Lema de bombeo

▷ Sea L un lenguaje regular, entonces $\exists n \in \mathbb{N} / \forall z \in L$ con $|z| \geq n$, $z = uvw$ donde $|uv| \leq n$ $|v| \geq 1$ se tiene que $uv^iw \in L$ $\forall i \geq 0$. Además n puede ser el número de estados de cualquier autómata que acepte L.

Contrarrecíproco : $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

Si para cualquier $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar una $z \in L$ con $|z| \geq n$ tal que cualquier expresión $z = uvw$ tiene un $i \in \mathbb{N}$ que provoca $uv^iw \notin L$, entonces L no es regular.

Demostración : con un autómata de n estados y el principio del palomar

Uso : Si queremos probar que un lenguaje L no es regular, buscamos palabras z_n de forma que para $n \geq n_0$ $|z| \geq n$ y para cualquier posible descomposición $z = uvw$ con $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ se tenga algún i / $uv^iw \notin L$.

Ejemplo : Probar que $\{0^i1^i \,/\, i \geq 0\}$ no es regular.

Sea $n \geq 1$, entonces escojo $z = 0^n1^n$.

Cualquier descomposición $z = uvw$ con $|uv| \leq n$ verificará que $uv = 0^k0^\ell$ con $k + \ell \leq n$ y $v = 0^\ell$ con $\ell \geq 1$.

Entonces, $uv^iw = 0^k0^{i\ell}0^{n-k-\ell}1^n$ y puesto que

$k + i\ell + n - k - \ell = n + (i-1)\ell$, escogiendo $i = 2$,

$= n + \ell \neq n$ la palabra queda

$uv^2w = 0^{n+\ell}1^n \notin L$.

1. n es cualquiera
2. basta una palabra z_n
3. uvw es cualquiera
4. basta un $i \in \mathbb{N}$

Resumen:

Si un lenguaje...	tiene gram. T3	tiene gram. T2	cumple LB	no cumple LB
es regular?	✓	?	?	✗
cumple LB?	✓	?		

El recíproco no es cierto: no basta con que L verifique la condición para ser regular.

Ejemplo: $L = \{a^l b^j c^k \mid l=0 \text{ o } j=k\}$

Sea $n=2$. $\forall z \in L$ con $|z| \geq 2$ es $z = a^l b^j c^k$ con $l=0$ o $j=k$.

Obtenemos una descomposición así:

$$z = a^l b^j c^k = \underset{\substack{\| \\ \varepsilon}}{u}\,\underset{\substack{\uparrow \\ \text{primer símbolo}}}{v}\,\underset{\substack{\uparrow \\ \text{resto}}}{w} = \begin{cases} b\,(b^{j-1}c^k) & \text{si } l=0 \\ a\,(a^{l-1}b^jc^j) & \text{si } l\neq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} b^i b^{j-1} c^k \in L \quad \forall i \in \mathbb{N} \\ a^i a^{l-1} b^j c^j \in L \quad \forall i \in \mathbb{N} \end{array}$$

- Probar que $\{a^p \mid p \text{ primo}\}$ no es regular.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Escojo $z = a^p$ con p primo mayor que $n+2$.

Para cualquier descomposición $z_n = uvw$ $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$

$u = a^k$, $v = a^m$, $w = a^{p-m-k}$ $k+m \leq n$, $m \geq 1$.

Para $i = p-m$ tenemos

$$|uv^{p-m}w| = k + m(p-m) + p - m - k = \underbrace{(m+1)}_{>1}\underbrace{(p-m)}_{>1}$$

número compuesto!

$\Rightarrow uv^iw \notin L$.

- Probar que $\{a^m b^p \mid m<p\}$ no es regular

Sea $n \in \mathbb{N}$. Escojo $z_n = a^n b^{n+1}$. Dada una descomposición $z_n = uvw$ $|uv| \leq n$ $|v| \geq 1$, tengo $u = a^k$ $v = a^l$ $w = a^{n-k-l}$

$uv^iw = a^{n+(i-1)l}\, b^{n+1}$

¿$n + (i-1)l \geq n+1$? Escojo $i=2$ y se cumple, luego $uv^2w \notin L \Rightarrow L$ no es regular.

- Probar que $\{ww^{-1} / w \in \{0,1\}^*\}$ no es regular:

Sea $n \in \mathbb{N}$. Escojo $z_n = 0^n 1 1 0^n$.

Sean u, v, w / $z_n = uvw$, $|uv| \leq n$ $|v| \geq 1$,

entonces $u = 0^k$ $v = 0^\ell$ $w = 0^{n-k-\ell} 1 1 0^n$.

Para $i = 2$:

$$uv^i w = \underbrace{0^{n+\ell}}_{n+\ell > n} 1 1 0^n \notin L.$$

R3. 11.

a. $\{0^i 1^j / i = 2j \text{ o } 2i = j\}$

Sea $n \in \mathbb{N}$. Elijo $z_n = 0^{2n} 1^n \in L$.

Sean u, v, w / $z_n = uvw$, $|uv| \leq n$ $|v| \geq 1$,

entonces $u = 0^k$ $v = 0^\ell$ $w = 0^{2n-k-\ell} 1^n$.

$uv^r w = 0^{2n+(r-1)\ell} 1^n$

Elijo $r = 2$: $uv^2 w = 0^{2n+\ell} 1^n \notin L$ $2n+\ell \neq n$!

b. $\{uu^{-1} / u \in \{0,1\}^*, |u| \leq 1000\}$

¡Es regular!
- Por ser finito.
- Regex: $00 + 11 + 0000 + 0110 + \ldots$

d. $\{0^i 1^j 2^k / i = j \text{ o } j = k\}$

Sea $n \in \mathbb{N}$. Escojo $z_n = 0^n 1^n \in L$.

Cualquier descomposición $z_n = uvw$ $|uv| \leq n$ $|v| \geq 1$

es $u = 0^p$ $v = 0^\ell$ $w = 0^{n-p-\ell} 1^n \Rightarrow$

$\Rightarrow uv^r w = 0^{n+(r-1)\ell} 1^n$. Para $r = 2$: $uv^2 w \notin L$

$n + \ell \neq n$!

$\cdot\ \{0^{j^2} / j \geq 0\}$

Sea $n \in \mathbb{N}$. Escojo $z_n = 0^{n^2}$. Cualquier descomposición $z_n = uvw$ con $|v| \geq 1$ $|uv| \leq n$ es:

$u = 0^k \quad v = 0^l \quad w = 0^{n^2-l-k}$

Entonces $uv^iw = 0^{n^2+(i-1)l}$.

Con $i=2$: $|uv^iw| = n^2+l$, con $1 \leq l \leq n$.

Pero n^2+l no es el cuadrado de ningún número porque $n^2 < n^2+l$ y

$(n+1)^2 = n^2+2n+1 > n^2+n \geq n^2+l$.

Por tanto, $uv^2w \notin L$.

R3.12.

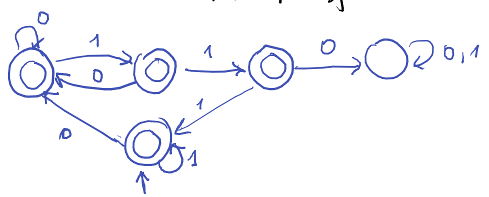
a. $\{u0u^{-1} / u \in \{0,1\}^*\}$

Sea $n \in \mathbb{N}$. Escojo $z_n = 1^n 0 1^n$. Cualquier descomposición $z_n = uvw$ con $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ es de la forma $u = 1^k$ $v = 1^l$ $w = 1^{n-k-l}01^n$.

Con $i=2$, $uv^2w = 1^{n+l}01^n$ y $n+l \neq n$ por lo que $uv^2w \notin L$.

b. Números en binario múltiplos de 4: $0 + 1(0+1)^*00$

c. Palabras de $\{0,1\}^*$ que no contienen "0110":



36. a) $L_1 = \{0^i 1^j : i > j\}$, $\overline{L_1} = \{0,1\}^* \setminus L_1$

(Opción 1: Lema bombeo con $i=0$).

Sea $n \in \mathbb{N}$. Escojo $z_n = 0^n 1^n \in \overline{L_1}$. Cualquier descomposición $z_n = uvw$ con $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ es de la forma $u = 0^k$, $v = 0^l$, $w = 0^{n-k-l} 1^n$

Si $i = 2$, $uv^2w = 0^{n+l} 1^n \notin \overline{L_1}$

por tanto $\overline{L_1}$ no es regular.

Si L_1 fuera regular, entonces su complementario $\overline{L_1}$ también lo sería. Esto no se da, luego L_1 no puede ser regular.

b y c regulares.

Operaciones con conjuntos regulares

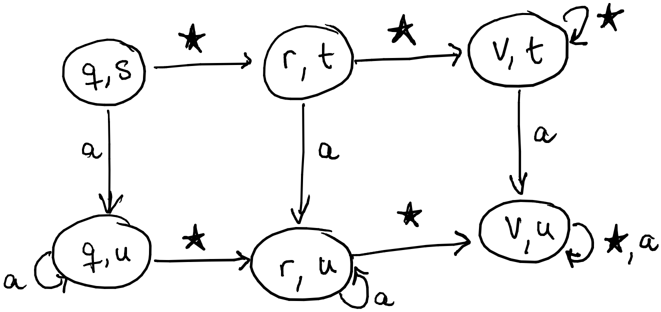
Si L_1 y L_2 son regulares, entonces:

- $L_1 \cup L_2$ es un conjunto regular (unión regex)
- $L_1 L_2$ es un conjunto regular (concatenación regex)
- L_1^* es un conjunto regular (clausura regex)
- El complementario, $\overline{L_1} = A^* \setminus L_1$, es regular.
- $L_1 \cap L_2$ es un conjunto regular. (autómata producto)

Autómata producto

$L = \{u \in \{a, ★\}^* / N_★(u) = 1\} \cup \{★\}^+$

Producto:

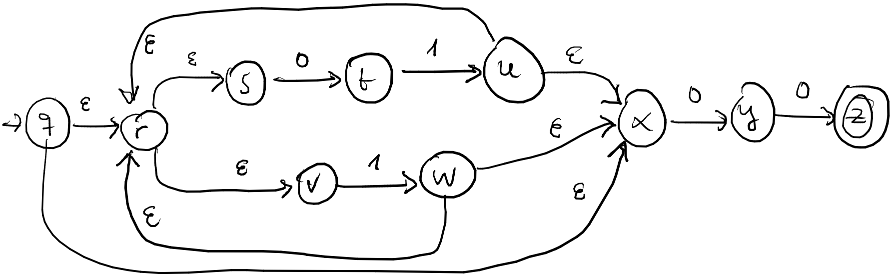


Reglas:

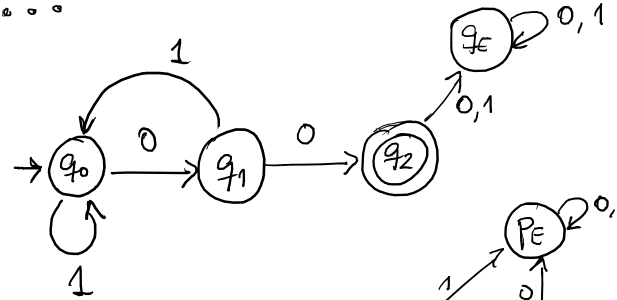
- $L_1 \cup L_2$: un estado es final si lo es el de L_1 <u>o</u> el de L_2.
- $L_1 \cap L_2$: un estado es final si lo es el de L_1 <u>y</u> el de L_2.
- $L_1 \setminus L_2$: un estado es final si lo es el de L_1 y no lo es el de L_2.

R3.16.

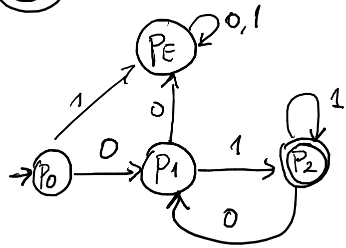
$L_1 = (01+1)^*00$



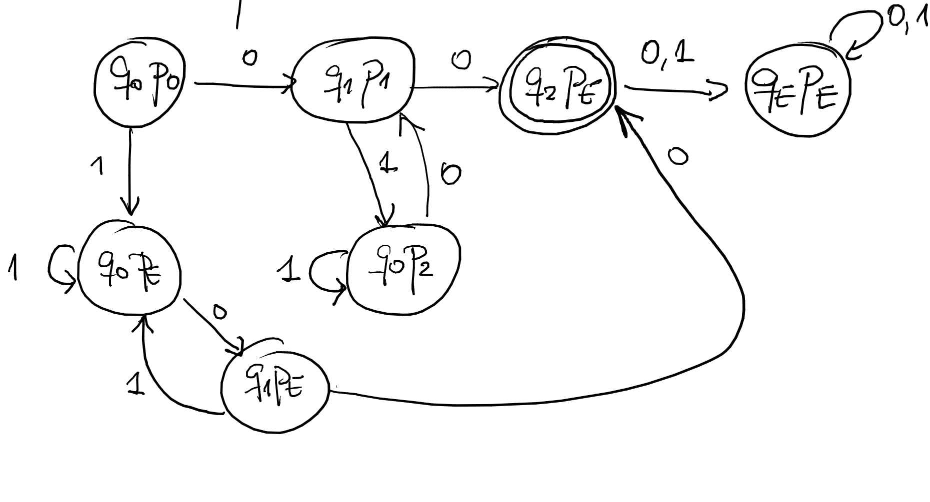
...



$L_2 = 01(01+1)^*$



Autómata producto:



Homomorfismos

Una aplicación $f: A^* \to B^*$ es un homomorfismo si verifica:

$$f(uv) = f(u) f(v) \quad \forall u, v \in A^*.$$

Los homomorfismos preservan lenguajes regulares:

Si $L \subseteq A^*$ es regular, $f(L)$ también lo es.

EJEMPLO: Probar que $\{a^l b^j c^k \,/\, l = 0 \text{ o } j = k\}$ no es regular.

Defino $f: \{a, b, c\}^* \to \{0, 1\}^*$

$$f(a) = \varepsilon \quad f(b) = 0 \quad f(c) = 1$$

Entonces $f(L) = \{0^j 1^k \,/\, j = k\}$ que no es regular.

Por tanto, L no podía ser regular de partida.

Si $L \subseteq B^*$ es regular, entonces $f^{-1}(L)$ también.

Autómata minimal

Es el que no tiene estados indistinguibles (equivalentes).
(ni inaccesibles)

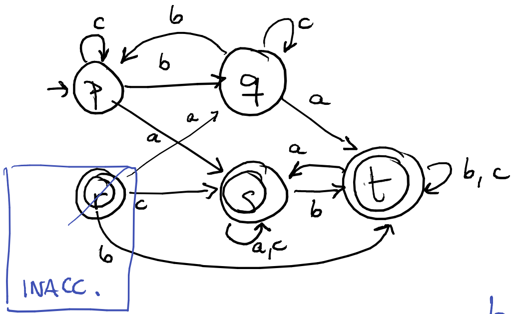
Es único!

¿Qué estados son distinguibles?

1. Cada final de cada no final.
2. Cada dos estados que, leyendo el mismo símbolo, transicionen a estados distinguibles.

EJEMPLO

δ	a	b	c
→ p	s	q	p
q	t	p	q
~~r~~	~~q~~	~~t~~	~~s~~
s	s	t	s
t	t	s	s



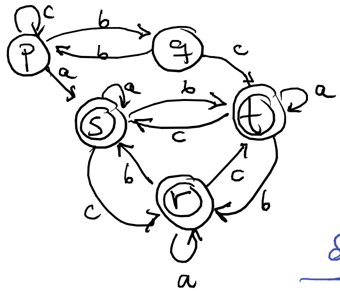
EQ_1: {p, q} {s, t}

EQ_2: {p, q} {s, t}

→

δ	a	b	c
→ p	s	p	p
s	s	s	s

δ	a	b	c
→ p	s	q	p
q	s	p	t
r	r	s	t
s	s	t	r
t	t	r	s



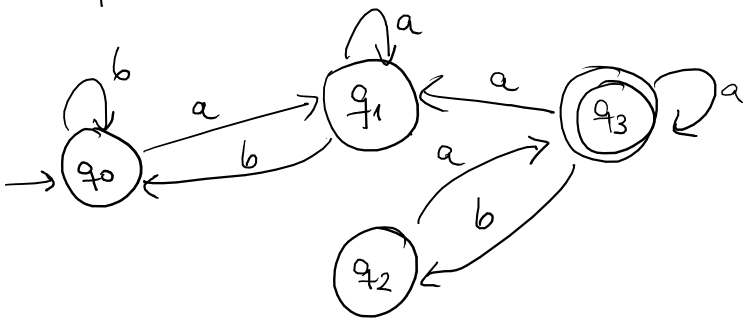
EQ_1: {p, q} {r, s, t}

EQ_2: {p}, {q}, {r, s, t}

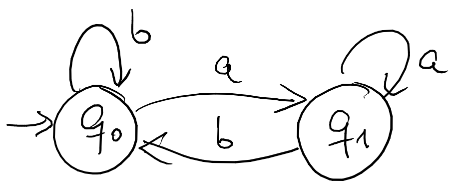
δ	a	b	c
→ p	r	q	p
q	r	p	r
r	r	r	r

Detectar el lenguaje vacío en autómatas:

- Eliminar estados inaccesibles y ver si quedan estados finales:



Inaccesibles ~~q_1~~ q_2 q_3



Igualdad de lenguajes: L_1 con M_1 y L_2 con M_2

2 opciones:

1. Construir el autómata que acepta:

$$(L_1 \setminus L_2) \cup (L_2 \setminus L_1) =$$
$$= (L_1 \cap \overline{L_2}) \cup (L_2 \cap \overline{L_1})$$

autómata producto de M_1 y M_2 con estados finales donde solo M_1 o M_2 sea final.

y comprobar si es un autómata para el lenguaje vacío.

2. Calcular los autómatas minimales y ver si son isomorfos (idénticos salvo renombres).

¿Son lenguajes regulares?

a Palabras de $\{0,1\}^*$ que empiezan y terminan por 0. R

b Palabras de $\{0,1\}^*$ que empiezan y terminan por una secuencia de al menos 3 ceros. R

c Palabras de $\{0,1\}^*$ que empiezan y terminan por el mismo número de ceros. N

d $\{ uu^{-1} / u \in \{0,1\}^*$ y 1 solo aparece una vez en u: $N_1(u) = 1 \}$ N

e $\{ uu^{-1} / u \in \{0,1\}^*$ y 1 solo aparece en una de las primeras tres posiciones de u $\}$ R

$1(00)^*1 + 01(00)^*10 + 001(00)^*100$

f $\{ uv / u,v \in \{0,1\}^*$ y $|u| = |v| \geq 1 \} = \{ w / |w| = 2n \}$ R

g $\{ u1^n / |u| = n \}$ N

h $\{ 0^n 1^m 2^n / n,m \geq 1 \}$ N

i. $\{ 0^p / p$ primo $\}$ N

j. $\{ 0^n 1^{s+2} / s$ es solución entera de $x^n - 1 = 0 \}$ $n \geq 1$ R

$x^n - 1 = 0 \rightsquigarrow \begin{cases} x = 1 & \text{si } n \text{ impar} \\ x = -1, 1 & \text{si } n \text{ par} \end{cases}$

k. Palabras que contienen dos secuencias de 1's de longitud mínima 2: $(0+1)^* 11 (0+1)^* 11 (0+1)^*$ R

l. Palabras que contienen dos veces una secuencia de 1's de longitud mínima 2. N

m. $\{ u \in \{0,1\}^* / u$ es múltiplo de 4 en binario $\}$ $(0+1)^*00$ R

n. $\{ 0^n / n$ es múltiplo de 4 $\}$ $(0000)^*$ R

o. $\{ 0^n 1^m 2^{n+m} / n,m \geq 0 \}$ N

p. $\{ 0^k / k = 4^n \}$ N

q. $\{ 0^k / k = n^3 \}$ N

R3.47. Minimizar el autómata:

δ	a	b
$\to q_0$	q_1	q_4
q_1	q_5	q_2
q_2	q_3	q_7
q_3	q_2	q_7
q_4	q_5	q_2
q_5	q_6	q_7
q_6	q_5	q_7
q_7	q_7	q_7
~~q_8~~	~~q_2~~	~~q_6~~

1 q_8 es inaccesible, se elimina:

$\{q_0, q_1, q_4, q_5, q_2, q_6, q_7, q_3\}$

2. Buscamos estados indistinguibles:

$\{q_0, q_1, q_3, q_4, q_6, q_7\}$ $\{q_2, q_5\}$

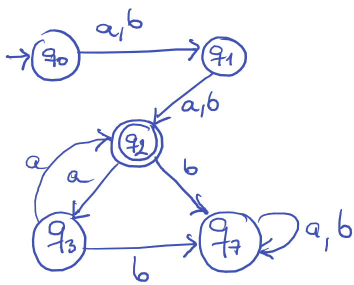
$\{q_0, q_7\}$ $\{q_1, q_4\}$ $\{q_3, q_6\}$ $\{q_2, q_5\}$

$\{q_0\}$ $\{q_7\}$ $\{q_1, q_4\}$ $\{q_3, q_6\}$ $\{q_2, q_5\}$

"

Autómata minimal:

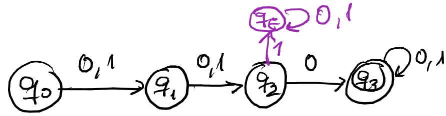
δ	a	b
$\to q_0$	q_1	q_1
q_1	q_2	q_2
q_2	q_3	q_7
q_3	q_2	q_7
q_7	q_7	q_7



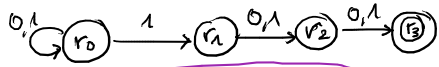
R3.44. (Proponer)

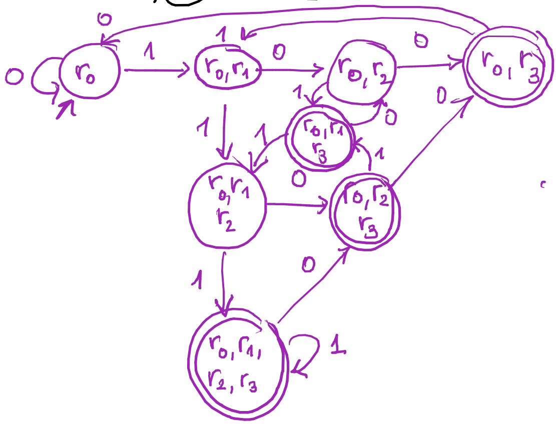
R3.23.

a. $(0+1)(0+1)\,0\,(0+1)^*$

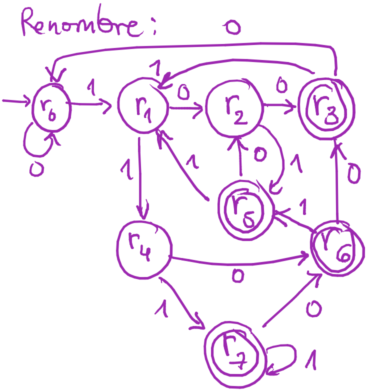


b. $(0+1)^*\,1\,(0+1)(0+1)$





Renombre:



Minimal: No hay inaccesibles.

$\{r_0, r_1, r_2, r_4\}$ $\{r_3, r_5, r_6, r_7\}$

$\{r_0, r_1\}$ $\{r_2, r_4\}$ $\{r_3, r_5\}$ $\{r_6, r_7\}$

$\{r_0\}\{r_1\}$ $\{r_2\}\{r_4\}$ $\{r_3\}\{r_5\}$ $\{r_6\}\{r_7\}$ ¡Es minimal!

R3. 14. Determinar cuáles son regulares.

a. $u \in \{0,1\}^*$ / cada 1 va precedido por un nº par de ceros.

Regular: $(0 + (00)^* 1)^*$

c. $\{0^i 1^j 0^{ij} \,/\, i, j \geq 0\}$

Sea $n \in \mathbb{N}$. Elijo la palabra $z = 0^n 1 0^n$. Cualquier descomposición $z = uvw$ $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ será del tipo

$u = 0^k$ $v = 0^l$ $w = 0^{n-k-l} 1 0^n$.

$uv^r w = 0^{n+(r-1)l} 1 0^n$. Si $r = 2$:

$uv^2 w = 0^{n+l} 1 0^n \notin L$ porque $l > 0$ y $n \neq (n+l) \cdot 1$