10 POLINOMIO DE TAYLOR

10.1 DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$. Consideremos el conjunto

$$A_1 = \left\{a \in A \cap A' : f \text{ es derivable en } a\right\}$$

La derivada de f es la función $f'\colon A_1 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$.

Podemos considerar $A_2 = \left\{a \in A_1 \cap A_1' : f' \text{ es derivable en } a\right\}$. La derivada segunda de f es la función $f'' = (f')'$ y está definida en dicho conjunto A_2.

En general, si tenemos definida la derivada n-ésima, $f^{(n)}$, de la función f, se define la derivada $(n+1)$-ésima como $f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x)$ que estará definida en el conjunto

$$A_{n+1} = \left\{a \in A_n \cap A_n' : f^{(n)} \text{ es derivable en } a\right\}.$$

Proposición 10.1.1. *Sean $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ dos funciones n veces derivables en $a \in A$.*

1) La suma $f+g$ es n veces derivable en a y $(f+g)^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) + g^{(n)}(a)$.

2) El producto fg es n veces derivable y

Fórmula de Leibniz

$$\begin{aligned}(fg)^{(n)}(a) &= \binom{n}{0}f^{(n)}(a)g(a) + \binom{n}{1}f^{(n-1)}(a)g'(a) + \cdots + \binom{n}{n}f(a)g^{(n)}(a)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}(a)g^{(k)}(a).\end{aligned}$$

3) Si $g(a) \neq 0$, el cociente f/g es n veces derivable en a.

Demostración. Todas estas propiedades se demuestran por inducción.

1) La propiedad para $n = 1$ ya la hemos demostrado. Supongamos que la propiedad es cierta para un natural n, entonces

$$\begin{aligned}(f+g)^{(n+1)}(a) &= \left((f+g)^{n}\right)'(a) = \left(f^{(n)} + g^{(n)}\right)'(a)\\ &= f^{(n+1)}(a) + g^{(n+1)}(a).\end{aligned}$$

2) Para $n = 1$ ya sabemos que es cierta ... FALTA

3) FALTA □

Proposición 10.1.2. *Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $g\colon B \to \mathbb{R}$ dos funciones n veces derivables en todo su dominio. Supongamos que $B = f(A)$ y que todos los puntos de A y de B son puntos de acumulación. Entonces la composición $g \circ f$ es una función n veces derivable.*

Proposición 10.1.3. *Sea I un intervalo y sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función derivable con $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Entonces existe $f^{-1}\colon f(I) \to I$ y es derivable. Si además f es derivable n veces, entonces f^{-1} también es derivable n veces.*

Observación 10.1.4. La regla de la cadena y el teorema de la función inversa (versión global en este caso) ya nos dan la derivabilidad de la composición o de la función inversa. La única novedad de los enunciados anteriores está en su uso con derivadas de mayor orden.

10.1.1 Espacios de funciones derivables

Definición 10.1.5. Sea I un intervalo, n un número natural y $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que f es una función de *clase* C^n en I si f es n veces derivable y $f^{(n)}$ es una función continua. El conjunto de todas las funciones de clase C^n en I se suele denotar $C^n(I)$.

Diremos que f es una función de clase C^∞ si tiene derivadas de cualquier orden. Al conjunto de dichas funciones lo denotaremos $C^\infty(I)$.

Observación 10.1.6. La suma, producto y cociente, siempre que tenga sentido, de funciones de clase C^n es de clase C^n.

Ejemplo 10.1.7.

1) Si $a \in \mathring{I}$, la función $f\colon I \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = \begin{cases} (x-a)^{n+1}, & \text{si } x \geqslant a \\ 0, & \text{si } x < a \end{cases}$$
es de clase C^n, pero no de clase C^{n+1} en I. Concretamente,
$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (n+1)!(x-a), & \text{si } x \geqslant a \\ 0, & \text{si } x < a. \end{cases}$$
La derivada n-ésima es continua, pero sólo es derivable en $\mathbb{R}^*$ ya que las derivadas laterales en el origen no coinciden.
$$f^{(n+1)}(x) = \begin{cases} (n+1)!, & \text{si } x > a \\ 0, & \text{si } x < a. \end{cases}$$

2) La función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, como ya vimos en el ejemplo 9.2.4, definida por
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
es derivable, pero su derivada
$$f'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
no es continua en el origen. Este comportamiento se puede generalizar a derivadas de cualquier orden. Dado $n \in \mathbb{N}$, consideremos la función
$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \operatorname{sen}(1/x), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$
Se cumple que f_{2n} es n veces derivable, pero su derivada n-ésima no es continua. Si el índice es impar, f_{2n-1} es de clase $C^{n-1}(\mathbb{R})$, pero no es n veces derivable.

Observación 10.1.8. Se cumple la siguiente cadena de inclusiones, todas ellas estrictas,
$$C^\infty(I) \subsetneq \cdots \subsetneq C^{n+1}(I) \subsetneq C^{(n)}(I) \subsetneq \cdots \subsetneq C^1(I) \subsetneq C(I),$$
donde $C(I)$ denota al conjunto de las funciones continuas en I.

10.1.2 Derivadas sucesivas de las funciones elementales

La función exponencial

La función exponencial es de clase C^∞ y $f^{(n)}(x) = e^x$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$.

La función logaritmo

La función logaritmo es de clase C^∞. Si $f(x) = \log(x)$, su derivada n-ésima es
$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\, x^{-n}, \quad \text{para cualquier } n \in \mathbb{N}.$$

Seno y coseno hiperbólicos

Son funciones de clase $C^\infty(\mathbb{R})$: son suma y diferencia de funciones exponenciales. Otra forma de verlo es usar que
$$(\operatorname{senh}(x))' = \cosh(x), \quad (\cosh(x))' = \operatorname{senh}(x).$$

Seno y coseno

Las funciones seno y coseno son de clase C^∞. Se puede comprobar que, denotando $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, $g(x) = \cos(x)$, sus derivadas n-ésimas son
$$f^{(n)}(x) = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad g^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),$$
para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$.

Lo demostramos por inducción. Para $n = 1$,
$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \text{ y} \\ g'(x) &= -\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(-x) = \cos\left(-x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$
Supongamos que la propiedad es cierta para un natural n y veamos qué ocurre para $n+1$:
$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(\operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \operatorname{sen}\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right) \\ g^{(n+1)}(x) &= -\operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(-x - n\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-x - (n+1)\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Funciones potenciales

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. La derivada n-ésima de $f(x) = x^\alpha$ es
$$f^{(n)}(x) = \prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k) x^{\alpha - n}.$$
Es, por tanto, una función de clase C^∞ en su dominio.

Tangente, secante y cosecante

Son funciones de clase C^∞ en su dominio por ser cociente de funciones de clase C^∞.

Arcoseno y arcocoseno

La derivada de dichas funciones es
$$(\operatorname{arc\,sen}(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\operatorname{arc\,cos}(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
Sus derivadas son composición de funciones de clase C^∞ en $]-1, 1[$.

Arcotangente

Su derivada es una función racional y, por tanto, de clase C^∞ en este caso en todo $\mathbb{R}$.

10.1.3 Polinomios y sus raíces*

Lema 10.1.9. *Un número a es una raíz de un polinomio p con multiplicidad k si, y sólo si,*

$$p(a) = p'(a) = \cdots = p^{(k-1)}(a) = 0 \quad y \quad p^{(k)}(a) \neq 0. \tag{10.1}$$

Demostración. $\Rightarrow$) Lo demostramos por inducción.

1) Si $k = 1$, a es una raíz con multiplicidad uno y, por tanto, $p(x) = (x-a)q(x)$ con $q(a) \neq 0$. Entonces $p(a) = 0$, $p'(x) = q(x) + (x-a)q'(x)$ y $p'(a) = q(a) \neq 0$, como queríamos.

2) Supongamos que la propiedad es cierta para un natural $k-1$ y vemos que ocurre para k. Si a es una raíz con multiplicidad k, entonces $p(x) = (x-a)^k q(x)$ con $q(a) \neq 0$. Calculamos su derivada:

$$p'(x) = k(x-a)^{k-1}q(x) + (x-a)^k q'(x) = (x-a)^{k-1}r(x),$$

donde $r(a) \neq 0$ y $r(x) = kq(x) + (x-a)q'(x)$. Entonces a es una raíz de p' con multiplicidad $k-1$ y, por tanto,

$$p(a) = p'(a) = \cdots = p^{(k-1)}(a) = 0 \quad \text{y} \quad p^{(k)}(a) \neq 0. \qquad \square$$

$\Leftarrow$) Supongamos que

$$p(a) = p'(a) = \cdots = p^{(k-1)}(a) = 0 \quad \text{y} \quad p^{(k)}(a) \neq 0.$$

Sabemos que a es una raíz de $p(x)$ y, por tanto, $p(x) = (x-a)^n q(x)$, donde n es la multiplicidad de la raíz. Por lo demostrado en la implicación anterior y la unicidad de k, se cumple que $n = k$.

10.2 POLINOMIO DE TAYLOR

Figura 26: Brook Taylor (1685–1731)

Definición 10.2.1. Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función n veces derivable en $a \in A$. El *polinomio de Taylor* de orden n de la función f centrado en a es

$$P_n(f,x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

En el caso $a = 0$ también se suele llamar *polinomio de Maclaurin*. Cuando no haya dudas, escribiremos $P_n(x)$ simplemente.

Observación 10.2.2. 1) El grado de P_n es menor que n si $f^{(n)}(a) = 0$. Por tanto, el polinomio de Taylor de orden n puede tener grado menor que n.

2) La linealidad de la derivada se traslada al cálculo del polinomio de Taylor: si f y g son funciones n veces derivables en a, entonces

$$P_n(\alpha f + \beta g, x) = \alpha P_n(f,x) + \beta P_n(g,x), \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

3) Hay una relación muy sencilla entre los polinomios de Taylor de una función y el de su derivada. La derivada de P_n,

$$P'_n(x) = f'(a) + f''(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

es el polinomio de Taylor de la función f' de orden $n-1$ centrado en a, esto es, $P'_n(f,x) = P_{n-1}(f',x)$.

Proposición 10.2.3. P_n *es el* único *polinomio de grado menor o igual que* n *que coincide con la función y sus primeras* n *derivadas en el punto* a*. En otras palabras, las condiciones*

$$P_n(a) = f(a), P'_n(a) = f'(a), \ldots, P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

determinan completamente a P_n*.*

Demostración. Si $q(x)$ es otro polinomio de orden n verificando lo mismo, entonces $p(x) = P_n(x) - q(x)$ es un polinomio de orden n que cumple que $p(a) = p'(a) = \ldots p^{(n)}(a) = 0$, con lo que, según el lema 10.1.9, a es una raíz con multiplicidad $n+1$ como mínimo lo que es una contradicción. □

Ejemplo 10.2.4. Las derivadas n-ésimas que hemos calculado nos dan el polinomio de Taylor de algunas de las funciones elementales.

1) El polinomio de Taylor la función exponencial centrado en cero y de orden n es

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

2) En lugar de calcular el polinomio de Taylor de la función logaritmo centrado en 1, vamos a calcular el polinomio de Taylor de $f(x) = \log(1+x)$ centrado en cero. Se puede comprobar que

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!.$$

   Entonces, el polinomio de Taylor de orden n centrado en cero de f es

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k},$$

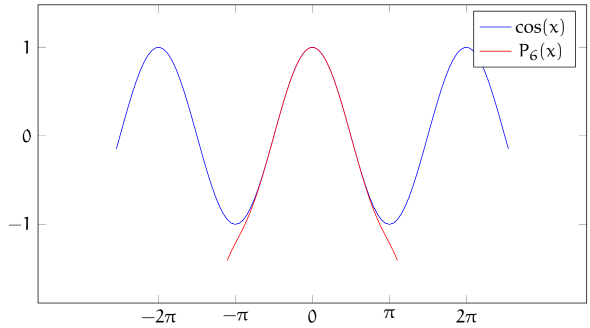
   para $n = 1, 2, \ldots$

3) El polinomio de Taylor de la función coseno sólo tiene términos pares. Si P_n denota el polinomio de Taylor de la función coseno centrado en cero de orden n, entonces

$$P_{2n}(x) = P_{2n+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!},$$

   para $n = 0, 1, \ldots$. Por ejemplo, el polinomio de orden 6 es

$$P_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$



4) El polinomio de Taylor de la función seno sólo tiene términos impares. Si P_n denota el polinomio de Taylor de la función seno centrado en cero de orden n, entonces

$$\begin{aligned} P_{2n-1}(x) = P_{2n}(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \end{aligned}$$

para $n = 1, 2, \ldots$. Por ejemplo, los polinomios de orden 7 y 8 son

$$P_7(x) = P_8(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}.$$

10.2.1 Fórmula infinitesimal del resto

La fórmula infinitesimal del resto generaliza que la recta tangente es la mejor aproximación afín de una función derivable (proposición 6.3.1).

Fórmula de Peano del resto

Teorema 10.2.5 (Fórmula infinitesimal del resto)**.** *Sea* I *un intervalo,* $n \in \mathbb{N}$ *y* $f \colon I \to \mathbb{R}$ *una función* $n-1$ *veces derivable en* I *y* n *veces derivable en* $a \in I$.

Sea P_n *el polinomio de Taylor de orden* n *de la función* f *centrado en* a.

1) *Se cumple que*
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

2) *Si* $q(x)$ *es un polinomio de orden* n *que cumple que*
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - q(x)}{(x-a)^n} = 0,$$
entonces $q(x) = P_n(x)$.

Demostración. 1) Para calcular este límite, aplicando la primera regla de L'Hôpital $n-1$ veces, llegamos a

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a) - f^{n}(a)(x-a)}{n!(x-a)} \\ &\qquad = \frac{1}{n!}\left(\lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} \right) - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = 0, \end{aligned}$$

donde, en el último paso hemos usado que $f^{(n-1)}$ es derivable en a.

2) Sea $p(x) = P_n(x) - q(x)$. Se cumple que p es un polinomio de orden n y

$$\lim_{x\to a} \frac{p(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{P_n(x) - f(x) + f(x) - q(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

con lo que, en particular $p(a) = 0$. Por reducción al absurdo, supongamos que p no es nulo y sea k la multiplicidad de dicha raíz. Entonces $p(x) = (x-a)^k r(x)$ donde $1 \leqslant k \leqslant n$ y $r(a) \neq 0$, pero

$$\lim_{x\to a} \frac{p(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{r(x)}{(x-a)^{n-k}} \neq 0,$$

lo que es una contradicción. □

Ejemplo 10.2.6. Sabemos que el polinomio de Taylor de la función exponencial centrado en el origen es

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - P_n(x)}{x^n} = 0.$$

Por ejemplo, obtenemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}}{x^3} = 0.$$

Corolario 10.2.7. *I un intervalo, $n \in \mathbb{N}$ y $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función $n-1$ veces derivable en I y n veces derivable en $a \in I$. Sea P_n el polinomio de Taylor de orden n de la función centrado en a. Entonces*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_{n-1}(x)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Demostración. La fórmula infinitesimal del resto nos dice que

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - \left(f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n\right)}{(x-a)^n} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - \left(f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}\right)}{(x-a)^n} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.
\end{aligned}$$

Si despejamos,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - \left(f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}\right)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_{n-1}(x)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

□

Ejemplo 10.2.8. Usando el corolario anterior,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - 1 - x - \frac{x^2}{2!}}{x^3} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}.$$

Cálculo del polinomio de Taylor

Cambio de variable

La unicidad del polinomio en la fórmula infinitesimal del resto nos permite simplificar el cálculo del polinomio de Taylor algunas veces.

Ejemplo 10.2.9. El polinomio de Taylor de orden 2 de la función exponencial en el origen es

$$1 + x + \frac{x^2}{2}$$

y

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^2} = 0.$$

Si hacemos el cambio de variable $t^2 = x$, nos queda que

$$\lim_{t \to 0} \frac{e^{t^2} - 1 - t^2 - \frac{t^4}{2}}{t^4} = 0.$$

Esto quiere decir que $1 - x^2 - \frac{x^4}{4}$ es el polinomio de orden cuatro de la función e^{x^2}.

Funciones pares e impares

Si $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función derivable par, entonces f' es impar. Análogamente, si f es impar su derivada es par.

Proposición 10.2.10. *El polinomio de Maclaurin de una función par (resp. impar) sólo tiene términos con potencias pares (resp. impares).*

Demostración. Si n es un número impar, y f es n veces derivable en 0, entonces de que $f^{(n)}(x) = -f^{(n)}(-x)$ se deduce que $f^{(n)}(0) = -f^{(n)}(0)$ y, por tanto $f^{(n)}(0) = 0$. □

Progresiones geométricas y polinomio de Taylor

Ejemplo 10.2.11. Sabemos que las series que son progresiones geométricas son convergentes. De hecho, sabemos que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{n \to \infty} \left(1 + x + \cdots + x^n\right)$$

si $x \in]-1, 1[$. Vamos a comprobar que $1 + x + \cdots + x^n$ es el polinomio de Taylor de la función $1/(1-x)$ centrado en el origen y de orden n. Para ello vamos a ver que verifica la fórmula infinitesimal del resto:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1-x} - (1 + x + \cdots + x^n)}{x^n} = \lim_{x \to 0} \frac{x^{n+1}}{x^n(1-x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{1-x} = 0.$$

El mismo razonamiento del ejemplo anterior nos dice que, cambiando x por $-x$, el polinomio de Taylor de $1/(1+x)$ es

$$P_n\left(\frac{1}{1+x}, x\right) = 1 - x + \cdots + (-1)^n x^n.$$

Si ahora usamos la relación entre el polinomio de Taylor de una función y el de su derivada, el polinomio de Taylor de $\log(1+x)$ es

$$P_n\left(\log(1+x), x\right) = \cancelto{0}{\log(1+0)} + x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^n x^n}{n}$$

como ya sabíamos.

*Notación de Landau**

Definición 10.2.12. Sea $\alpha \geqslant 0$. Diremos que una función f tiene un cero de orden α en a si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^\alpha} = 0.$$

En ese caso diremos que f es $o((x-a)^\alpha)$ o, simplemente, $f = o((x-a)^\alpha)$.

Es usual obviar el punto a en la notación anterior y escribir, por ejemplo, $f = o(x^2)$. Con esta notación, si P_n es el polinomio de Taylor de una función f, entonces la fórmula de Peano se escribe

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n).$$

Extremos relativos

Como consecuencia de la fórmula de Peano, se obtiene la descripción usual de los extremos relativos en términos de las derivadas de orden superior. Lo que se conoce como el test de la segunda derivada es un caso muy particular de la siguiente proposición: un punto crítico es un extremo relativo si la primera que no lo no anula es par.

Proposición 10.2.13. *Sea* I *un intervalo,* n *un número natural mayor o igual que dos y sea* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *una función* $n-1$ *veces derivable en* I *y* n *veces derivable en* $a \in I$*. Supongamos que*

$$f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, \;\; y \;\; f^{(n)}(a) \neq 0.$$

1) *Si* n *es par y* $f^{(n)}(a) > 0$, f *tiene un mínimo relativo en* a.
2) *Si* n *es par y* $f^{(n)}(a) < 0$, f *tiene un máximo relativo en* a.
3) *Si* n *es impar,* f *no tiene un extremo relativo en* a.

Demostración. El polinomio de Taylor de f de orden n centrado en a es

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Aplicando la fórmula infinitesimal del resto se tiene que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}{(x-a)^n} = 0$$

y, por tanto,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Esto quiere decir que, cerca de a, $\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n}$ y $f^{(n)}(a)$ tienen el mismo signo: existe $\delta > 0$ tal que si $x \in I$, $0 < |x-a| < \delta$ entonces

$$\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} f^{(n)}(a) > 0.$$

1) Si n es par, $(x-a)^n$ es positivo con lo que

$$\big(f(x) - f(a)\big) f^{(n)}(a) > 0.$$

Si $f^{(n)}(a) > 0$, entonces $f(x) > f(a)$ con lo que f alcanza un mínimo relativo en a. De la misma forma, si $f^{(n)}(a) < 0$, entonces $f(x) < f(a)$ con lo que f alcanza un máximo relativo en a.

2) Si n es impar, y $f^{(n)}(a) > 0$ el signo de $f(x) - f(a)$ es igual que el signo de $(x-a)^n$. Por tanto, $f(x) > f(a)$ si $a + \delta > x > a$ y $f(x) < f(a)$ si $a - \delta < x < a$, con lo que f no tiene un extremo relativo en a. El caso $f^{(n)}(a) < 0$ es similar. □

Ejemplo 10.2.14. Ejemplo de cálculo de extremos. FALTA

10.2.2 Fórmula de Taylor

Teorema 10.2.15 (Fórmula de Taylor)**.** *Sea* I *un intervalo,* n *un número natural mayor que uno y sea* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *una función derivable* $n+1$ *veces. Entonces, para cualesquiera* $a, x_0 \in I$ *existe* $c \in]a, x_0[$ *tal que*

Resto de Lagrange

$$f(x_0) - P_n(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x_0 - a)^{n+1}.$$

Demostración. Fijado $x_0 \in I$, sea $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x_0) = P_n(x_0) + k(x_0 - a)^{n+1}$$

o, lo que es lo mismo,

$$k = \frac{f(x_0) - P_n(x_0)}{(x_0 - a)^{n+1}}.$$

Consideremos la función $g(x) = f(x) - P_n(x) - k(x-a)^{n+1}$ que es $n+1$ veces derivable.

1) Como $g(a) = g(x_0) = 0$, existe $c_1 \in]a, x_0[$ tal que $g'(c_1) = 0$.
2) Como $g'(a) = g'(c_1) = 0$, existe $c_2 \in]a, c_1[$ tal que $g''(c_2) = 0$.
3) ...
4) Como $g^{(n)}(a) = g^{(n)}(c_n) = 0$, existe $c \in]a, c_n[\subset]a, x_0[$ tal que $g^{(n+1)}(c) = 0$, esto es,
$$f^{(n+1)}(c) - k(n+1)! = 0$$
con lo que $k = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$ como queríamos. □

Corolario 10.2.16. *Sea* I *un intervalo y* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *una función. Si* $f^{(n+1)}(x) = 0$ *para todo* $x \in I$*, entonces* f *es un polinomio de orden* n*.*

Ejemplo 10.2.17. Calcula $\sqrt[3]{e}$ con un error menor que 10^{-2}.

*Otras fórmulas del resto**

Hay muchas formas de escribir el resto, la diferencia entre una función y su polinomio de Taylor.

Teorema 10.2.18 (Fórmula de Taylor (versión alternativa))**.** *Sea* I *un intervalo,* n *un número natural mayor que uno y sea* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *una función derivable* $n+1$ *veces. Entonces, para cualesquiera* $a, x \in I$ *existen* $c, d \in]a, x[$ *tales que*

Resto de Lagrange

1) $f(x) - P_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$,

Resto de Cauchy

2) $f(x) - P_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(d)}{n!}(x-d)^n(x-a)$,

donde P_n *es el polinomio de Taylor de orden* n *de* f *centrado en* a*.*

Demostración. Sean a, $x_0 \in I$ fijos. Consideremos la función $g\colon [a, x_0] \to \mathbb{R}$ definida como

$$g(x) = \left(f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(x_0 - x) + \frac{f''(x)}{2!}(x_0 - x)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x_0 - x)^n \right) - f(x_0).$$

La función g es derivable y su derivada es

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) + \left(f''(x)(x_0 - x) - f'(x)\right) \\ &\quad + \left(\frac{f'''(x)}{2}(x_0 - x)^2 - f''(x)(x_0 - x) \right) \\ &\quad \cdots + \left(\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(x_0 - x)^n - \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(x_0 - x)^{n-1} \right) \\ &= \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(x_0 - x)^n. \end{aligned}$$

Además $g(x_0) = 0$ y $g(a) = P_n(x_0) - f(x_0)$.

1) Consideremos la función $h(x) = (x_0 - x)^{n+1}$ y apliquemos el teorema del valor medio generalizado a g y h: existe $c \in]a, x_0[$ tal que

$$\frac{g(x_0) - g(a)}{h(x_0) - h(a)} = \frac{g'(c)}{h'(c)}.$$

Calculamos los dos miembros de la igualdad:

$$\frac{g(x_0) - g(a)}{h(x_0) - h(a)} = -\frac{P_n(x_0) - f(x_0)}{-(x_0 - a)^{n+1}}$$

y

$$\frac{g'(c)}{h'(c)} = \frac{\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} \cdot (x_0 - c)^n}{-(n+1)(x_0 - c)^n} = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

Uniendo las dos igualdades anteriores, se tiene que

$$f(x_0) - P_n(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x_0 - a)^{n+1}.$$

2) Aplicamos el teorema del valor medio a la función g en $[a, x_0]$: existe $d \in]a, x_0[$ tal que

$$g(x_0) - g(a) = g'(d)(x_0 - a) = \frac{f^{(n+1)}(d)}{n!}(x_0 - d)^n(x_0 - a),$$

y, por tanto,

$$f(x_0) - P_n(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(d)}{n!}(x_0 - d)^n(x_0 - a)$$

como queríamos demostrar. □

10.3 DESARROLLO DE TAYLOR DE UNA FUNCIÓN

Definición 10.3.1. Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ y sea $a \in I$. Supongamos que existen las derivadas de cualquier orden de f en a. La serie

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

se llama *serie* o *desarrollo de Taylor* de f centrado en a.

Diremos que la serie de Taylor *representa* a una función en un punto x si la serie es convergente y su suma en dicho punto es $f(x)$.

Usaremos la notación

$$f(x) \approx \sum_{n \geqslant 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

para indicar que el desarrollo de Taylor corresponde a la función f.

Ya que tenemos asociado un polinomio "de grado infinito" a una función, nos queda por estudiar cuándo dicha serie es convergente y si su suma es la función original. El siguiente resultado nos da una condición suficiente para que la serie de Taylor represente a la función.

Teorema 10.3.2. *Sea* I *un intervalo y sea* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *una función de clase* C^∞ *en* I. *Supongamos que existe* M *tal que*

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant M, \quad \forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Entonces la serie de Taylor de f *representa a* f *en todo* I.

Demostración. Usamos la fórmula de Taylor con resto de Lagrange:

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \xrightarrow{n \to +\infty} 0. \qquad \square$$

Ejemplo 10.3.3. Consideremos la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida como

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-1/x^2\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

En primer lugar calculemos el siguiente límite: dado $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{y \to +\infty} \frac{y^n}{\exp\left(y^2\right)} = 0,$$

donde hemos usado el cambio de variable $y = 1/x$ y la escala de infinitos (proposición 5.7.1). El límite por la izquierda se calcula de la misma forma y, por tanto,

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En consecuencia, la fórmula infinitesimal del resto nos dice que todos los polinomios de Taylor de f centrados en el origen son cero. Por tanto, el desarrollo de Taylor también es cero y sólo representa a la función en el origen.

10.3.1 Desarrollo de Taylor de algunas funciones

Desarrollo de la función exponencial

Consideremos la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. Ya sabemos que su polinomio de Taylor centrado en el origen es

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

y su desarrollo de Taylor es

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{n!}.$$

Si $x \in]-\infty, b]$, entonces $\left|f^{(n)}(x)\right| = |e^x| \leqslant e^b$. Aplicando el teorema 10.3.2 tenemos que el desarrollo de Taylor representa a la función exponencial en cualquier intervalo o, lo que es lo mismo, en todo $\mathbb{R}$:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \tag{10.2}$$

Si evaluamos (10.2) en $-x$, se tiene que

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} = 1 - x + \cdots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \cdots$$

con lo que

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots,$$
$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

Desarrollo de las funciones seno y coseno

El desarrollo de Taylor de la función seno es

$$\operatorname{sen}(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

y el de la función coseno es

$$\cos(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Como todas las derivadas de ambas funciones están acotadas en valor absoluto por uno, el desarrollo de Taylor representa a ambas funciones siempre:

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

Desarrollo de la función logaritmo

Consideremos la función $f\colon]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \log(1+x)$. Calculamos en primer lugar sus derivadas en $a = 0$:

$$f'(x) = (1+x)^{-1},\ f''(x) = (-1) \cdot (1+x)^{-2},\ f'''(x) = (-1) \cdot (-2) \cdot (1+x)^{-3},$$

y se comprueba por inducción que

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad \forall x > -1,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si evaluamos en 0, se tiene que $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$, para cualquier natural n.

El desarrollo de Taylor de $\log(1+x)$ centrado en el origen es

$$\log(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots$$

El resto de Lagrange nos dice que el error se puede escribir de la forma

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!(1+c)^{n+1}} \cdot x^{n+1},$$

donde c está entre 0 y x. Si $0 < x \leqslant 1$, podemos acotar el error:

$$|R_n(x)| = \left| \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!(1+c)^{n+1}} \cdot x^{n+1} \right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Por tanto, la serie de Taylor representa a la función $\log(1+x)$ si $x \in [0,1]$. Esta acotación no es válida si x es negativo. En ese caso vamos a usar la fórmula del error de Cauchy: existe $d \in]x, 0[$ tal que

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(d)}{n!}(x-d)^n(x-a) = \frac{(-1)^n(x-d)^n}{(1+d)^{n+1}} \cdot x\,.$$

Como $-1 < x < d < 0$, se cumple que $0 < 1+x < 1+d < 1$. Además

$$\left| \frac{x-d}{1+d} \right| = \frac{-x+d}{1+d} < -x = |x|\,.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| \frac{(-1)^n(x-d)^n}{(1+d)^{n+1}} \cdot x \right| = \left| \left(\frac{x-d}{1+d} \right)^n \right| \cdot \left| \frac{x}{1+d} \right| \\ &\leqslant \frac{|x|^{n+1}}{1+d} \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{1+x} \xrightarrow{n\to\infty} 0. \end{aligned}$$

Resumiendo,

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

para cualquier $x \in]-1, 1]$.

Desarrollo de la función $1/(1-x)$

Sabemos por el ejemplo 10.2.11 que el desarrollo de la función $1/(1-x)$ es

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

y que dicho desarrollo representa a la función siempre que $|x| < 1$.

Desarrollo de arcotangente

Podemos usar el desarrollo de la derivada o derivar el desarrollo de una función para facilitar los cálculos. Por ejemplo, como

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

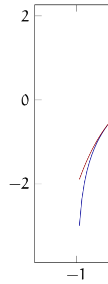


Figura 2
de la fun
senta pa

se tiene que

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

si $|x| < 1$.

Usando que la derivada de $\log(1+x)$ es la función anterior, el desarrollo de Taylor (ya calculado anteriormente) de dicha función es

$$\log(1+x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

Una cuestión más delicada es decidir si dicho desarrollo representa a la función $\log(1+x)$.

Un razonamiento análogo nos permite calcular el desarrollo de la función arcotangente. Calculamos el desarrollo de $(\arctan(x))' = 1/(1+x^2)$,

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Por tanto, el desarrollo de arcotangente es

$$\arctan(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Dejamos la demostración de que dicho desarrollo representa a la función arcotangente en el intervalo $]-1,1[$ para temas posteriores.

Desarrollo de la binomial

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. La derivada n-ésima de la función $f\colon]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = (1+x)^\alpha$ es

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, \quad f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1).$$

Por tanto, su desarrollo de Taylor es

$$(1+x)^\alpha \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Con este desarrollo, es sencillo calcular el desarrollo de la función arcoseno usando su derivada:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1-x^2\right)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} x^{2n}.$$

Por tanto, el desarrollo del arcoseno es

$$\operatorname{arc\,sen}(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

El número binómico $\binom{-1/2}{n}$ se puede desarrollar y queda

$$\begin{aligned}\binom{-1/2}{n} &= \frac{(-1/2)(-1/2-1)\ldots(-1/2-n+1)}{n!} \\ &= \frac{\frac{-1}{2}\cdot\frac{-3}{2}\ldots\frac{-2n+1}{2}}{n!} \\ &= (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!}.\end{aligned}$$

10.3.2 Fórmula de inversión de Lagrange*

FALTA

10.4 EJERCICIOS

Ejercicio 10.1. Sea f la única función que verifica que

$$f(x)^3 + \exp\big(f(x)\big) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demuestra que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ y calcula $f''(1)$.

Ejercicio 10.2. Expresa el polinomio $x^3 - 3x^2 + 7x + 6$ usando potencias de $(x-3)$.

Ejercicio 10.3. Expresa el polinomio $x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 7x + 6$ usando potencias de $(x-2)$.

Ejercicio 10.4. Sea f una función cuyo polinomio de Taylor de grado 3 centrado en 0 es

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Calcula el polinomio de Taylor de grado 3 centrado en cero de la función $g(x) = xf(x)$.

Ejercicio 10.5. El polinomio de Taylor de orden 3 centrado en el origen de una función dada f es:

$$1 - x + x^2 - x^3$$

Calcula el polinomio de Taylor del mismo orden y centro de la función $g(x) = e^{f(x)}$.

Ejercicio 10.6. Calcula los siguientes límites:

1) $\lim_{x\to 0} \frac{\big(\tan(x)-\operatorname{sen}(x)\big)\operatorname{sen}(x)-\frac{x^4}{2}}{x^6}$.
2) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)\tan(x)-x^2}{x^4}$.
3) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)\operatorname{sen}(x)-x^2+x^3}{x^3}$.
4) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)\arctan(x)-x^2}{x^6}$.
5) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4} - \frac{1}{6x^2} - \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^5}$.

Ejercicio 10.7. Sea $A = \{x \in \mathbb{R}^* : -\pi/2 < x < \pi/2\}$ y $f\colon A \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \frac{6\big(x - \operatorname{sen}(x)\big)\tan(x) - x^4}{x^6} \quad \forall x \in A.$$

Estudia el comportamiento de f en $-\pi/2$, 0 y $\pi/2$.

Ejercicio 10.8. Sea $A =]-1, 0[\cup \mathbb{R}^+$ y $f\colon A \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \frac{2\arctan(x)\log(1+x) - 2x^2 + x^3}{x^5} \quad \forall x \in A.$$

Estudia el comportamiento de f en -1, 0 y $+\infty$.

Ejercicio 10.9. Prueba que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4}\left(2x\sqrt[3]{1+x^3}+2\sqrt{1+x^2}-2-2x-x^2\right)=\frac{5}{12}.$$

Ejercicio 10.10. Estudia el comportamiento en $-\infty$, 0 y $+\infty$ de la función $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\frac{x-\operatorname{sen}(x)}{x^6}\left(e^x-1-x-\frac{x^2}{2}\right).$$

Ejercicio 10.11. Encuentra los extremos relativos de la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos:

1) $f(x)=x^5-5x^4+5x^3+10$,
2) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+1}$,
3) $f(x)=x^2\,|x|\,e^{-|x|}$

Ejercicio 10.12. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable que verifica que $f''(x)=-f(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

1) Si $f(0)=f'(0)=0$, entonces $f(x)=0$ para todo x.
2) En general, $f(x)=f(0)\cos(x)+f'(0)\operatorname{sen}(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

Ejercicio 10.13. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable con $f'(0)=0$ y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $g(x)=x^2f(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Prueba que si $f(0)\neq 0$, entonces g tiene un extremo relativo en 0.

Ejercicio 10.14. Sea I un intervalo y $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable tal que $f''(x)=f(x)$ para todo $x\in I$. Prueba que si existe $a\in I$ tal $f(a)=f'(a)=0$, entonces $f(x)=0$ para todo $x\in I$.

Ejercicio 10.15. Prueba que $1-\frac{x^2}{2}\leqslant\cos(x)\leqslant 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$ para todo $x\in[0,\pi]$.

Ejercicio 10.16. Calcula $\sqrt{10}$ con un error menor que 10^{-2}.

Ejercicio 10.17. Calcula un valor aproximado del número real α con un error menor de 10^{-2} en cada uno de los casos siguientes:

1) $\alpha=\sqrt{e}$,
2) $\alpha=\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right)$,
3) $\alpha=\log\left(\frac{3}{2}\right)$,
4) $\alpha=\sqrt[3]{7}$,
5) $\alpha=\sqrt{102}$,
6) $\alpha=\log(2)$.