École de technologie supérieure

MAT 265 – Équations différentielles

Devoir 6

par :
David Muradov

25 juin 2025

5.3

g) On tente de calculer la transformée de Laplace de :

$$\mathcal{L}\left((1+e^t)^2\right)$$

En développant l'expression, on obtient :

$$\mathcal{L}\left(1+2e^t+e^{-(-2)t}\right)$$

En utilisant la linéarité et les tables de transformée, on trouve donc :

$$\mathcal{L}\left((1+e^t)^2\right)=\frac{1}{s}+\frac{2}{s-1}+\frac{1}{s-2}$$

5.8

g) On tente de calculer la transformée inverse suivante :

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3s+1}{s^2-6s+13}\right)$$

En séparant 13 en 9 + 4 et en utilisant les tableaux de transformée, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3s+1}{s^2-6s+9+4}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3s+1}{(s-3)^2+2^2}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3s}{(s-3)^2+2^2}+\frac{1}{(s-3)^2+2^2}\right)\\
&= 3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s-3)^2+2^2}\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-3)^2+2^2}\right)\\
&= 3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-3+3}{(s-3)^2+2^2}\right)+\frac{1}{2}e^{3t}\sin(2t)\\
&= 3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-3}{(s-3)^2+2^2}\right)+9\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-3)^2+2^2}\right)\\
&= 3e^{3t}\cos(2t)+\frac{9}{2}e^{3t}\sin(2t)+\frac{1}{2}e^{3t}\sin(2t)\\
&= 3e^{3t}\cos(2t)+5e^{3t}\sin(2t)
\end{aligned}$$

h) On tente de calculer la transformée inverse suivante :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-1}{s^2+2s+2}-\frac{1}{s^2+s+1}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-1}{(s+1)^2+1^2}-\frac{1}{s^2+s+1}\right)\\
&= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(s+1)-1-1}{(s+1)^2+1^2}-\frac{1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right)\\
&= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+1^2}\right)-2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2+1^2}\right)-\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right)\\
&= e^{-t}\cos(t)-2e^{-t}\sin(t)-\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)
\end{aligned}$$

5.9

g) On tente de calculer la transformée inverse suivante :

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s^2+24s-8}{s^3+8s^2+8s+64}\right)$$

En utilisant la commande expand() de la TI, on obtient :

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3s}{s^2+8}-\frac{1}{s+8}\right)=3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+\left(\sqrt{8}\right)^2}\right)-\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+8}\right)=3\cos\left(\sqrt{8}t\right)-e^{-8t}$$

5.10

g) On tente de résoudre l'ÉDO suivante :

$$y''-4y'+4y=25t^2e^{-3t},\ y(0)=0,\ y'(0)=2$$

On applique le Laplacien sur l'équation :

$$\mathcal{L}\left(y''-4y'+4y\right)=25\mathcal{L}\left(t^2e^{-3t}\right)$$

Par la propriété de translation, nous avons que :

$$\mathcal{L}\left(t^2e^{-3t}\right)=\frac{2}{(s+3)^3}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(y''-4y'+4y\right)&=\frac{50}{(s+3)^3}\\
s^2Y-sy(0)-y'(0)-4(sY-y(0))+4Y&=\frac{50}{(s+3)^3}\\
s^2Y-2-4sY+4Y&=\frac{50}{(s+3)^3}\\
Y\left(s^2-4s+4\right)&=\frac{50}{(s+3)^3}+2\\
Y&=\frac{50}{(s+3)^3(s^2-4s+4)}+\frac{2}{s^2-4s+4}\\
Y&=\frac{50}{(s+3)^3(s-2)^2}+\frac{2}{s^2-4s+4}
\end{aligned}$$

En prenant la transformée inverse et en utilisant un expand() avec la TI, on obtient l'équation suivante à résoudre :

$$\begin{aligned}
y&=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{6}{25}\cdot\frac{1}{s+3}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{(s+3)^2}+2\cdot\frac{1}{(s+3)^3}-\frac{6}{25}\cdot\frac{1}{s-2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{(s-2)^2}\right)+2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-2)^2}\right)\\
&=\frac{6}{25}e^{-3t}+\frac{4}{5}te^{-3t}+t^2e^{-3t}-\frac{6}{25}e^{2t}+\frac{2}{5}te^{2t}+2te^{2t}
\end{aligned}$$