

Satisfacción de Restricciones

Javier Béjar

Inteligencia Artificial - 2022/2023 1Q

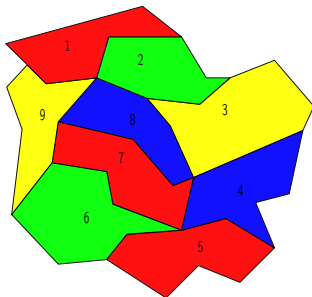
CS - GEI- FIB



Introducción

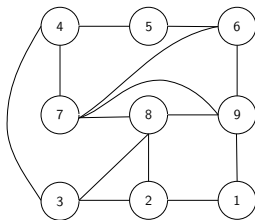
- ⊙ Componentes del estado:
 - Variables
 - Dominios (valores posibles para las variables)
 - Restricciones binarias entre las variables
- ⊙ **Objetivo:** Encontrar un estado que satisfice las restricciones (Asignación de valores a las variables, que satisfaga las restricciones)
- ⊙ Ejemplos:
 - Colorear mapas, crucigramas, 8-reinas, sudoku, ...
 - Asignación/distribución/ubicación de recursos (distribución de tareas de fabricación, ubicación de gasolineras, antenas de telefonía, ...)

- ⊙ Estado = Grafo de restricciones
 - Variables = etiquetas de nodos
 - Dominios = contenido de nodos
 - Restricciones = arcos dirigidos y etiquetados entre nodos
- ⊙ Ejemplo: colorear un mapa



Dominios={Rojo,Verde,Azul,Amarillo}

Restricción := Desigualdad



- ⊙ **Generación y prueba:** enormemente ineficiente
- ⊙ **Búsqueda ciega**
 - Búsqueda en profundidad con backtracking cronológico
- ⊙ **Propagación de restricciones**
 - Antes de la búsqueda
 - Durante la búsqueda

Backtracking Cronológico

- ⊙ Búsqueda en profundidad sobre las variables
- ⊙ Asignar valor por estrategia exhaustiva
 - Comprobar restricciones tras cada posible asignación
 - Si no se satisfacen para ningún valor, backtracking sobre la última asignación válida
- ⊙ La búsqueda se realiza en el espacio de soluciones parciales
- ⊙ Backtracking cronológico: tipos de variables (pasadas, actual, futuras)

Función: `backtracking_cronologico(vfuturas, solucion)`

si `vfuturas.es_vacio?()` **entonces**

retorna `solucion`

sino

`vactual` \leftarrow `vfuturas.primer()`

`vfuturas.borrar_primer()`

para cada $v \in$ `vactual.valores()` **hacer**

`vactual.asignar(v)`

`solucion.anadir(vactual)`

si `solucion.valida()` **entonces**

`solucion` \leftarrow `backtracking_cronologico(vfuturas,solucion)`

si no `solucion.es_fallo?()` **entonces**

retorna `solucion`

sino

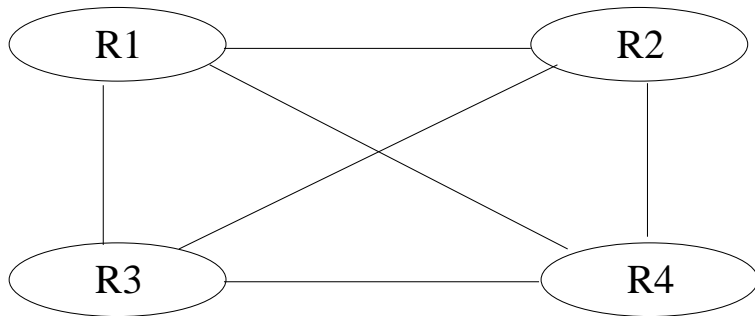
`solucion.borrar(vactual)`

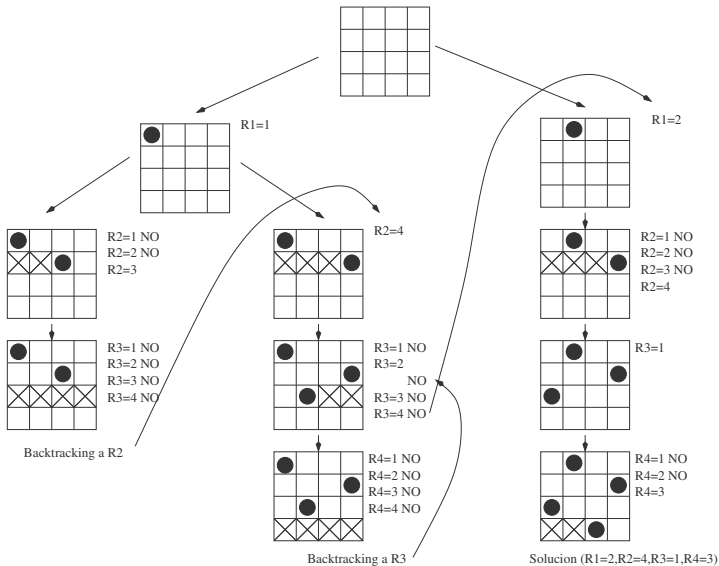
sino

`solucion.borrar(vactual)`

retorna `solucion.fallo()`

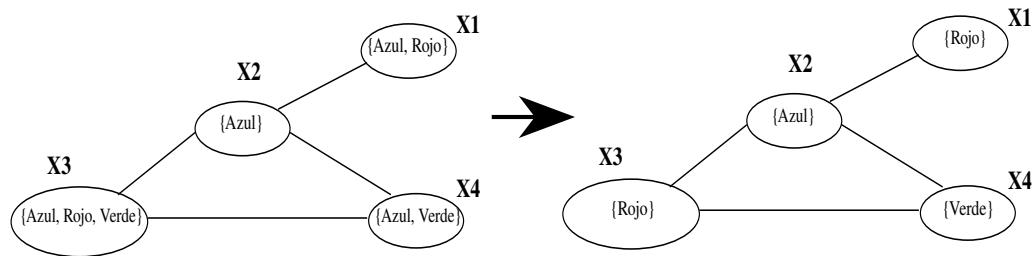
- ⊙ Colocar 4 reinas, 1 en cada fila de un tablero 4x4, sin que se maten
 - Variables: R_1, \dots, R_4 (reinas)
 - Dominios: $[1 \dots 4]$ para cada R_i (columna)
 - Restricciones: R_i no-mata R_j
- ⊙ Grafo de restricciones:





Propagación de restricciones

Un conjunto de restricciones puede inducir otras que estaban implícitas. La propagación de restricciones es el proceso de hacerlas explícitas



El papel de la PR es disminuir el espacio de búsqueda. Debemos realizar la propagación:

1. preproceso (eliminar zonas del espacio donde no hay soluciones)
2. durante el proceso: podar el espacio a medida que la búsqueda progresa (Forward Checking)

Cada ciclo tiene dos partes:

1. Se propagan las restricciones

Se podrían utilizar de reglas de inferencia.

Tener en cuenta que las restricciones no tienen por qué ser independientes

(Muchas restricciones implican a varias variables, una variable participa en muchas restricciones)

2. Se analiza el resultado:

2.1 Solución encontrada

2.2 Solución imposible

2.3 Seguir buscando: proceso heurístico de búsqueda

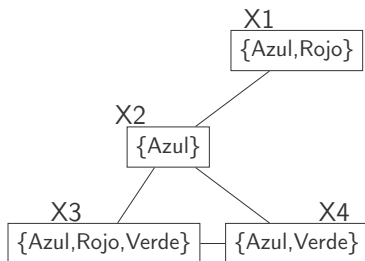
- ⊙ Se pueden definir propiedades sobre los grafos de restricciones que permiten reducir el espacio de búsqueda
 - k-consistencia: Poda de valores que no sean posibles para un grupo de k variables
 - Arco consistencia (2-consistencia): Eliminamos valores imposibles para parejas de variables
 - Camino consistencia (3-consistencia): Eliminamos valores imposibles para ternas de variables
 - ...
- ⊙ Comenzar con un grafo k -consistente (2, 3, ...) reduce el número de backtrackings

- ⊙ Un PSR es arco-consistente si para cada par de variables (X_i, X_j) y para cualquier valor v_k de D_i existe un valor v_l de D_j tal que se satisfacen las restricciones. Es decir, se busca que los valores posibles de X_i sean consistentes con la restricción asociada al arco.
- ⊙ Lo que realmente pretendemos es que todas las variables sean arco consistentes para todos los arcos que inciden en ellas. Es decir, que los dominios actuales de cada variable sean consistentes con todas las restricciones.

Si un PSR no es arco-consistente se le puede convertir mediante el siguiente algoritmo:

Algoritmo: Arco consistencia

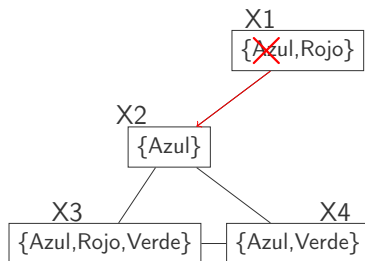
```
R ← conjunto de arcos del problema /* ambos sentidos */
mientras se modifiquen los dominios de las variables hacer
    r ← extraer_arco(R)
    /*  $r_i$  es la variable del origen del arco */
    /*  $r_j$  es la variable del destino del arco */
    para cada  $v \in$  en el dominio de  $r_i$  hacer
        si  $v$  no tiene ningún valor en el dominio de  $r_j$  que cumpla  $r$  entonces
            borrar  $v$  del dominio de  $r_i$ 
            añadir todos los arcos que tengan como destino  $r_i$  menos el  $(r_j \rightarrow r_i)$ 
```



Lista de arcos inicial:

(X1,X2), (X2,X1), (X2,X3),
 (X3,X2), (X2,X4), (X4,X2),
 (X3,X4), (X4,X3)

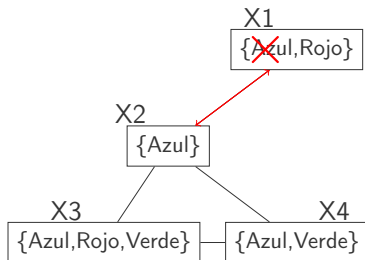
1. $X_1 - X_2 \rightarrow$ Quitar Azul de X_1
2. $X_2 - X_1 \rightarrow$ Todo consistente
3. $X_2 - X_3 \rightarrow$ Todo consistente
4. $X_3 - X_2 \rightarrow$ Quitar Azul de X_3 ,
Tendríamos que añadir $X_4 - X_3$
pero ya está
5. $X_2 - X_4 \rightarrow$ Todo consistente
6. $X_4 - X_2 \rightarrow$ Quitar Azul de X_4 ,
Tendríamos que añadir $X_3 - X_4$
pero ya está
7. $X_3 - X_4 \rightarrow$ Quitar Verde de
 X_3 , Añadimos $X_2 - X_3$
8. $X_4 - X_3 \rightarrow$ Todo consistente
9. $X_2 - X_3 \rightarrow$ Todo consistente



Lista de arcos inicial:

$(X1, X2)$, $(X2, X1)$, $(X2, X3)$,
 $(X3, X2)$, $(X2, X4)$, $(X4, X2)$,
 $(X3, X4)$, $(X4, X3)$

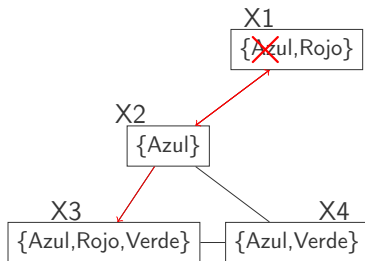
1. $X_1 - X_2 \rightarrow$ Quitar Azul de X_1
2. $X_2 - X_1 \rightarrow$ Todo consistente
3. $X_2 - X_3 \rightarrow$ Todo consistente
4. $X_3 - X_2 \rightarrow$ Quitar Azul de X_3 ,
Tendríamos que añadir $X_4 - X_3$
pero ya está
5. $X_2 - X_4 \rightarrow$ Todo consistente
6. $X_4 - X_2 \rightarrow$ Quitar Azul de X_4 ,
Tendríamos que añadir $X_3 - X_4$
pero ya está
7. $X_3 - X_4 \rightarrow$ Quitar Verde de
 X_3 , Añadimos $X_2 - X_3$
8. $X_4 - X_3 \rightarrow$ Todo consistente
9. $X_2 - X_3 \rightarrow$ Todo consistente



Lista de arcos inicial:

(X1,X2), (X2,X1), (X2,X3),
 (X3,X2), (X2,X4), (X4,X2),
 (X3,X4), (X4,X3)

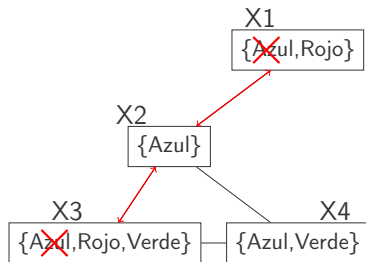
1. $X_1 - X_2 \rightarrow$ Quitar Azul de X_1
2. $X_2 - X_1 \rightarrow$ Todo consistente
3. $X_2 - X_3 \rightarrow$ Todo consistente
4. $X_3 - X_2 \rightarrow$ Quitar Azul de X_3 ,
Tendríamos que añadir $X_4 - X_3$
pero ya está
5. $X_2 - X_4 \rightarrow$ Todo consistente
6. $X_4 - X_2 \rightarrow$ Quitar Azul de X_4 ,
Tendríamos que añadir $X_3 - X_4$
pero ya está
7. $X_3 - X_4 \rightarrow$ Quitar Verde de
 X_3 , Añadimos $X_2 - X_3$
8. $X_4 - X_3 \rightarrow$ Todo consistente
9. $X_2 - X_3 \rightarrow$ Todo consistente



Lista de arcos inicial:

(X1,X2), (X2,X1), (X2,X3),
 (X3,X2), (X2,X4), (X4,X2),
 (X3,X4), (X4,X3)

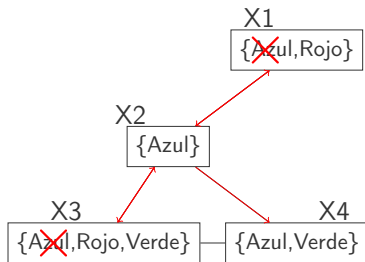
1. $X_1 - X_2 \rightarrow$ Quitar Azul de X_1
2. $X_2 - X_1 \rightarrow$ Todo consistente
3. $X_2 - X_3 \rightarrow$ Todo consistente
4. $X_3 - X_2 \rightarrow$ Quitar Azul de X_3 ,
Tendríamos que añadir $X_4 - X_3$
pero ya está
5. $X_2 - X_4 \rightarrow$ Todo consistente
6. $X_4 - X_2 \rightarrow$ Quitar Azul de X_4 ,
Tendríamos que añadir $X_3 - X_4$
pero ya está
7. $X_3 - X_4 \rightarrow$ Quitar Verde de
 X_3 , Añadimos $X_2 - X_3$
8. $X_4 - X_3 \rightarrow$ Todo consistente
9. $X_2 - X_3 \rightarrow$ Todo consistente



Lista de arcos inicial:

(X_1, X_2) , (X_2, X_1) , (X_2, X_3) ,
 (X_3, X_2) , (X_2, X_4) , (X_4, X_2) ,
 (X_3, X_4) , (X_4, X_3)

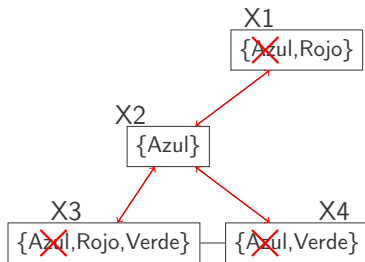
1. $X_1 - X_2 \rightarrow$ Quitar Azul de X_1
2. $X_2 - X_1 \rightarrow$ Todo consistente
3. $X_2 - X_3 \rightarrow$ Todo consistente
4. $X_3 - X_2 \rightarrow$ Quitar Azul de X_3 ,
Tendríamos que añadir $X_4 - X_3$
pero ya está
5. $X_2 - X_4 \rightarrow$ Todo consistente
6. $X_4 - X_2 \rightarrow$ Quitar Azul de X_4 ,
Tendríamos que añadir $X_3 - X_4$
pero ya está
7. $X_3 - X_4 \rightarrow$ Quitar Verde de
 X_3 , Añadimos $X_2 - X_3$
8. $X_4 - X_3 \rightarrow$ Todo consistente
9. $X_2 - X_3 \rightarrow$ Todo consistente



Lista de arcos inicial:

(X_1, X_2) , (X_2, X_1) , (X_2, X_3) ,
 (X_3, X_2) , (X_2, X_4) , (X_4, X_2) ,
 (X_3, X_4) , (X_4, X_3)

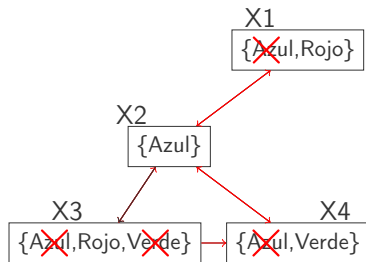
1. $X_1 - X_2 \rightarrow$ Quitar Azul de X_1
2. $X_2 - X_1 \rightarrow$ Todo consistente
3. $X_2 - X_3 \rightarrow$ Todo consistente
4. $X_3 - X_2 \rightarrow$ Quitar Azul de X_3 ,
Tendríamos que añadir $X_4 - X_3$
pero ya está
5. $X_2 - X_4 \rightarrow$ Todo consistente
6. $X_4 - X_2 \rightarrow$ Quitar Azul de X_4 ,
Tendríamos que añadir $X_3 - X_4$
pero ya está
7. $X_3 - X_4 \rightarrow$ Quitar Verde de
 X_3 , Añadimos $X_2 - X_3$
8. $X_4 - X_3 \rightarrow$ Todo consistente
9. $X_2 - X_3 \rightarrow$ Todo consistente



Lista de arcos inicial:

(X_1, X_2) , (X_2, X_1) , (X_2, X_3) ,
 (X_3, X_2) , (X_2, X_4) , (X_4, X_2) ,
 (X_3, X_4) , (X_4, X_3)

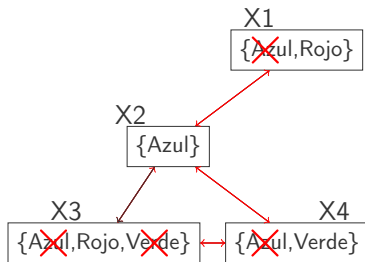
1. $X_1 - X_2 \rightarrow$ Quitar Azul de X_1
2. $X_2 - X_1 \rightarrow$ Todo consistente
3. $X_2 - X_3 \rightarrow$ Todo consistente
4. $X_3 - X_2 \rightarrow$ Quitar Azul de X_3 ,
Tendríamos que añadir $X_4 - X_3$
pero ya está
5. $X_2 - X_4 \rightarrow$ Todo consistente
6. $X_4 - X_2 \rightarrow$ Quitar Azul de X_4 ,
Tendríamos que añadir $X_3 - X_4$
pero ya está
7. $X_3 - X_4 \rightarrow$ Quitar Verde de
 X_3 , Añadimos $X_2 - X_3$
8. $X_4 - X_3 \rightarrow$ Todo consistente
9. $X_2 - X_3 \rightarrow$ Todo consistente



Lista de arcos inicial:

(X_1, X_2) , (X_2, X_1) , (X_2, X_3) ,
 (X_3, X_2) , (X_2, X_4) , (X_4, X_2) ,
 (X_3, X_4) , (X_4, X_3)

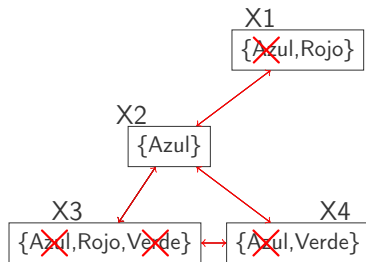
1. $X_1 - X_2 \rightarrow$ Quitar Azul de X_1
2. $X_2 - X_1 \rightarrow$ Todo consistente
3. $X_2 - X_3 \rightarrow$ Todo consistente
4. $X_3 - X_2 \rightarrow$ Quitar Azul de X_3 ,
Tendríamos que añadir $X_4 - X_3$
pero ya está
5. $X_2 - X_4 \rightarrow$ Todo consistente
6. $X_4 - X_2 \rightarrow$ Quitar Azul de X_4 ,
Tendríamos que añadir $X_3 - X_4$
pero ya está
7. $X_3 - X_4 \rightarrow$ Quitar Verde de
 X_3 , Añadimos $X_2 - X_3$
8. $X_4 - X_3 \rightarrow$ Todo consistente
9. $X_2 - X_3 \rightarrow$ Todo consistente



Lista de arcos inicial:

(X_1, X_2) , (X_2, X_1) , (X_2, X_3) ,
 (X_3, X_2) , (X_2, X_4) , (X_4, X_2) ,
 (X_3, X_4) , (X_4, X_3)

1. $X_1 - X_2 \rightarrow$ Quitar Azul de X_1
2. $X_2 - X_1 \rightarrow$ Todo consistente
3. $X_2 - X_3 \rightarrow$ Todo consistente
4. $X_3 - X_2 \rightarrow$ Quitar Azul de X_3 ,
Tendríamos que añadir $X_4 - X_3$
pero ya está
5. $X_2 - X_4 \rightarrow$ Todo consistente
6. $X_4 - X_2 \rightarrow$ Quitar Azul de X_4 ,
Tendríamos que añadir $X_3 - X_4$
pero ya está
7. $X_3 - X_4 \rightarrow$ Quitar Verde de
 X_3 , Añadimos $X_2 - X_3$
8. $X_4 - X_3 \rightarrow$ Todo consistente
9. $X_2 - X_3 \rightarrow$ Todo consistente



Lista de arcos inicial:

(X_1, X_2) , (X_2, X_1) , (X_2, X_3) ,
 (X_3, X_2) , (X_2, X_4) , (X_4, X_2) ,
 (X_3, X_4) , (X_4, X_3)

1. $X_1 - X_2 \rightarrow$ Quitar Azul de X_1
2. $X_2 - X_1 \rightarrow$ Todo consistente
3. $X_2 - X_3 \rightarrow$ Todo consistente
4. $X_3 - X_2 \rightarrow$ Quitar Azul de X_3 ,
Tendríamos que añadir $X_4 - X_3$
pero ya está
5. $X_2 - X_4 \rightarrow$ Todo consistente
6. $X_4 - X_2 \rightarrow$ Quitar Azul de X_4 ,
Tendríamos que añadir $X_3 - X_4$
pero ya está
7. $X_3 - X_4 \rightarrow$ Quitar Verde de
 X_3 , Añadimos $X_2 - X_3$
8. $X_4 - X_3 \rightarrow$ Todo consistente
9. $X_2 - X_3 \rightarrow$ Todo consistente

Forward Checking

- ⊙ Modificación del algoritmo de búsqueda en profundidad con backtracking cronológico (introducimos la propagación de restricciones después de cada asignación)
- ⊙ **Anticipación:** detectar cuanto antes caminos sin solución y podarlos.
 - Asignar un valor y consultar las restricciones sobre las variables futuras con arco desde la actual
 - Se eliminan valores no compatibles de los dominios correspondientes a dichas variables futuras
- ⊙ Equivale a hacer arco-consistente la variable actual con las futuras en cada paso
- ⊙ La eficiencia dependerá del problema (**incrementamos el coste de cada iteración**)

Función: forward checking (vfuturas, solucion)

si *vfuturas.es_vacio?()* **entonces**

retorna *solucion*

sino

vactual \leftarrow *vfuturas.primer()*

vfuturas.borrar_primer()

para cada *v* \in *vactual.valores()* **hacer**

vactual.asignar(v)

solucion.anadir(vactual)

vfuturas.propagar_restricciones(vactual) /* forward checking

*/

si no *vfuturas.algun_dominio_vacio?()* **entonces**

solucion \leftarrow *forward_checking(vfuturas,solucion)*

si no *solucion.es_fallo?()* **entonces**

retorna *solucion*

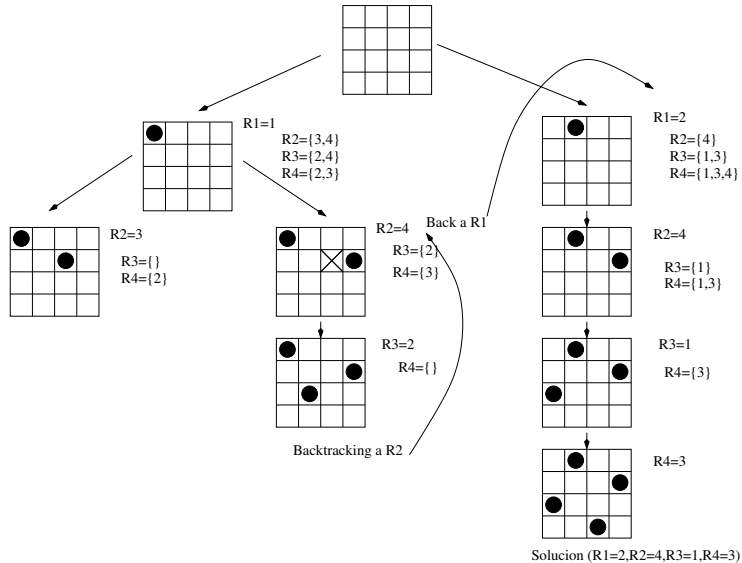
sino

solucion.borrar(vactual)

sino

solucion.borrar(vactual)

retorna *solucion.fallo()*



Otras heurísticas

La búsqueda con backtracking puede mejorarse

- ⊙ Comprobando consistencias mas restrictivas (con mayor coste)
 - Haciendo arco consistente todo el problema a cada paso (Algoritmo MAC)
- ⊙ Escogiendo el orden de prueba de las variables
 - ¿Cuándo?
 - Antes de la búsqueda (orden fijo)
 - Durante la búsqueda (orden variable)
 - ¿Que orden?
 - Primero variables con mas restricciones
 - Primero variables con menos valores
 - La reordenación de variables puede reducir el tiempo de búsqueda varios ordenes de magnitud en ciertos problemas