Ejercicio transparencia 66

1. Demuestra que una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ es simétrica y definida positiva si, y solo si, admite una factorización tipo Cholesky.
2. Comprueba que la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix}$$

es definida positiva.

3. Resuelve el sistema lineal $\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ por el método de Cholesky.
4. Encuentra una matriz cuadrada de orden 3×3 que sea simétrica pero no definida positiva.

Solución. Comenzamos probando que si $\mathbf{A}$ admite una factorización de Cholesky, esto es, para cierta matriz $\mathbf{U}$ del mismo orden, triangular superior y con coeficientes positivos en su diagonal principal, se tiene

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}^T\mathbf{U},$$

entonces $\mathbf{A}$ es simétrica y definida positiva (el recíproco aparece en la transparencia 64). En efecto: la simetría es clara, pues

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T &= \mathbf{U}^T(\mathbf{U}^T)^T \\ &= \mathbf{U}^T\mathbf{U} \\ &= \mathbf{A}, \end{aligned}$$

mientras que para la definición positiva, si el orden de $\mathbf{A}$ es, digamos, N, entonces dado $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{x}^T\mathbf{U}^T\mathbf{U}\mathbf{x} \\ &= (\mathbf{U}\mathbf{x})^T\mathbf{U}\mathbf{x} \\ &= \|\mathbf{U}\mathbf{x}\|_2^2, \end{aligned}$$

luego

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = 0 \;\Leftrightarrow\; \|\mathbf{U}\mathbf{x}\|_2^2 = 0,$$

esto es, si, y solo si, $\mathbf{U}\mathbf{x} = 0$, equivalentemente $(\det(\mathbf{U}) \neq 0)$, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Para comprobar que **A** es definida positiva, y a la vista del tercer apartado del ejercicio, vamos a probar que admite una factorización de Cholesky. Para ello, procedemos heurísticamente, esto es, imponemos la igualdad matricial

$$\begin{bmatrix} u_{11} & 0 & 0 \\ u_{12} & u_{22} & 0 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix}$$

- fila 1 de A

$$u_{11}^2 = 4 \;\Leftrightarrow\; u_{11} = 2 \quad (u_{11} > 0)$$

$$u_{11}u_{12} = 2 \;\Leftrightarrow\; u_{12} = 1$$

$$u_{11}u_{13} = -2 \;\Leftrightarrow\; u_{13} = -1$$

- fila 2 de A

$$u_{12}^2 + u_{22}^2 = 2 \;\Leftrightarrow\; u_{22} = 1 \quad (u_{22} > 0)$$

$$u_{12}u_{13} + u_{22}u_{23} = -3 \;\Leftrightarrow\; u_{23} = -2$$

- fila 3 de A

$$u_{13}^2 + u_{23}^2 + u_{33}^2 = 14 \;\Leftrightarrow\; u_{33} = 3 \quad (u_{33} > 0)$$

Para comprobar que **A** es definida positiva, y a la vista del tercer apartado del ejercicio, vamos a probar que admite una factorización de Cholesky. Para ello, procedemos heurísticamente, esto es, imponemos la igualdad matricial

$$\begin{bmatrix} u_{11} & 0 & 0 \\ u_{12} & u_{22} & 0 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix}$$

- fila 1 de A

$$u_{11}^2 = 4 \;\Leftrightarrow\; u_{11} = 2 \quad (u_{11} > 0)$$

$$u_{11}u_{12} = 2 \;\Leftrightarrow\; u_{12} = 1$$

$$u_{11}u_{13} = -2 \;\Leftrightarrow\; u_{13} = -1$$

- fila 2 de A

$$u_{12}^2 + u_{22}^2 = 2 \;\Leftrightarrow\; u_{22} = 1 \quad (u_{22} > 0)$$

$$u_{12}u_{13} + u_{22}u_{23} = -3 \;\Leftrightarrow\; u_{23} = -2$$

- fila 3 de A

$$u_{13}^2 + u_{23}^2 + u_{33}^2 = 14 \;\Leftrightarrow\; u_{33} = 3 \quad (u_{33} > 0)$$

Para comprobar que **A** es definida positiva, y a la vista del tercer apartado del ejercicio, vamos a probar que admite una factorización de Cholesky. Para ello, procedemos heurísticamente, esto es, imponemos la igualdad matricial

$$\begin{bmatrix} u_{11} & 0 & 0 \\ u_{12} & u_{22} & 0 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix}$$

- fila 1 de A

$$u_{11}^2 = 4 \iff u_{11} = 2 \quad (u_{11} > 0)$$

$$u_{11}u_{12} = 2 \iff u_{12} = 1$$

$$u_{11}u_{13} = -2 \iff u_{13} = -1$$

- fila 2 de A

$$u_{12}^2 + u_{22}^2 = 2 \iff u_{22} = 1 \quad (u_{22} > 0)$$

$$u_{12}u_{13} + u_{22}u_{23} = -3 \iff u_{23} = -2$$

- fila 3 de A

$$u_{13}^2 + u_{23}^2 + u_{33}^2 = 14 \iff u_{33} = 3 \quad (u_{33} > 0)$$

Para comprobar que **A** es definida positiva, y a la vista del tercer apartado del ejercicio, vamos a probar que admite una factorización de Cholesky. Para ello, procedemos heurísticamente, esto es, imponemos la igualdad matricial

$$\begin{bmatrix} u_{11} & 0 & 0 \\ u_{12} & u_{22} & 0 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix}$$

- fila 1 de A

$$u_{11}^2 = 4 \;\Leftrightarrow\; u_{11} = 2 \quad (u_{11} > 0)$$

$$u_{11}u_{12} = 2 \;\Leftrightarrow\; u_{12} = 1$$

$$u_{11}u_{13} = -2 \;\Leftrightarrow\; u_{13} = -1$$

- fila 2 de A

$$u_{12}^2 + u_{22}^2 = 2 \;\Leftrightarrow\; u_{22} = 1 \quad (u_{22} > 0)$$

$$u_{12}u_{13} + u_{22}u_{23} = -3 \;\Leftrightarrow\; u_{23} = -2$$

- fila 3 de A

$$u_{13}^2 + u_{23}^2 + u_{33}^2 = 14 \;\Leftrightarrow\; u_{33} = 3 \quad (u_{33} > 0)$$

Así pues, $\mathbf{A} = \mathbf{U}^T\mathbf{U}$, con

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Resolvamos seguidamente el sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = [4, 0, 2]^T$. Como, en particular, $\mathbf{A}$ factoriza en forma LU, se resuelve de forma inmediata mediante dos sistemas auxiliares triangulares.
El primero de ellos es $\mathbf{U}^T\mathbf{y} = \mathbf{b}$, cuya solución es $\mathbf{y} = [2, -2, 0]$. El segundo es $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{y}$, con la misma solución $\mathbf{x} = [2, -2, 0]$ que, por tanto, es la del sistema.

Finalmente, la matriz nula de orden 3 da respuesta a la última cuestión planteada.

Así pues, $\mathbf{A} = \mathbf{U}^T\mathbf{U}$, con

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Resolvamos seguidamente el sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = [4, 0, 2]^T$. Como, en particular, $\mathbf{A}$ factoriza en forma LU, se resuelve de forma inmediata mediante dos sistemas auxiliares triangulares.
El primero de ellos es $\mathbf{U}^T\mathbf{y} = \mathbf{b}$, cuya solución es $\mathbf{y} = [2, -2, 0]$. El segundo es $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$, con la misma solución $\mathbf{x} = [2, -2, 0]$ que, por tanto, es la del sistema.

Finalmente, la matriz nula de orden 3 da respuesta a la última cuestión planteada.

Así pues, $\mathbf{A} = \mathbf{U}^T\mathbf{U}$, con

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Resolvamos seguidamente el sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = [4, 0, 2]^T$. Como, en particular, $\mathbf{A}$ factoriza en forma LU, se resuelve de forma inmediata mediante dos sistemas auxiliares triangulares.
El primero de ellos es $\mathbf{U}^T\mathbf{y} = \mathbf{b}$, cuya solución es $\mathbf{y} = [2, -2, 0]$. El segundo es $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$, con la misma solución $\mathbf{x} = [2, -2, 0]$ que, por tanto, es la del sistema.

Finalmente, la matriz nula de orden 3 da respuesta a la última cuestión planteada.