{a}-1 & 1 \\ 4\,\mathtt{a}+4 & -3\,\mathtt{a}-3 & -2\,\mathtt{a}-2 & 2 \\ -2\,\mathtt{a}-2 & \mathtt{a}+1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Este sistema es compatible indeterminado y la matriz tiene rango 3 ya que el determinante de la submatriz eliminando la última fila y la primera columna tiene determinante no nulo. Por tanto, tomando $x = 1$ como parámetro, podemos despejar las otras tres variables como $(y, z, t) = (2, -1, 0)$. Esto nos dice que $m_g(\mathtt{a}) = \dim(V_{\mathtt{a}}) = 1$ y se cumple que

$$V_{\mathtt{a}} = \mathrm{L}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}\right). \qquad \square$$

Solución al ejercicio 2.

1. Si U es un subespacio propio de f, entonces $f(U) = U$.

   FALSO. Si f no es inyectiva, entonces el subespacio propio asociado al valor propio 0 es $V_0 = \ker(f) \neq \{0\}$, que cumple que $f(V_0) = \{0\} \neq V_0$.

2. La suma de las multiplicidades geométricas de los valores propios de f no puede superar la dimensión de V.

   VERDADERO. Como $m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$ para todo valor propio λ, sumando sobre todos los valores propios complejos, tenemos que $\sum_\lambda m_g(\lambda) \leq \sum_\lambda m_a(\lambda)$ y esta última suma es igual a n por el teorema fundamental del álgebra.

3. Si A y B son diagonalizables, entonces $A + B$ es diagonalizable.

   FALSO. Como contraejemplo, consideremos las matrices

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Por un lado, A es diagonalizable ya que tiene valores propios reales simples $\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$ y B es trivialmente diagonalizable (ya que es diagonal). Sin embargo, $A + B$ tiene valores propios no reales $1 \pm i$, luego no es diagonalizable.

4. Si A es diagonalizable y $\lambda = 1$ y $\lambda = -1$ son los únicos valores propios de A, entonces A^2 es la matriz identidad.

   VERDADERO. Si A es diagonalizable, entonces existe una matriz regular P y una matriz diagonal D tales que $A = P^{-1}DP$ y además los valores en la diagonal de D son los valores propios de A. Por tanto, $D^2 = I_n$ y $A^2 = P^{-1}D^2P = P^{-1}P = I_n$.

5. El endomorfismo f tiene al menos un valor propio real.

   FALSO. Como contraejemplo, consideremos $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ dado por

   $$M(f, \mathbb{B}_u) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

cuyo polinomio característico $p_f(\mathtt{t}) = (\mathtt{t} - 1)^2 + 1$ no tiene raices reales.

6. Si la suma de las multiplicidades algebraicas de todos los valores propios reales de f es igual a n, entonces f es diagonalizable.

   FALSO. Las multiplicidades geométricas también deben sumar n. Como contraejemplo, tenemos el endomorfismo del ejercicio 1.

7. Si $A^3 = 3A^2 - A$, entonces $\lambda = 2$ no es valor propio de A.

   VERDADERO. Si λ es un valor propio de A, entonces existe $u \in V$ no nulo tal que $Au = \lambda u$, luego $A^2u = \lambda Au = \lambda^2 u$ y $A^3u = \lambda A^2 u = \lambda^3 u$. Por tanto, multiplicando la igualdad $A^3 = 3A^2 - A$ por el vector propio u, obtenemos que $(\lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda)u = 0$ y, como $u \neq 0$, deducimos que $\lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda = 0$. Ahora sólo tenemos que fijarnos en que $\lambda = 2$ no satisface esta igualdad.

8. Si $\lambda = 0$ es el único valor propio complejo de A, entonces A^n es la matriz nula.

   VERDADERO. Si 0 es el único valor propio complejo de A, por el teorema fundamental del álgebra la factorización del polinomio característico de A es $p_A(\mathtt{t}) = (-1)^n(\mathtt{t} - 0)^n = (-1)^n\mathtt{t}^n$. Por el teorema de Cayley–Hamilton, A satisface su ecuación característica, luego $(-1)^nA^n$ es la matriz nula, esto es, A^n es la matriz nula.

9. Existe $u \in V$ no nulo tal que u y $f(u)$ son linealmente dependientes.

   FALSO. Supongamos que $u \in V$ es no nulo es tal que $au + bf(u) = 0$ para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$ no ambos nulos. Como u es no nulo, no puede ser $b = 0$ ya que en tal caso $a = 0$ o $u = 0$ en contra de lo que hemos supuesto. Por tanto, $f(u) = \frac{-a}{b}u$ y $\lambda = \frac{-a}{b}$ es valor propio. Esto nos dice que podemos dar un contraejemplo conun endomorfismo que no tenga valores propios, por ejemplo $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ dado por

   $$M(f, \mathbb{B}_u) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

   cuyo polinomio característico $p_f(\mathtt{t}) = (\mathtt{t} - 1)^2 + 1$ no tiene raices reales.

10. Si f es diagonalizable, entonces existe una única base de V en la que la matriz de f es diagonal.

    FALSO. Si $\mathbb{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ es una base de V en la que $M(f, \mathbb{B})$ es diagonal, entonces $\mathbb{B}' = (a_1e_1, \ldots, a_ne_n)$, siendo $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ no nulos es también base de V en la que $M(f, \mathbb{B}')$ es la misma matriz diagonal.

11. Si A y B son diagonalizables y semejantes, entonces $A = B$.

    FALSO. Si A y B son diagonalizables, entonces son semejantes si, y sólo si, tienen los mismos valores propios. Por ejemplo, las siguientes matrices de orden 2 son diagonalizables (con valores propios simples 1 y 2) y semejantes pero no son la misma matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

12. Si $A^2 = A$, entonces cualquier vector columna $x \in \mathbb{R}^n$ se expresa de forma única como $x = x_0 + x_1$, siendo $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ tales que $Ax_0 = 0$ y $Ax_1 = x_1$.

    VERDADERO. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, tomando $x_0 = x - Ax$ y $x_1 = Ax$, tenemos que $x = x_0 + x_1$. Además, $Ax_0 = Ax - A^2x = 0$ y $Ax_1 = A^2x = Ax = x_1$, ya que $A^2 = A$. Para ver que estos vectores son únicos, observemos que $Ax_0 = 0$ y $Ax_1 = x_1$ se traducen en que x_0 y x_1 son vectores propios de A para los valores propios 0 y 1, respectivamente, y la suma de subespacios propios $(\mathbb{R}^n)_0 \oplus (\mathbb{R}^n)_1$ es directa.

$\square$