2.- (3,5 PUNTOS) En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ de los polinomios de grado menor o igual que dos con coeficientes reales se considera la métrica euclídea dada por:

$$g(p(x), q(x)) = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx.$$

(a) Denotemos por $U = L(\{x - \frac{1}{2}, x + 4\})$. Utiliza el proceso de Gram-Schmidt para obtener una base ortonormal de $(U, g_{|U})$ y de $(\mathbb{R}_2[x], g)$.

(b) Sea σ la simetría ortogonal respecto de U. Determina la matriz de σ respecto de una base de $\mathbb{R}_2[x]$.

(c) Sea r una rotación de eje $L(\{x - \frac{1}{2}\})$ y ángulo $\pi/4$. Determina la matriz de r respecto de una base de $\mathbb{R}_2[x]$.

(d) Clasifica y describe la isometría $r \circ \sigma$.

Primero hacemos la matriz de la métrica en la base usual

$B = \{1, x, x^2\}$

$g(1,1) = \int_0^1 1\,dx = 1$

$g(1,x) = \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$

$g(1,x^2) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

$g(x,1) = \frac{1}{2}$

$g(x,x) = \frac{1}{3}$

$g(x,x^2) = \int_0^1 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$

$g(x^2,1) = \frac{1}{3}$ $g(x^2,x) = \frac{1}{4}$ $g(x^2,x^2) = \frac{1}{5}$

$$M(g, B_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$$

a) $U = \{ x - \frac{1}{2}, x+4 \}$

$v_1 = x - \frac{1}{2} = u_1$

$$u_2 = v_2 - \frac{g(v_2, u_1)}{\|u_1\|^2} u_1 =$$

$$= x+4 - \frac{g(x+4, x-1/2)}{g(x-1/2, x-1/2)}(x-1/2) =$$

$$g\left(x+4, x-\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 x^2 + \frac{7}{2}x - 2 \, dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{7}{2}\frac{x^2}{2} - 2x \Big|_0^1 = \frac{1}{12}$$

$$g\left(x-\frac{1}{2}, x-\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 x^2 - x + \frac{1}{4} \, dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}x \Big|_0^1 = \frac{1}{12}$$

$$= (x+4) - \left(x - \frac{1}{2}\right) = (4,1,0) + \left(\frac{1}{2}, -1, 0\right) =$$
$$= (9/2, 0, 0)$$

$$B_{ORTG} = \{(-1/2, 1, 0), (9/2, 0, 0)\}$$

$$g((-1/2, 1, 0), (-1/2, 1, 0)) = \frac{1}{12}$$

$$g(9/2, 9/2) = \int_0^1 \frac{81}{4}\,dx = \frac{81}{4} = \frac{9}{2}$$

$$B_{ORTU} = \{\sqrt{12}(-1/2, 1, 0), \frac{2}{9}(\frac{9}{2}, 0, 0)\}$$

Para completar hasta una base de $(\mathbb{R}_2, g)$, hallamos un vector perpendicular a los otros dos, hallamos $U^\perp$.

$$U^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_2[x] : g((-1/2, 1, 0), (x, y, z)) = 0,\ g((9/2, 0, 0), (x, y, z)) = 0\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{y}{12} + \frac{z}{12} = 0 \\ \frac{18}{4}x + \frac{9}{4}y + \frac{6}{4}z = 0 \end{array} \right\} = L\left(\frac{1}{6}, -1, 1\right)$$

$$g((1/6,-1,1),(1/6,-1,1)) = \frac{1}{180}$$

$$\tilde{\mathcal{B}} = \left\{ \sqrt{12}\left(-\frac{1}{2},1,0\right), \frac{2}{9}\left(\frac{9}{2},0,0\right), \right.$$

$$\left. \frac{30}{\sqrt{5}}\left(1/6,-1,1\right) \right\}$$

e) Consideramos la base anteriormente calculada.

$$M(\sigma,\tilde{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c) $$M(r,\tilde{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$M(r,\tilde{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

d) $r \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$\det(r \circ \sigma) = -1$

$\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\left(Tr(r \circ \sigma) + 1\right)\right) = 0$

$r \circ \sigma$ es una simetría especular respecto de V_1