École de technologie supérieure

MAT 265 – Équations différentielles

Devoir 5

par :
David Muradov

8 juin 2025

4.8

c) On vérifie que la fonction $y_1 = x$ est solution de l'ÉDO :

$$\begin{aligned} -\frac{x}{x-1} + \frac{1}{x-1} \cdot x &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

On pose :

$$P(x) = -\frac{x}{x-1},\ Q(x) = \frac{1}{x-1}$$

Alors :

$$v' = \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y^2} = \frac{e^{\int \frac{x}{x-1} dx}}{x^2}$$

On résout l'intégrale suivante :

$$\int \frac{x}{x-1}\ dx$$

En intégrant par parties, le résultat de l'intégrale est :

$$\int \frac{x}{x-1}\ dx = \ln(x-1) + x - 1 + C$$

On a donc :

$$v' = \frac{e^{\ln(x-1)+x-1+C}}{x^2} = \frac{C_1(xe^x - e^x)}{x^2}$$

En intégrant par parties encore, on trouve que :

$$v = \left(C_1 \frac{e^x}{x} + C_2\right)$$

La deuxième solution est alors :

$$y_2 = vy_1 = \left(C_1 \frac{e^x}{x} + C_2\right) \cdot x = C_1 e^x + C_2 x$$

4.14

f) L'ÉDO à résoudre est :

$$y''' - 13y' - 12y = 2e^{-3x} - 5e^{-4x}$$

L'équation caractéristique est :

$$m^3 - 13m - 12 = 0$$

Les racines sont :

$$\begin{aligned} (m+1)(m-4)(m+3) &= 0 \\ m_{1,2,3} &= -1, -3, 4 \end{aligned}$$

La solution homogène est :

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + C_3 e^{4x}$$

Le candidat de la solution particulière choisit est :

$$y_p = 2Axe^{-3x} - 5Be^{-4x}$$

En passant par dessus toutes les étapes de dérivations et d'algèbre, on trouve l'équation suivante en insérant y_p dans l'ÉDO :

$$\begin{gathered} 28Ae^{-3x} + 120Be^{-4x} = 2e^{-3x} + -5e^{-4x} \\ A = \frac{1}{14},\ B = -\frac{1}{24} \end{gathered}$$

D'où :

$$y_p = \frac{1}{7}xe^{-3x} + \frac{5}{24}e^{-4x}$$

La solution finale est :

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + C_3 e^{4x} + \frac{1}{7}xe^{-3x} + \frac{5}{24}e^{-4x}$$

g) L'ÉDO à résoudre est :

$$2x'' + 4x' = 3t + 4e^{-t}$$

Son équation caractéristique est :

$$2m^2 + 4m = 0$$

Les racines sont :

$$\begin{aligned} m(m+2) &= 0 \\ m_{1,2} &= 0, -2 \end{aligned}$$

La solution homogène est :

$$x_h = C_1 + C_2 e^{-2t}$$

Étant donné qu'il n'y a que des dérivées dans l'ÉDO pour x, on choisit le candidat modifié suivant :

$$x_p = At^2 + Bt + C + De^{-t}$$

En calculant les dérivées sur x_p et en insérant dans l'ÉDO, on trouve :

$$4A + 2De^{-t} + 8At + 4B - 4De^{-t} = 3t + 4e^{-t}$$

D'ici il en découle que :

$$D = -2,\ A = \frac{3}{8},\ B = -\frac{3}{8},\ C = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

La solution générale proposée est :

$$x = C_1 + C_2 e^{-2t} + \frac{3}{8}t^2 - \frac{3}{8}t - 2e^{-t}$$

En utilisant les conditions initiales données, on trouve que :

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2 - 2 \\ -\frac{1}{4} &= -2C_2 - \frac{3}{8} + 2 \\ \implies C_2 &= \frac{15}{16},\ C_1 = \frac{17}{16} \end{aligned}$$

La solution devient :

$$x = \frac{17}{16} + \frac{15}{16}e^{-2t} + \frac{3}{8}t^2 - \frac{3}{8}t - 2e^{-t}$$

4.15

f) L'ÉDO à résoudre est :

$$y'' + 6y' + 9y = 4e^{-3x}\ln(x)$$

Son équation caractéristique est :

$$m^2 + 6m + 9 = 0$$

Les racines sont :

$$\begin{aligned} (m+3)^2 &= 0 \\ m &= -3 \end{aligned}$$

La solution homogène est :

$$y_h = C_1 x e^{-3x} + C_2 e^{-3x}$$

On pose :

$$y_p = L_1 u_1 + L_2 u_2$$

Le système d'équation à résoudre est :

$$\begin{aligned} &L_1' x e^{-3x} + L_2' e^{-3x} = 0 \\ &L_1'(e^{-3x} - 3xe^{-3x}) + L_2'(-3e^{-3x}) = 4e^{-3x}\ln(x) \end{aligned}$$

En résolvant le système d'équations, on trouve que :

$$\begin{aligned} L_1' &= 4\ln(x) \\ L_2' &= -4x\ln(x) \end{aligned}$$

En intégrant, on déduit que :

$$\begin{aligned} L_1 &= 4(x\ln(x) - x) \\ L_2 &= -x^2(2\ln(x) - 1) \end{aligned}$$

La solution générale est :

$$\begin{aligned} y &= C_1 x e^{-3x} + C_2 e^{-3x} + 4(x\ln(x) - x)xe^{-3x} - x^2(2\ln(x) - 1)e^{-3x} \\ &= C_1 x e^{-3x} + C_2 e^{-3x} + x^2 e^{-3x}(2\ln(x) - 3) \end{aligned}$$

f) L'ÉDO à résoudre est :

$$y'' + 4y = \sin^2(x)$$

Son équation caractéristique est :

$$m^2 + 4 = 0$$

Les racines sont :

$$m = \pm 2i$$

La solution homogène est :

$$y_h = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$$

On pose :

$$y_p = L_1 u_1 + L_2 u_2$$

Le système d'équation à résoudre est :

$$\begin{aligned} L_1' \cos(2x) + L_2' \sin(2x) = 0 \\ L_1'(-2\sin(2x)) + L_2'(2\cos(2x)) = \sin^2(x) \end{aligned}$$

Avec la Ti, on résout le système et on intègre. On trouve que :

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{\sin^4(x)}{4} \\ L_2 &= \frac{-\sin(2x)\cos(2x) + 2(\sin(2x) - x)}{16} \end{aligned}$$

La solution générale est :

$$y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + L_1 \cos(2x) + L_2 \sin(2x)$$

5.1

a)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le vecteur v_1 n'est pas un vecteur propre de la matrice, car aucun scalaire λ ne peut multiplier v_1 pour obtenir le résultat obtenu.
b)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le vecteur v_2 est un vecteur propre de la matrice avec $\lambda = 1$
c)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Le vecteur v_3 n'est pas un vecteur propre de la matrice, car aucun scalaire λ ne peut multiplier v_3 pour obtenir le résultat obtenu.
d)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Le vecteur v_4 est un vecteur propre de la matrice avec $\lambda = -1$

5.2

a) Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

On calcule les valeurs propres avec la Ti :

$$\text{linalgcas} \backslash \text{eigenvals}(A) \implies \lambda_{1,2} = -3, 2$$

Le vecteur propre associé à $\lambda = -3$ est :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Le vecteur propre associé à $\lambda = 2$ est :

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Puisque les deux valeurs propres sont réelles et distinctes, la solution au système d'équation est :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

b) Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On calcule les valeurs propres avec la Ti :

$$\text{linalgcas} \backslash \text{eigenvals}(A) \implies \lambda_{1,2} = -1 + 2i, -1 - 2i$$

Le vecteur propre associé à $\lambda = -1 + 2i$ est :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{i}{2} \end{pmatrix}$$

Le vecteur propre associé à $\lambda = -1 - 2i$ est :

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i}{2} \end{pmatrix}$$

On pose aussi :

$$v_{\lambda_1} = u_1 + iu_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Puisque les deux valeurs propres sont complexes et distinctes, la solution au système d'équation est :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(2t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sin(2t) \right) + C_2 e^{-t} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(2t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cos(2t) \right)$$

c) Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On calcule les valeurs propres avec la Ti :

$$\text{linalgcas \textbackslash eigenvals}(A) \implies \lambda = 1$$

Le vecteur propre associé à $\lambda = 1$ est :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On calcule $(A - \lambda I)$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Soit $w \in \mathbb{R}^2$. On résout le système d'équation suivant :

$$\begin{aligned} 2w_1 - 4w_2 &= 1 \\ w_1 - 2w_2 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Un vecteur w possible qui résout ce système est :

$$w = (5/2, 1)$$

Puisque la matrice n'admet qu'une seule valeur propre, la solution au système d'équation est :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} e^t + C_2 \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right) e^t$$