5. La dimensión en centímetros de los tornillos que salen de cierta fábrica es una variable aleatoria X, con función de densidad

$$f(x) = \frac{k}{x^2}, \quad 1 \leq x \leq 10.$$

a) Determinar el valor de k, y obtener la función de distribución.

b) Hallar la probabilidad de que la dimensión de un tornillo esté entre 2 y 5 cm.

c) Determinar la dimensión máxima del 50 % de los tornillos con menor dimensión y la dimensión mínima del 5 % con mayor dimensión.

d) Si Y denota la dimensión de los tornillos producidos en otra fábrica, con la misma media y desviación típica que X, dar un intervalo en el que tome valores la variable Y con una probabilidad mínima de 0.99.

Sea $\underline{X}$ = "La dimensión en centímetros de los tornillos que salen de cierta fábrica".

a)

Como tenemos que la función de densidad de X es $f(x) = \frac{K}{x^2}$ si $1 \leq x \leq 10$ tenemos que $f_X(x) = \int_1^{10} \frac{K}{x^2}\,dx = 1$

Por tanto:

$$\int_1^{10} \frac{K}{x^2}\,dx = 1 \Rightarrow K\int_1^{10} \frac{1}{x^2}\,dx = K\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)\Big]_1^{10} = K\cdot\left(\frac{-1}{10} - \left(-\frac{1}{1}\right)\right) = K\cdot\left(1-\frac{1}{10}\right) = \frac{K\cdot 9}{10} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K = \frac{10}{9}$$

- La función de distribución viene dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \int_1^x \frac{10}{9x^2} & \text{si } 1 \leq x \leq 10 \\ 1 & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

b)

$$P(2 \leq x \leq 5) = F_X(5) - F_X(2) = \int_1^5 \frac{10}{9x^2} - \int_1^2 \frac{10}{9x^2} = \frac{10}{9}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)\Big]_1^5 - \frac{10}{9}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)\Big]_1^2 =$$

$$= \frac{10}{9}\cdot\left(-\frac{1}{5} - (-1)\right) - \frac{10}{9}\cdot\left(-\frac{1}{2} - (-1)\right) = \frac{10}{9}\cdot\frac{4}{5} - \frac{10}{9}\cdot\frac{1}{2} = \frac{40}{45} - \frac{10}{18} = \frac{1}{3}$$

c) • Calculamos la mediana:

$$P(X \leq Me) = 0{,}5 \Rightarrow \int_1^{Me} \frac{10}{9x^2} = 0{,}5 \Rightarrow \frac{10}{9}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)\Big]_1^{Me} = \frac{10}{9}\cdot\left(-\frac{1}{Me} - (-1)\right) = \frac{10}{9}\cdot\left(-\frac{1}{Me} + 1\right)$$

$$\frac{10}{9}\cdot\left(-\frac{1}{Me} + 1\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow +\frac{1}{Me} = 0{,}55 \Rightarrow Me = 1{,}\widehat{81}$$

• Calculamos el percentil 95:

$$P(X \leq P_{95}) = 0{,}95 \Rightarrow \int_1^{P_{95}} \frac{10}{9x^2} = 0{,}95 \Rightarrow \frac{10}{9} \cdot \left(\frac{-1}{x}\right)\Big]_1^{P_{95}} = \frac{10}{9} \cdot \left(-\frac{1}{P_{95}} + 1\right)$$

$$\frac{10}{9} \cdot \left(\frac{-1}{P_{95}} + 1\right) = 0{,}95 \Rightarrow \frac{1}{P_{95}} = 0{,}145 \Rightarrow P_{95} = 6{,}89655$$

d) Usando la desigualdad de Chebychev:

$$P\left(E[X] - k\sqrt{Var(X)} < Y < E[X] + k\sqrt{Var(X)}\right) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Tenemos que:

$$1 - \frac{1}{k^2} \geq 0{,}99 \rightarrow k \geq 10 \rightarrow \text{Para } K = 10:$$

$$P\left(E[X] - k\sqrt{Var(X)} < Y < E[X] + k\sqrt{Var(X)}\right) = 0{,}99$$

• Vamos a calcular las medias de X e Y:

$$E[X] = \int_1^{10} x \cdot \frac{10}{9x^2}\, dx = \frac{10}{9}\left[\log(x)\right]_1^{10} = \frac{10}{9}\log(10) = 2{,}5584$$

$$E[X^2] = \int_1^{10} x^2 \cdot \frac{10}{9x^2}\, dx = \int_1^{10} \frac{10}{9}\, dx = \frac{10x}{9}\Big]_1^{10} = \frac{100}{9} - \frac{10}{9} = 10$$

• Calculamos ahora la varianza y desviación típica de X:

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = 10 - (2{,}5584)^2 = 3{,}4558$$

$$\sqrt{Var[X]} = 1{,}859$$

Sabemos que $E[X] = E[Y]$ y $\sqrt{Var[X]} = \sqrt{Var[Y]}$.

• Como $E[X^2] = \int_1^{10} x^2 \cdot \frac{10}{9x^2} = 10 < +\infty$ es claro que $\exists\, E[X^2]$ y por tanto podemos aplicar la desigualdad de Chebychev.

Por tanto, el intervalo es:

$$\left]0, E[Y] + 10\sqrt{Var[Y]}\right] = \left]0, 21{,}1484\right]$$