École de technologie supérieure

MAT 265 – Équations différentielles

Devoir 3

---

par :
David Muradov

23 mai 2025

2.8

Ceci est un problème de refroidissement de Newton. La température ambiante fixe est celle de l'air dehors qui est à -15. Le millieu qui se refroidit est la température à l'intérieur de la chambre. On pose les conditions initiales suivantes :

$$T(0) = 20, \quad T(1) = 16, \quad T_A = -15$$

La solution à l'équation différientielle qui régit ce phénomène est :

$$T(t) = T_A + Ce^{kt}$$

On calcule la valeur de C :

$$\begin{aligned} T(0) = 20 &= -15 + Ce^0 \\ C &= 35 \end{aligned}$$

On calcule la valeur de k :

$$\begin{aligned} T(1) = 16 &= -15 + 35e^k \\ 35e^k &= 31 \\ e^k &= \frac{31}{35} \\ k &= \ln\left(\frac{31}{35}\right) = -0.121 \end{aligned}$$

La fonction de température est donc :

$$T(t) = -15 + 35e^{-0.121t}$$

À 5h le matin, la température est :

$$T(6) = -15 + 35e^{-0.121 \cdot 6} = 1.898$$

2.37

e) L'EDO initiale est :

$$\sqrt{1+x^3}\,\frac{dy}{dx} = x^2y + x^2$$

En factorisant par x^2, on voit que l'équation est à variables séparables :

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x^3}\,\frac{dy}{dx} &= x^2(y+1) \\ \frac{1}{y+1}\frac{dy}{dx} &= \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} \end{aligned}$$

L'équation est aussi une équation linéaire :

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x^3}\,\frac{dy}{dx} - x^2y &= x^2 \\ \frac{dy}{dx} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}y &= \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} \end{aligned}$$

On résout l'équation à variables séparables :

$$\int \frac{1}{y+1}\ dy = \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}\ dx$$
$$\ln(y+1) = \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}\ dx + C$$

On pose :

$$u = 1+x^3, \quad du = 3x^2\ dx, \quad x^2\ dx = \frac{1}{3}\ du$$

L'intégrale devient :

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}\ dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\ du = \frac{2}{3}\sqrt{u} = \frac{2}{3}\sqrt{1+x^3}$$

Donc :

$$\ln(y+1) = \frac{2}{3}\sqrt{1+x^3} + C$$
$$y+1 = C_1 e^{\frac{2}{3}\sqrt{1+x^3}}$$
$$y = C_1 e^{\frac{2}{3}\sqrt{1+x^3}} - 1$$