Sucesiones por recurrencia

3. Estudia la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ definida para todo $n \in \mathbb{N}$ por:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{3x_n + 4}{2x_n + 3}$$

Parcial 2019/2020

$$x_1 = 1 \qquad x_{n+1} = \frac{3x_n+4}{2x_n+3} \qquad x_n > 0$$

Sabemos que $x_2 = \frac{7}{5} > x_1 = 1$, Todo parece apuntar a que nuestra sucesión es creciente, vamos a demostrarlo:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{3x_n+4}{2x_n+3} - x_n = \frac{\cancel{3x_n}+4-2x_n^2-\cancel{3x_n}}{2x_n+3} = \frac{-2x_n^2+4}{2x_n+3} =$$

$$= 2\,\frac{2-x_n^2}{2x_n+3}$$

Para que $x_{n+1} - x_n > 0 \iff 2 - x_n^2 > 0 \Rightarrow 2 > x_n^2$

$x_n < \sqrt{2}$

$A = \{ n \in \mathbb{N} : x_n < \sqrt{2} \}$

$1 \in A$

$n \in A \quad x_n < \sqrt{2}$

$$x_{n+1} = \frac{3x_n+4}{2x_n+3} \overset{??}{<} \sqrt{2} \iff 3x_n + 4 < \sqrt{2}(2x_n+3) \iff$$

$$\iff 3x_n - 2\sqrt{2}\,x_n < 3\sqrt{2} - 4 \iff x_n < \frac{3\sqrt{2}-4}{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Nuestra sucesión es creciente y está mayorada por raíz de dos y, por tanto, converge.

$$l = \frac{3l+4}{2l+3} \Rightarrow 2l^2 + 3l - 3l - 4 = 0 \Rightarrow l = \sqrt{2}.$$

2. Prueba que la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene tres soluciones reales. Para todo $n \in \mathbb{N}$ definamos

$$x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_{n+1} = \frac{1}{3 - x_n^2}$$

Prueba que $0 < x_n < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, que $\{x_n\}$ es convergente y que su límite es la única solución de dicha ecuación en el intervalo $]0, 1[$.

Segunda parte. Ej 3 Ordinario 2017/2018

$x_1 = \frac{1}{3} \quad x_{n+1} = \frac{1}{3 - x_n^2}$

Prueba que $0 < x_n < 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ y que $\{x_n\}$ es convergente

Para probar que $0 < x_n < 1$ procederé por inducción

Llamamos $A = \{n \in \mathbb{N} : 0 < x_n < 1\}$. Como $0 < \underset{1/3}{\overset{\shortparallel}{x_1}} < 1$,

se verifica que $1 \in A$.

Supongo que $n \in A$ y compruebo $n+1$.

$0 < \frac{1}{3 - x_n^2} < 1$??

$0 < x_n < 1 \Rightarrow 0 < x_n^2 < 1 \Rightarrow 3 - x_n^2 > 2 \Rightarrow 0 < x_{n+1} = \frac{1}{3 - x_n^2} < \frac{1}{2} < 1$

Con lo cual $n+1 \in A$.

Tenemos nuestra sucesión acotada, vamos a probar la monotonía:

$x_1 = \frac{1}{3} \quad x_2 = \frac{3}{8} \qquad \frac{3}{8} > \frac{1}{3}$ Todo apunta a que será creciente.

Demostramos $0 < x_n < x_{n+1} < 1 \Rightarrow x_n^2 < x_{n+1}^2 < 1 \Rightarrow 3 - x_n^2 > 3 - x_{n+1}^2 > 0 \Rightarrow$
$\frac{1}{3 - x_n^2} < \frac{1}{3 - x_{n+1}^2} \Rightarrow x_{n+1} < x_{n+2} \rightarrow$ la sucesión es estrictamente creciente y como está mayorada por 1, converge

$l = \frac{1}{3 - l^2} \Rightarrow l^3 - 3l + 1 = 0$ será la solución $\in]0,1[$ nuestro límite.

2. Estudiar la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ definida por:

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{\sqrt{x_n} + 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ej 2 Ordinario 2012/2013

$x_1 = 2 \quad x_{n+1} = \frac{x_n+1}{\sqrt{x_n}+1}$ $\quad x_1 > 0$ Suponemos $x_n > 0$

$x_{n+1} > 0$ ya que $x_n + 1 > 0$ y $\sqrt{x_n} + 1 > 0$

$x_1 = 2 \quad x_2 = \frac{3}{\sqrt{2}+1} < 2$. Todo apunta a que nuestra sucesión es decreciente, vamos a demostrarlo.

$$x_{n+1} - x_n < 0 \Rightarrow \frac{x_n+1}{\sqrt{x_n}+1} - x_n < 0 \Rightarrow \frac{\cancel{x_n} + 1 - \cancel{x_n} - x_n\sqrt{x_n}}{\sqrt{x_n}+1} < 0$$

Estudiamos el numerador $1 - x_n\sqrt{x_n} < 0$ $\quad$ (1.0)

$x_n\sqrt{x_n} > 1$?

Vamos a demostrar por inducción que $x_n\sqrt{x_n} > 1 \Rightarrow x_n > 1$

$B = \{n \in \mathbb{N} : x_n > 1\}$

$x_1 > 1 \Rightarrow 1 \in B$

$x_n > 1 \Rightarrow n \in B$

$x_{n+1} > 1 \Rightarrow \frac{x_n+1}{\sqrt{x_n}+1} > 1 \Rightarrow$ lo que siempre es verdad porque $x_n > \sqrt{x_n}$.

Como $x_n > 1 \Rightarrow x_n\sqrt{x_n} > 1$. Viendo (1.0), vemos que nuestra sucesión es decreciente y que está minorada por 1, por tanto, converge.

Sabemos por álgebra de límites que $l = \frac{l+1}{\sqrt{l}+1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow l\sqrt{l} + l = l + 1 \Rightarrow l\sqrt{l} = 1 \Rightarrow l = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} x_n = 1$$