École de technologie supérieure

MAT 265 – Équations différentielles

Devoir 2

par :
David Muradov

23 mai 2025

2.24

c) On tente de résoudre l'équation suivante :

$$(y \ln(y) + ye^x)\ dx + (x + y\cos(y))\ dy = 0$$

On pose :

$$M(x,y) = y\ln(y) + ye^x, \quad N(x,y) = x + y\cos(y)$$

On vérifie si cette équation est exacte :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \ln(y) + 1 + e^x, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

L'équation n'est pas exacte car les deux dérivées partielles ne sont pas équivalentes. On calcule donc le terme suivant :

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{\ln(y) + e^x}{y(\ln(y) + e^x)} = \frac{1}{y} = g(y)$$

Puisque ce terme est une expression qui ne dépend que de y on peut trouver un facteur intégrant qui rend l'équation différentielle exacte. Ce terme est :

$$\mu(y) = e^{\int -g(y)\ dy} = \frac{1}{y}$$

La nouvelle équation exacte est :

$$\frac{1}{y} \cdot M(x,y) + \frac{1}{y} \cdot N(x,y) = 0$$
$$(\ln(y) + e^x)\ dx + \left(\frac{x}{y} + \cos(y)\right)\ dy = 0$$

On pose les deux équations suivantes :

$$V(x,y) = \int (\ln(y) + e^x)\ dx = x\ln(y) + e^x + A(y)$$
$$V(x,y) = \int \left(\frac{x}{y} + \cos(y)\right)\ dy = x\ln(y) + \sin(y) + B(x)$$

On en déduit que $A(y) = \sin(y)$ et que $B(x) = e^x$ et que la solution finale est :

$$V(x,y) = x\ln(y) + e^x + \sin(y) = C$$

2.28

a) On tente de résoudre l'EDO suivante par séparation de variable :

$$y' = e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

On obtient l'égalité suivante :

$$\int e^y\ dy = \int e^x\ dx \iff e^y = e^x + C \iff y = \ln(e^x + C)$$

b) On tente de résoudre la même équation avec le changement de variable $v = x - y$. On obtient donc :

$$\begin{aligned} v &= x - y \\ y &= x - v \\ y' &= 1 - v' \\ 1 - v' &= e^v \\ v' &= 1 - e^v \end{aligned}$$

Ceci est une équation à variables séparables. On obtient l'équation suivante :

$$\int \frac{1}{1 - e^v} \, dv = \int 1 \, dx = x + C$$

On procède à la résolution de l'intégrale suivante :

$$\int \frac{1}{1 - e^v} \, dv = -\int \frac{1}{e^v - 1} \, dv$$

On pose la substitution suivante :

$$\begin{gathered} u = e^v - 1 \implies du = e^v \, dv \\ dv = \frac{du}{e^v}, \quad e^v = u + 1 \end{gathered}$$

On obtient donc :

$$-\int \frac{1}{e^v - 1} \, dv = \int \frac{1}{u(u+1)} \, du$$

On résout cette intégrale avec la décomposition en fractions partielles. On calcule les coefficients A et B tels que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{u(u+1)} &= \frac{A}{u} + \frac{B}{u+1} \\ 1 &= A(u+1) + Bu \end{aligned}$$

En posant $u = -1$ et $u = 0$, on trouve B et A respectivement :

$$B = -1, \quad A = 1$$

L'intégrale finale à résoudre est :

$$\begin{aligned} -\int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \right) \, du &= -(\ln(u) - \ln(u+1) + C) \\ &= -(\ln(e^v - 1) - \ln(e^v) + C) \\ &= -\ln(e^v - 1) + v + C_1 \\ &= -\ln(e^{x-y} - 1) + x - y + C_1 \end{aligned}$$

L'équation finale est :

$$\begin{aligned} -\ln(e^{x-y} - 1) + x - y + C_1 &= x + C \\ y + \ln(e^{x-y} - 1) &= C_2 \end{aligned}$$

c) On reprend l'équation précédente et on effectue les manipulations algébriques suivantes :

$$\begin{aligned}
y + \ln(e^{x-y} - 1) &= C_2 \\
\ln(e^{x-y} - 1) &= C_2 - y \\
-\ln(e^{x-y} - 1) &= C_3 + y \\
\ln\left(\frac{1}{e^{x-y} - 1}\right) &= C_3 + y \\
\frac{1}{e^{x-y} - 1} &= C_4 e^y \\
1 &= C_4 e^y \left(\frac{e^x}{e^y} - 1\right) \\
1 &= C_4 \left(-e^y + e^x\right) \\
C_5 &= -e^y + e^x \\
e^y &= e^x + C_6 \\
y &= \ln\left(e^x + C_5\right)
\end{aligned}$$

2.29

c) On tente de résoudre :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} + \frac{t}{x} = \frac{x}{t} + \left(\frac{x}{t}\right)^{-1}$$

Sous cette forme, on voit que c'est une équation homogène de la forme :

$$x' = F\left(\frac{x}{t}\right)$$

L'EDO à résoudre est donc :

$$v't + v = v + \frac{1}{v} \iff v't = \frac{1}{v}$$

C'est une équation à variables séparables :

$$\begin{aligned}
\int v \; dv &= \int \frac{1}{t} \; dt \\
\frac{1}{2}v^2 &= \ln(t) + C \\
\frac{x^2}{t^2} &= 2\ln(t) + C_1 \\
x^2 &= 2t^2\ln(t) + C_1 t^2
\end{aligned}$$

2.30

c) On tente de résoudre :

$$x' = 3x^2 e^t - x \iff x' + x = 3e^t x^2$$

C'est une équation de Bernoulli avec $n = 2$. On pose :

$$p(t) = 1, \quad q(t) = 3e^t, \quad v = x^{-1}$$

L'EDO à résoudre est :

$$v' - v = -3e^t$$

C'est une équation linéaire d'ordre 1 qui a pour facteur intégrant :

$$\mu(t) = e^{\int -1 \, dt} = e^{-t}$$

La solution à cette équation est :

$$v = Ce^t + e^t \int -3e^{-t}e^t \, dt = Ce^t - 3te^t = e^t(C - 3t)$$

On trouve la solution finale :

$$v = \frac{1}{x} = e^t(C - 3t)$$
$$x(t) = \frac{1}{e^t(C - 3t)}$$