CALCULO I

1^0 Grado Matemáticas, Curso 2014–2015 Primer cuatrimestre

I. Ejercicios (El cuerpo de los números reales. Supremo e ínfimo. Valor absoluto.)

1. Prueba las siguientes *leyes de cancelación*:

   a) $x, y, z \in \mathbb{R}\,,\ x + z = y + z \quad \Rightarrow \quad x = y$

   b) $x, y \in \mathbb{R}\,,\ z \in \mathbb{R}^*,\ xz = yz \quad \Rightarrow \quad x = y$

   Nótese que como consecuencia de los apartados anteriores se obtiene que el opuesto de un elemento y el inverso de un real no nulo es único.

2. Sean x, y, z números reales. Prueba las siguientes propiedades:

   a) $-(-x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

   b) $-(x + y) = -x - y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

   c) $x0 = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

   d) $x(-y) = -(xy) = (-x)y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

   e) $xy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ ó $y = 0$

   f) $x \in \mathbb{R}^+\,,\ y \in \mathbb{R}^- \quad \Rightarrow \quad xy \in \mathbb{R}^-$

   g) $0 < 1$

   h) $0 < x^2, \forall x \in \mathbb{R}^*$.

3. Probar que efectivamente $\leq$ es una relación de orden total en el conjunto $\mathbb{R}$ y que el orden es total.

4. Probar las siguientes afirmaciones:

   a) $x, y, z, w \in \mathbb{R}\,,\ x \leq y\,,\ z < w \quad \Rightarrow \quad x + z < y + w$

   b) $x, y, z, w \in \mathbb{R}\,,\ 0 < x \leq y\,,\ 0 < z < w \quad \Rightarrow \quad xz < yw$

   c) $x, y \in \mathbb{R}\,,\ x \leq y \quad \Rightarrow \quad -x \geq -y$

   d) $x, y \in \mathbb{R}\,,\ x < y \quad \Rightarrow \quad -x > -y$

   e) $x, y, z \in \mathbb{R}\,,\ x \leq y\,,\ z \leq 0 \quad \Rightarrow \quad xz \geq yz$

   f) $x, y \in \mathbb{R}\,,\ 0 < x \leq y \quad \Rightarrow \quad x^{-1} \geq y^{-1}$

   g) $x, y \in \mathbb{R}\,,\ 0 < x < y \quad \Rightarrow \quad y^{-1} < x^{-1}$

5. Para $x, y \in \mathbb{R}$, se define la *distancia* de x a y por:

   $$d(x, y) \;=\; |y - x|.$$

   Pruébense las siguientes propiedades de la distancia:

   a) $d(x, y) \geq 0 \ \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$

   b) $d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$ (no degeneración)

   c) $d(x, y) = d(y, x) \ \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$ (simetría)

   d) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \ \ \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$ (desigualdad triangular).

   De hecho, una función se llama distancia si verifica las propiedades anteriores.

6. Sea A un conjunto no vacío de números reales. En cada uno de los siguientes casos, decidir si el conjunto dado puede coincidir con el conjunto de todos los mayorantes de A:

$$a)\ \mathbb{R} \qquad b)\ \varnothing \qquad c)\ \mathbb{R}^+ \qquad d)\ \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\} \qquad e)\ \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x\}$$

7. Probar que el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 2x - 1| < 2|x-2|\}$ está acotado y calcular su supremo y su ínfimo.

8. Sean A y B conjuntos de números reales tales que $A \cap B \neq \emptyset$.

   (i) Mostrar con un ejemplo que $A \cap B$ puede estar acotado, aunque A y B no estén mayorados ni minorados.

   (ii) Suponiendo que A y B están mayorados, probar que
   $$\mathrm{Sup}\,(A \cap B) \ \leq\ \text{mín}\,\{\mathrm{Sup}\,A\,,\,\mathrm{Sup}\,B\}$$

   (iii) Probar que, si A y B están minorados, entonces
   $$\mathrm{Inf}\,(A \cap B) \ \geq\ \text{máx}\,\{\mathrm{Inf}\,A\,,\,\mathrm{Inf}\,B\}$$

   (iv) Probar que, aunque A y B estén acotados, las dos desigualdades obtenidas en (ii) y (iii) pueden ser estrictas.

9. Sean A y B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$. Pruébese que $A+B$ está mayorado si, y sólo si, A y B son conjuntos mayorados y que en ese caso se verifica

   $$\mathrm{Sup}\ A+B = \mathrm{Sup}\ A + \mathrm{Sup}\ B,$$

   donde
   $$A+B = \{a+b : a \in A, b \in B\}.$$

10. Sea A un conjunto no vacío y mayorado. Pruébese que $-A$ está minorado y que además se verifica

    $$-\mathrm{Sup}A = \mathrm{Inf}(-A),$$

    donde $-A = \{-a : a \in A\}$.
    Indicación: Relacionar $M(A)$ y $m(-A)$ y el mínimo de un conjunto B con el máximo de $-B$.

11. Sean $\emptyset \neq A \subset B \subset \mathbb{R}$.
    a) Si B está mayorado, pruébese que A también lo está y entonces $\mathrm{Sup}A \leq \mathrm{Sup}B$.
    b) Si B está minorado, pruébese que A también lo está y entonces $\mathrm{Inf}A \geq \mathrm{Inf}B$.
    Indicación: Relacionar $M(B)$ y $M(A)$ en a) y $m(B)$ con $m(A)$ para b).

12. Sean $\emptyset \neq A, B \subset \mathbb{R}$. Probar las siguientes afirmaciones:
    a) Si A y B están mayorados, $A \cup B$ también lo está y entonces $\mathrm{Sup}(A \cup B) = \text{máx}\{\mathrm{Sup}A, \mathrm{Sup}B\}$.
    b) Si ambos subconjuntos están minorados, $A \cup B$ también está minorado y se verifica $\mathrm{Inf}(A \cup B) = \text{mín}\{\mathrm{Inf}A, \mathrm{Inf}B\}$.

13. Sean $\emptyset \neq A, B \subset \mathbb{R}$ y supongamos que se verifica

    $$a \leq b, \quad \forall a \in A, b \in B.$$

    Probar que A está mayorado, B minorado y que se verifica $\mathrm{Sup}A \leq \mathrm{Inf}B$.

    Como consecuencia, si se supone la existencia de supremo de cualquier subconjunto no vacío y mayorado de $\mathbb{R}$, entonces se verifica el axioma de Dedekind.