École de technologie supérieure

MAT 265 – Équations différentielles

Devoir 3

par :
David Muradov

25 mai 2025

2.8

Ceci est un problème de refroidissement de Newton. La température ambiante fixe est celle de l'air dehors qui est à -15. Le millieu qui se refroidit est la température à l'intérieur de la chambre. On pose les conditions initiales suivantes :

$$T(0) = 20, \quad T(1) = 16, \quad T_A = -15$$

La solution à l'équation différientielle qui régit ce phénomène est :

$$T(t) = T_A + Ce^{kt}$$

On calcule la valeur de C :

$$\begin{aligned} T(0) = 20 &= -15 + Ce^0 \\ C &= 35 \end{aligned}$$

On calcule la valeur de k :

$$\begin{aligned} T(1) = 16 &= -15 + 35e^k \\ 35e^k &= 31 \\ e^k &= \frac{31}{35} \\ k &= \ln\left(\frac{31}{35}\right) = -0.121 \end{aligned}$$

La fonction de température est donc :

$$T(t) = -15 + 35e^{-0.121t}$$

À 5h le matin, la température est :

$$T(6) = -15 + 35e^{-0.121\cdot 6} = 1.898$$

2.37

e) L'EDO initiale est :

$$\sqrt{1+x^3}\,\frac{dy}{dx} = x^2y + x^2$$

En factorisant par x^2, on voit que l'équation est à variables séparables :

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x^3}\,\frac{dy}{dx} &= x^2(y+1) \\ \frac{1}{y+1}\frac{dy}{dx} &= \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} \end{aligned}$$

L'équation est aussi une équation linéaire :

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x^3}\,\frac{dy}{dx} - x^2y &= x^2 \\ \frac{dy}{dx} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}y &= \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} \end{aligned}$$

On résout l'équation à variables séparables :

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{y+1}\ dy &= \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}\ dx \\ \ln(y+1) &= \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}\ dx + C\end{aligned}$$

On pose :

$$u = 1+x^3, \quad du = 3x^2\ dx, \quad x^2\ dx = \frac{1}{3}\ du$$

L'intégrale devient :

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}\ dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\ du = \frac{2}{3}\sqrt{u} = \frac{2}{3}\sqrt{1+x^3}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\ln(y+1) &= \frac{2}{3}\sqrt{1+x^3} + C \\ y+1 &= C_1 e^{\frac{2}{3}\sqrt{1+x^3}} \\ y &= C_1 e^{\frac{2}{3}\sqrt{1+x^3}} - 1\end{aligned}$$

e) L'EDO initiale est :

$$y' = x(x+y)$$

C'est une équation linéaire d'ordre 1 :

$$\begin{aligned}y' &= x^2 + xy \\ y' - xy &= x^2\end{aligned}$$

On pose :

$$P(x) = -x,\ Q(x) = x^2$$

Le facteur intégrant est :

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\ dx} = e^{\int -x\ dx} = e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

La solution à l'équation différientielle est :

$$y = Ce^{\frac{1}{2}x^2} + e^{\frac{1}{2}x^2}\int x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2}\ dx$$

Ceci est la solution donnée dans le manuel. L'intégrale non résolue ne s'exprime pas en termes de fonctions élémentaires, mais on peut quand même essayer de trouver une solution non triviale. On tente de résoudre l'intégrale :

$$\int x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2}\ dx = \int x \cdot x e^{-\frac{1}{2}x^2}\ dx$$

On fait l'intégration par parties :

	D	I
+	x	$xe^{-\frac{1}{2}x^2}$
-	1	$-e^{-\frac{1}{2}x^2}$
+	0	

Pour compléter le tableau, il faut résoudre l'intégrale suivante :

$$-\int e^{-\frac{1}{2}x^2}\ dx$$

Étant donné le x^2 dans l'exponentielle, on s'attend à obtenir la fonction d'erreur de Gauss. On voudrait trouver une valeur u telle que :

$$\begin{aligned} u^2 &= \frac{1}{2}x^2 \\ u &= \frac{x}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

On utilise ce u pour faire une substitution :

$$du = \frac{dx}{\sqrt{2}},\ dx = \sqrt{2}\ du$$

L'intégrale devient :

$$\begin{aligned} -\int e^{-\frac{1}{2}x^2}\ dx &= -\sqrt{2}\int e^{-u^2}\ du \\ &= -\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int e^{-u^2}\ du \\ &= -\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\operatorname{erf}(u) \\ &= -\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\cdot\operatorname{erf}(u) \\ &= -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\operatorname{erf}(u) \\ &= -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

On complète le tableau d'intégration par parties :

	D	I
+	x	$xe^{-\frac{1}{2}x^2}$
-	1	$-e^{-\frac{1}{2}x^2}$
+	0	$-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$

La solution finale est donc :

$$
\begin{aligned}
y(x) &= Ce^{\frac{1}{2}x^2} + e^{\frac{1}{2}x^2}\left(-xe^{-\frac{1}{2}x^2} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right) \\
&= Ce^{\frac{1}{2}x^2} - x + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)e^{\frac{1}{2}x^2}
\end{aligned}
$$

3.5

a) On pose les conditions initiales suivantes :

$$g = 9.81,\ m = 90,\ v(0) = 50,\ x(0) = 0$$

Le référentiel utilisé est celui où la position initiale du parachutiste est de 0 et pour lequel l'axe de mouvement rectiligne est orienté vers le centre de la terre (tout phénomène orienté vers le sol est considéré positif). Les deux forces qui agissent sur le parachutiste sont :

$$F_1 = mg,\ F_2 = -20v^2$$

La loi de Newton donne :

$$
\begin{aligned}
\sum F = mg - 20v^2 &= m\frac{dv}{dt} \\
\iff v' &= g - \frac{20}{m}v^2
\end{aligned}
$$

On utilise la TI pour trouver la solution de cette EDO. On tape la commande suivante pour obtenir directement $v(t)$:

$$\text{solve}\left(\text{deSolve}\left(v' = g - \frac{20}{m}\cdot v^2 \text{ and } v(0) = 50, t, v\right), v\right)$$

On obtient alors deux solutions :

$$v(t) = 6.644\cdot\frac{19.163^t - 0.765}{19.163^t + 0.765} \text{ ou } v(t) = 6.644\cdot\frac{19.163^t + 0.765}{19.163^t - 0.765}$$

En posant $t = 0$, on trouve que la solution qui donne la bonne vitesse initiale de 50 est :

$$v(t) = 6.644\cdot\frac{19.163^t + 0.765}{19.163^t - 0.765}$$

b) Pour trouver la vitesse terminale, il suffit de prendre la limite quand t tend vers l'infini :

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} v(t) &= \lim_{t\to\infty} 6.644\cdot\frac{19.163^t + 0.765}{19.163^t - 0.765} \\
&= 6.644\cdot\lim_{t\to\infty}\frac{19.163^t + 0.765}{19.163^t - 0.765} \\
&= 6.644\cdot\lim_{t\to\infty}\frac{1 + \frac{0.765}{19.163^t}}{1 - \frac{0.765}{19.163^t}} \\
&= 6.644\cdot 1^+ \\
v_l &= 6.644
\end{aligned}
$$

c) Pour trouver le temps pour atterrir au sol, il faut résoudre l'EDO suivante :

$$x'(t) = 6.644 \cdot \frac{19.163^t + 0.765}{19.163^t - 0.765}$$

On utilise la TI pour la résoudre :

$$\text{solve}\left(\text{deSolve}\left(x' = 6.644 \cdot \frac{19.163^t + 0.765}{19.163^t - 0.765} \text{ and } x(0) = 0, t, x\right), x\right)$$

Ensuite, il suffit de faire un solve pour t sur le résultat obtenu pour $x = 1500$. Puisque la calculatrice peut avoir des difficultés à trouver une solution, on lui donne une contrainte sur t. La contrainte a été trouvée par essais erreurs :

$$\text{solve}\left(1500 = 4.5 \cdot \ln(((4.378^t - 0.874 \cdots))), t\right) \mid t > 200$$

On obtient $t = 224.79$ secondes.