2. Endomorfismo adjunto. Endomorfismos autoadjuntos y su diagonalización.

2.1. Endomorfismo adjunto. Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo. Recordemos que en la sección 3.3 habíamos definido para cualquier métrica no degenerada un isomorfismo dado por

$$\begin{array}{rccl} \Phi: & V & \longrightarrow & V^* \\ & & & \\ & v & \mapsto & \Phi(v): \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & g(u,v) \end{array} \end{array}$$

Por otra parte dada $f \in \mathrm{End}(V)$ podemos considerar su aplicación traspuesta (o endomorfismo dual) $f^t \in \mathrm{End}(V^*)$ que se definía como

$$\begin{array}{rccc} f^t: & V^* & \longrightarrow & V^* \\ & \varphi & \mapsto & \varphi \circ f \end{array}$$

Recordemos que si B era una base de V y B^* la base dual asociada entonces

$$M(f^t, B^*) = M(f, B)^t \tag{19}$$

A partir de los homomorfismos anteriores podemos definir un endomorfismo $\widehat{f} \in \mathrm{End}(V)$ dado por

$$\widehat{f} = \Phi^{-1} \circ f^t \circ \Phi \tag{20}$$

Observemos que $\widehat{f}$ es el endomorfismo que hace que el siguiente diagrama sea conmutativo.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\widehat{f}"] \arrow[d, "\Phi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & V \arrow[d, "\Phi"] \\ V^* \arrow[r, "f^t"'] & V^* \end{tikzcd}$$

Definición 3.19: A $\widehat{f}$ se le denomina **el endomorfismo adjunto de f respecto de g**.

Observación 3.20: Observemos que el endomorfismo adjunto de f depende de g ya que el isomorfismo Φ depende de la métrica g.

La siguiente proposición nos proporciona una caracterización del endomorfismo adjunto.

Proposición 3.21: *Dado $f \in \mathrm{End}(V)$, el endomorfismo adjunto de f respecto de g es el único endomorfismo que verifica:*

$$g(v, f(u)) = g(\widehat{f}(v), u)\ , \quad \forall u, v \in V\ . \tag{21}$$

Demostración: De la definición de $\widehat{f}$ tenemos para todo $u, v \in V$

$$\begin{aligned} g(\widehat{f}(v), u) &= g((\Phi^{-1} \circ f^t \circ \Phi)(v), u) = g(\Phi^{-1}(f^t \circ \Phi(v)), u) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Proposición 2.17 vi)}}}{=} (f^t \circ \Phi(v))(u) \\ &= (\Phi(v) \circ f)(u) = \Phi(v)(f(u)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Definición de } \Phi}}{=} g(v, f(u)) \end{aligned}$$

Comprobemos ahora que dicho endomorfismo es único. Supongamos que exista $\widetilde{f} \in \mathrm{End}(V)$ que verifique

$$g(v, f(u)) = g(\widetilde{f}(v), u)\ , \quad \forall u, v \in V\ . \tag{22}$$

Entonces de las ecuaciones (21) y (22) tendríamos

$$g(\widehat{f}(v) - \widetilde{f}(v), u) \underset{g \text{ bilineal}}{=} g(\widehat{f}(v), u) - g(\widetilde{f}(v), u) \underset{(21) \text{ y } (22)}{=} g(v, f(u)) - g(v, f(u)) = 0$$

Como g es euclídea y por tanto no degenerada tendríamos

$$\widehat{f}(v) - \widetilde{f}(v) = 0\ , \quad \forall v \in V\ .$$

Y por tanto $\widehat{f} = \widetilde{f}$. □

Estudiemos ahora las propiedades que tiene la aplicación adjunta.

PROPIEDADES 3.22: *Sean (V, g) un espacio vectorial euclídeo, $f, g \in \mathrm{End}(V)$ y $\widehat{f}, \widehat{g}$ sus correspondientes endomorfismos adjuntos respecto de g. Entonces se tienen las siguientes propiedades:*

i) *Para cualquier base B de V se tiene*
$$M(\widehat{f}, B) = M(g, B)^{-1} \cdot M(f, B)^t \cdot M(g, B)\ .$$
ii) *Para cualquier base ortonormal B' de (V, g) se tiene*
$$M(\widehat{f}, B') = M(f, B')^t\ .$$
iii) $\widehat{\widehat{f}} = f$.
iv) $\widehat{\mathrm{Id}} = \mathrm{Id}$ *y* $\widehat{f_0} = f_0$, *donde f_0 denota la aplicación idénticamente nula.*
v) $\widehat{g \circ f} = \widehat{f} \circ \widehat{g}$.
vi) $f \in \mathrm{Aut(V)} \Leftrightarrow \widehat{f} \in \mathrm{Aut(V)}$. *Además en este caso* $\widehat{f^{-1}} = \widehat{f}^{-1}$.
vii) $\mathrm{Ker}(\widehat{f}) = \mathrm{Im}(f)^\perp$ *y* $\mathrm{Im}(\widehat{f}) = \mathrm{Ker}(f)^\perp$.
viii) *Si U es un subespacio invariante para f entonces $U^\perp$ es un subespacio invariante para $\widehat{f}$. Es decir si $f(U) \subset U$ entonces $\widehat{f}(U^\perp) \subset U^\perp$.*
ix) *Los polinomios característicos de f y $\widehat{f}$ coinciden.*
x) *Si λ es un valor propio de f con multiplicidad geométrica k si y solo si λ es un valor propio de $\widehat{f}$ con multiplicidad geométrica k.*
xi) *f es diagonalizable si y solo si $\widehat{f}$ es diagonalizable.*
xii) *Sea $f \in \mathrm{Aut(V)}$. Entonces se tiene que f es una isometría de (V, g) si y solo si $\widehat{f} = f^{-1}$.*

Demostración: $\boxed{\text{i)}}$ Tenemos

$$\begin{aligned} M(\widehat{f}, B) &= M(\Phi^{-1} \circ f^t \circ \Phi, B) = M(\Phi^{-1}, B^*, B) \cdot M(f^t, B^*) \cdot M(\Phi, B, B^*) \\ &\overset{(19)}{\underset{\text{Proposición 2.17 iii)}}{=}} M(g, B)^{-1} \cdot M(f, B)^t \cdot M(g, B)\ . \end{aligned}$$

$\boxed{\text{ii)}}$ Es una consecuencia inmediata del apartado i).

$\boxed{\text{iii) y iv)}}$ Se siguen directamente de la definición de endomorfismo adjunto.

$\boxed{\text{v)}}$

$$\widehat{g \circ f} = \Phi^{-1} \circ (g \circ f)^t \circ \Phi \underset{(g \circ f)^t = f^t \circ g^t}{=} \Phi^{-1} \circ (f^t \circ g^t) \circ \Phi = (\Phi^{-1} \circ f^t \circ \Phi) \circ (\Phi^{-1} \circ g^t \circ \Phi) = \widehat{f} \circ \widehat{g}$$

$\boxed{\text{vi)}}$ Observemos que si $f \in \mathrm{Aut(V)}$ entonces tenemos

$$\mathrm{Id} \underset{\text{iv)}}{=} \widehat{\mathrm{Id}} = \widehat{f^{-1} \circ f} \underset{\text{v)}}{=} \widehat{f^{-1}} \circ \widehat{f}$$

de donde se deduce la implicación de izquierda a derecha en vi). Teniendo en cuenta esto y el apartado iii) tendríamos la otra implicación.

$\boxed{\text{vii)}}$ Notemos que

$$v \in \mathrm{Ker}(\widehat{f}\,) \Longleftrightarrow \widehat{f}(v) = 0 \overset{g \text{ es no degenerada}}{\Longleftrightarrow} g(\widehat{f}(v), u) = 0\ , \forall u \in V \overset{\text{Proposición 3.21}}{\Longleftrightarrow}$$
$$\Longleftrightarrow g(v, f(u)) = 0\ , \forall u \in V \Longleftrightarrow v \in \mathrm{Im}(f)^{\perp}$$

Utilizando esta igualdad tenemos

$$\mathrm{Ker}(f) \underset{\text{iii)}}{=} \mathrm{Ker}(\widehat{\widehat{f}}\,) = \mathrm{Im}(\widehat{f}\,)^{\perp}$$

Calculando los subespacios perpendiculares en la igualdad anterior tenemos

$$\mathrm{Ker}(f)^{\perp} = \left(\mathrm{Im}(\widehat{f}\,)^{\perp}\right)^{\perp} \underset{\text{Propiedad 3.2 iii)}}{=} \mathrm{Im}(\widehat{f}\,)$$

$\boxed{\text{viii)}}$ Supongamos que U es un subespacio de V tal que $f(U) = U$ y veamos que $\widehat{f}(U^{\perp}) = U^{\perp}$, Para ello consideremos $v \in U^{\perp}$ y $u \in U$. Tenemos

$$g(\widehat{f}(v), u) \underset{\text{Proposición 3.21}}{=} g(v, f(u)) \underset{v \in U^{\perp} \text{ y } f(u) \in U}{=} 0$$

$\boxed{\text{ix), x) y xi)}}$ Se deducen directamente del aparatado ii).

$\boxed{\text{xii)} \Longrightarrow}$ Supongamos que $f \in \mathrm{Iso}(V, g)$. Entonces para $u, v \in V$ tenemos

$$g(f^{-1}(v), u) \underset{f \text{ isometría}}{=} g(f(f^{-1}(v)), f(u)) = g(v, f(u))$$

Es decir f^{-1} verifica la ecuación (21) y por tanto $\widehat{f} = f^{-1}$.

$\boxed{\text{xii)} \Longleftarrow}$ Supongamos ahora que $\widehat{f} = f^{-1}$ y consideremos $u, v \in V$. Entonces tenemos

$$g(f(v), f(u)) \underset{\text{Proposición 3.21}}{=} g\left(\widehat{f}(f(v)), u\right) = g(v, u)$$

De donde deducimos que $f \in \mathrm{Iso}(V, g)$. $\square$

2.2. Endomorfismos autoadjuntos y su diagonalización. Vamos a estudiar ahora un tipo especial de endomorfismos que serán muy importantes en lo que sigue.

Definición 3.23: Diremos que $f \in \mathrm{End}(V)$ es un **endomorfismo autoadjunto respecto de g** si $\widehat{f} = f$, es decir si

$$g(v, f(u)) = g(f(v), u)\ , \quad \forall u, v \in V\ . \tag{23}$$

A continuación probaremos un teorema que caracteriza los endomorfismos autoadjuntos en función de su matriz respecto de una base.

Teorema 3.24: *Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y $f \in \mathrm{End}(V)$. Las siguientes afirmaciones equivalen:*

i) *f es un endomorfismo autoadjunto.*
ii) *Para toda base B de V se tiene que*

$$M(g, B) \cdot M(f, B) = M(f, B)^t \cdot M(g, B) \tag{24}$$

Equivalentemente, $M(g, B) \cdot M(f, B)$ es una matriz simétrica.
iii) *Existe una base B de V tal que se verifica la ecuación (24).*
iv) *Para toda base ortonormal B' de (V, g) se tiene que $M(f, B')$ es simétrica.*
v) *Existe una base ortonormal B' de (V, g) tal que $M(f, B')$ es simétrica.*

Demostración: $\boxed{\text{i)} \Longrightarrow \text{ii)}}$ Observemos que tenemos

$$M(f, B) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ autoadjunto}}}{=} M(\widehat{f}, B) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Propiedad 3.22 i)}}}{=} M(g, B)^{-1} \cdot M(f, B)^t \cdot M(g, B)\ .$$

Multiplicando por la izquierda en la igualdad anterior por la matriz $M(g, B)$ obtenemos la ecuación (24).
$\boxed{\text{ii)} \Longrightarrow \text{iii)}}$ y $\boxed{\text{iv)} \Longrightarrow \text{v)}}$ Son inmediatas.
$\boxed{\text{iii)} \Longrightarrow \text{i)}}$ Usando de nuevo la propiedad 3.22 i) tenemos

$$M(\widehat{f}, B) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Propiedad 3.22 i)}}}{=} M(g, B)^{-1} \cdot M(f, B)^t \cdot M(g, B) \underset{\substack{\uparrow \\ (24)}}{=} M(f, B)\ .$$

De donde deducimos que $\widehat{f} = f$, es decir f es autoadjunta.
$\boxed{\text{ii)} \Longrightarrow \text{iv)}}$ Si B' es una base ortonormal entonces $M(g, B') = I_n$. Sustituyendo esta matriz en la ecuación (24) obtenemos $M(f, B') = M(f, B')^t$, es decir $M(f, B')$ es simétrica.
$\boxed{\text{v)} \Longrightarrow \text{iii)}}$ De v) sabemos que existe B' base ortonormal tal que $M(f, B') = M(f, B')^t$. Como $M(g, B') = I_n$ tenemos que se verifica la ecuación (24). $\square$

Presentaremos a continuación algunos ejemplos de endomorfismos autoadjuntos.

Ejemplos 3.25: 1. Por la propiedad iv) tenemos que Id y f_0 son endomorfismos autoadjuntos.

2. Sean U un subespacio de V, π_U la proyección ortogonal sobre U y σ_U la simetría ortogonal respecto de U. Recordemos que habíamos comprobado en las propiedades 3.16 ii) e iii) que existía una base ortonormal B' de (V,g) tal que $M(\pi_U, B')$ y $M(\sigma_U, B')$ son simétricas. Entonces como se verifica el apartado v) del teorema 3.24 deducimos que las proyecciones y las simetrías ortogonales son endomorfismos autoadjuntos.

Probaremos ahora dos propiedades clave de los endomorfismos autoadjuntos que serán de gran importancia más adelante.

PROPOSICIÓN 3.26: *Sea (V,g) un espacio vectorial euclídeo y $f \in \mathrm{End}(V)$ un endomorfismo autoadjunto respecto de g. Entonces tenemos*

i) *Si U es un subespacio de V tal que $f(U) \subset U$ entonces $f(U^\perp) \subset U^\perp$. Además $f_{|U}$ es un endomorfismo autoadjunto de (U, g_U).*
ii) *Dos subespacios propios de f asociados a valores propios distintos son ortogonales.*

Demostración: $\boxed{\text{i)}}$ Si U es un subespacio de V tal que $f(U) \subset U$ tenemos de la propiedad 3.22 viii) que $\widehat{f}(U^\perp) \subset U^\perp$. Pero como $\widehat{f} = f$ concluimos que $f(U^\perp) \subset U^\perp$. Claramente $f_{|U} \in \mathrm{End}(U)$ y es un endomorfismo autoadjunto de (U, g_U)

$\boxed{\text{ii)}}$ Sean V_μ y V_ν subespacios propios de f asociados a dos valores propios distintos μ y ν. Veamos que dichos subespacios son ortogonales. Para ello consideramos $v \in V_\mu$ y $w \in V_\nu$. Observemos que

$$g(f(v), w) \underset{\uparrow \atop v \in V_\mu}{=} g(\mu v, w) \underset{\uparrow \atop g \text{ bilineal}}{=} \mu g(v,w) \tag{25}$$

Análogamente tenemos

$$g(v, f(w)) \underset{\uparrow \atop w \in V_\nu}{=} g(v, \nu w) \underset{\uparrow \atop g \text{ bilineal}}{=} \nu g(v,w) \tag{26}$$

Por ser f un endomorfismo autoadjunto sabemos que las expresiones en (25) y (26) son iguales y por lo tanto

$$\mu g(v,w) = \nu g(v,w) \qquad \text{de donde se deduce} \qquad (\mu - \nu) g(v,w) = 0$$

Como $\mu - \nu \neq 0$ se sigue que $g(v,w) = 0$ y por tanto V_μ y V_ν son ortogonales. □

Recordemos que para las proyecciones y simetrías generales teníamos las siguientes caracterizaciones:

$$\boxed{f \text{ es una proyección} \iff f \circ f = f} \quad \boxed{f \text{ es una simetría} \iff f \circ f = \mathrm{Id}}$$

Podemos obtener ahora una caracterización de las proyecciones y simetrías ortogonales.

PROPOSICIÓN 3.27: *Sea (V,g) un espacio vectorial euclídeo y $f \in \mathrm{End}(V)$, entonces se tiene:*

i) *f es una proyección ortogonal si y sólo si $f \circ f = f$ y f es un endomorfismo autoadjunto respecto de g.*
ii) *f es una simetría ortogonal si y sólo si $f \circ f = \mathrm{Id}$ y f es un endomorfismo autoadjunto respecto de g.*

Demostración: Las implicaciones $\boxed{\text{i) e ii)} \Longrightarrow}$ Son consecuencia directa de la caracterización anterior y el ejemplo 2 de 3.25.

$\boxed{\text{i)} \Longleftarrow}$ De la caracterización anterior tenemos que f es una proyección. Además sabíamos que f era la proyección sobre $U = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = V_1$ paralela a $W = \mathrm{Ker}(f) = V_0$. Para probar que es una proyección ortogonal faltaría demostrar que U y W son ortogonales, pero como estamos asumiendo que f es autoadjunto esto se sigue directamente del apartado ii) de la proposición 3.26.

$\boxed{\text{ii)} \Longleftarrow}$ De la caracterización previa tenemos que f es una simetría. Además sabíamos que f era la simetría respecto de $U = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = V_1$ paralela a $W = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) = V_{-1}$. Para probar que es una simetría ortogonal faltaría demostrar que U y W son ortogonales, pero como estamos asumiendo que f es autoadjunto esto se sigue como en el caso anterior del apartado ii) de la proposición 3.26. □

2.3. Diagonalización de endomorfismos autoadjuntos. Vamos a probar ahora el resultado más importante de esta sección. Vamos a ver que si (V, g) es un espacio vectorial euclídeo y $f \in \mathrm{End}(V)$ es un endomorfismo autoadjunto respecto de g entonces f es diagonalizable. Como consecuencia probaremos que toda matriz simétrica real es diagonalizable. Notemos que hasta ahora solo sabíamos que toda matriz simétrica real era congruente a una matriz diagonal (Corolario 2.28). Ahora probaremos que toda matriz simétrica real es equivalente a una matriz diagonal.

Para probar este resultado comenzaremos probando un resultado técnico. Vamos a fijar alguna notación relativa a los números complejos que utilizaremos a continuación.

Si $z \in \mathbb{C}$ denotaremos por $|z|$ al módulo de z. Recordemos que $|z|^2 = z\overline{z}$, donde $\overline{z}$ denota el conjugado de z.

Dada $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ tal que $M = (m_{ij})$ denotaremos $\overline{M}$ a la matriz cuyas entradas son los números complejos conjugados de m_{ij}, es decir $\overline{M} = (\overline{m_{ij}})$. Es sencillo comprobar que si $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ y $N \in \mathcal{M}_{n\times k}(\mathbb{C})$ entonces

$$\overline{M \cdot N} = \overline{M} \cdot \overline{N}\,. \tag{27}$$

Probaremos a continuación el siguiente resultado.

LEMA 3.28: i) *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Entonces A tiene al menos un valor propio $\lambda \in \mathbb{C}$.*

ii) *Sea $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Entonces todo valor propio de A es real. En particular, A admite algún valor propio real.*

Demostración: $\boxed{\text{i)}}$ Recordemos que los valores propios de A son las raíces de su polinomio característico $p_A(\lambda)$, que es un polinomio de grado $n \geqslant 1$ con coeficientes en $\mathbb{C}$. Por el Teorema Fundamental del Álgebra sabemos que existe alguna raíz de dicho polinomio y por tanto A tiene al menos un valor propio.

$\boxed{\text{ii)}}$ Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ un valor propio de A. Entonces existe $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \backslash \{(0, \ldots, 0)\}$ tal que $A \cdot z = \lambda\, z$ donde recordemos que identificamos los vectores de $\mathbb{C}^n$ con las matrices columnas de n filas. Es decir la expresión anterior denota:

$$A\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

Vamos a multiplicar por la izquierda ambas partes de esta igualdad por la matriz fila $\overline{z}^t = \begin{pmatrix} \overline{z_1} & \cdots & \overline{z_n} \end{pmatrix}$. Obtenemos así

$$\overline{z}^t \cdot A \cdot z = \lambda\, \overline{z}^t \cdot z = \lambda\, (\overline{z_1} z_1 + \cdots + \overline{z_n} z_n) = \lambda \left(|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2\right)$$

Observemos que $\left(|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2\right)$ es un número real positivo. Por tanto si probamos que $\overline{z}^t \cdot A \cdot z \in \mathbb{R}$ entonces tendremos que λ también es real. Para comprobar que $\overline{z}^t \cdot A \cdot z \in \mathbb{R}$ vamos a calcular su conjugado

$$\overline{\overline{z}^t \cdot A \cdot z} \underset{(27)}{=} \overline{\overline{z}}^t \cdot \overline{A} \cdot \overline{z} \overset{\overline{\overline{z}} = z}{\underset{A \text{ es real}}{=}} z^t \cdot A \cdot \overline{z} \underset{\text{Es un número real}}{=} (z^t \cdot A \cdot \overline{z})^t = \overline{z}^t \cdot A^t \cdot z \underset{A \text{ es simétrica}}{=} \overline{z}^t \cdot A \cdot z$$

Como hemos comprobado que $\overline{\overline{z}^t \cdot A \cdot z} = \overline{z}^t \cdot A \cdot z$ tenemos que $\overline{z}^t \cdot A \cdot z \in \mathbb{R}$ y por tanto $\lambda \in \mathbb{R}$. Finalmente como por el apartado i) sabemos que A tiene al menos un valor propio $\lambda \in \mathbb{C}$ y acabamos de comprobar que si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ los valores propios deben de ser reales concluimos que A tiene al menos un valor propio real. □

Como corolario obtenemos el siguiente resultado para los endormorfismos autoadjuntos.

Corolario 3.29: *Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y $f \in \mathrm{End}(V)$ con f un endomorfismo autoadjunto respecto de g. Entonces f tiene al menos un valor propio real.*

Demostración: Consideremos B' base ortonormal de (V, g). Entonces del apartado iv) del Teorema 3.24 tenemos que $M(f, B')$ es una matriz simétrica real. Aplicando a dicha matriz el apartado ii) del Lema 3.28 deduciríamos que $M(f, B')$, y por tanto f, tiene al menos una raíz real. □

Ya tenemos todos los ingredientes necesarios para poder probar el resultado que buscábamos:

Teorema 3.30: *Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y $f \in \mathrm{End}(V)$ un endomorfismo autoadjunto respecto de g. Entonces f admite una base ortonormal de vectores propios y por tanto f es diagonalizable.*

Demostración: Sea $n = \dim(V)$. La demostración consistirá en aplicar un proceso de inducción sobre n.

Para $n = 1$ es trivial. Supongamos que se verifica el Teorema en los espacios vectoriales euclídeos de dimensión $n - 1$ y probemos que entonces se verifica para n.

Por el Corolario 3.29 sabemos que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ valor propio de f. Por tanto existirá $v \in V \backslash \{0\}$ tal que $f(v) = \lambda\, v$. Denotemos $U = L(\{v\})$. Observemos que por ser la métrica euclídea sabemos de la Propiedad 3.2 ii) que $U^\perp$ es un subespacio vectorial de dimensión $n-1$.

Además por ser v un vector propio tenemos que $f(U) \subset U$. Entonces aplicando el apartado i) de la Proposición 3.26 tenemos que $f_{|U^\perp}$ es un endomorfismo autoadjunto del espacio vectorial euclídeo $\left(U^\perp, g_{U^\perp}\right)$. Por la hipótesis de inducción tenemos $B_1 = \{v_2, \ldots, v_n\}$ base ortonormal de $\left(U^\perp, g_{U^\perp}\right)$ formada por vectores propios de $f_{|U^\perp}$. Observemos que entonces $B = \left\{\frac{v}{\|v\|}, v_2, \ldots, v_n\right\}$ es una base ortonormal de (V, g) formada por vectores propios de f. □

De este resultado obtendríamos el correspondiente resultado para matrices.

Corolario 3.31: *Toda matriz simétrica real es simultáneamente diagonalizable por semejanza y por congruencia.*

Demostración: Sea $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Consideremos $(\mathbb{R}^n, g_0)$ el espacio vectorial euclídeo dado por el producto escalar usual y $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ tal que $M(f, B_u) = A$. Como B_u es una base ortonormal de $(\mathbb{R}^n, g_0)$ y A es simétrica, del apartado v) del Teorema 3.24 tenemos que f es un endomorfismo autoadjunto respecto de g_0. Utilizando ahora el Teorema 3.30 obtenemos B una base ortonormal de $(\mathbb{R}^n, g_0)$ formada por vectores propios de f y por tanto $M(f, B) = D$ es una matriz diagonal. Teniendo en cuenta como se relacionan dos matrices de un endomorfismo en dos bases distintas obtenemos

$$D = M(f, B) = M(B, B_u)^{-1} \cdot M(f, B_u) \cdot M(B, B_u) = M(B, B_u)^{-1} \cdot A \cdot M(B, B_u)$$

Además la matriz $P = M(B, B_u)$ es una matriz ortogonal por la Conclusión 3.14. Por tanto

$$D = P^{-1} \cdot A \cdot P = P^t \cdot A \cdot P$$

Y así A es diagonalizable simultáneamente por semejanza y por congruencia. □