École de technologie supérieure

MAT 265 – Équations différentielles

Devoir 7

par :
David Muradov

7 juillet 2025

5.13

d) On tente de calculer la transformée de Laplace de :

$$f(t) = e^{2t}u(t-3) - e^{-3t}u(t-2)$$

On applique la transformée :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(f(t)\right) &= \mathcal{L}\left(e^{2t}u(t-3) - e^{-3t}u(t-2)\right) \\
&= e^{-3s}\mathcal{L}\left(e^{2(t+3)}\right) - e^{-2s}\mathcal{L}\left(e^{-3(t+2)}\right) \\
&= e^{6}e^{-3s}\mathcal{L}\left(e^{2t}\right) - e^{-6}e^{-2s}\mathcal{L}\left(e^{-3t}\right) \\
&= e^{-3(s-2)}\mathcal{L}\left(e^{2t}\right) - e^{-2(s+3)}\mathcal{L}\left(e^{-3t}\right)
\end{aligned}$$

En utilisant les tables de transformée, on trouve donc :

$$\mathcal{L}\left(f(t)\right) = \frac{e^{-3(s-2)}}{s-2} - \frac{e^{-2(s+3)}}{s+3}$$

5.14

d) Selon la fonction définie par partie, on déduit qu'on aura besoin des fonctions échelons suivantes :

$$u(t),\ u(t-2),\ u(t-4)$$

Pour chaque morceau du domaine, on place en facteur des fonctions échelons l'opposé de la fonction précédente plus la fonction suivante, d'où :

$$\begin{aligned}
f(t) &= 5u(t) + (-5 + (2+t))u(t-2) + (-(2+t) + (4-t^2))u(t-4) \\
&= 5u(t) + (t-3)u(t-2) + (2-t-t^2)u(t-4)
\end{aligned}$$

On calcule la transformée de Laplace en utilisant les tables :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f(t)) &= \frac{5}{s} + e^{-2s}\mathcal{L}(t-3+2) + e^{-4s}\mathcal{L}\Big(-(t+4)^2 - (t+4) + 2\Big) \\
&= \frac{5}{s} + e^{-2s}\mathcal{L}(t-1) + e^{-4s}\mathcal{L}\Big(-t^2 - 9t - 18\Big) \\
&= \frac{5}{s} + e^{-2s}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}\right) - e^{-4s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{9}{s^2} + \frac{18}{s}\right)
\end{aligned}$$

5.15

b) On tente de calculer l'expression suivante :

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-5s}}{s^3} + \left(\frac{5s-1}{s^2+4}\right)e^{-4s}\right) = \mathcal{L}^{-1}(f(t))$$

On procède à quelques manipulations algébriques :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}(f(t)) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2e^{-5s}}{2s^3} + \left(\frac{5s-1}{s^2+4}\right)e^{-4s}\right) \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-5s}\frac{2}{s^{2+1}}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5s-1}{s^2+4}\cdot e^{-4s}\right) \\
&= \frac{1}{2}(t-5)^2u(t-5) + \mathcal{L}^{-1}\left(e^{-4s}\left(5\cdot\frac{s}{s^2+2^2} - \frac{1}{s^2+2^2}\right)\right)
\end{aligned}$$

La transformée inverse de :

$$5 \cdot \frac{s}{s^2+2^2} - \frac{1}{s^2+2^2}$$

nous donne la fonction inverse :

$$F(s) = 5\cos(2t) - \frac{1}{2}\sin(2t)$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}(f(t)) &= \frac{1}{2}(t-5)^2 u(t-5) + \mathcal{L}^{-1}\left(e^{-4s}F(s)\right) \\
&= \frac{1}{2}(t-5)^2 u(t-5) + \left(5\cos(2(t-4)) - \frac{1}{2}\sin(2(t-4))\right)u(t-4)
\end{aligned}$$

5.16

h) On tente de résoudre l'ÉDO suivante :

$$y'' + 2y' - 3y = \delta(t-1) - \delta(t-2) \quad y(0) = 2,\ y'(0) = -2$$

On applique la transformée de Laplace :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(y'' + 2y' - 3y) &= \mathcal{L}(\delta(t-1) - \delta(t-2)) \\
s^2Y - sy(0) - y'(0) + 2(sY - y(0)) - 3Y &= e^{-s} - e^{-2s} \\
s^2Y - 2s + 2 + 2sY - 4 - 3Y &= e^{-s} - e^{-2s} \\
Y(s^2 + 2s - 3) - 2s - 2 &= e^{-s} - e^{-2s} \\
Y &= \frac{e^{-s} - e^{-2s} + 2s + 2}{s^2 + 2s - 3}
\end{aligned}$$

En appelant la fonction expand de la Ti sur cette expression, on obtient :

$$Y = -\frac{1}{4}e^{-s}\frac{1}{s+3} + \frac{1}{4}e^{-s}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{4}e^{-2s}\frac{1}{s+3} - \frac{1}{4}e^{-2s}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+3} + \frac{1}{s-1}$$

En prenant la transformée inverse et en factorisant, on obtient :

$$\begin{aligned}
y(t) &= -\frac{1}{4}u(t-1)e^{-3(t-1)} + \frac{1}{4}u(t-1)e^{t-1} + \frac{1}{4}u(t-2)e^{-3(t-2)} - \frac{1}{4}u(t-2)e^{t-2} + e^{-3t} + e^t \\
&= \frac{1}{4}u(t-1)\left(e^{t-1} - e^{-3t+3}\right) + \frac{1}{4}u(t-2)\left(e^{-3t+6} - e^{t-2}\right)e^{-3t} + e^t
\end{aligned}$$

5.23

d) On tente de résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}
x' - 3x - 6y &= 27t^2 \quad x(0) = 5,\ y(0) = -1 \\
x' + y' - 3y &= 5e^t
\end{aligned}$$

On applique la transformée de Laplace sur les deux équations. Sur la première, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(x' - 3x - 6y) &= 27\mathcal{L}\left(t^2\right) \\
sX - x(0) - 3X - 6Y &= 27 \cdot \frac{2}{s^3} \\
sX - 5 - 3X - 6Y &= \frac{54}{s^3}
\end{aligned}$$

Sur la deuxième, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x' + y' - 3y) &= 5\mathcal{L}\Big(e^t\Big)\\ sX - x(0) + sY - y(0) - 3Y &= \frac{5}{s-1}\\ sX - 5 + sY + 1 - 3Y &= \frac{5}{s-1}\end{aligned}$$

On résout le système avec un appel à la fonction solve de la Ti et on obtient les deux fonctions suivante :

$$X = \frac{5s^3 + 4s^2 - 24s + 18}{s^3(s-1)},\ Y = -\frac{s^2 + 6s - 6}{s^2(s-1)}$$

En faisant appel à la fonction expand de la Ti, on obtient les expressions simplifiées :

$$X = \frac{3}{s-1} + \frac{2}{s} + \frac{6}{s^2} - \frac{18}{s^3},\ Y = -\frac{1}{s-1} - \frac{6}{s^2}$$

En prenant la transformée inverse de X et de Y, on obtient :

$$\begin{aligned}x(t) &= 3e^t + 2 + 6t - 9t^2\\ y(t) &= -e^t - 6t\end{aligned}$$