École de technologie supérieure

MAT 265 – Équations différentielles

Devoir 1

par :
David Muradov

23 mai 2025

1.7

a) On sait que la vitesse d'une particule est en fait la dérivée de la position par rapport au temps. On dénote la vitesse par $\dot{x}$, x étant la position de la particule. Nous avons alors l'équation différientielle suivante :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = e^{-t} + t\cos(t) + \sin(t),\ x(0) = -1$$

C'est une équation directement intégrable :

$$\begin{aligned} \int 1\ dx &= \int \left(e^{-t} + t\cos(t) + \sin(t)\right)\ dt \\ x(t) &= -e^{-t} + \int t\cos(t)\ dt - \cos(t) + C \\ x(t) &= -e^{-t} + t\sin(t) + \cos(t) - \cos(t) + C \\ x(t) &= -e^{-t} + t\sin(t) + C \end{aligned}$$

Avec la condition initiale donnée, on trouve que la solution particulière est :

$$\begin{aligned} -1 &= -1 + 0 + C \\ 0 &= C \\ \implies x(t) &= -e^{-t} + t\sin(t) \end{aligned}$$

b) À $t = 10$ et en faisant le calcul du sinus en radians, la position de la particule est :

$$\begin{aligned} x(10) &= -e^{-10} + 10 \cdot \sin(10) \\ x(10) &= -5.44 \end{aligned}$$

Ensuite, à $t = 10$, la vitesse de la particule est :

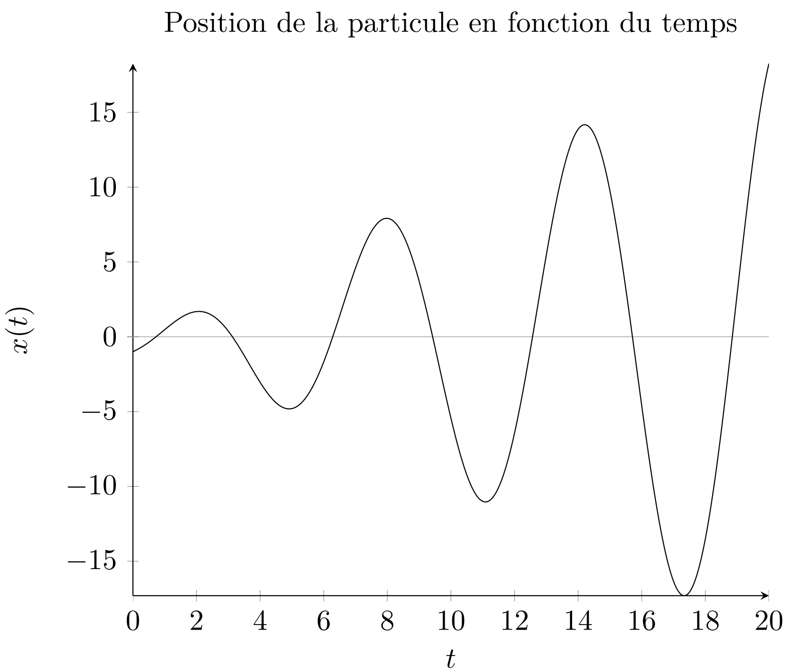
$$\begin{aligned} \dot{x}(10) &= e^{-10} + 10 \cdot \cos(10) + \sin(10) \\ \dot{x}(10) &= -8.93 \end{aligned}$$

Finalement, pour trouver l'accélération, on dérive la vitesse de la particule et on l'évalue à $t = 10$:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -e^{-t} + \cos(t) - t\sin(t) + \cos(t) \\ \ddot{x} &= -e^{-t} + 2\cos(t) - t\sin(t) \\ \ddot{x}(10) &= -e^{-10} + 2\cos(10) - 10 \cdot \sin(10) \\ \ddot{x}(10) &= 3.76 \end{aligned}$$

La particule se situe à 5.44 mètres à gauche de l'origine, elle se déplace à une vitesse instantanée de 8.93 mètres par seconde vers la gauche et elle décélère instantanément de 3.76 mètres par seconde par seconde.

c) Puisqu'il est difficile de déterminer de manière analytique et exacte le nombre de fois que la particule passe par l'origine, on peut se fier au graphique suivant. En particulier, on voit que la particule passe par l'origine 7 fois dans un laps de temps de 20 secondes :



1.10

e) On tente de résoudre :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = e^t - e^{-t}$$

C'est une équation directement intégrable 2 fois. Ceci va générer une famille de fonctions avec 2 constantes essentielles :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \int \left(e^t - e^{-t}\right) \, dt \\ &= e^t + e^{-t} + C_1 \end{aligned}$$

La deuxième intégration donne la solution finale :

$$\begin{aligned} x(t) &= \int \left(e^t + e^{-t} + C_1\right) \, dt \\ &= e^t - e^{-t} + C_1 t + C_2 \end{aligned}$$

2.2

c) On tente de résoudre :

$$\frac{dy}{dx} = 8xy + 3y$$

C'est une équation à variables séparables :

$$\frac{dy}{dx} = y(8x + 3)$$

On obtient l'équation suivante à résoudre :

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{y}\ dy &= \int (8x+3)\ dx \\
\ln(y) &= 4x^2 + 3x + C \\
y &= e^{4x^2+3x+C} \\
&= C_1 e^{4x^2+3x}
\end{aligned}$$

2.13

c) On tente de résoudre :

$$y' - 2y = 4\cos(3x)$$

C'est une équation linéaire d'ordre 1 qu'on peut résoudre avec un facteur intégrant. On pose les paramètres suivants :

$$P(x) = -2, \quad Q(x) = 4\cos(3x), \quad \mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{-2x}$$

La solution générale est :

$$\varphi(x) = Ce^{2x} + \frac{4}{e^{-2x}} \int e^{-2x} \cos(3x)\ dx$$

La dernière intégrale se résout avec une intégration par partie. On utilise la méthode tabulaire :

	D	I
+	$\cos(3x)$	e^{-2x}
-	$-3\sin(3x)$	$-\frac{1}{2}e^{-2x}$
+	$-9\cos(3x)$	$\frac{1}{4}e^{-2x}$

D'ici on déduit que :

$$\begin{aligned}
\int e^{-2x}\cos(3x)\ dx &= -\frac{1}{2}\cos(3x)e^{-2x} + \frac{3}{4}\sin(3x)e^{-2x} - \frac{9}{4}\int e^{-2x}\cos(3x)\ dx \\
\int e^{-2x}\cos(3x)\ dx &= -\frac{2}{13}\cos(3x)e^{-2x} + \frac{3}{13}\sin(3x)e^{-2x}
\end{aligned}$$

En insérant cette égalité dans la solution générale, on trouve l'expression finale :

$$\varphi(x) = Ce^{2x} - \frac{8}{13}\cos(3x) + \frac{12}{13}\sin(3x)$$

1.1

a) On tente de résoudre :

$$y' + y = x$$

C'est une équation linéaire d'ordre 1 qu'on peut résoudre avec un facteur intégrant. On pose les paramètres suivants :

$$P(x) = 1, \quad Q(x) = x, \quad \mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^x$$

La solution générale est :

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= Ce^{-x} + e^{-x} \int xe^x \, dx \\
\varphi(x) &= Ce^{-x} + e^{-x}(xe^x - e^x) \\
\varphi(x) &= Ce^{-x} + x - 1
\end{aligned}$$

On cherche à trouver la solution particulière avec $\varphi(0) = 1$:

$$\begin{aligned}
\varphi(0) = 1 &= Ce^0 + 0 - 1 \\
1 &= C - 1 \\
C &= 2
\end{aligned}$$

La solution particulière est :

$$\varphi(x) = 2e^{-x} + x - 1$$

b) On tente de résoudre :

$$y' = \frac{1}{2xy + 2y - x - 1}$$

C'est une équation à variable séparable. Pour le voir, on procède avec quelques factorisations :

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{2xy + 2y - x - 1} \\
&= \frac{1}{2y(x+1) - (x+1)} \\
&= \frac{1}{(x+1)(2y-1)}
\end{aligned}$$

L'équation à résoudre est donc :

$$\begin{aligned}
\int (2y - 1) \, dy &= \int \frac{1}{x+1} \, dx \\
y^2 - y &= \ln(|x+1|) + C \\
y(y-1) &= \ln(|x+1|) + C
\end{aligned}$$

En posant $y(0) = 1$, on trouve la solution particulière :

$$\begin{aligned}
1(1-1) &= \ln(1) + C \\
C &= 0 \\
\implies y(y-1) &= \ln(|x+1|)
\end{aligned}$$

1.2

Soit r la longueur d'une arête. L'aire d'une des faces est r^2. Étant donné que la longueur des arêtes décroit à un taux égal à l'aire d'une face, on déduit l'équation différientielle suivante :

$$\frac{dr}{dt} = -r^2$$

C'est une équation à variables séparables. On la résout avec la condition initiale $r(0) = 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{dt} &= -r^2 \\
-\int r^{-2}\ dr &= \int 1\ dt \\
r^{-1} &= t + C \\
r &= \frac{1}{t + C}
\end{aligned}$$

On calcule la valeur de C :

$$\begin{aligned}
r(0) = 1 &= \frac{1}{1 + C} \\
C &= 1 \\
\implies r(t) &= \frac{1}{t + 1}
\end{aligned}$$

Le volume du cube $V(t)$ pour tout t est alors :

$$V(t) = \frac{1}{(t + 1)^3}$$