LEMA DE BOMBEO

Sea L un lenguaje regular, entonces $\exists n \in \mathbb{N} \,/\, \forall z \in L$ con $|z| \geq n$,

$z = uvw$ donde i) $|uv| \leq n$ se tiene que $uv^iw \in L \ \forall i \geq 0$.

ii) $|v| \geq 1$

CONTRARECÍPROCO : $(A \Rightarrow B) \iff (\neg B \Rightarrow \neg A)$

Para demostrar que un lenguaje **NO** es regular, hay que demostrar que: $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists z \in L$ con $|z| \geq n$, $z = uvw$ donde

i) $|uv| \leq n$ tal que $\exists i \geq 0$ de forma que $uv^iw \notin L$.

ii) $|v| \geq 1$

La clave estará en elegir z.

Ejemplo: Probar que $\{0^i 1^i \,/\, i \geq 0\}$ no es regular.

Sea $n \geq 1$, elijo $z = 0^n 1^n$, que verifica que $|0^n 1^n| = 2n > n$.

Para cualquier descomposición $z = uvw$ con $|uv| \leq n$

verificará que $\begin{cases} u = 0^k & \text{con } k + l \leq n. \\ v = 0^l & l \geq 1 \end{cases}$

Entonces, $w = 0^{n-k-l} 1^n$, si escojo $i = 2$ tenemos:

$uv^2w = 0^k 0^{2l} 0^{n-k-l} 1^n = 0^{n+l} 1^n \notin L \Rightarrow L$ **NO** ES REGULAR.

con $l \geq 1$

Ejemplo: Probar que $\{a^m b^p \,/\, m < p\}$ no es regular.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Escojo $z = a^n b^{n+1}$, $|z| = 2n+1 > n$.

Para cualquier descomposición $z = uvw$, con $|uv| \leq n$ y $|v| \geq 1$,

tengo $u = a^k$ $\quad k + l \leq n$ y $w = a^{n-k-l} b^{n+1}$.

$v = a^l$ $\quad l \geq 1$

Escojo $i=2 \longrightarrow uv^2w = a^k a^{2l} a^{n-k-l} b^{n+1} = a^{n+l} b^{n+1} \in L, \Rightarrow$

$$\left\{ \begin{matrix} n+l & \geq & n+1 \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ m & & p \end{matrix} \right\}$$

$\Rightarrow$ L NO ES REGULAR!

Ejemplo: Probar que $\{ww^{-1} / w \in \{0,1\}^*\}$ no es regular.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Elijo $z = 0^n 1 1 0^n$.

Para cualquier descomposición $z = uvw$ verificando $|uv| \leq n$,
$|v| \geq 1$

entonces $u = 0^k$ $\quad k+l \leq n$ $\quad w = 0^{n-k-l} 1 1 0^n$.
$v = 0^l$ $\quad l \geq 1$

Tomamos $i=2$. Entonces: $uv^2w = 0^k 0^{2l} 0^{n-k-l} 1 1 0^n =$

$= \underbrace{0^{n+l}}_{\text{como } l \geq 1 \,\longrightarrow\, n+l > n} 1 1 0^n \notin L \Rightarrow$ L NO ES REGULAR!