École de technologie supérieure

MAT 265 – Équations différentielles

Devoir 8

par :
David Muradov

14 juillet 2025

6.3

a) On pose les conditions suivantes selon le problème :

$$m = 20,\ s = 0.98,\ k = mg/s = 20 \cdot 9.8/0.98 = 200,\ y(0) = 0.1,\ y'(0) = -1$$

L'ÉDO à résoudre est :

$$20y'' + 140y' + 200y = 0$$

En utilisant la fonction ets_specfunc\solved sur la Ti sur l'ÉDO précédente, on trouve :

$$\text{ets\_specfunc\textbackslash solved}\left(20 \cdot \frac{d^2}{dt^2}y(t) + 140 \cdot \frac{d}{dt}y(t) + 200 \cdot y(t) = 0, \{y(t), 0.1, -1\}\right)$$
$$\implies y(t) = \frac{4}{15}e^{-5t} - \frac{1}{6}e^{-2t}$$

Il s'agit d'un mouvement sur-amorti car :

$$b^2 - 4km = 140^2 - 4 \cdot 200 \cdot 20 = 3600 > 0$$

b) L'objet repasse par le point d'équilibre lorsque $y(t_m) = 0$. On utilise la fonction solve de la Ti pour trouver le temps t_m :

$$\text{solve}\left(0 = \frac{4}{15}e^{-5t} - \frac{1}{6}e^{-2t}, t\right)$$
$$\implies t_m = 0.1567$$

c) Maintenant, on pose $s = 0.098$. Dans ce cas, la constante de rappel est :

$$k_2 = \frac{20 \cdot 9.8}{0.098} = 2000$$

La nouvelle ÉDO à résoudre est :

$$20y'' + 140y' + 2000y = 0$$

En utilisant la fonction ets_specfunc\solved sur la Ti sur l'ÉDO précédente, on trouve :

$$\text{ets\_specfunc\textbackslash solved}\left(20 \cdot \frac{d^2}{dt^2}y(t) + 140 \cdot \frac{d}{dt}y(t) + 2000 \cdot y(t) = 0, \{y(t), 0.1, -1\}\right)$$
$$\implies y(t) = e^{-7t/2}\left(\frac{1}{10}\cos\left(\frac{3\sqrt{39}}{2}t\right) - \frac{\sqrt{39}}{90}\sin\left(\frac{3\sqrt{39}}{2}t\right)\right)$$

Il s'agit d'un mouvement sous-amorti car :

$$b^2 - 4km = 140^2 - 4 \cdot 2000 \cdot 20 = -140\ 400 < 0$$

d) Pour un amortissement critique, on cherche un k tel que :

$$b^2 - 4km = 0 \iff k = \frac{b^2}{4m} = \frac{140^2}{4 \cdot 20} = 245$$

À partir de cette donnée, on peut trouver l'étirement nécessaire :

$$k = \frac{mg}{s} \iff s = \frac{mg}{k} = \frac{20 \cdot 9.8}{245} = 0.8$$

6.5

a) On pose les conditions suivantes selon le problème :

$$m = 8,\ s = 1.96,\ b = 3,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ f(t) = \cos(3t)$$

La constante de rappel est :

$$k = \frac{mg}{s} = \frac{8 \cdot 9.8}{1.96} = 40$$

L'ÉDO à résoudre est :

$$8y'' + 3y' + 40y = \cos(3t)$$

En utilisant la fonction ets_specfunc\solved sur la Ti sur l'ÉDO précédente, on trouve :

$$\begin{aligned}
&\text{ets_specfunc\textbackslash solved}\left(8 \cdot \frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3 \cdot \frac{d}{dt}y(t) + 40y(t) = \cos(3t), \{y(t), 0, 0\}\right) \\
&\implies y(t) = e^{-3t/16}\left(\frac{32}{1105}\cos\left(\frac{\sqrt{41}\sqrt{31}}{16}t\right) - \frac{336\sqrt{41}\sqrt{31}}{1404455}\sin\left(\frac{\sqrt{41}\sqrt{31}}{16}t\right)\right) \\
&\qquad - \frac{32}{1105}\cos(3t) + \frac{9}{1105}\sin(3t)
\end{aligned}$$

On déduit que le régime permanent est :

$$y_{perm} = -\frac{32}{1105}\cos(3t) + \frac{9}{1105}\sin(3t)$$

6.8

a) On pose les conditions suivantes selon le problème :

$$m = 1,\ k = 100,\ b = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ f(t) = 36\cos(8t)$$

L'ÉDO à résoudre est :

$$y'' + 100y = 36\cos(8t)$$

On prend la transformée de Laplace des deux bords de l'équation :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(y'' + 100y) &= 36\mathcal{L}(\cos(8t)) \\
s^2Y - sy(0) - y'(0) + 100Y &= 36 \cdot \frac{s}{s^2 + 8^2} \\
Y(s^2 + 10^2) &= 36 \cdot \frac{s}{s^2 + 8^2} \\
Y &= \frac{36s}{(s^2 + 10^2)(s^2 + 8^2)}
\end{aligned}$$

On utilise la fonction expand de la Ti sur l'expression précédente pour obtenir le résultat suivant :

$$Y = \frac{s}{s^2 + 8^2} - \frac{s}{s^2 + 10^2}$$

On prend la transformée inverse en utilisant les tables de transformées. On obtient alors :

$$\mathcal{L}^{-1}(Y) = y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+8^2} - \frac{s}{s^2+10^2}\right)$$
$$y(t) = \cos(8t) - \cos(10t)$$

Soit l'identité trigonométrique suivante :

$$2\sin(\theta)\sin(\phi) = \cos(\theta-\phi) - \cos(\theta+\phi)$$

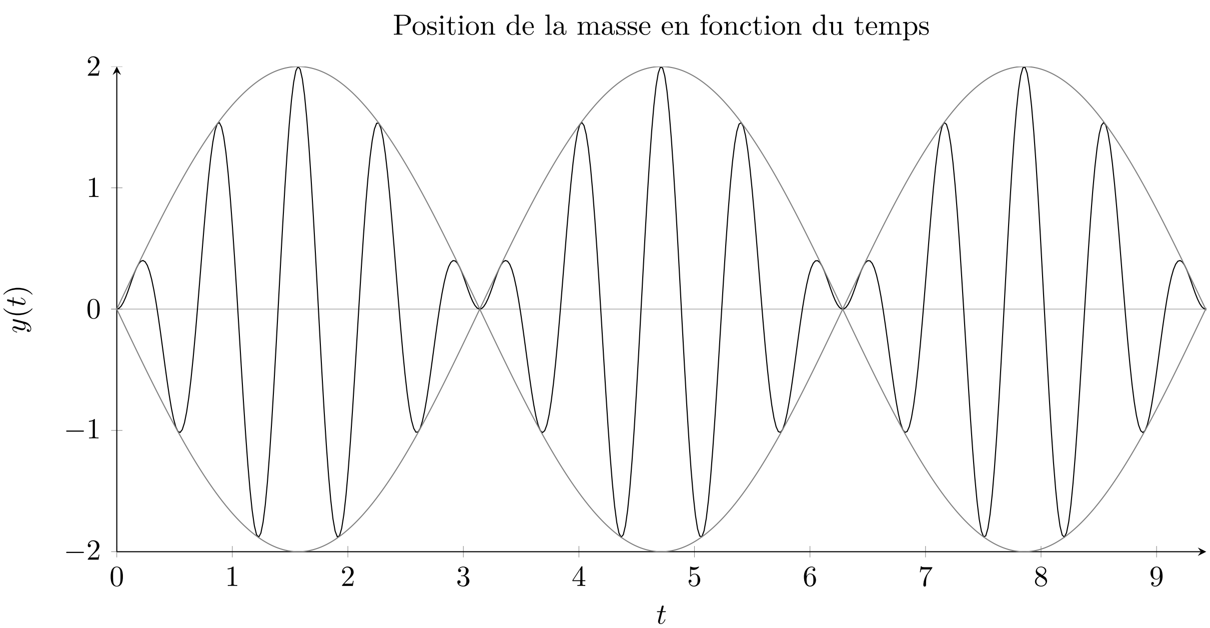
Si on pose :

$$\theta = t,\ \phi = 9t$$

alors :

$$\begin{aligned} 2\sin(t)\sin(9t) &= \cos(t-9t) - \cos(t+9t) \\ &= \cos(-8t) - \cos(10t) \\ &= \cos(8t) - \cos(10t) \\ 2\sin(t)\sin(9t) &= y(t) \end{aligned}$$

b) Voici le graphique de $y(t)$:



6.11

a) On pose les conditions suivantes selon le problème :

$$e(t) = 12e^{-2t},\ L = \frac{1}{5},\ R = 2,\ C = \frac{1}{10},\ v_c(0) = 6,\ v_c'(0) = 0$$
$$LC = \frac{1}{50},\ RC = \frac{1}{5}$$

L'ÉDO à résoudre est :

$$\frac{1}{50}v_c'' + \frac{1}{5}v_c' + v_c = 12e^{-2t}$$

En utilisant la fonction ets_specfunc\solved sur la Ti sur l'ÉDO précédente, on trouve :

$$\text{ets\_specfunc\textbackslash solved}\left(\frac{1}{50}\cdot\frac{d^2}{dt^2}y(t)+\frac{1}{5}\cdot\frac{d}{dt}y(t)+y(t)=12e^{-2t},\{y(t),6,0\}\right)$$
$$\implies v_c(t)=e^{-5t}\left(-\frac{198}{17}\cos(5t)-\frac{78}{17}\sin(5t)\right)+\frac{300}{17}e^{-2t}$$

Sans faire une analyse sur la fonction, on ne peut connaître le comportement détaillé de la fonction $v_c(t)$, mais on peut voir que la tension commence bien à 6 Volts et qu'elle tend vers 0 lorsque $t \to \infty$ puisque tous les termes sont facteurs d'exponentielles décroissantes.

b) On a :

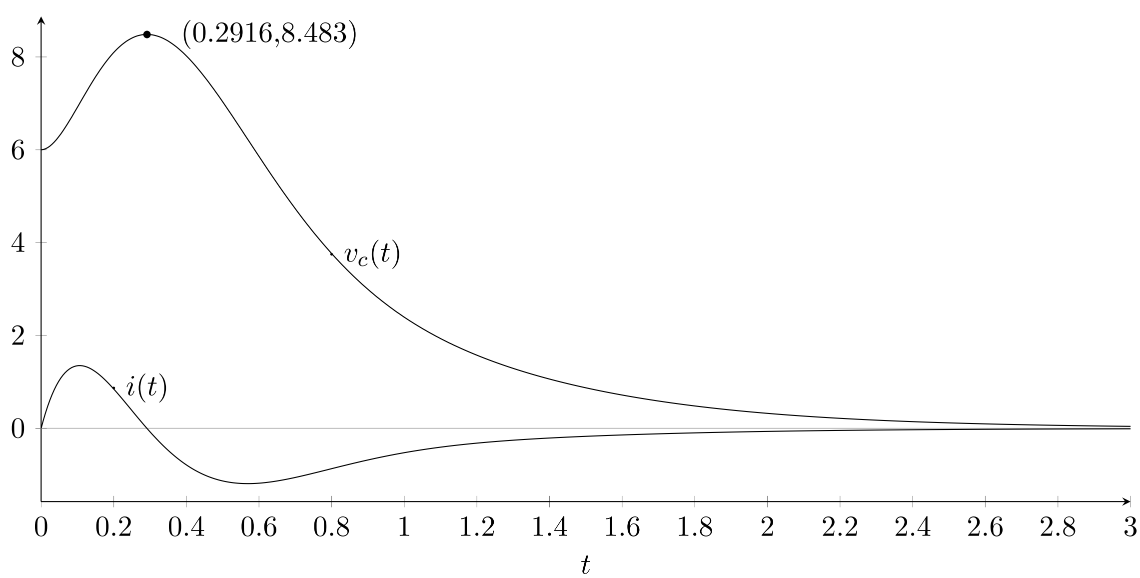
$$i(t)=C\frac{dv_c(t)}{dt}$$

On délègue le calcul de la dérivée à la Ti. On obtient :

$$i(t)=e^{-5t}\left(\frac{60}{17}\cos(5t)+\frac{138}{17}\sin(5t)\right)-\frac{60}{17}e^{-2t}$$

c) Voici le graphique pour $v_c(t)$ et $i(t)$:

Tension et courant en fonction du temps



d) La tension maximale est obtenue lorsque $v_c'(t)=0$. On utilise la fonction solve de la Ti :

$$\text{solve}\left(0=\frac{dv_c(t)}{dt},t\right)$$
$$\implies t=0.2916$$

En mettant cette valeur de temps dans $v_c(t)$, on trouve que la tension maximale est de 8.483 Volts. Le courant à cet instant là est nul, car :

$$i(0.2916)=C\frac{dv_c(t)}{dt}|_{t=0.2916}$$

or :

$$\frac{dv_c(t)}{dt}|_{t=0.2916}=0 \implies i(0.2916)=0$$

6.17

a) On pose les conditions suivantes selon le problème :

$$e(t) = 2\delta(t-1),\ L = 2,\ R = 50,\ C = 0.005,\ v_c(0) = 10,\ v_c'(0) = 0$$
$$LC = 0.01,\ RC = 0.25$$

L'ÉDO à résoudre est :

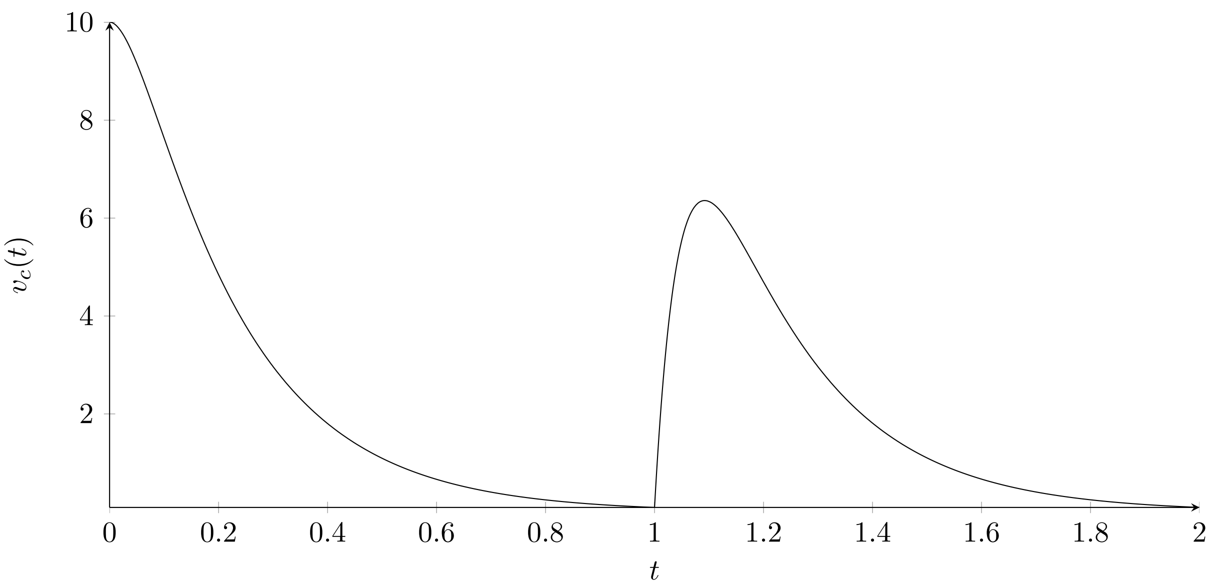
$$0.01v_c'' + 0.25v_c' + v_c = 2\delta(t-1)$$

En utilisant la fonction ets_specfunc\solved sur la Ti sur l'ÉDO précédente, on trouve :

$$\text{ets\_specfunc\textbackslash solved}\left(0.01 \cdot \frac{d^2}{dt^2}y(t) + 0.25 \cdot \frac{d}{dt}y(t) + y(t) = 2\delta(t-1), \{y(t), 10, 0\}\right)$$
$$\implies v_c(t) = \frac{40}{3}\left(e^{5-5t} - e^{20-20t}\right)u(t-1) + \frac{10}{3}\left(4e^{-5t} - e^{-20t}\right)u(t)$$

b) Voici le graphique de la tension :

Tension du condensateur en fonction du temps



10.1

a) On tente de résoudre l'équation suivante :

$$u_x - 2u_y = 0,\ u(0, y) = 2y$$

On pose :

$$a(x, y) = 1,\ b(x, y) = -2$$

On cherche à trouver la solution de l'équation suivante :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y)}{a(x, y)} = -2 \implies y = -2x + C \iff y + 2x = C$$

On pose :

$$g(x, y) = y + 2x$$

d'où :

$$\begin{gathered} u(x, y) = f(g(x, y)) = f(y + 2x) \\ u(0, y) = 2y = f(y + 0) = f(y) \\ u(x, y) = 2(y + 2x) = 4x + 2y \end{gathered}$$

10.2

Pour une fonction $F(t)$ de forme sinusoïdale, le régime permanent est :

$$y_p = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \dfrac{b\omega^2}{m}}} \cos(\omega t + \delta)$$

Soit la nouvelle fonction $G(t) = 2F(t)$, alors :

$$G(t) = 2F_0 \cos(\omega t)$$

et son régime permanent est :

$$y_{pg} = \frac{2F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \dfrac{b\omega^2}{m}}} \cos(\omega t + \delta) = 2y_p$$

On remarque que l'amplitude est deux fois plus grande. Cependant, ceci n'est vérifié que pour une excitation sinusoïdale, il faudrait passer par un calcul plus détaillé pour observer ce qui se produit pour une fonction $F(t)$ quelconque (par exemple, en calculant la transformée de Laplace de l'ÉDO et en vérifiant si un régime transitoire et permanent existent et refaire le calcule pour $G(t) = 2F(t)$ pour produire des observations).