Ejercicio puntuable Tema 3-Geometría II
1^o Grado en Matemáticas
2 de junio 2017

Apellidos: ____________________________________ **Nombre:** ____________________.

1) Sean V un plano vectorial, B una base de V y g la métrica en V dada por:

$$M(g, B) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Consideramos, para cada $a \in \mathbb{R}$ el endomorfismo $f_a : V \longrightarrow V$ dado por:

$$M(f_a, B) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) (2 PUNTOS) ¿Existe algún valor de a tal que f_a es autoadjunto en (V, g)?

(b) (2,5 PUNTOS) ¿Existe algún valor de a tal que f_a es una isometría en (V, g)? En caso afirmativo describe tal isometría.

(c) (2,5 PUNTOS) Calcula la matriz del endomorfismo adjunto de f_2 respecto de la métrica g en la base B.

2) (3 PUNTOS) Prueba que dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz invertible existe P una matriz ortogonal y Q una matriz triangular superior con todos los elementos de su diagonal positivos tal que $A = P \cdot Q$.

Sea $B = \{e_1, e_2\}$ base del enunciado.

1) a) f_a autoadjunto $\iff M(g, B) \cdot M(f_a, B)$ es simétrica.

$$M(g,B) \cdot M(f_a, B) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3a-1 \\ 1 & a-3 \end{pmatrix}$$

Esta matriz es simétrica $\iff 3a-1=1 \iff \boxed{a = \frac{2}{3}}$

b) f_a isometría $\iff M(g,B) = M(f_a B)^t \cdot M(g, B) \cdot M(f_a B)$

$$M(f_a, B)^t \cdot M(g,B) \cdot M(f_a, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3a-1 & a-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3a-1 \\ 3a-1 & 3a^2-2a+3 \end{pmatrix}$$

f_a isometría $\iff \begin{matrix} 3a-1 = 1 \\ 3a^2-2a=0 \end{matrix} \iff \boxed{a = \frac{2}{3}}$

$$3 \cdot \frac{4}{9} + -\frac{2 \cdot 2}{3} = 0$$

$\det(f_a, B) = -1$. Es una simetría axial respecto de la recta:

$$U = V_1 = \left\{ x e_1 + y e_2 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$= L\{e_1\}$ Observa que no hace falta este cálculo porque se deduce de cómo es $M(f, B)$.

c) $M(\hat{f}_2, B) = M(g,B)^{-1} M(f_2, B)^t \cdot M(g, B)$

Calculemos $M(g,B)^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Por tanto:

$$M(\hat{f}_2, B) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 12 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2.- Denotemos $\{u_1, \dots, u_n\} \subset \mathbb{R}^n$ los vectores cuyas componentes coinciden con las columnas de A. Observemos que por ser A invertible se tiene que $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$. Consideremos en $\mathbb{R}^n$ la métrica usual g_0 y apliquemos a B el método de ortogonalización de Gram-Schimdt para tener B' una base ortonogonal de $(\mathbb{R}^n, g_0)$ primero y B'' una base ortonormal de $(\mathbb{R}^n, g_0)$ después.

Observemos:

$$A = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}, B, B_u) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}, B'', B_u) \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}, B, B'')$$

Se tiene entonces que $M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}, B'', B_u) = P$ es una matriz ortogonal por ser la matriz cambio de base entre dos bases ortonormales de $(\mathbb{R}^n, g_0)$ y $Q = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}, B, B'')$ es una matriz triangular superior con elementos positivos en la diagonal por cómo es el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt y cómo se obtienen bases ortonormales a partir de bases ortogonales.

Luego

$$A = P \cdot Q$$

cómo queríamos.