Doble Grado en Informática y Matemáticas

Ejercicios de Cálculo I

1. Sean A y B conjuntos no vacíos y mayorados de números reales positivos. Prueba que el conjunto
$$C = \left\{ab - c^2 \ : \ a\in A,\ b\in B,\ c\in B\right\}$$
está mayorado y calcula su supremo.

2. Supongamos que $\{x_{2n}\} \to a$ y $\{x_{2n-1}\} \to b$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq b$. Prueba que los únicos valores de adherencia de $\{x_n\}$ son a y b.

3. Sea $\{x_n\}$ una sucesión y supongamos que hay dos sucesiones parciales $\{x_{\sigma(n)}\}$ y $\{x_{s(n)}\}$ que convergen a un mismo número x y tales que $\sigma(\mathbb{N}) \cup s(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$. Prueba que $\{x_n\}$ converge a x.

4. Sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ sucesiones acotadas tales que $x_n \geqslant 0$ e $y_n \geqslant 0$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Prueba que
$$\underline{\text{lím}}\{x_n\}\underline{\text{lím}}\{y_n\} \leqslant \underline{\text{lím}}\{x_n y_n\} \leqslant \overline{\text{lím}}\{x_n\}\underline{\text{lím}}\{y_n\} \leqslant \overline{\text{lím}}\{x_n y_n\} \leqslant \overline{\text{lím}}\{x_n\}\overline{\text{lím}}\{y_n\}.$$
Prueba con ejemplos que estas desigualdades pueden ser estrictas.

5. Prueba que los límites superior e inferior de una sucesión acotada de números reales son valores de adherencia de dicha sucesión y que cualquier otro valor de adherencia está comprendido entre ellos. Deduce que si $\text{lím}\{x_n\} = x > 0$, entonces
$$\underline{\text{lím}}\{x_n y_n\} = x\,\underline{\text{lím}}\{y_n\}, \quad \overline{\text{lím}}\{x_n y_n\} = x\,\overline{\text{lím}}\{y_n\}.$$

6. Calcula los límites de las sucesiones:
   a) $x_n = \dfrac{\frac{2}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^3}{3^2} + \cdots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{n^2}$.
   b) $x_n = \log\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \sqrt[n]{n!}$.

7. Estudia la continuidad de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = xE(1/x)$ si $x \neq 0$, $f(0) = 1$.

8. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Se define $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por:
$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x\in\mathbb{Q}; \\ g(x), & \text{si } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$$
Estudia la continuidad de h.

9. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y definamos $Z = \{x \in [a, b] : f(x) = 0\}$. Supuesto que $Z \neq \emptyset$, prueba que Z tiene máximo y mínimo. ¿Es cierto dicho resultado para una función continua en un intervalo abierto?

10. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a) < 0$, $f(b) < 0$ y $f(c) > 0$ para algún $c \in]a, b[$. Prueba que hay dos números u, v verificando que $a < u < v < b$, $f(u) = f(v) = 0$ y $f(x) > 0$ para todo $x \in]u, v[$.

11. Calcula, haciendo uso del teorema del valor intermedio, el conjunto imagen $f(]-1,1])$ de la función $f:]-1,1]\to\mathbb{R}$ dada por:

$$f(x)=\sqrt{\frac{1-x}{\sqrt{1+x}}} \qquad (x\in]-1,1]).$$

Calcula también $f[-1/2,1/2]$.

12. Sea f una función continua, acotada y estrictamente creciente en un intervalo abierto I. Sea $\alpha=\text{ínf} f(I)$, $\beta=\sup f(I)$. Prueba que $f(]a,b[)=]\alpha,\beta[$.

Modifica el resultado anterior si no se supone que f esté acotada en I.

13. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función creciente verificando que $a<f(x)<b$ para todo $x\in[a,b]$. Definamos $x_1=a$ y $x_{n+1}=f(x_n)$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Prueba que $\{x_n\}$ converge a un punto $\beta\in]a,b]$ tal que $\beta=\sup f([a,\beta[)$. Además, $\beta\leqslant f(\beta)$. Si suponemos que f es continua, entonces $\beta=f(\beta)$.

14. Estudia, según los valores de $\alpha>0$, la convergencia absoluta y la convergencia de las series:

a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)$ b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{3^n n!}{(3+\alpha)\cdot(6+\alpha)\cdot(9+\alpha)\dots(3n+\alpha)}$

15. Estudia la convergencia absoluta y la convergencia de las siguientes series.

a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{5^n n!}{\sqrt[4]{n}\,9\cdot 14\cdot 19\cdots(4+5n)}$; *b)* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1-\sqrt{n+1}}$

16. Explica si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas. Cuando sean ciertas indica el resultado de teoría que lo justifica o proporciona una prueba y, cuando sean falsas indica un contraejemplo.

a) Toda función definida en un intervalo cuya imagen es un intervalo es continua.

b) Si f es una función estrictamente monótona y definida en un intervalo entonces su función inversa f^{-1} es continua.

c) Si $f:I\to\mathbb{R}$ es una función inyectiva, I es un intervalo y $J=f(I)$ es un intervalo entonces su función inversa f^{-1} es continua en J.

d) Hay una función $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ que es continua y verifica que $f([0,1])=[2,3[$.

e) Toda función polinómica o se anula en algún punto o alcanza un máximo o un mínimo absolutos en $\mathbb{R}$.

f) Si f es continua en a y g es discontinua en a entonces $f+g$ puede ser continua o discontinua en a.

g) Si f y g son discontinuas en a entonces fg es discontinua en a.

h) Una función f es continua en a si, y sólo si, $|f|$ es continua en a.

i) Si una función f está definida en un intervalo $[a,b]$ y toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces es continua en $[a,b]$.

j) Si una sucesión monótona $\{x_n\}$ tiene una sucesión parcial convergente entonces $\{x_n\}$ es convergente.

k) Una sucesión no está mayorada si, y sólo si, tiene alguna sucesión parcial positivamente divergente.

l) Si $\{x_n\}$ es una sucesión estrictamente creciente tal que $\{x_{n+1}-x_n\}\to 0$, entonces $\{x_n\}$ es convergente.

m) Supongamos que $\{x_{3n}\}$, $\{x_{3n+1}\}$, $\{x_{3n+2}\}$ convergen a un mismo número α. Entonces $\{x_n\}$ converge a α.

n) Si la serie $\sum_{n\geqslant 1}|a_{n+1}-a_n|$ es convergente entonces $\{a_n\}$ es convergente.

ñ) Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas tales que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{Q}$, entonces $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

o) Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es continua y $f(x) > 0$ para todo $x \in [0,1]$ entonces existe $\alpha > 0$ tal que $f(x) > \alpha$ para todo $x \in [0,1]$.

p) Toda sucesión estrictamente creciente verifica la condición de Cauchy.

17. Explica si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas. Cuando sean ciertas indica el resultado de teoría que lo justifica o proporciona una prueba y, cuando sean falsas indica un contraejemplo.

a) Toda serie mayorada es convergente.

b) Si un conjunto no vacío de números reales no tiene supremo tampoco tiene máximo.

c) Hay un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ que no es vacío y cuyo conjunto de minorantes es un intervalo del tipo $]-\infty, a[$.

d) Hay una función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ que es continua y verifica que $f([0,1]) = [2,3[$.

e) Toda función continua en un intervalo alcanza en algún punto de dicho intervalo un valor mínimo.

f) Toda función $f : A \to \mathbb{R}$, inyectiva en A y cuya imagen es un intervalo, es continua.

g) Si un conjunto de números reales no tiene máximo entonces tiene supremo.

h) Existe una sucesión acotada de números reales $\{x_n\}$ que verifica que $|x_n - x_m| \geqslant 10^{-10}$ siempre que $n \neq m$.

i) Toda serie convergente es una sucesión acotada.

j) Si $\{x_n\}$ es una sucesión acotada de números reales, entonces $\{x_n\}$ tiene la siguiente propiedad: para cada $\delta > 0$, pueden encontrarse $m, n \in \mathbb{N}$, con $m \neq n$, tales que $|x_n - x_m| < \delta$.

k) Una sucesión que no tiene ninguna sucesión parcial convergente tampoco tiene ninguna sucesión parcial acotada.

l) Sea A un conjunto de números reales no vacío y mayorado y $\beta = \sup A$. Dado $\varepsilon > 0$ existe algún $a \in A$ tal que $\beta - \varepsilon < a < \beta$.

m) Toda sucesión tiene una sucesión parcial convergente o una sucesión parcial divergente.

n) Toda función polinómica o se anula en algún punto o alcanza un máximo o un mínimo absolutos en $\mathbb{R}$.

ñ) Una sucesión no acotada no puede tener una sucesión parcial convergente.

o) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y verifica que $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{Q}$ entonces f es constante.

p) Si $x_n \leqslant y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\sum_{n\geqslant 1} y_n$ es convergente, entonces $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ también es convergente.