École de technologie supérieure

MAT 265 – Équations différentielles

# Devoir 4

par :
David Muradov

4 juin 2025

## 2.8

a) La forme générale du taux de variation de la quantité d'acide dans un contenant est :

$$\frac{dq}{dt} = \text{taux en entrée} - \text{taux en sortie}$$

On pose les conditions suivantes selon le contexte :

$$\begin{aligned} C_e &= 0.15,\ \ D_e = 5 \\ D_s &= 6 \\ q(t_0) &= 0.004 \cdot 100 = 0.4 \end{aligned}$$

Le taux d'acide en entrée est :

$$C_e \cdot D_e = 5 \cdot 0.15 = 0.75$$

Le taux d'acide en sortie dépend de la quantité actuelle d'acide et du volume total. En particulier, la quantité d'acide en tout temps est $q$ alors que le volume total diminue de 1 litre à chaque minute. Le taux de sortie est donc :

$$6 \cdot \frac{q}{100 - t}$$

L'équation différentielle devient :

$$\frac{dq}{dt} = 0.75 - 6 \cdot \frac{q}{100 - t}$$

On résout avec la Ti :

$$\text{deSolve}\left(\frac{dq}{dt} = 0.75 - 6 \cdot \frac{q}{100 - t} \text{ and } q(0) = 0.4, t, q\right)$$

On obtient :

$$q(t) = 0.4 + 0.726t - 0.0219t^2 + 2.92 \cdot 10^{-4}t^3 - 2.19 \cdot 10^{-6}t^4 + 8.76 \cdot 10^{-9}t^5 - 1.46 \cdot 10^{-11}t^6$$

b) La concentration atteint 10% quand :

$$\frac{q(t)}{100 - t} = 0.1$$

On fait un solve avec la Ti :

$$\text{solve}\left(\frac{q(t)}{100 - t} = 0.1, t\right)$$

On trouve $t = 19.29$ minutes.

## 4.1

e) L'EDO à résoudre est :

$$y'' + y' + y = 0$$

L'équation caractéristique est :

$$m^2 + m + 1 = 0$$

Le delta est :

$$\Delta = 1 - 4 = -3$$

Les racines du polynôme sont :

$$r_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Étant donnée les deux racines complexes distinctes, la solution à l'équation est :

$$y = e^{-\frac{1}{2}x} \left( C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$$

h) L'EDO à résoudre est :

$$16x'' - 8x' + x = 0$$

L'équation caractéristique est :

$$16m^2 - 8m + 1 = 0$$

Le delta est :

$$\Delta = 64 - 64 = 0$$

Les racines du polynôme sont :

$$r_{1,2} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

Étant donnée la racine réelle répétée, la solution est :

$$x = C_1 t e^{\frac{1}{4}t} + C_2 e^{\frac{1}{4}t}$$

## 4.2

c) L'EDO à résoudre est :

$$s'' + 16s' + 64s = 0$$

L'équation caractéristique est :

$$m^2 + 16m + 64 = 0$$

Le delta est :

$$\Delta = 16^2 - 4 \cdot 64 = 0$$

Les racines du polynôme sont :

$$r_{1,2} = -\frac{16}{2} = -8$$

Étant donnée la racine réelle répétée, la solution est :

$$s = C_1 t e^{-8t} + C_2 e^{-8t}$$

On calcule $C_2$ :

$$\begin{aligned} s(0) = 0 = C_2 \cdot 1 &\iff C_2 = 0 \\ \implies s(t) = C_1 t e^{-8t} & \end{aligned}$$

On calcule $s'$ :

$$s' = C_1 \left( e^{-8t} - 8te^{-8t} \right)$$

On calcule $C_1$ :

$$\begin{aligned} s'(0) = -4 = C_1 \cdot 1 &\iff C_1 = -4 \\ \implies s(t) = -4te^{-8t} & \end{aligned}$$