Ejercicios inducción

6. Prueba, usando el principio de inducción, que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifican las siguientes relaciones.

   a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

   c) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

   d) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

   e) $\sqrt{n} \leqslant 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 2\sqrt{n}$

   f) $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2^n} \geqslant 1 + \dfrac{n}{2}$

   g) $\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1+3n}}$

   h) $\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \geqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

a) $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$P(n)$ $A = \{ n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ es cierta} \}$

$1 \in A$? $1 = 1$ ✓ $\Rightarrow$ 1 está en A $\Rightarrow$ $P(1)$ es cierta

Suponemos cierta la propiedad para n

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$\underbrace{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}_{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}+(n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2 = (n+1)(n+2)(2n+3)$$

$$(n^2+n)(2n+1)+6n^2+12n+6 = (n^2+2n+n+2)(2n+3)$$

$$\cancel{2n^3}+\cancel{3n^2}+\cancel{n}+\cancel{6n^2}+\cancel{12n}+\cancel{6} = \cancel{2n^3}+\cancel{6n^2}+\cancel{4n}+\cancel{3n^2}+\cancel{9n}+\cancel{6}$$

$0 = 0$ Nuestro conjunto es inductivo.

e) $\sqrt{n} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n}$

$A = \{ n \in \mathbb{N} : P(n)$ es cierta $\}$

$1 \in A$? $1 \leq 1 \leq 2$ ✓ Se cumple $P(1)$

Suponemos cierto $P(n)$ y $P(n) \Rightarrow P(n+1)$?

Si lo demostramos por la izquierda:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1}$$

$$\underbrace{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{\geq \sqrt{n}}$$

$$\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1}$$

$$\sqrt{n(n+1)} + 1 \geq n+1$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt{n(n+1)} \geq n$$

$$\cancel{n^2} + n \geq \cancel{n^2}$$

$$n \geq 0 \checkmark$$

Si lo demostramos por la derecha:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\sqrt{n+1}$$

$$\underbrace{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{\leq 2\sqrt{n}}$$

$$2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\sqrt{n+1}$$

$$2\sqrt{n(n+1)} + 1 \leq 2n+2$$

$$2\sqrt{n(n+1)} \leq 2n+1$$

$$2(n^2+n) \leq 4n^2+4n+1$$

$$2n^2+2n \leq 4n^2+4n+1$$

$$0 \leq 2n^2+2n+1$$