1) Sea X una variable aleatoria con función masa de probabilidad $P(X=i) = ki$; $i = 1, \ldots, 20$.

a) Determinar el valor de k, la función de distribución y las probabilidades:

$P(X=4)$, $P(X<4)$, $P(3 \leq X \leq 10)$, $P(3 < X \leq 10)$, $P(3<X<10)$.

Para calcular el valor "k", usaremos la definición de la función masa de probabilidad, sabiendo que:

$$\sum_{i=1}^{20} P[X = x_i] = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{20} P[X=x_i] = 1 \Leftrightarrow k \cdot \sum_{i=1}^{20} i = 1 \Leftrightarrow k \cdot 210 \Leftrightarrow k = \frac{1}{210}$$

Luego:

$$P(X=i) = \frac{1}{210} \cdot i, \ \forall i \in \{1, \ldots, 20\}$$

Procedamos a calcular las probabilidades:

$$P(X=4) = \frac{1}{210} \cdot 4 = \frac{2}{105} = 0{,}019$$

$$P(X<4) = \frac{1}{210} + \frac{2}{210} + \frac{3}{210} = \frac{6}{210} = \frac{1}{35} = 0{,}0286$$

$$P(3 \leq X \leq 10) = \frac{1}{210} \cdot \sum_{i=3}^{10} i = \frac{52}{210} = \frac{26}{105} = 0{,}2476$$

$$P(3 < X \leq 10) = \frac{1}{210} \cdot \sum_{i=4}^{10} i = \frac{49}{210} = \frac{7}{30} = 0{,}2333$$

$$P(3 < X < 10) = \frac{1}{210} \cdot \sum_{i=4}^{9} i = \frac{78}{210} = \frac{13}{35} = 0{,}3714$$

$\Rightarrow$ La función de distribución quedaría de la siguiente manera:

$$F_X(X) = F[X \leq x] = \sum_{i=1}^{x} \frac{i}{210}$$

b) Supongamos que un jugador gana 20 monedas si al observar esta variable obtiene un valor menor que 4, gana 24 monedas si obtiene el valor 4 y, en caso contrario, pierde una moneda. Calcular la ganancia esperada del jugador y decir si el juego le es favorable.

Primero debemos calcular las siguientes probabilidades:

$$P(X<4) = \frac{1}{35} = 0{,}0286 \quad ; \quad P(X=4) = \frac{2}{105} = 0{,}019$$

$$P(X \geq 5) = \frac{1}{210} \cdot \sum_{i=5}^{20} i = \frac{200}{210} = 0{,}9523.$$

Calculamos ahora la esperanza matemática de la variable aleatoria X:

$$E[X] = \sum_i x_i \cdot P[X=x_i] = \sum_{i=1}^{3} x_i \cdot P[X=x_i] = \frac{20}{35} + \frac{48}{105} - \frac{20}{21}$$

$$E[X] = \frac{8}{105}$$

Como $E[X] > 0$, el juego le es favorable, siempre que su apuesta inicial sea menor a 8/105.