Incertidumbre 2: Lógica difusa

Juan Luis Castro

Lógica difusa

- Mediados de los 60 (Zadeh)
- Ser humano se expresa y razona comúnmente con términos vagos en lugar de precisos (fiebre alta, persona delgada, velocidad muy alta,…)
- Representa numéricamente términos vagos utilizando lógica multivaluada en [0,1]

grado_de_verdad(“fiebre alta”) ϵ [0,1]

- Las proposiciones se interpretan y representan como restricciones de los valores que puede tomar una variable

Interpretación de proposiciones lingüísticas

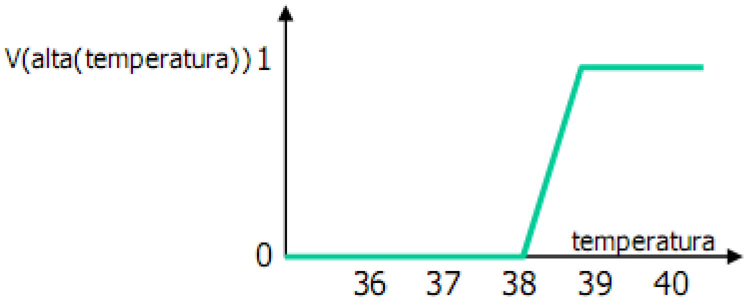
¿Cómo representar la afirmación “La temperatura del enfermo es alta”?

- Lógica Clásica: La temperatura del enfermo es > 38,5

  ¡Pero si un enfermo tiene 38,4, entonces será absolutamente falsa!

- Lógica difusa: La temperatura del enfermo es ALTA,
  - ALTA es una función que indica el grado de verdad en [0,1] según el valor de Temperatura

$$V(\text{alta}(\text{temperatura})) = \begin{cases} 0 & \text{temperatura} < 38 \\ \text{temperatura} - 38 & 38 \leq \text{temperatura} \leq 39 \\ 1 & \text{temperatura} > 39 \end{cases}$$



Grados de verdad del predicado alta(temperatura)

Proposiciones simples

- Un proposición simple P será de la forma “X es A”
  - X es una variable
  - A es una etiqueta lingüística, que se interpreta como una función

    A: Dominio(X) → [0,1]

- Cuando X=x, el grado de verdad V(P) = A(x)

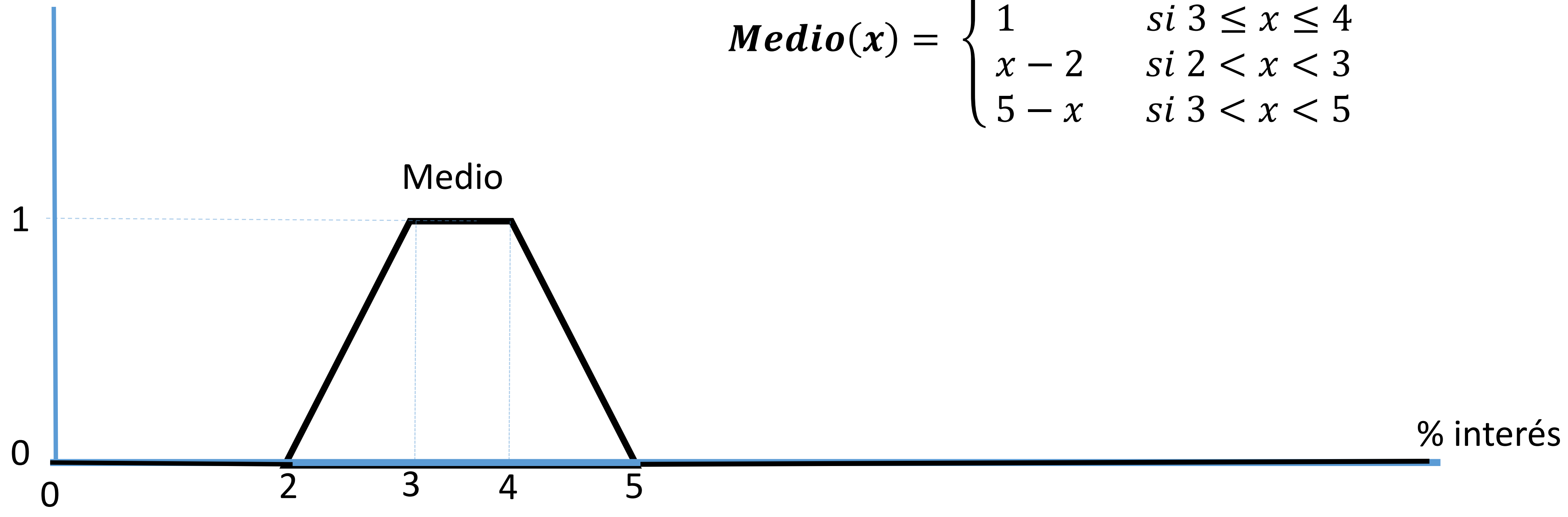
  Así $V(P) \in [0,1]$

- P se interpreta como una restricción graduada al conjunto de valores que puede tomar X: Si A(x) = 0, X no podrá tomar el valor x, si A(x) >0, puede tomarlo, pero cuanto mayor sea A(x) es más posible que tome ese valor

Valor impreciso de atributo → Conjunto difuso

<u>% de interés es Medio</u>

$$\boldsymbol{Medio(x)} = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 2\ ó\ x \geq 5 \\ 1 & si\ 3 \leq x \leq 4 \\ x-2 & si\ 2 < x < 3 \\ 5-x & si\ 3 < x < 5 \end{cases}$$

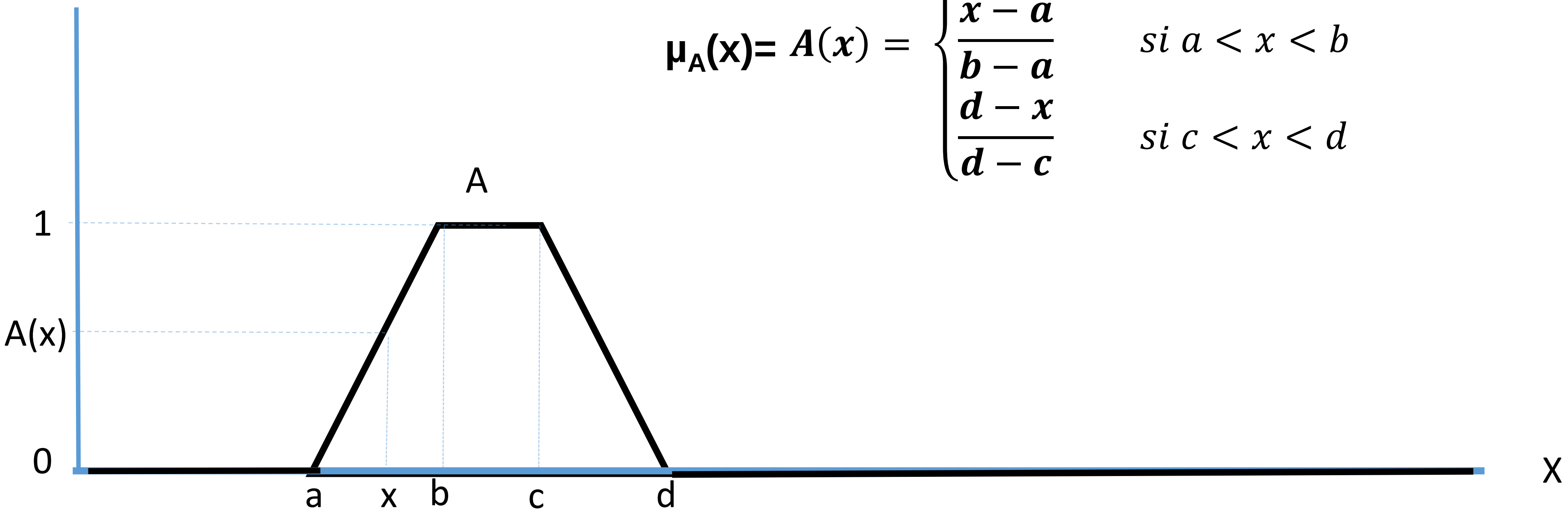


Subconjunto difuso de un conjunto D

A: D → [0,1]

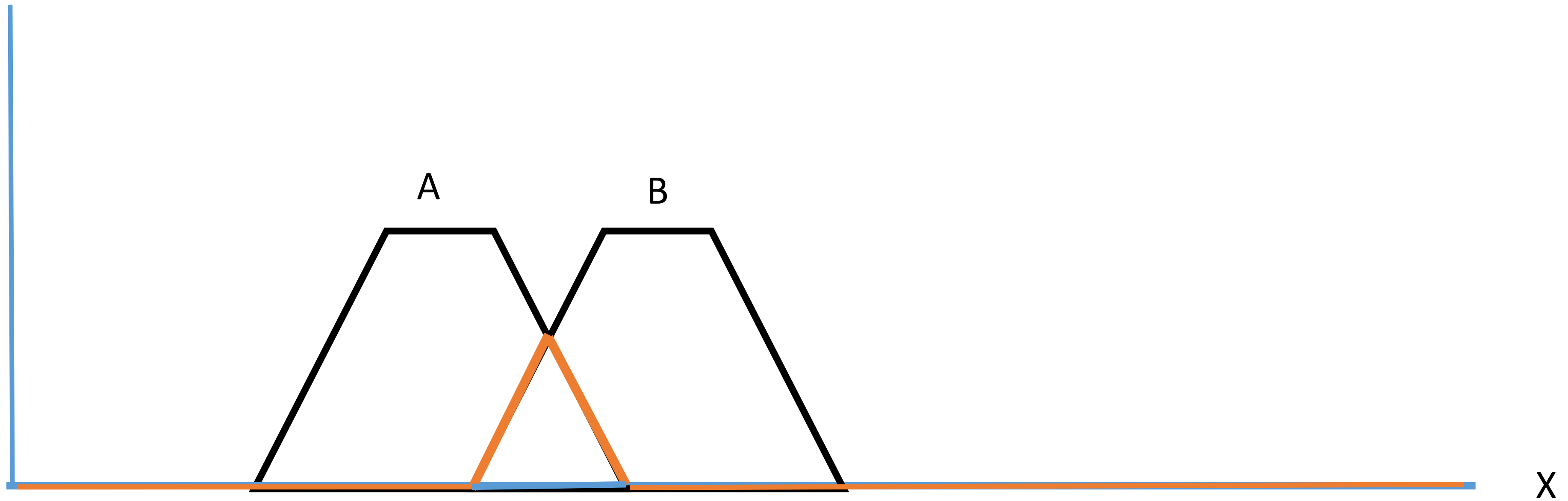
A(x)="grado en que x pertenece a A"

$$\mu_A(x) = A(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq a\ ó\ x \geq d \\ 1 & si\ b \leq x \leq c \\ \dfrac{x-a}{b-a} & si\ a < x < b \\ \dfrac{d-x}{d-c} & si\ c < x < d \end{cases}$$



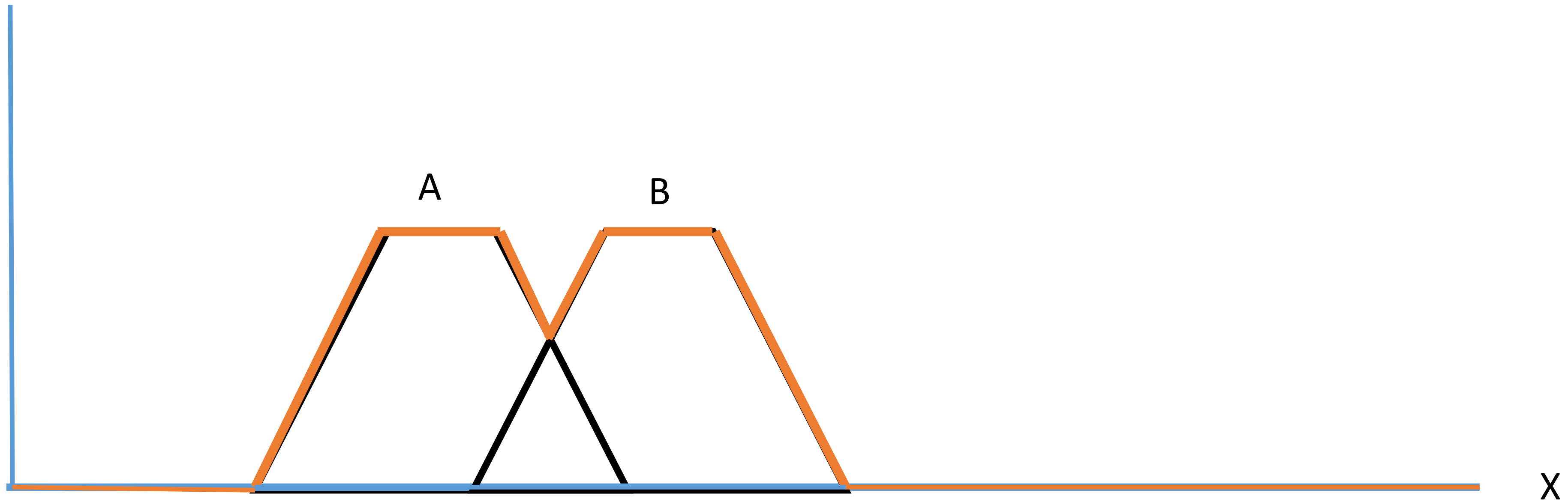
Operaciones con subconjuntos difusos

- Intersección: A∩B   (A∩B)(x)=Min(A(x),B(x))



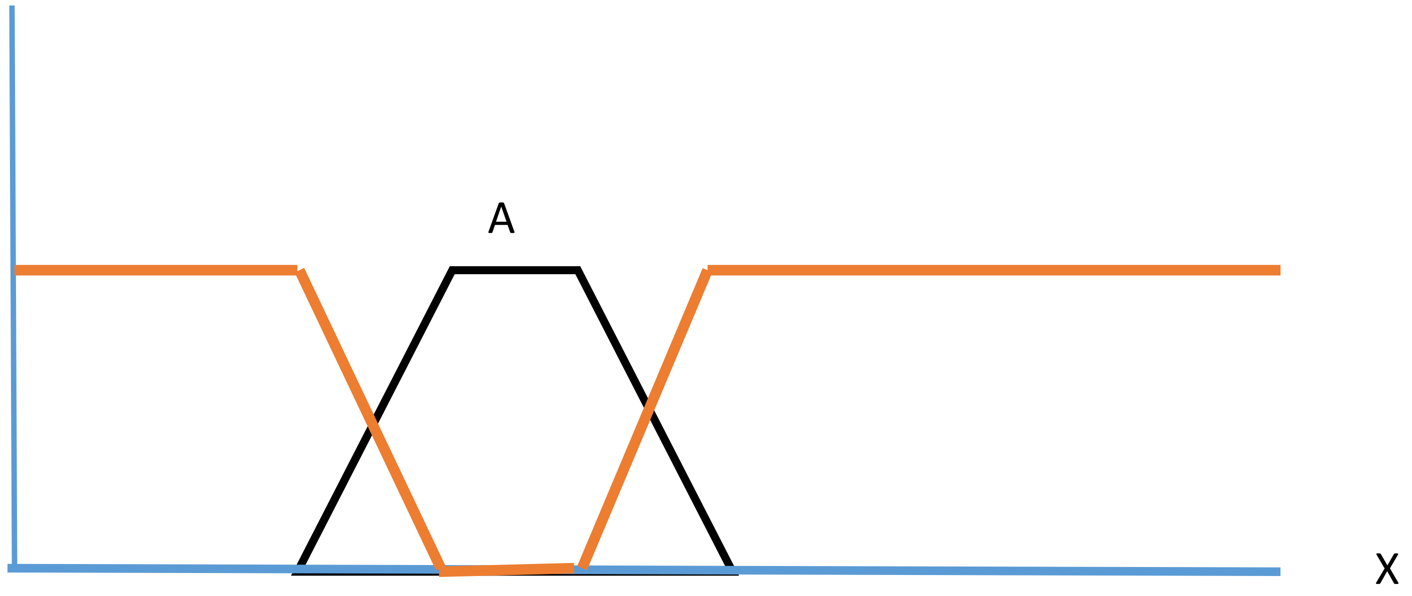
Operaciones con subconjuntos difusos

- Unión: AUB   (AUB)(x)=Max(A(x),B(x))



Operaciones con subconjuntos difusos

- Complemento: D-A   (D-A)(x)=1-A(x)



Proposiciones Compuestas

El valor de verdad de proposiciones compuestas se calcula a partir del valor de verdad de las proposiciones que se combina (como en Lógica clásica):

- $V(P \text{ y } Q) = \text{Min}(V(P),V(Q))$
- $V(P \text{ o } Q) = \text{Max}(V(P),V(Q))$
- $V(\text{no } P) = 1 – V(P)$
- $V(P \rightarrow Q) = \text{Min}(1,1-V(P)+V(Q))$

No se verifican:

- Principio de no contradicción: Puede ocurrir $V(P \text{ y no } P) \neq \mathbf{0}$
- Principio del tercero excluido: Puede ocurrir $V(P \text{ o no } P) \neq \mathbf{1}$

Se verifica:

- Principio de no contradicción difuso: $V(P \text{ y no } P) \leq \mathbf{1/2}$
- Principio del tercero excluido difuso: $V(P \text{ o no } P) \geq \mathbf{1/2}$

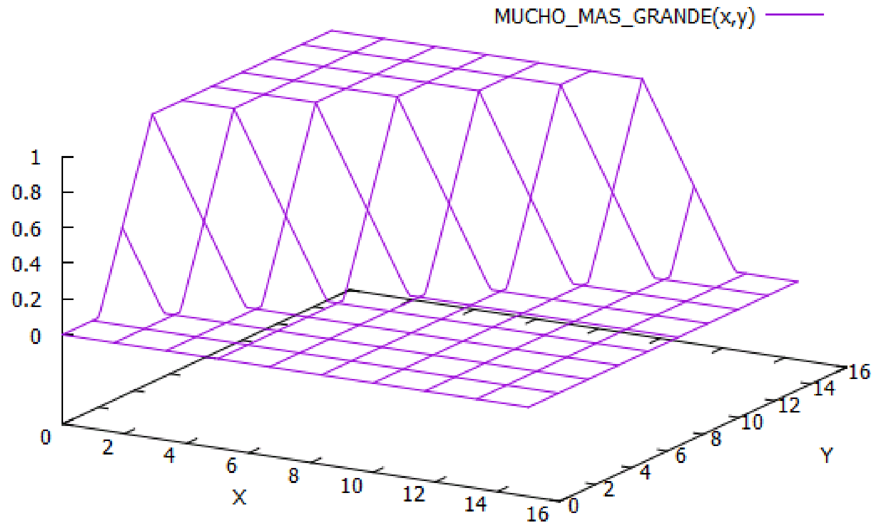
Interpretación de relaciones vagas

- Ejemplo: “Interés del banco A es mucho mas grande que el del banco B”

- Se representa como un X esta en relación MUCHO_MAS_GRANDE que Y

MUCHO_MAS_GRANDE(x,y) =

="grado en que x es mucho mas grande que y” ∈ [0,1]



(X,Y) es MUCHO_MAS_GRANDE

↓

W es Mucho_MAS_GRANDE

Relaciones difusas

- Dado un producto cartesiano de conjuntos $D_1 \times \ldots \times D_n$,

  $R: D_1 \times \ldots \times D_n \rightarrow [0,1]$

  $R(x_1,\ldots,x_n)$ =“grado en que $x_1,\ldots,x_n$ verifican la relación R”

- Operaciones
  - Extensión cilíndrica: $Ext(R): D_1 \times \ldots \times D_n \times D \rightarrow [0,1]$

    $ExtR(x_1,\ldots,x_n,y) = R(x_1,\ldots,x_n)$
  - Proyección: $Proy(R) : D_1 \rightarrow [0,1]$

    $Proy(R)(x_1) = \sup \{R(x_1,\ldots,x_n) \,/\, x_2 \in D_2, \ldots , x_n \in D_n \}$

Composición de relaciones

Si R1 $(x_1,\ldots,x_n)$ y R2 $(y_1,\ldots,y_m)$ son dos relaciones:

- $(R1 \vee R2)(x_1,\ldots,x_n ,y_1,\ldots,y_m) = \max (R1(x_1,\ldots,x_n), R2(y_1,\ldots,y_m))$
- $(R1 \wedge R2)(x_1,\ldots,x_n ,y_1,\ldots,y_m) = \min (R1(x_1,\ldots,x_n), R2(,y_1,\ldots,y_m))$
-
- $\neg R(x_1,\ldots,x_n) = 1 - R(x_1,\ldots,x_n)$

Proposiciones compuestas → Relaciones difusas → Forma normal

- X es A y Y es B → (X,Y) es A^B $A \wedge B(x,y) = \mathrm{Min}(A(x), B(y))$
  - X es A y X es B → X es A∩B
- X es A o Y es B → (X,Y) es A˅B $A \vee B(x,y) = \mathrm{Max}(A(x), B(y))$
  - X es A o X es B → X es AUB
- X no es A → X es ¬A $\neg A(x) = 1 - A(x)$

Inferencia difusa

- Regla básica: Regla composicional de inferencia

(X,Y) es R

X es A

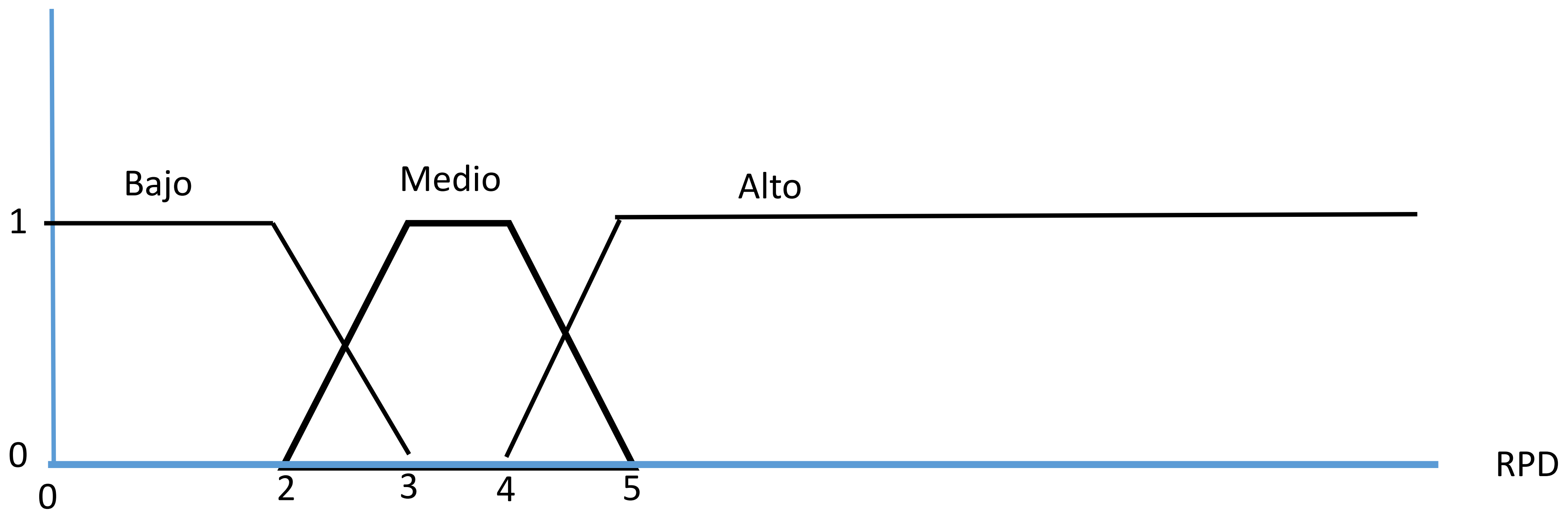
Y es AoR

$$AoR(y) = \sup \{ \min(A(x),R(x,y)) \ / \ x \in Dominio(X) \}$$

(X,Y) es R	
(X,Y) es Ext(A)	$Ext(A)(x,y) = A(x)$
(X,Y) es R∩Ext(A)	$R \cap Ext(A)(x,y) = \min(A(x),R(x,y))$
Y es Proy(R∩Ext(A))	$Proy(R \cap Ext(A)) = AoR$

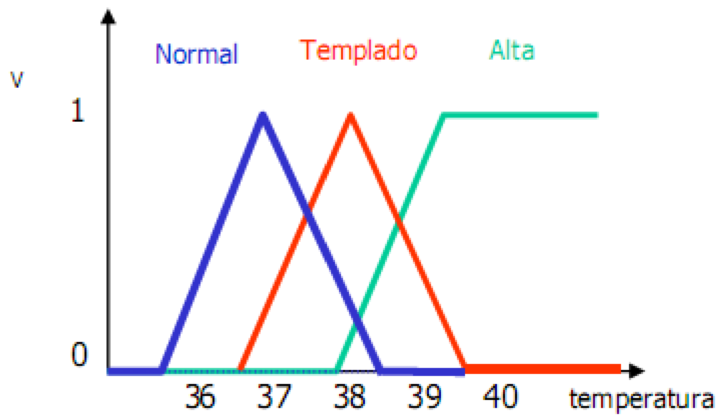
Partición difusa

Bajo(x) + Medio(x) + Alto(x) =1

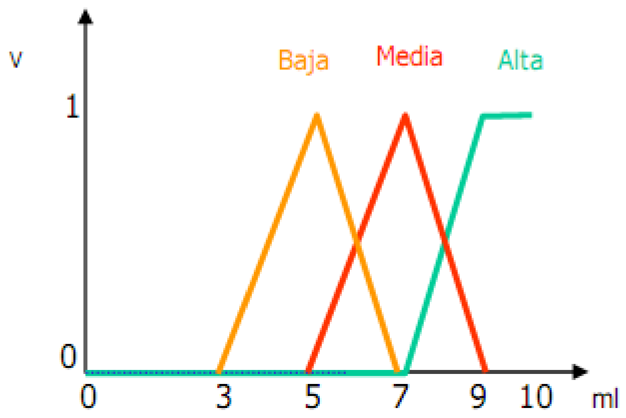


Razonamiento Difuso basado en Reglas

- **Lo mostraremos con un ejemplo:**
  - Se le toma la temperatura a un paciente y se quiere saber la dosis apropiada de un medicamento.
  - Hechos:
    - temperatura=38
  - Reglas:
    - Si la temperatura en Normal entonces dosis es Baja
    - Si la temperatura es Templado entonces dosis es Media
    - Si la temperatura es Alta entonces dosis es Alta



Conjuntos Difusos temperatura normal, templada y alta



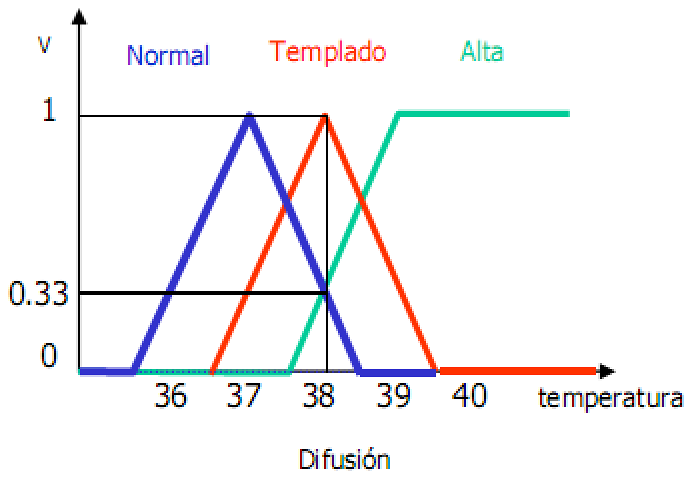
Conjuntos Difusos dosis baja, media y alta

Razonamiento Difuso basado en Reglas

- **Generalmente el proceso de razonamiento difuso consta de 4 pasos**

1.- Obtención del grado de verdad de los antecedentes (Matching)

- Se obtienen los grados de verdad de los antecedentes utilizando los hechos observados.
- En el ejemplo:
- Hechos:
  - temperatura=38
  - Grados de verdad:
    - » normal(temperatura): 0.33
    - » templado(temperatura): 1
    - » alta(temperatura): 0.33



Razonamiento Difuso: Inferencia

2. Inferencia difusa: se obtienen las consecuencias deducidas como conjuntos difusos derivados de los consecuentes de la regla:

- Min: los grados de verdad del consecuente se cortan a la altura del grado de verdad de la premisa, o
- Producto: se multiplican los grados de verdad de consecuente y premisa

– Ejemplo (continuación)

- Reglas:

Si la temperatura en Normal entonces dosis es Baja

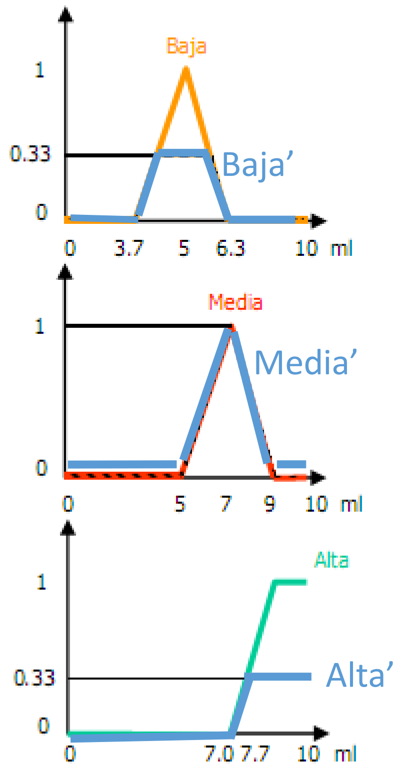
Inferencia: dosis es Baja’

Si la temperatura es Templada entonces dosis es Media

Inferencia: dosis es Media’

Si la temperatura en Alta entonces dosis es Alta

Inferencia: dosis es Alta’

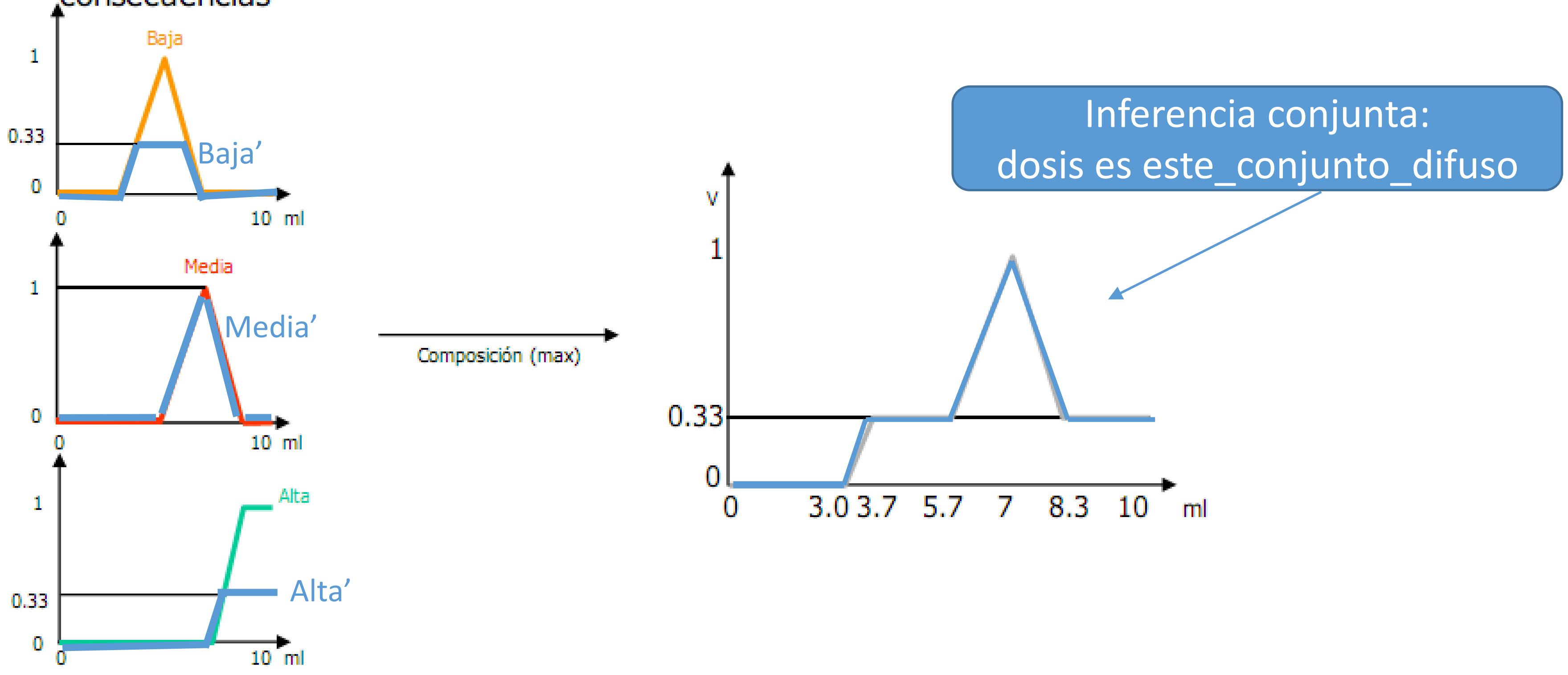


Razonamiento Difuso: Agregación

3.- Agregación: Composición de consecuencias

Todas las inferencias difusas relativas a la misma variable se combinan para producir una salida difusa (inferencia difusa conjunta):

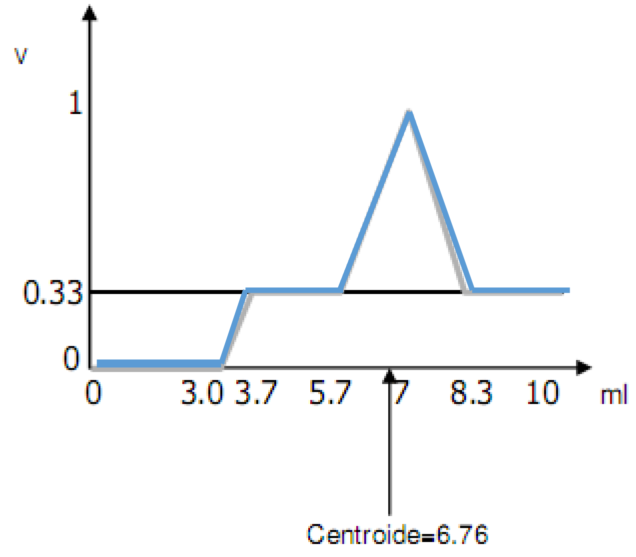
- Max: Se toma el máximo de los grados de verdad correspondientes a las distintas consecuencias, o
- Sum: Se toma la suma de los grados de verdad correspondientes a las distintas consecuencias



Razonamiento Difuso: Concisión

4.- Defuzzification: convertir salida difusa en un valor concreto para la variable

- Se utiliza cuando se necesita convertir una conclusión difusa en concreta.
- Generalmente se utilizan los métodos:
  - Centroide: Se calcula el centro de gravedad de los grados de verdad de la conclusión difusa, o
  - Máximo: Se elige el máximo valor de los grados de verdad.



$$\text{centroide} = \frac{\int x \cdot v(x)\, dx}{\int v(x)\, dx}$$

- Por tanto con 38 grados la dosis sería de 6.76 ml.

Conceptos definidos de forma imprecisa

- Sobrevalorado: Definido por las siguientes 2 reglas

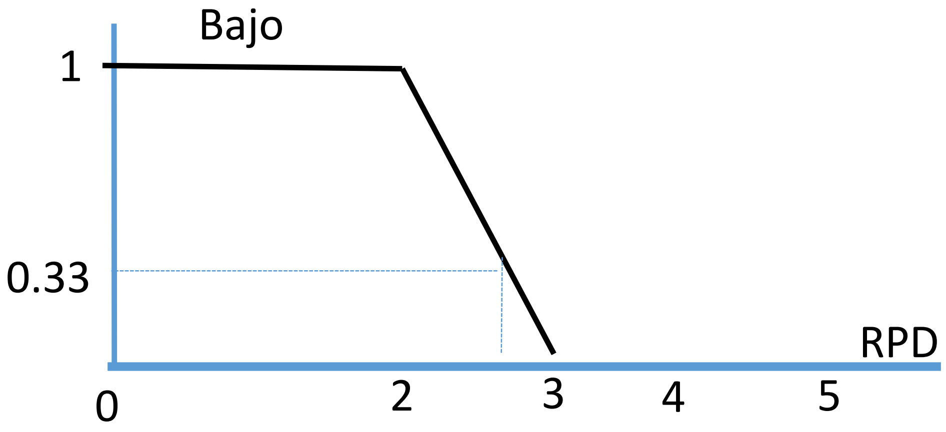
R1 “Si RPD es Bajo y PER es Alto entonces esta Sobrevalorado”

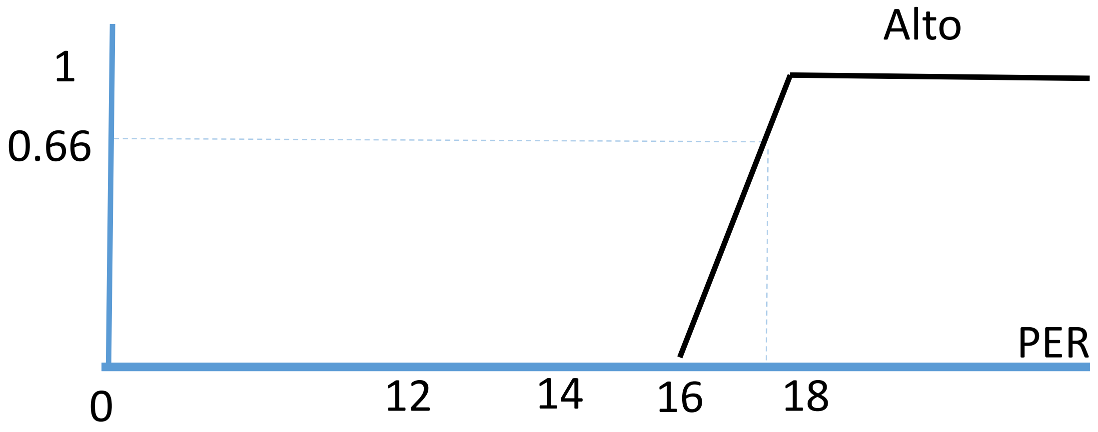
R2 “Si Tamaño Pequeño y PER es Alto entonces esta Sobrevalorado”

Para una empresa con RPD=2.6, PER=17.3 y Tamaño = Pequeño

R1: Sobrevalorado > Min(Bajo(RPD),Alto(PER))=0.33   R2: Sobrevalorado > Min(1,Alto(Per))=0.66

Grado_Verdad(Sobrevalorado) = 0.33 ˅ 0.66 = 0.66





Capacidad de la lógica difusa

Teorema de aproximación universal de los SBRD (Castro, 1995) : Los sistemas basados en reglas difusas son aproximadores universales

→ Las funciones continuas definidas sobre un compacto se pueden aproximar tanto como se quiera por un sistema basado en reglas difusas

SBRD(K)="Clase de todos los sistemas basados en reglas difusas definidas sobre el dominio K"

<u>Formalmente:</u> $\forall \boldsymbol{K}\ \boldsymbol{compacto\ de\ R^n}, \forall\ \boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C(K)}, \forall \boldsymbol{\varepsilon} > \boldsymbol{0},$

$\exists\ \boldsymbol{S} \in \boldsymbol{SBRD(K)\ tq}\ \left|\left|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{S}\right|\right| \leq \boldsymbol{\varepsilon},$

Sup $\{|\boldsymbol{f(x)} - \boldsymbol{S(x)}|$; x∈K$\} \leq \boldsymbol{\varepsilon}$
o lo que es lo mismo
∀x∈K $|\boldsymbol{f(x)} - \boldsymbol{S(x)}| \leq \boldsymbol{\varepsilon}$

Compacto

- **Definición**. Cada recubrimiento por una familia de conjuntos abiertos tiene un subrecubrimiento finito

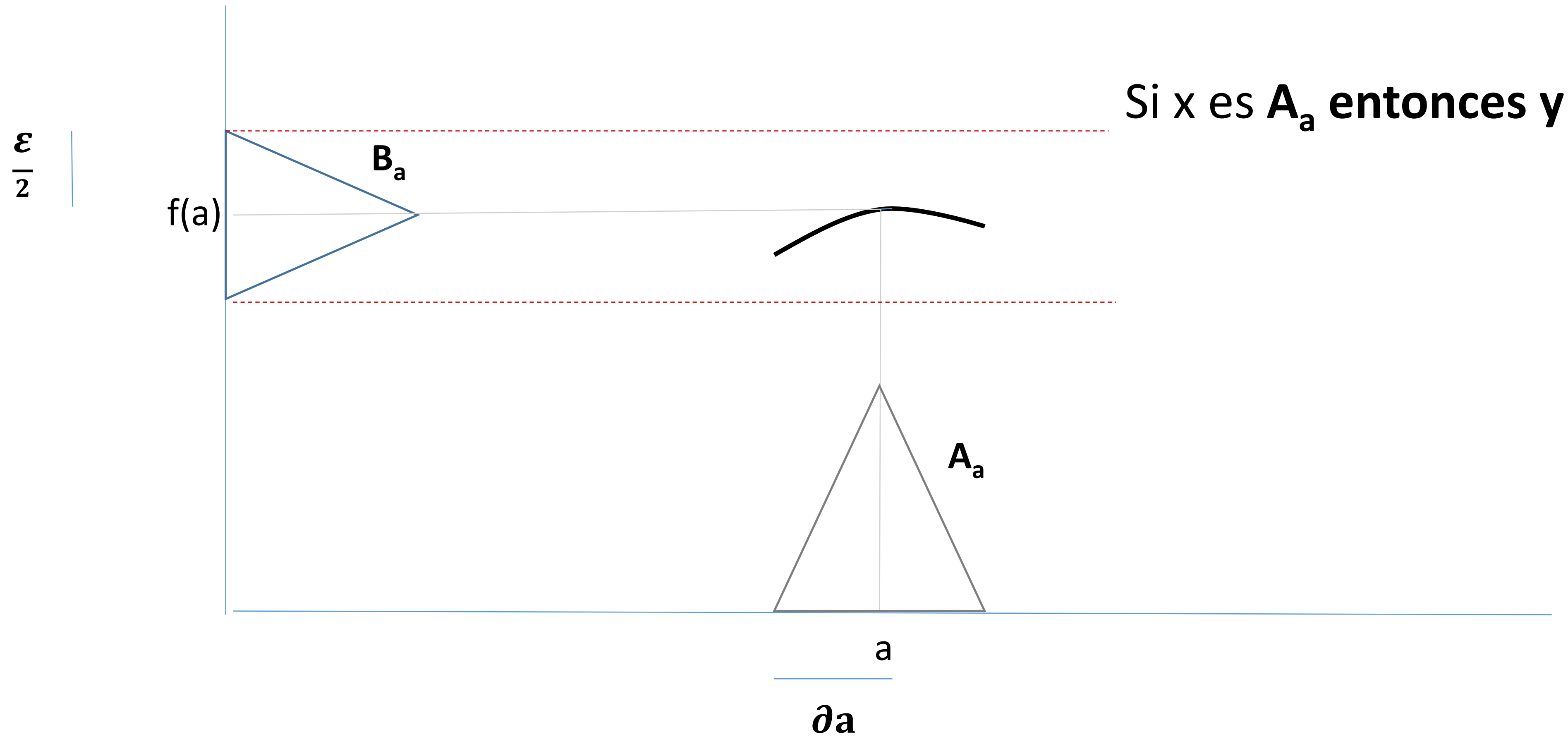
- **Sobre $\boldsymbol{R^n}$**, compacto es equivalente a cerrado y acotado

  - El ejemplo mas usual es que cada variable tenga por dominio un intervalo cerrado

  - Otro ejemplo puede ser una bola cerrada (un circulo cerrado en $\boldsymbol{R^2}$, una bola cerrada en $\boldsymbol{R^3}$, etc.)

Demostración (idea)

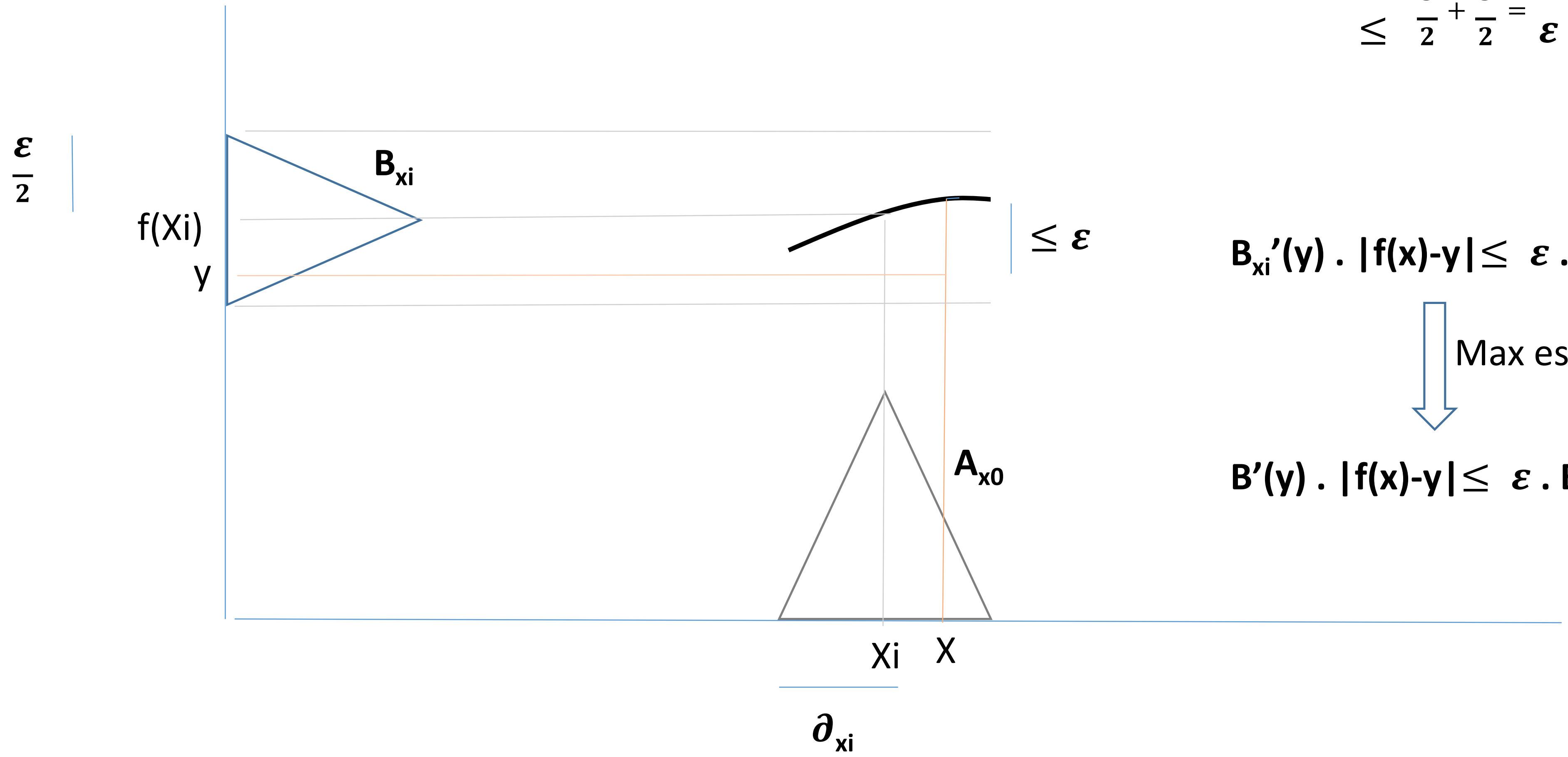
f continua en a → $\exists \partial a$ tal que si |x-a|≤ ∂a entonces |f(x)-f(a)| ≤ $\frac{\varepsilon}{2}$



Quedándonos con las reglas del subrecubrimiento finito (a=x1,...., a=xm)

si $|x\text{-}xi| \leq \partial_{xi}$ entonces $|f(x)\text{-}f(xi)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

$$|f(x)-y| \leq |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}\boldsymbol{i})| + |\mathbf{f}(\mathbf{x}\boldsymbol{i}) - \mathbf{y}| \leq$$
$$\leq \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{2} + \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{2} = \boldsymbol{\varepsilon}$$



$B_{xi}'(y)$. $|f(x)\text{-}y| \leq \varepsilon$. $B_{xi}'(y)$

Max es creciente

$B'(y)$. $|f(x)\text{-}y| \leq \varepsilon$. $B'(y)$

Defuzzificando

$$\mathbf{|f(x)\text{-}S(x)|} = \left| \boldsymbol{f(x)} - \frac{\int \boldsymbol{y.B'(y)dy}}{\int \boldsymbol{B'(y)dy}} \right| = \left| \frac{\int \boldsymbol{f(x).B'(y)dy} - \int \boldsymbol{y.B'(y)dy}}{\int \boldsymbol{B'(y)dy}} \right| =$$

$$= \left| \frac{\int \boldsymbol{(f(x)-y)B'(y)dy}}{\int \boldsymbol{B'(y)dy}} \right| \leq \frac{\int \boldsymbol{|f(x)-y|B'(y)dy}}{\int \boldsymbol{B'(y)dy}} \leq \frac{\int \boldsymbol{\varepsilon \cdot B'(y)dy}}{\int \boldsymbol{B'(y)dy}} = \boldsymbol{\varepsilon}$$