Finalmente, se calcula la intersección para obtener aquellos profesores que verifican ambas propiedades:

$$\pi_{NRP,nom\_prof}(\sigma_{categoria='TU' \vee categoria='CU'}(profesores)) \bigcap$$
$$\bigcap \pi_{profesores.NRP,profesores.nom\_prof}((profesores) \bowtie$$
$$\bowtie (grupos) \bowtie \sigma_{curso=4 \vee curso=5}(asignaturas))$$

Nuevamente, destacaremos el cuidado que hemos tenido para mantener la concordancia de los esquemas en la intersección.

Ejemplo 6.39. *Encontrar los nombres y los DNIs de los alumnos de Almería que no están matriculados de asignaturas troncales.*

Cáculo del DNI de los alumnos de Almería:

$$\pi_{DNI}(\sigma_{provincia='ALMERIA'}(alumnos))$$

Cálculo del DNI de los alumnos matriculados de alguna asignatura troncal (se conecta matricula con las asignaturas troncales y se proyecta sobre DNI para obtener los alumnos matriculados):

$$\pi_{DNI}(matricula \bowtie \sigma_{caracter='tr'}(asignaturas))$$

Se calcula ahora la diferencia entre ambos conjuntos, tras lo que se hace una reunión y una proyección adicional sobre ALUMNOS para obtener el nombre de los alumnos, ya que la diferencia sólo nos da su DNI. El resultado final es:

$$\pi_{alumnos.DNI,alumnos.nombre}(alumnos \bowtie (\pi_{DNI}(\sigma_{provincia='ALMERIA'}(alumnos) -$$
$$- \pi_{DNI}(matricula \bowtie \sigma_{caracter='tr'}(asignaturas)))))$$

6.5. La división o cociente relacional

La operación de división es quizás la más compleja dentro del AR porque se corresponde con un tipo de consulta que no se formula bien en relaciones que tienen dominios atómicos. Este tipo de consultas están relacionadas con la conexión de un elemento de un conjunto con “todos” los elementos de otro. Ejemplos de las mismas en nuestra base de datos son:

1. Encontrar los alumnos que están matriculados de **todas** las asignaturas de primer curso.

2. Encontrar las asignaturas en las que dan clase **todos** los profesores del área ’COMPUT’ que sean de categoría ’CU’.

3. Encontrar los profesores que dan clase a **todos** los grupos de la asignatura de código ’BDI’.

4. Encontrar las aulas que están ocupadas **todos** los días de la semana.

El esquema de estas consultas es siempre el mismo y corresponde a la siguiente idea básica:

6.5.1. Idea básica de la división

Consideremos una relación R[A,B] donde A y B son conjuntos de atributos que representan objetos distintos y R representa una conexión existente entre ambos tipos de objetos. Sea S[B] una relación que representa un conjunto de objetos de tipo B que cumplen una determinada propiedad. Sean r y s instancias de R y S respectivamente. El objetivo de la división es obtener aquellos objetos de tipo A que se conectan, a través de r, con todos los objetos de tipo B que hay en s.

Esta idea se refleja en los ejemplos anteriores de la siguiente manera:

1. Objetos de tipo A: alumnos. Objetos de tipo B: asignaturas. R es la conexión que nos da la relación *matrículas* y S es el conjunto de todas las asignaturas de primer curso.

2. Objetos de tipo A: asignaturas. Objetos de tipo B: profesores. R es la conexión que nos da la relación *grupos* donde aparece el código de las asignaturas y el NRP del profesor que imparte cada grupo. S es el conjunto de profesores del área ’COMPUT’ y categoría ’CU’.

3. Objetos de tipo A: profesores. Objetos de tipo B: grupos. La relación R es la propia relación *grupos* que muestra la conexión profesor/grupo, y S es el conjunto de grupos de la asignatura de código 'BDI'.

4. Objetos de tipo A: aulas. Objetos de tipo B: días de la semana (aparecen en la relación clases). La conexión aula/días se obtiene de la relación clases y S se identifica con el conjunto de todos los días.

Con esta introducción intuitiva podemos abordar la definición formal de la división:

Definición 6.8. *Consideremos las relaciones $R[A_1..A_n, B_1..B_m]$ y $S[B_1..B_m]$ y las instancias r y s (de R y S, respectivamente). Definimos la* **división** *de r con respecto a s y notamos por:*

$$w = r \div s$$

a la instancia w de una relación $W[A_1..A_n]$, que verifica:

$$\forall u \in w \; ; \; \forall v \in s \Longrightarrow \exists t \in r | t[A_1..A_n] = u \; , \; t[B_1..B_m] = v$$

Hay que resaltar en esta definición que el esquema del divisor debe estar incluido en el esquema del dividendo y que el resultado tiene como esquema la diferencia entre los esquemas del dividendo y el divisor.

Los siguientes ejemplos aclaran un poco más este punto:

Ejemplo 6.40. *Consideremos la relación $R[A, B, C, D]$ y la instancia de la misma r que aparece en la figura 6.6. Si efectuamos ahora la división por una relación cuyo esquema es $S[D]$, el resultado tendrá siempre como esquema $W[A, B, C]$. En la figura 6.6 aparece el resultado para un caso concreto de una instancia de $S[D]$.*

Ejemplo 6.41. *Si consideramos ahora las mismas relación R e instancia r pero efectuamos la división por una relación cuyo esquema es $S[C, D]$ el resultado tendrá siempre como esquema $W[A, B]$. En la figura 6.7 aparece el resultado para el caso de una instancia concreta de $S[C, D]$.*

A	B	C	D
a_1	b_1	c_1	d_1
a_1	b_1	c_1	d_2
a_1	b_1	c_3	d_3
a_2	b_2	c_2	d_2
a_2	b_2	c_2	d_3
a_3	b_3	c_3	d_1
a_3	b_3	c_3	d_2

$\div$

D
d_1
d_2

$=$

A	B	C
a_1	b_1	c_1
a_3	b_3	c_3

Figura 6.6: Ejemplo de división.

A	B	C	D
a_1	b_1	c_1	d_1
a_1	b_1	c_1	d_2
a_1	b_1	c_3	d_3
a_2	b_2	c_2	d_2
a_2	b_2	c_2	d_3
a_3	b_3	c_3	d_1
a_3	b_3	c_3	d_2

$\div$

C	D
c_2	d_2
c_2	d_3

$=$

A	B
a_2	b_2

Figura 6.7: Otro ejemplo de división

La semántica de la división ya ha sido analizada y, puesto que ya tenemos su notación formal, estamos en condiciones de resolver los ejemplos propuestos al principio de esta sección.

Ejemplo 6.42. *Encontrar los alumnos que están matriculados de todas las asignaturas de primer curso.*

Dividendo:

$$\pi_{DNI,cod\_asig}(matriculas)$$

Divisor:

$$\pi_{cod\_asig}(\sigma_{curso='1'}(asignaturas)$$

Resultado:

$$\pi_{DNI,cod\_asig}(matriculas) \div \pi_{cod\_asig}(\sigma_{curso='1'}(asignaturas))$$

Conviene resaltar en este ejemplo la concordancia de esquemas, de forma que el esquema del dividendo $\{DNI, cod\_asig\}$ incluye al del divisor $\{cod\_asig\}$. También hay que tener en cuenta que el resultado tiene como esquema $\{DNI\}$. Si queremos algún dato más acerca de los alumnos, como por ejemplo el nombre, tendríamos que hacer la correspondiente reunión seguida de una proyección. La expresión final sería:

$$\pi_{alumnos.DNI,alumnos.nom\_alum}(alumnos \bowtie (\pi_{DNI,cod\_asig}(matriculas)\div$$

$$\div\pi_{cod\_asig}(\sigma_{curso='1'}(asignaturas))))$$

Ejemplo 6.43. *Encontrar las asignaturas en las que dan clase todos los profesores del área 'COMPUT' que sean de categoría 'CU'.*

Dividendo:

$$\pi_{cod\_asig,NRP}(grupos)$$

Divisor:

$$\pi_{NRP}(\sigma_{area='COMPUT'\wedge categoria='CU'}(profesores))$$

Resultado final:

$$\pi_{cod\_asig,NRP}(grupos) \div \pi_{NRP}(\sigma_{area='COMPUTA'\wedge categoria='CU'}(profesores)$$

Si quisiéramos el nombre u otros datos de las asignaturas, o, en general, todos los datos de éstas, tendríamos que hacer:

$$(asignaturas) \bowtie (\pi_{cod\_asig,NRP}(grupos)$$

$$\div$$

$$\pi_{NRP}(\sigma_{area='COMPUTA'\wedge categoria='CU'}(profesores)))$$

Nótese que el esquema resultado de esta última expresión es el mismo que el de la tabla *asignaturas*, ya que el resultado de la división tiene como esquema $\{cod\_asig\}$ y esta columna se eliminaría al realizar la reunión natural.

Ejemplo 6.44. *Encontrar los profesores que dan clase a todos los grupos de la asignatura de código 'BDI'.*

$$\pi_{NRP,cod\_grup,tipo,cod\_asig}(grupos)\div\pi_{cod\_grup,tipo,cod\_asig}(\sigma_{cod\_asig='BD1'}(grupos))$$

Ejemplo 6.45. *Encontrar las aulas que están ocupadas todos los días de la semana.*

$$\pi_{dia,cod\_aula}(clase) \div \pi_{dia}(clase)$$

Algunos ejemplos adicionales que se resuelven mediante la división son:

Ejemplo 6.46. *Encontrar aquellas aulas que no tienen ninguna hora libre; es decir, aquéllas que están ocupadas todos los días a todas horas.*

$$\pi_{dia,hora,cod\_aula}(clase) \div \pi_{dia,hora}(clase)$$

Ejemplo 6.47. *Encontrar los días y horas en los que no hay aulas libres; es decir, los días y las horas en los que hay clase en todas las aulas.*

$$\pi_{dia,hora,cod\_aula}(clase) \div \pi_{cod\_aula}(aulas)$$

Ejemplo 6.48. *Encontrar las áreas de conocimiento en las que hay profesores de todas las categorías.*

$$\pi_{area,categoria}(profesores) \div \pi_{categoria}(profesores)$$

Ejemplo 6.49. *Encontrar los departamentos que tienen profesores de todas las categorías.*

$$\pi_{cod\_dep,categoria}(\sigma_{departamentos.cod\_dep=profesores.cod\_dep}$$
$$(profesores \times departamentos))$$
$$\div$$
$$\pi_{categoria}(profesores)$$

6.6. Ejemplos adicionales de consultas

Si bien en el desarrollo de la exposición de los distintos operadores se ha utilizado un buen número de ejemplos, creemos que puede ser interesante ahora un conjunto adicional de ejemplos algo más complejos, que utilicen los distintos operadores y que no estén centrados en aclarar el uso de algún operador concreto.

En estos ejemplos haremos hincapié especialmiente en la "traducción" de la consulta a términos que permitan resolverla mediante AR.

Ejemplo 6.50. *Encontrar los alumnos más jovenes de la base de datos; es decir, aquellos cuya edad es la menor de las de todos los alumnos.*

Para encontrar estos alumnos debemos obtener aquellos alumnos que no tienen ningún otro con una edad menor. Para ello restaremos de los alumnos aquellos para los que existe otro alumno con una edad menor que la suya.

El proceso de resolución de la consulta sería entonces:

- Alumnos para los que existen otros alumnos más jóvenes:

$$\rho(alumnos) = alu$$

$$\pi_{alumnos.DNI,alumnos.nom\_alum}$$

$$(\sigma_{alumnos.edad>alu.edad}(alumnos \times alu))$$

- Resultado final:

$$\pi_{alumnos.DNI,alumnos.nom\_alum}(alumnos)$$

$$-$$

$$\pi_{alumnos.DNI,alumnos.nom\_alum}$$

$$(\sigma_{alumnos.edad>alu.edad}(alumnos \times alu))$$

Ejemplo 6.51. *Encontrar las aulas con mayor capacidad.*

El proceso de resolución de la consulta es el mismo que el anterior:

$$\rho(aulas) = au$$

$$\pi_{cod\_aula}(aulas)$$

$$-$$

$$\pi_{aulas.cod\_aula}(\sigma_{aulas.capacidad<au.capacidad}(aulas \times au)$$

Ejemplo 6.52. *Encontrar las asignaturas que sólo tienen un profesor.*

Para encontrarlas se resta de la tabla ASIGNATURAS aquellas que tienen grupos con profesores distintos:

$$\rho(grupos) = gru$$

$$\pi_{cod\_asig}(asignaturas)$$

$$-$$

$$\pi_{grupos.cod\_asig}(\sigma_{grupos.cod\_asig=gru.cod\_asig}$$

$$_{\wedge grupos.NRP<>gru.NRP}(grupos \times gru))$$

Ejemplo 6.53. *Encontrar los profesores que no dan clase de ninguna asignatura.*

$$\pi_{NRP}(profesores) - \pi_{NRP}(grupos)$$

Ejemplo 6.54. *Encontrar los alumnos repetidores de primer curso, entendiendo por repetidores aquellos alumnos que están matriculados de alguna asignatura de primero y de alguna otra que no es de primer curso.*

$$\pi_{DNI}(matricula \bowtie \sigma_{curso=1}(asignaturas)) \bigcap$$

$$\pi_{DNI}(matricula \bowtie \sigma_{curso\neq 1}(asignaturas))$$

6.7. Extensiones del Álgebra Relacional

Como hemos comentado al principio de este tema, se puede probar que el uso de los ocho operadores del Álgebra Relacional proporciona una expresividad en las consultas equivalente a la de la Lógica de Primer Orden. No obstante, diversos autores han extendido y generalizado estos operadores, con mayor o menor éxito desde el punto de vista de su posterior uso. Las extensiones que más éxito han tenido pertenecen a los siguientes tipos: