

GEOMETRÍA I

(Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas)

Examen final (primera y segunda parte) 22/01/2018

1. Determinar si son verdaderos o falsos los siguientes asertos:

- a) Sea una matriz $A \in M_4(K)$ cuyas cuatro columnas, consideradas como un subconjunto C del e.v. $K^4(K)$, verifican: cualquier subconjunto de tres elementos de C es linealmente independiente. Entonces, C es linealmente independiente.
- b) Sean $S = \{u, v\}$, $S' = \{u', v'\}$ dos subconjuntos de un espacio vectorial $V(K)$ tales que:
- Cada subconjunto S y S' es linealmente independiente.
 - Ningún vector de S se puede escribir como combinación lineal de vectores de S' , ni ninguno de S' como combinación lineal de los de S .

Entonces, $S \cup S'$ es linealmente independiente.

2. Se considera, en el espacio de las matrices simétricas $S_2(\mathbb{R})$, los subespacios vectoriales:

$$U_\lambda = L \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ \lambda & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ -\lambda & 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad W_\lambda = L \left\{ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Calcular, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, la dimensión de $U_\lambda \cap W_\lambda$.

3. Se considera, en el espacio vectorial de matrices cuadradas $M_2(\mathbb{R})$, la aplicación lineal:

$$F : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R}), \quad F(A) = A - \frac{1}{2}A^t, \quad \forall A \in M_2(\mathbb{R}).$$

Determinar, en el caso de que sea posible (o, en caso contrario, justificar la imposibilidad):

- a) Dos bases, B y B' , de $M_2(\mathbb{R})$ tales que la matriz de F en esas bases sea diagonal y con todos sus elementos pertenecientes a $\{0, 1\}$.
- b) Una base B de $M_2(\mathbb{R})$ tal que la matriz de F en esa base sea diagonal con todos sus elementos pertenecientes a $\{0, 1\}$.

4. Se considera, en el espacio de polinomios $\mathbb{R}_3[x]$:

- Las formas lineales: $\phi(p(x)) = p(1)$, $\psi(p(x)) = p'(1) - p(0)$.
- El subespacio vectorial $U = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 : a_1 = 0, a_3 = -2a_2\}$

Determinar, calculando su matriz en la base usual de $\mathbb{R}_3[x]$, un endomorfismo f de $\mathbb{R}_3[x]$ cuyo traspuesto verifique: $\text{Nuc } f^t = L\{\phi, \psi\}$, $\text{Im } f^t = \text{an } U$.

Todos los ejercicios tienen la misma puntuación.

Duración: 3 horas.

1. Determinar si son verdaderos o falsos los siguientes asertos:

- a) Sea una matriz $A \in M_4(K)$ cuyas cuatro columnas, consideradas como un subconjunto C del e.v. $K^4(K)$, verifican: cualquier subconjunto de tres elementos de C es linealmente independiente. Entonces, C es linealmente independiente.
- b) Sean $S = \{u, v\}$, $S' = \{u', v'\}$ dos subconjuntos de un espacio vectorial $V(K)$ tales que:
- Cada subconjunto S y S' es linealmente independiente.
 - Ningún vector de S se puede escribir como combinación lineal de vectores de S' , ni ninguno de S' como combinación lineal de los de S .

Entonces, $S \cup S'$ es linealmente independiente.

Solución. a) Como consideraciones previas, el aserto sería claramente falso si, en lugar de considerar A como una matriz $n \times n$ con $n = 4$, se considerara cuadrada con $n = 2$ (pues si se toma como C un conjunto de dos vectores linealmente dependientes no nulos de $K^2(K)$, p. ej., $C = \{(1, 0), (2, 0)\}$, cada subconjunto de C con un elemento es linealmente independiente) o con $n = 3$ (si se toma como C el conjunto de tres vectores coplanarios linealmente independientes dos a dos, p. ej., $C = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0)\}$, cada subconjunto de C con dos elementos es linealmente independiente). No hay pues motivos para pensar que, para $n = 4$ esta afirmación vaya a ser cierta. Más aún, el procedimiento general de cálculo del rango usando determinantes aplicado a la matriz A del enunciado, aseguraría sólo que el rango de A es tres (al haber menores no nulos de orden tres): para asegurar que sea cuatro, exigiría comprobar que un menor de orden cuatro (en este caso, el determinante de toda la matriz) sea no nulo.

Un contraejemplo inspirado en la discusión anterior sería tomar C como un conjunto de 4 vectores contenidos en un mismo subespacio $U \subset K^4$ de modo que cada tres de sus elementos formen una base de U . P. ej, se puede escoger que tres vectores de C sean $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$, los cuales forman una base del subespacio $U := \mathbb{R}^3 \times \{0\}$, y como cuarto vector $(1, 1, 1, 0)$, el cual también está contenido en U y puede reemplazarse por cualquiera de los anteriores para formar una base de U (pues al escribir $(1, 1, 1, 0)$ como combinación lineal de la base $((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0))$ ninguna de sus coordenadas es nula). Esto es, escribiéndolos por columnas, la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

resulta ser un contraejemplo, por lo que el aserto (a) es FALSO.

b) No es difícil darse cuenta de que, si esta afirmación fuera cierta, entonces la anterior también lo sería (lo que resultaría absurdo). De hecho, el contraejemplo encontrado en el caso anterior también vale para éste: simplemente, tómese como S dos cualesquiera de los cuatro vectores en el caso anterior, y como S' los otros dos. Por tanto, el aserto (b) también es FALSO.

En cualquier caso, no es difícil construir directamente otros contraejemplos en dimensión 3. Así, en \mathbb{R}^3 , puede tomarse $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$, $S' = \{(1, 1, 1), (-1, -1, 1)\}$ (¡dibújese!). Por supuesto, si a uno se le ocurre primero un contraejemplo como éste, de él se obtiene un contraejemplo al apartado a) sin más que incluir 0 como última componente de \mathbb{R}^4 .

2. Se considera, en el espacio de las matrices simétricas $S_2(\mathbb{R})$, los subespacios vectoriales:

$$U_\lambda = L \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ \lambda & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ -\lambda & 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad W_\lambda = L \left\{ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Calcular, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, la dimensión de $U_\lambda \cap W_\lambda$.

Solución. Hay dos procedimientos generales y naturales para resolver este problema:

1. Hallar unas ecuaciones implícitas para U_λ y para W_λ con respecto a alguna base del espacio $S_2(\mathbb{R})$ (el cual tiene dimensión 3).

Juntando todas estas ecuaciones, se obtiene un SEL cuya solución proporciona $U_\lambda \cap W_\lambda$.

Extrayendo de él un SEL equivalente de ecuaciones independientes, se obtiene para cada λ un conjunto de¹ $m(\lambda) \in \{0, 1, 2, 3\}$ ecuaciones implícitas para $U_\lambda \cap W_\lambda$.

Así, la dimensión pedida será $3 - m(\lambda)$.

Si se quiere, se puede además calcular una base de este subespacio, sin más que solucionar el SEL obtenido.

2. Calcular las dimensiones de U_λ , W_λ y $U_\lambda + W_\lambda$, y aplicar entonces la fórmula de Grassmann: $\dim U_\lambda \cap W_\lambda = \dim U_\lambda + \dim W_\lambda - \dim (U_\lambda + W_\lambda)$.

El cálculo de las dimensiones requeridas es sencillo, pues se nos proporciona un sistema de generadores de U_λ , uno de W_λ y, uniendo ambos sistemas, uno también de $U_\lambda + W_\lambda$.

En consecuencia, por este procedimiento, todo el problema reside en calcular la dimensión de tres subespacios, U_λ , W_λ y $U_\lambda + W_\lambda$, de cada uno de los cuales se conoce un sistema de generadores, lo cual se reduce a calcular el rango de tres matrices.

Es de remarcar que por este procedimiento, que es más sencillo, obtendríamos sólo la dimensión de $U_\lambda \cap W_\lambda$ (a fin de cuentas, lo que se pide) pero no una base suya.

Pese a ser un poco más largo, seguiremos el primer procedimiento y, aunque no lo pida el enunciado, calcularemos además una base de la intersección.²

Fijando la base usual $B_u = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ de $S_2(\mathbb{R})$, trabajaremos a continuación reemplazando $S_2(\mathbb{R})$ por \mathbb{R}^3 , entendiendo que cada matriz de $S_2(\mathbb{R})$ se reemplaza por sus coordenadas en B_u . Se tiene entonces:

- Sistema de generadores de U_λ : $\{(\lambda, \lambda, -1), (0, -\lambda, 2)\}$.

Dimensión de $U_\lambda = \text{rango} \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & -1 \\ 0 & -\lambda & 2 \end{pmatrix}$, por Gauss-Jordan:

- para $\lambda \neq 0$, el rango de la matriz es 2, por lo que el sistema de generadores anterior es una base, que denotaremos B_{U_λ} , para todo $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
- para $\lambda = 0$, el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es 1, por lo que cualquiera resulta ser una base $B_{U_0} = \{(0, 0, 1)\}$.

- Sistema de generadores de W_λ : $\{(2, -2, \lambda), (3, 1, -3)\}$.

Dimensión de $W_\lambda = \text{rango} \begin{pmatrix} 2 & -2 & \lambda \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Puesto que el menor $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$:

¹Del enunciado es fácil darse cuenta de que $m(\lambda) \neq 0$ (¿por qué?).

²El lector puede desarrollar el Procedimiento 2, comprobando con facilidad: $\dim U_\lambda = 2$ si $\lambda \neq 0$, $\dim U_\lambda = 1$ si $\lambda = 0$ y, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\dim W_\lambda = 2$, $\dim(U_\lambda + W_\lambda) = 3$.

- para todo λ , el rango de la matriz es 2, por lo que el sistema de generadores anterior es una base, que denotaremos B_{W_λ} , para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

El caso $\lambda = 0$ resulta inmediato de resolver, pues el único vector $(0, 0, 1)$ de B_{U_0} no puede escribirse como combinación lineal de B_{W_0} , ya que $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$. Esto implica que la dimensión de la intersección es menor que 1, esto es, su dimensión es 0 ($U_0 \cap W_0 = \{0\}$).

Consideraremos en adelante el caso $\lambda \neq 0$. Siguiendo el procedimiento antes indicado, calculamos ecuaciones implícitas de U_λ y W_λ . Puesto que estos espacios tienen dimensión 2, habrá una única ecuación implícita para cada uno de ellos, que se obtiene de manera canónica (imponiendo que las incógnitas (x, y, z) sean combinación lineal de la base $B_{U_\lambda}, B_{W_\lambda}$ que se tiene de cada subespacio³):

$$\blacksquare \text{ Ecuación implícita para } U_\lambda: 0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ \lambda & \lambda & -1 \\ 0 & -\lambda & 2 \end{vmatrix} = \lambda x - 2\lambda y - \lambda^2 z.$$

O equivalentemente (simplificando al ser $\lambda \neq 0$): $x - 2y - \lambda z = 0$

$$\blacksquare \text{ Ecuación implícita para } W_\lambda: 0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & -2 & \lambda \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (6 - \lambda)x + (6 + 3\lambda)y + 8z.$$

Así, $U_\lambda \cap W_\lambda$ está determinado por el subespacio solución del sistema:

$$\begin{cases} x & -2y & -\lambda z & = & 0 \\ (6 - \lambda)x & +(6 + 3\lambda)y & +8z & = & 0 \end{cases} \quad (1)$$

Para comprobar si estas ecuaciones son independientes, debemos calcular el rango de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -\lambda \\ 6 - \lambda & 6 + 3\lambda & 8 \end{pmatrix}$$

El rango de esta matriz es al menos 1, y su rango será 1 si y sólo si se cumplen simultáneamente⁴:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 6 - \lambda & 6 + 3\lambda \end{vmatrix} = 6 + 3\lambda + 12 - 2\lambda = \lambda + 18, \quad 0 = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 6 - \lambda & 8 \end{vmatrix} \quad (2)$$

De la primera ecuación se obtiene $\lambda = -18$. Como este valor no es solución de la segunda, el rango de la matriz es siempre 2. Por tanto, $\dim(U_\lambda \cap W_\lambda) = 3 - 2 = 1$. En resumen:

$$\dim(U_\lambda \cap W_\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda = 0 \\ 1 & \text{si } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{cases}$$

³Y, por comodidad de cálculo, desarrollando cada determinante por los adjuntos de la línea donde aparecen x, y, z .

⁴Los determinantes a continuación se obtienen orlando el elemento no nulo 1 con elementos de la segunda fila (y las otras columnas)

RESULTADO ADICIONAL: base de $U_\lambda \cap W_\lambda$

Como se ha dicho, podemos también calcular una base de la intersección $U_\lambda \cap W_\lambda$.

En el caso $\lambda = 0$ se ha visto que la intersección es $\{0\}$, por lo que la única base de este subespacio es el conjunto vacío⁵:

$$B_{U_\lambda \cap W_\lambda} = \emptyset, \quad \text{para } \lambda = 0.$$

Para el caso $\lambda \neq 0$ la base se obtendrá resolviendo el sistema (1) por el método de Cramer. Teniendo en cuenta la primera igualdad en (2), para $\lambda \neq -18$ se pueden tomar x, y como incógnitas principales⁶; y la regla de Crámer genera:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \lambda z & -2 \\ -8z & 6+3\lambda \end{vmatrix}}{\lambda+18} = \frac{3\lambda^2+6\lambda-16}{\lambda+18}z, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \lambda z \\ 6-\lambda & -8z \end{vmatrix}}{\lambda+18} = \frac{\lambda^2-6\lambda-8}{\lambda+18}z$$

Tomando $z = \lambda + 18$ se obtiene como base:

$$B_{U_\lambda \cap W_\lambda} = \{(3\lambda^2+6\lambda-16, \lambda^2-6\lambda-8, \lambda+18)\} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, -18\}$$

Para $\lambda = -18$ el valor concreto del segundo menor en (2) es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 18 \\ 24 & 8 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 1 & 18 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -8 \cdot 53 = -424.$$

Tomando x, z como incógnitas principales en (1), la regla de Cramer genera la solución:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2y & -\lambda \\ -(6+3\lambda)y & 8 \end{vmatrix}}{-424} = \frac{3\lambda^2+6\lambda-16}{424}y, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2y \\ 6-\lambda & -(6+3\lambda)y \end{vmatrix}}{-424}y = \frac{\lambda+18}{424}y$$

que debe evaluarse en $\lambda = -18$, obteniéndose $x = 200y/424 = 25y/53$, $z = 0$. Tomando $y = 53$ se obtiene como base:

$$B_{U_\lambda \cap W_\lambda} = \{(25, 53, 0)\} \quad \text{para } \lambda = -18.$$

⁵Este es un convenio justificado en la teoría.

⁶Y pasando los términos en z al otro miembro, de modo que esta incógnita se trata como un término independiente.

3. Se considera, en el espacio vectorial de matrices cuadradas $M_2(\mathbb{R})$, la aplicación lineal:

$$F : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R}), \quad F(A) = A - \frac{1}{2}A^t, \quad \forall A \in M_2(\mathbb{R}).$$

Determinar, en el caso de que sea posible (o, en caso contrario, justificar la imposibilidad):

- Dos bases, B y B' , de $M_2(\mathbb{R})$ tales que la matriz de F en esas bases sea diagonal y con todos sus elementos pertenecientes a $\{0, 1\}$.
- Una base B de $M_2(\mathbb{R})$ tal que la matriz de F en esa base sea diagonal con todos sus elementos pertenecientes a $\{0, 1\}$.

Solución. a) Se sabe del estudio del rango y matrices equivalentes en teoría (Proposición 3.67) que tales bases B , B' deben existir⁷. Para construir B tomaremos una base del núcleo de F , y la ampliamos hasta una de $M_2(\mathbb{R})$.

Cálculo del núcleo de F y de B . Para cada $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ se tiene:

$$F(A) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a & b - \frac{1}{2}c \\ c - \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

Por lo que $F(A) = 0$ si y sólo si $a = 0$, $c = 2b$, $b = 2c$, $d = 0$, esto es, si y sólo si $A = 0$. Por tanto, $\text{Nuc } F = \{0\}$ (su base sería el conjunto vacío) y podemos tomar como B cualquier base de $M_2(\mathbb{R})$. Por sencillez, la escogemos igual a la base usual, esto es:

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Cálculo de B' . En general, B' se calcula tomando las imágenes de los vectores de B que no están en el $\text{Nuc } F$ (necesariamente, esas imágenes forman un conjunto linealmente independiente), y ampliando ese conjunto de imágenes hasta una base del codominio. En nuestro caso, B no contiene ningún vector de $\text{Nuc } F$ (pues se demostró $\text{Nuc } F = \{0\}$), por lo que basta con tomar como B' las imágenes de los vectores de B , esto es:

$$B' = \left(F\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right), F\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right), F\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right), F\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \right)$$

Explícitamente:

$$B' = \left(\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \right)$$

De hecho, es inmediato comprobar:

$$M(F, B' \leftarrow B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(igual a la matriz identidad I_4), la cual es de la forma que se pedía.

⁷De hecho, el resultado general incluye el caso de aplicaciones lineales entre espacios vectoriales distintos.

b) La base B pedida en este caso NO existe.

De hecho, si tal base existiese, se tendría necesariamente $M(F, B) = I_4$, ya que el rango de esa matriz, por coincidir con el de F , tendría que ser 4, lo que no permitiría que hubiera ningún elemento nulo en la diagonal.

Sin embargo, la igualdad $M(F, B) = I_4$ forzaría a que F sea la aplicación identidad (pues cada elemento de la base B se aplicaría mediante F en sí mismo), lo que es absurdo.⁸

⁸Se puede también descartar la existencia de la base B usando directamente un resultado sobre matrices semejantes visto en clase (Ejercicio 3.38): un endomorfismo f admite una base B tal que $M(f, B)$ es de la forma explicada en el enunciado b) si y sólo si $f \circ f = f$ (f es un *proyector*). Como claramente el endomorfismo F no verifica esta relación, tal base no existe.

4. Se considera, en el espacio de polinomios $\mathbb{R}_3[x]$:

- Las formas lineales: $\phi(p(x)) = p(1), \psi(p(x)) = p'(1) - p(0)$.
- El subespacio vectorial $U = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 : a_1 = 0, a_3 = -2a_2\}$

Determinar, calculando su matriz en la base usual de $\mathbb{R}_3[x]$, un endomorfismo f de $\mathbb{R}_3[x]$ cuyo traspuesto verifique: $\text{Nuc } f^t = L\{\phi, \psi\}$, $\text{Im } f^t = \text{an } U$.

Solución. De entre los procedimientos de resolver el problema, señalamos:

1. Hallar directamente el endomorfismo f^t usando las condiciones requeridas (las cuales se enuncian sólo sobre f^t). Una vez calculada su matriz en la base dual de la usual de $\mathbb{R}_3[x]$, basta con trasponerla para calcular la de f .
2. Determinar condiciones sobre f que sean equivalentes a las que se imponen sobre f^t , y calcular f de modo que verifique estas condiciones. Para ello se usan relaciones conocidas vistas en teoría, concretamente:
 - Como $\text{an}(\text{Im } f) = \text{Nuc } f^t$ se tiene $\text{Im } f = \text{an}(\text{Nuc } f^t)$. Por tanto, la primera condición sobre f^t , $\text{Nuc } f^t = L\{\phi, \psi\}$, resulta equivalente a la condición sobre f :
 $\text{Im } f = \text{an}(\text{Nuc } f^t) = \text{an}(\{\phi, \psi\})$, esto es, $\boxed{\text{Im } f = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] : p(1) = 0, p'(1) - p(0) = 0\}}$
 - Como $\text{an}(\text{Nuc } f) = \text{Im } f^t$ se tiene $\text{Nuc } f = \text{an}(\text{Im } f^t)$. Por tanto, la segunda condición sobre f^t , $\text{Im } f^t = \text{an } (U)$, resulta equivalente a la condición sobre f : $\boxed{\text{Nuc } f = U}$.

Esto es, el problema resulta ser equivalente a obtener un endomorfismo f de $\mathbb{R}_3[x]$ que verifique las dos relaciones recuadradas.

A continuación, seguiremos el procedimiento directo⁹ 1.

Sea $B_u = (1, x, x^2, x^3)$ la base usual de $\mathbb{R}_3[x]$ y $B_u^* = (\phi^1, \phi^2, \phi^3, \phi^4)$ su dual. Obsérvese que U se define como solución de un sistema de dos ecuaciones lineales independientes, o, equivalentemente, como el anulador de las formas lineales asociadas al sistema:

$$U = \text{an}\{\phi^2, 2\phi^3 + \phi^4\}.$$

Así, la segunda condición sobre f^t equivale a:

$$\text{Im } f^t = L\{\phi^2, 2\phi^3 + \phi^4\}$$

(recuérdese $\text{an}(\text{an}(S)) = L(S)$ para cualquier subconjunto S de un espacio vectorial o de su dual). Con respecto a $\text{Nuc } f^t$, $\{\phi, \psi\}$ es linealmente independiente; de hecho, las coordenadas de ϕ, ψ en B_u (esto es, las n-úplas horizontales de sus coordenadas en B_u^*) son:

$$M(\phi, 1 \leftarrow B_u) = (1, 1, 1, 1), \quad M(\psi, 1 \leftarrow B_u) = (-1, 1, 2, 3).$$

Para calcular f^t , determinemos primero una base B^* de $\mathbb{R}_3[x]^*$ que amplíe a $\{\phi, \psi\}$. Una elección sencilla consiste en ampliar con elementos de B_u^* , por ejemplo: $B^* = (\phi, \psi, \phi^3, \phi^4)$. Esto es posible puesto que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

⁹Los pasos en el procedimiento 2 son similares. La única ventaja para algunos es que al resolverlo ya no hay que hacer ninguna referencia al espacio dual.

Basta entonces con tomar f^t imponiendo que se anule sobre los dos primeros vectores de B^* y que aplique los dos últimos en la base $\{\phi^2, 2\phi^3 + \phi^4\}$ de $\text{Im } f^t$, esto es:

$$M(f^t, B_u^* \leftarrow B^*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculemos ahora $M(f^t, B_u^*)$ mediante la relación:

$$M(f^t, B_u^*) = M(f^t, B_u^* \leftarrow B^*) \cdot M(I, B^* \leftarrow B_u^*). \quad (3)$$

Para calcular $M(I, B^* \leftarrow B_u^*)$, basta con hallar la inversa de $M(I, B_u^* \leftarrow B^*)$ (esta última se calcula inmediatamente):

$$M(I, B_u^* \leftarrow B^*) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad M(I, B^* \leftarrow B_u^*) = M(I, B_u^* \leftarrow B^*)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

donde la inversa se obtiene o bien por el algoritmo de su cálculo usando adjuntos¹⁰ o bien por Gauss-Jordan. Sustituyendo en (3):

$$M(f^t, B_u^*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 4 & -8 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz pedida de f no es más que la traspuesta de la anterior, esto es:

$$M(f, B_u) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -8 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

¹⁰Este algoritmo se simplifica porque, como se trabaja con una matriz del tipo $\begin{pmatrix} E & 0 \\ F & I_2 \end{pmatrix}$ su inversa es del tipo $\begin{pmatrix} E^{-1} & 0 \\ F' & I_2 \end{pmatrix}$