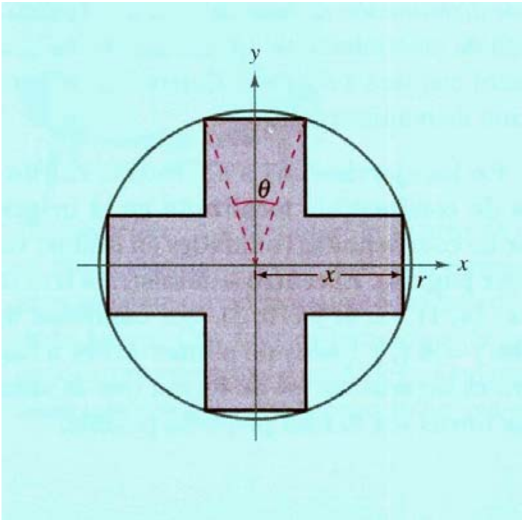
CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Primer Examen Parcial. 19 de Enero de 2006

Ejercicio 1. Determinar el área máxima de una cruz simétrica inscrita en un círculo de radio r (ver la figura).



Solución: Elegimos como variable el ángulo $\theta \in (0, \pi/2)$ y obtenemos

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{a/2}{r} \Longrightarrow a = 2r \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right),$$
$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{b}{r} \Longrightarrow b = r\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Entonces, el área de la cruz simétrica es la suma de las áreas de dos rectángulos de dimensiones a y $2b$, menos el área de un cuadrado de lado a. Es decir, la función objetivo es

$$\begin{aligned} A(\theta) &= 4ab - a^2 = 8r^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - 4r^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ &= 4r^2\left(\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = 4r^2\left(\operatorname{sen}\theta - \frac{1-\cos\theta}{2}\right) \\ &= 2r^2\left(2\operatorname{sen}\theta + \cos\theta - 1\right), \end{aligned}$$

donde $\theta \in (0, \pi/2)$. Para obtener los puntos críticos, resolvemos la ecuación

$$A'(\theta) = 2r^2\left(2\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\right) = 0.$$

Dado que $r > 0$ y $\theta \in (0, \pi/2)$, la única solución de esta ecuación es el punto crítico θ^* tal que

$$\operatorname{sen}\theta^* = 2\cos\theta^* \Longleftrightarrow \theta^* = \arctan 2.$$

Si $\theta \in (0, \arctan 2)$ entonces $0 < \tan\theta < 2$, luego $\operatorname{sen}\theta < 2\cos\theta$, lo que implica $A'(\theta) > 0$. Además, si $\theta \in (\arctan 2, \pi/2)$ entonces $A'(\theta) < 0$. Entonces, el área máxima se obtiene en el ángulo $\theta^* = \arctan 2$. Para calcular dicha área, observamos que

$$\operatorname{sen}\theta^* = 2\cos\theta^* \Longrightarrow \operatorname{sen}^2\theta^* = 4\left(1 - \operatorname{sen}^2\theta^*\right) \Longrightarrow 5\operatorname{sen}^2\theta^* = 4 \Longrightarrow \operatorname{sen}\theta^* = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

porque $\theta^* \in (0, \pi/2)$. En consecuencia, $\cos\theta^* = 1/\sqrt{5}$ y el área máxima es

$$A(\theta^*) = 2r^2\left(\frac{5}{\sqrt{5}} - 1\right) = 2r^2\left(\sqrt{5} - 1\right).$$

Ejercicio 2. Una esfera de radio r se corta por un plano formando un casquete esférico de altura h. Calcular el volumen y la superficie (incluyendo la base) de este sólido de revolución.

Solución: El casquete esférico de altura h se obtiene girando alrededor del eje y la región acotada por las gráficas de

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad x = 0, \quad y = r - h, \;\; 0 \leq h \leq 2r.$$

El volumen, usando el método de los discos, es

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{r-h}^{r} [x\,(y)]^2 \; dy = \pi \int_{r-h}^{r} \left(r^2 - y^2\right) \, dy = \pi \left[r^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_{r-h}^{r} \\ &= \pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} - r^2 \,(r-h) + \frac{(r-h)^3}{3} \right) \\ &= \pi \left(\frac{2r^3}{3} - r^3 + r^2 h + \frac{r^3}{3} - r^2 h + r h^2 - \frac{h^3}{3} \right) \\ &= \pi \left(r h^2 - \frac{h^3}{3} \right) = \frac{1}{3} \pi h^2 \,(3r - h)\,. \end{aligned}$$

Calculamos la superficie $S = S_1 + S_2$, donde S_1 es el área de la pared esférica y S_2 es el área de la base contenida en el plano de corte. La primera superficie verifica que

$$S_1 = 2\pi \int_{r-h}^{r} x \sqrt{1 + (x')^2} \, dy.$$

Sabemos que $x = \sqrt{r^2 - y^2}$. Derivando la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ respecto a y, obtenemos $2xx' + 2y = 0$, luego $x' = -\,y/\,x$. Entonces,

$$1 + \left(x'\right)^2 = 1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2} = \frac{r^2}{r^2 - y^2}.$$

Por tanto,

$$S_1 = 2\pi \int_{r-h}^{r} \sqrt{r^2 - y^2} \frac{r}{\sqrt{r^2 - y^2}} \, dy = 2\pi r \int_{r-h}^{r} dy = 2\pi r h.$$

La base del sólido es un círculo cuyo radio es la coordenada $x > 0$ de la intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ con la recta $y = r - h$, luego $x^2 = r^2 - (r-h)^2 = 2rh - h^2$. Entonces, $S_2 = \pi \left(2rh - h^2\right)$ y el área total es

$$S = 4\pi r h - \pi h^2 = \pi h \,(4r - h)\,.$$

Ejercicio 3.

(a) Supongamos que las series de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ son convergentes. Estudiar el carácter de las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{1+a_n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a_n},$$

razonando las respuestas.

(b) Dada la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+2)},$$

calcular su radio de convergencia, el carácter de la serie en los extremos del intervalo de convergencia y su suma.

Solución: (a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente porque es la diferencia de dos series convergentes. Para cada entero $n \geq 1$, tenemos que

$$\frac{a_n^2}{1+a_n} < a_n,$$

porque $a_n > 0$, luego usando el criterio de comparación, deducimos que la segunda serie también es convergente. Para analizar el carácter de la tercera serie, usaremos la condición necesaria de convergencia de una serie. Observemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+a_n} = \frac{1}{1+\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = 1,$$

porque $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. En consecuencia, la tercera serie es divergente.

(b) El radio de convergencia de la serie de potencias es

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{(n+2)(n+3)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)}{(n+1)} = 1,$$

por lo que la serie es absolutamente convergente en el intervalo $(-1, 1)$. En el extremo $x = -1$, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}$$

es alternada y la sucesión $\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)_{n\geq 1}$ es decreciente con límite cero, por lo que el criterio de Leibniz asegura la convergencia. En el extremo $x = 1$, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

tiene el mismo carácter que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, por lo que también es convergente. Por tanto, el dominio de convergencia es $[-1,1]$.

Para calcular la suma de la serie de potencias, sabemos que la suma de la serie geométrica es

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}, \quad -1 < t < 1.$$

Si $x \in (-1,1)$, integrando en el intervalo $[0,x]$, obtenemos

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x t^n \, dt \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t} \, dt = -\ln(1-x).$$

En consecuencia, para todo $x \in (-1,1)$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x).$$

Si $x \in (-1,1)$, integrando en el intervalo $[0,x]$, obtenemos

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} = -\int_0^x \ln(1-t) \, dt.$$

A continuación y usando integración por partes, calculamos

$$\begin{aligned}
-\int_0^x \ln(1-t) \, dt &= -\left[t \ln(1-t)\right]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1-t} \, dt \\
&= -x \ln(1-x) - \int_0^x \left(\frac{1}{1-t} - 1 \right) dt \\
&= -x \ln(1-x) + \ln(1-x) + x \\
&= x + (1-x)\ln(1-x).
\end{aligned}$$

Así, para todo $x \in (-1,1)$, queda demostrado que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} = x + (1-x)\ln(1-x).$$

Si $x \neq 0$, dividimos por x^2 y la suma de la serie de potencias es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{x} + \frac{(1-x)\ln(1-x)}{x^2}.$$

En el caso $x = 0$, se obtiene directamente que la suma es $1/2$.