Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas – Cálculo I

1. (1,25 puntos) Sean A y B conjuntos no vacíos de números reales positivos y supongamos que A está mayorado. Sea $\alpha = \sup(A)$ y $\beta = \inf(B)$. Supongamos que $\beta > \alpha^2$. Definamos:

$$C = \left\{ \frac{1}{b - a^2} \; : \; a \in A, \; b \in B \right\}$$

Prueba que $\sup(C) = \dfrac{1}{\beta - \alpha^2}$.

2. (1 punto) Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones acotadas. Prueba que:

$$\underline{\lim}\{x_n + y_n\} \leqslant \overline{\lim}\{x_n\} + \underline{\lim}\{y_n\} \leqslant \overline{\lim}\{x_n + y_n\}.$$

Prueba con un ejemplo que las desigualdades anteriores pueden ser todas estrictas.

3. (1,5 puntos) Calcula los límites de las sucesiones

a) $x_n = \dfrac{1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3}{n^4}$ b) $y_n = \sqrt[n]{\dfrac{(3n)!}{(5n)^{3n}}}$

4. (2 puntos) Estudia, según los valores de $a > 0$, la convergencia absoluta y la convergencia de las series:

$a)\ \displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{n!\,\sqrt[5]{n}}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$; $b)\ \displaystyle\sum_{n \geqslant 1} (-1)^{n+1} \log\left(1 + \frac{1}{n^a}\right)$

5. (0,75 puntos) Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $f(a) = g(a)$ para todo $a \in A$ donde A es un conjunto denso en $\mathbb{R}$. Prueba que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

6. (1,5 puntos) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua, $M = \max f([a, b])$ y supongamos que $f(a) < M$.

   a) Sea $u \in]f(a), M[$. Justifica que el conjunto $Z_u = \{x \in [a, b] : f(x) = u\}$ no es vacío y prueba que tiene mínimo.

   b) Sea $\alpha_u = \min Z_u$. Prueba que para todo $x \in [a, \alpha_u[$ se verifica que $f(x) < u$.

7. (2 puntos) Elige para responder uno de los siguientes temas:

   a) Convergencia de series de términos positivos. Criterios del cociente y de la raíz.

   b) Continuidad y monotonía.

Pondré las calificaciones en el SWAD. Revisión de exámenes día 23 de 11h a 13h en mi despacho.

Granada, 13 de enero de 2020