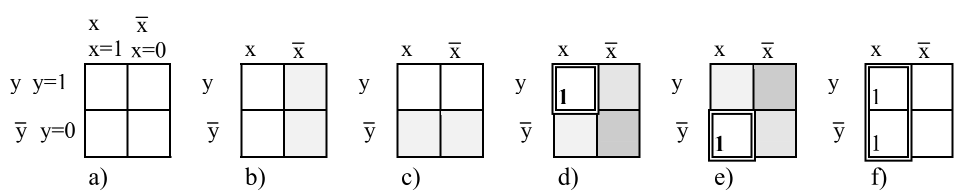
4. MINIMIZACIJA LOGIČKIH FUNKCIJA PRIMENOM KARNOOVIH MAPA

TEORIJA:

Karnoova mapa za funkciju dve promenljive x i y slika 1. a) sastoji se od 4 polja. Svako od tih polja rezervisano je za jednu moguću konjunkciju promenljivih ili njihovih negacija. Ukoliko se određena konjunkcija pojavljuje u funkciji, onda se u dato polje zapisuje 1, a ako se ne pojavljuje, ne zapisuje se ništa. Na taj način se preslikava funkcija dve promenljive na odgovarajuću Karnoovu mapu. Na primer, ako je data funkcija $F(x,y) = (x \cdot y) + (x \cdot \overline{y})$, u njoj se pojavljuju dve konjunkcije: **x·y** i $x \cdot \overline{y}$. Mesto konjunkcije **x·y** u mapi određuje se na sledeći način:

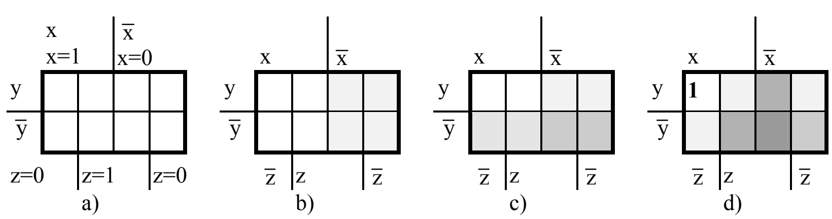
- Pošto konjunkcija **x·y** sadrži promenljivu **x** (bez negacije) onda se ona mora nalaziti u oblasti gde je **x =1** (a osenčimo oblast **x =0**, slika 1. b)), a kako sadrži i promenljivu **y** to mora biti i u oblasti gde je **y=1** (neosenčena oblast na slici 1. c)). Dakle, konjunkcija **x·y** se nalazi na polju koje je u preseku ove dve oblasti, u koje upisujemo 1 (slika 1.d)). Na isti način se određuje polje koje sadrži konjunkciju $x \cdot \overline{y}$, slika 1. e), a Karnoova mapa čitave funkcije **F** je data na slici 1. f).



Slika 1. Karnoova mapa za funkciju sa dve promenljive

Karnoova mapa za funkciju tri promenljive x, **y** i **z**, ima izgled prikazan na slici 2. a). I u ovom slučaju svako polje mape rezervisano je za jednu tačno određenu konjunkciju promenljivih ili njihovih negacija. Kako se za zadatu konjunkciju pronalazi odgovarajuće polje? Pronalaženje odgovarajućeg polja ide postepeno, eliminacijom polja koja ne zadovoljavaju. Neka je data konjunkcija $x \cdot y \cdot \overline{z}$.

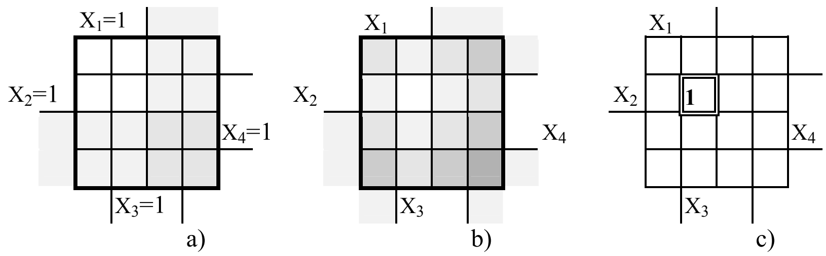
- Pošto se u zadatom izrazu promenljiva **x** javlja u afirmativnom obliku, u obzir dolaze 4 leva polja (desna polovina mape se osenči jer ta polja ne dolaze u obzir, slika 2. b)). Druga promenljiva je **y**, pa se 4 leva polja smanjuju samo na 2, i to u gornjoj vrsti, a donja vrsta se osenči (slika 2. c)). Konačno, treći element je $\overline{\mathbf{z}}$, pa treba osenčiti polja u sredini u kojima je **z=1** (slika 2. d)). Preostalo, neosenčeno polje određuje polje datog izraza i u njega upisujemo **1**, slika 2. d). Analognim postupkom može se naći polje za bilo koju konjunkciju 3 promenljive.



Slika 2. Karnoova mapa za tri promenljive

Karnoova mapa za funkciju sa četiri promenljive X_1, X_2, X_3 i X_4, ima izgled prikazan na slici 3. a). Istim postupkom eliminacije odredićemo položaj konjunkcije: $X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4$.

- Pošto su sve promenljive bez negacije, treba osenčiti polja u kojima promenljive uzimaju vrednost 0 (slika 3. a) i b)), a preostalo neosenčeno polje je polje u koje se upisuje 1 koja odgovara ovoj konjunkciji, slika 3. c).



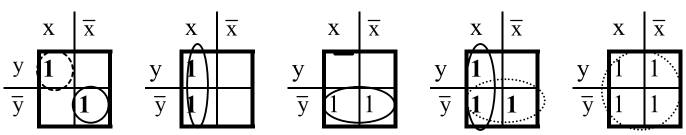
Slika 3. Karnoova mapa za četiri promenljive

Proces minimizacije se sastoji u grupisanju jedinica u okviru mape u veće celine. Pri tome se nastoji da ove celine budu što veće, ali one ne smeju da sadrže polja koja nemaju 1.

- Može se grupisati: 1 polje samostalno, 2 polja, 4 polja, 8 polja ili 16 polja.
- Kada se u jednoj mapi pravi više grupa, nastoji se da te grupe budu što veće, makar i po cenu zajedničkog polja u grupama.

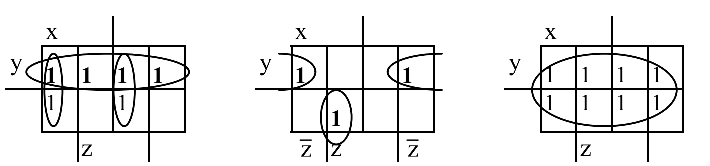
Kod mape sa 2 promenljive može se grupisati: samo 1 polje, dva susedna polja ili sva 4 polja.

Primeri pravilnog grupisanja su dati na slici 4.:



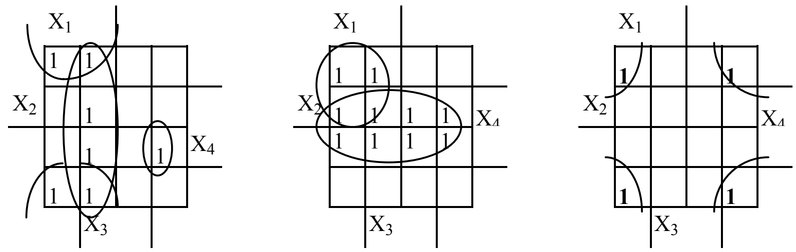
Slika 4. Grupisanje jedinica u Karnoovoj mapi sa dve promenljive

Kod mape sa 3 promenljive prethodnim principima grupisanja potrebno je dodati još dva: mogu se grupisati osam jedinica i elementi sa strane, kao što je pokazano na slici 5. Ako se pažljivije posmatra Karnoova mapa, može se uočiti da se područje nezavisno promenljive $\bar{z}$ proteže direktno sleva na desnu stranu tabele. To se može zamisliti kao da je tabela nacrtana na valjku, čiji je omotač po visini razvijen u ravan.



Slika 5. Grupisanje jedinica u Karnoovoj mapi sa tri promenljive

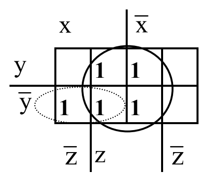
Kod mape sa 4 promenljive, sva prethodna pravila važe, a mogu se grupisati i krajnje gornja sa krajnjim donjim poljima, kao i polja u uglovima. Primeri pravilnog grupisanja u mapama sa 4 promenljive su dati na slici 6. Osnovno pravilo pri formiranju grupa je da treba formirati minimalan broj grupa tako da budu obuhvaćene sve jedinice u Karnoovoj mapi.



Slika 6. Grupisanje jedinica u Karnoovoj mapi sa četiri promenljive

Određivanje analitičkog oblika minimalne forme logičke funkcije na osnovu formiranih grupa sastoji se u sledećem:

- Za svaku formiranu grupu definiše se konjunkcija promenljivih ili njihovih negacija, ali samo onih koje su za celu grupu nepromenjene.
- Kada su formirane konjunkcije za sve grupe, konačna funkcija dobija se kao disjunkcija ovih pojedinačnih članova. Razmotrimo to na sledećem primeru mape sa 3 promenljive gde su već formirane grupe kao na slici 7:



Slika 7. Određivanje analitičkog izraza za grupu jedinica

- Prvo definišemo odgovarajuću konjunkciju za grupu od 4 srednje jedinice. U ovom slučaju grupa ima jedinice u poljima **x** (**x=1**) i $\overline{\mathbf{x}}$ (**x=0**) odnosno prelazi iz afirmacije u negaciju, pa ta varijabla neće figurisati u rezultujućem izrazu. U datoj grupi ima polja i sa **y=1** i sa **y=0**, pa ni ova varijabla ne utiče na rezultujuću konjunkciju. Grupa je definisana u svim poljima sa **z=1** (oblast **z**), tako da varijabla **z** ulazi u konjunkciju. Konačno, prvi faktor minimalne logičke funkcije je **z** (nije vezan konjunkcijom jer je samo jedna promenljiva).

- Druga grupa sastoji se od dva polja u donjem levom uglu mape. Vrednost varijable **x** je jedinstvena u ovoj grupi, pa ulazi u konjunkciju. Zatim, u grupi postoji polje sa varijablom **z**, ali i sa $\overline{\mathbf{z}}$, pa, prema tome, ova varijabla ne ulazi u konačni izraz za ovu grupu. Kako je za ovu grupu i varijabla $\overline{\mathbf{y}}$ jedinstvena, to i ona ulazi u izraz, pa je konačan oblik konjunkcije za ovu grupu: $\mathbf{x \cdot \overline{y}}$. Minimalni oblik ove funkcije dobija se povezivanjem konjunkcija za pojedine grupe operatorom disjunkcije, pa je u našem slučaju:

$$\mathbf{F = z + (x \cdot \overline{y})}$$

Prilikom minimizacije logičkih funkcija moguće je poći i od tablice istinitosti, a ne samo od disjunktivne normalne forme, slika 8.

Da bi se tablica istinitosti preslikala na Karnoovu mapu, posmatraju se svi redovi gde je funkcija jednaka **1** i odgovarajuća kombinacija 1 i 0 promenljivih definiše polje u mapi.

- Kada promenljiva ima vrednost 1, posmatra se u Karnoovoj mapi oblast u kojoj je ta promenljiva jednaka jedinici, a ako ima vrednost 0, posmatra se njena negacija.

- Međutim, ako se promenljive X_1, X_2, X_3 rasporede kao na slici 8. a), onda se Karnoova mapa može popuniti po šablonu jer svakoj vrsti iz tabele uvek odgovara jedno te isto mesto u Karnoovoj mapi, kao na slici 8. b). Kako je položaj konjunkcija fiksiran, to se samo umesto P_0, P_1, ..., P_7 upišu jedinice ili nule (slika 8. d)), saglasno tabeli istinitosti, slika 8. c). Na stranicama dijagrama (slika 8. d)) naznačene su oblasti nenegiranih promenljivih (afirmacija) i njihovih komplemenata (negacija). Grafički se minimizacija izvodi tako što se u tabeli zaokruže dve susedne jedinice, kao u tabeli na slici 8. d), za funkciju zadatu tabelom na slici 8. c). Posmatra se koja od promenljivih u okviru grupe jedinica ne prelazi iz afirmacije u negaciju. To su u datom primeru $\overline{X}_2$ i X_3 . Njihov logički proizvod će predstavljati traženu minimalnu disjunktivnu formu funkcije:

$$\mathbf{F} = \overline{\mathbf{X}}_2 \cdot \mathbf{X}_3$$

dek. br.	X_1	X_2	X_3	Z
0	0	0	0	P_0
1	0	0	1	P_1
2	0	1	0	P_2
3	0	1	1	P_3
4	1	0	0	P_4
5	1	0	1	P_5
6	1	1	0	P_6
7	1	1	1	P_7

a)

	$X_1=1$		$X_1=0$	
$X_2=1$	P_6	P_7	P_3	P_2
$X_2=0$	P_4	P_5	P_1	P_0
	$X_3=0$	$X_3=1$		$X_3=0$

b)

dekad. br.	X_1	X_2	X_3	Z
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

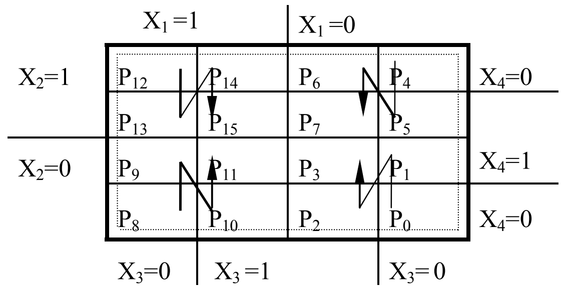
c)

	X_1		$\overline{X}_1$	
X_2	0	0	0	0
$\overline{X}_2$	0	1	1	0
	$\overline{X}_3$	X_3		$\overline{X}_3$

d)

Slika 8. Popunjavanje Karnoove mape i minimizacija funkcije **F**

- Za funkciju sa četiri promenljive, pri fiksnom rasporedu promenljivih, redosled ređanja u Karnoovoj mapi elemenata dat je na slici 9. Ovu tabelu treba zamisliti kao da je nacrtana na torusu, pa razvijena u ravan. Drugim rečima, njena leva ivica se direktno naslanja na desnu, a donja ivica na gornju. Ovo treba imati u vidu prilikom zaokruživanja susednih članova.



Slika 9. Karnoova mapa za četiri promenljive

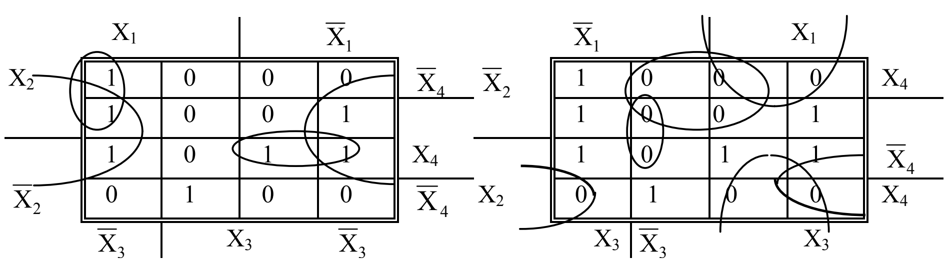
Za nalaženje minimalne konjunktivne forme (MKF) funkcije, treba najpre popuniti Karnoovu mapu i to na isti način kao kod disjunktivne forme. Zatim treba grupisati pojedinačna polja, parove, kvartete i oktete nula i to na isti način kao što se grupišu jedinice kod disjunktivne forme. Na kraju treba odrediti analitički izraz za minimalne disjunkcije, s tim što afirmacije i negacije promenljivih na stranicama Karnoove mape međusobno zamenjuju mesta.

- Drugim rečima, polja u oblasti gde je **promenljiva jednaka nuli** uzimaju se kao afirmacija, npr. oblast **x=0** je oblast **x**, a oblast **x =1** je oblast $\bar{\mathbf{x}}$. Tabela na slici 10. a) pokazuje Karnoovu mapu za dobijanje disjunktivne, a tabela b) pokazuje Karnoovu mapu za dobijanje konjunktivne forme funkcije. Kao što se vidi, one su identične, samo su oblasti negacije i afirmacije promenljivih ukrštene.
- Minimalna disjunktivna forma (**MDF**) je:

$$F = X_1X_2\overline{X}_3 + X_4 + \overline{X}_1\overline{X}_2X_4 + X_1\overline{X}_2X_3\overline{X}_4 .$$

- **MKF** ima onoliko logičkih suma (disjunkcija) koliko u tabeli postoji zaokruženih polja, parova, kvarteta i okteta nula. U svakoj od tih suma učestvuju one promenljive koje u intervalu zaokruženih grupa ne prelaze iz afirmacije u negaciju. Kvartet nula u sredini daje sumu $\overline{X}_2 + \overline{X}_3$, a kvartet zaokružen isprekidanom linijom daje sumu X_1+X_4. Od para nula zaokruženih isprekidanom linijom dobija se član $\overline{X}_1 + \overline{X}_3 + \overline{X}_4$, a par zaokružen punom linijom daje disjunkciju $X_2 + X_3 + X_4$. Finalni oblik MKF dobija se kada se napravi logički proizvod (konjunkcija) ovih disjunkcija:

$$F = (\overline{X}_2 + \overline{X}_3)\cdot(\overline{X}_1 + \overline{X}_3 + \overline{X}_4)\cdot(X_1 + X_4)\cdot(X_2 + X_3 + X_4)$$



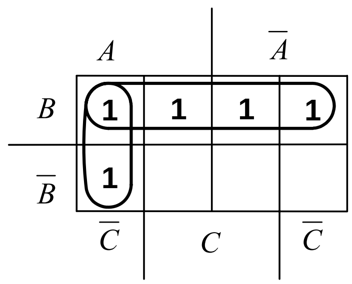
Slika 10. Primer Karnoovih mapa za funkciju sa četiri promenljive

PRIMERI:

1. Primenom Karnoove mape izvršiti minimizaciju funkcije F minimalnom disjunktivnom formulom **(MDF),** ako je funkcije F zadata na sledeći način:

   $F(A,B,C)=\overline{A}B\overline{C}+A\overline{C}+BC$

Rešenje:

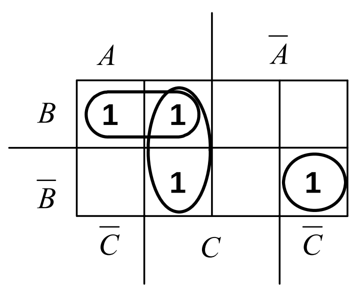


$$F(A,B,C)=B+A\overline{C}$$

2. Primenom Karnoove mape izvršiti minimizaciju funkcije F minimalnom disjunktivnom formulom **(MDF),** ako je funkcije F zadata na sledeći način:

   $F(A,B,C)=\overline{A}\overline{B}\overline{C}+A\overline{B}C+AB+AC$

Rešenje:

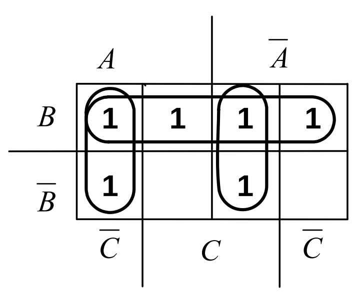


$$F(A,B,C)=AB+AC+\overline{A}\overline{B}\overline{C}$$

3. Primenom Karnoove mape izvršiti minimizaciju funkcije F minimalnom disjunktivnom formulom **(MDF),** ako je funkcije F zadata na sledeći način:

   $F(A,B,C)=A\overline{C}+B+\overline{A}\overline{B}C$

Rešenje:



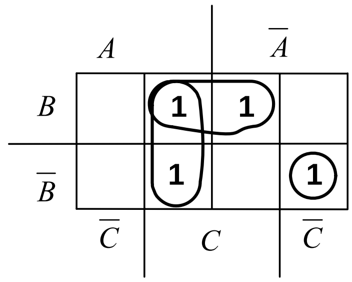
$$F(A,B,C)=B+A\overline{C}+\overline{A}C$$

4. Primenom Karnoove mape odrediti minimalnu disjunktivnu formu (MDF) funkcije koja je data izrazom:

$$Y(A,B,C,D)=A\cdot B\cdot C+A\cdot\overline{B}\cdot C+\overline{A}\cdot B\cdot C+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$$

Rešenje:

Izraz za funkciju Y sastoji se od sume potpunih proizvoda, odnosno može da se predstavi u obliku: $Y(A,B,C)=\sum(0,3,5,7)$

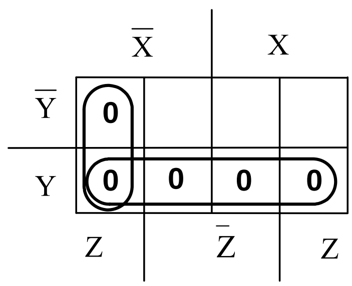


$$F_{MDF}(A,B,C)=A\cdot C+B\cdot C+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$$

5. Primenom Karnoove mape odrediti minimalnu konjuktivnu formu (MKF) funkcije F koja je zadata kao suma potpunih proizvoda:

$$F(X,Y,Z)=\prod(0,1,4,5,6)$$

Rešenje:



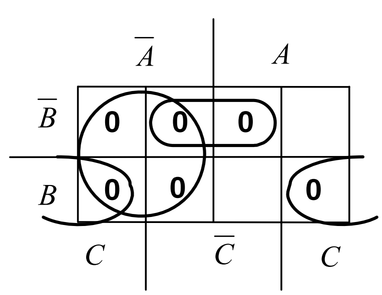
$$F_{MKF}(X,Y,Z)=Y\cdot(\overline{X}+Z)$$

6. Primenom Karnoove mape odrediti minimalnu konjuktivnu formu (MKF) funkcije Y koja je zadata kao proizvod potpunih suma:

$$Y(A,B,C)=(A+\overline{B}+C)\cdot(\overline{A}+\overline{B}+C)\cdot(\overline{A}+\overline{B}+C)\cdot(\overline{A}+B+\overline{C})\cdot(A+\overline{B}+\overline{C})+(A+B+C)$$

Rešenje:

Izraz za funkciju Y sastoji se od proizvoda potpunih suma, odnosno može da se predstavi u obliku: $Y(A,B,C)=\prod(0,3,4,5,6,7)$

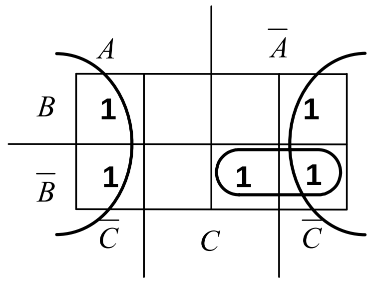


$$F_{MKF}(A,B,C)=\overline{A}\cdot(\overline{B}+\overline{C})\cdot(B+C)$$

7. Primenom Karnoove mape odrediti minimalnu disjunktivnu (MDF) funkcije F koja je zadata kao suma potpunih proizvoda:

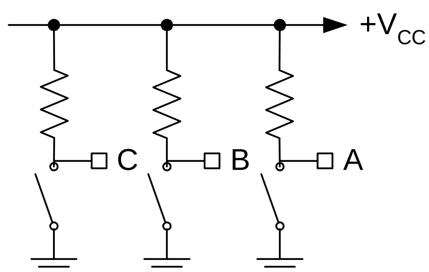
$$F(A,B,C) = \sum(0,1,2,4,6)$$

Rešenje:



$$F_{MDF}(A,B,C) = \overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{C}$$

8. Na slici su prikazana tri paralelna prekidača. U zavisnosti od toga da li su prekidači otvoreni ili zatvoreni napon u tačkama A, B i C ima vrednost V_{CC} (1) (logička "1") ili 0 (logička "0"). Ako signali u tačkama A, B i C predstavljaju ulaz u kombinacionu mrežu koja daje na izlazu 1 ako su otvorena bar dva prekidača, inače je vrednost 0:
   a) Definisati funkciju OUT(A, B, C) koja opisuje rad kombinacione mreže pomoću tabele istinitosti.
   b) Odrediti minimalnu disjunktivnu formu funkcije $OUT_{MDF}(A, B, C)$.



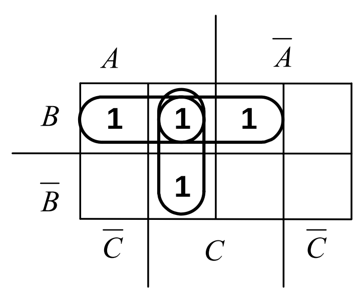
Rešenje:

a) Pošto se na ulaz kombinacione mreže dovode tri signala A, B i C broj kombinacija logičkih vrednosti ovih signala je $2^3 = 8$.

a)

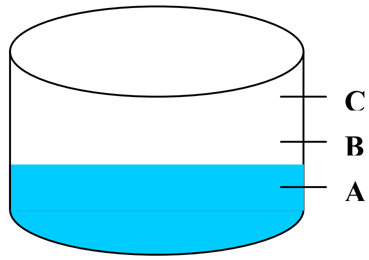
n	C	B	A	OUT
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	**1**
4	1	0	0	0
5	1	0	1	**1**
6	1	1	0	**1**
7	1	1	1	**1**

b)



$$OUT_{MDF}(A,B,C) = A \cdot B + \overline{A} \cdot C + A \cdot C$$

9. Nivo tečnosti u rezervoaru detektuje se preko tri senzora A, B i C, čiji izlaz ima vrednost logička “1” kada nivo tečnosti dostigne ili premaši poziciju senzora, odnosno logička “0” kada je senzor iznad nivoa. Ako su senzori postavljeni kao što je prikazano na slici:



a) Definisati tabelu istinitosti za funkciju *F (A, B, C)* koja opisuje rad kombinacione mreže čiji su ulazi signali sa senzora, ako izlaz mreže ima vrednost logička “1” kada je nivo fluida između senzora A i B.

b) Primenom Karnoove mape odrediti minimalnu disjunktivnu formu funkcije *F (A, B, C)*.

Rešenje:

a) Pošto vrednost funkcije F zavisi od tri ulazne promenljive, ukupan broj kombinacija vrednosti ulaznih veličina A, B i C je $2^3 = 8$. Pošto izlaz svakog senzora dobija vrednost logička “1” tek kada nivo dostigne ili premaši poziciju senzora, moguća je sledeća kombinacija vrednosti na izlazima senzora:

C	**B**	**A**
0	0	0
0	0	**1**
0	**1**	**1**
1	**1**	**1**

Funkcija F će imati vrednost 1 samo kada senzor A detektuje nivo (CBA = 001), dok će za ostale tri kombinacije vrednosti izlaza sa senzora imati vrednost 0. Za sve ostale kombinacije vrednosti izlaza senzora funkcija F će imati nedefinisanu vrednost (X). Na osnovu ovog razmatranja popunjena je kombinaciona tabela:

n	**C**	**B**	**A**	**F**
0	0	0	0	**0**
1	0	0	**1**	**1**
2	0	1	0	X
3	0	**1**	**1**	**0**
4	1	0	0	X
5	1	0	1	X
6	1	1	0	X
7	**1**	**1**	**1**	**0**

X su nedefinisana stanja

b) Na osnovu tabele iz tačke a) popunjena je Karnoova mapa sa tri promenljive, pri čemu nedefinisana stanja X u cilju bolje minimizacije mogu da se po potrebi grupišu sa poljima u kojima je 1.

	C	C	$\overline{C}$	$\overline{C}$
B	X	0	0	X
$\overline{B}$	X	X	1	X
	$\overline{A}$	A	A	$\overline{A}$

$$F_{MDF}(C,B,A) = \overline{B}$$

10. Primenom pravila Bulove algebre transformisati izraz za funkciju *X(A, B, C)* tako da se dobije zapis u disjunktivnoj normalnoj formi, a zatim odrediti izraz za minimalnu disjunktivnu formu primenom Karnoove mape.

$$X(A,B,C) = \overline{A}B\overline{C} + AC[\overline{B} + A(B+\overline{C})]$$

Rešenje:

Izraz za funkciju *X(A, B, C)* transformiše se na sledeći način:

$$X(A,B,C) = \overline{A}\cdot B\cdot\overline{C} + A\cdot C[\overline{B} + A\cdot(B+\overline{C})] =$$
$$= \overline{A}\cdot B\cdot\overline{C} + A\cdot C\cdot[\overline{B} + A\cdot B + A\cdot\overline{C}] =$$
$$= \overline{A}\cdot B\cdot\overline{C} + A\cdot C\cdot\overline{B} + A\cdot C\cdot A\cdot B + A\cdot C\cdot A\cdot\overline{C} =$$
$$= \overline{A}\cdot B\cdot\overline{C} + A\cdot\overline{B}\cdot C + A\cdot B\cdot C$$

Odavde sledi da funkcija *X(A,B,C)* može da se predstavi kao suma potpunih proizvoda, odnosno u disjunktivnoj normaloj formi: $X_{DNF}(A,B,C) = \sum(2,5,7)$. Na osnovu toga se popunjava Karnoova mapa.

	A	A	$\overline{A}$	$\overline{A}$
B		1		1
$\overline{B}$		1		
	$\overline{C}$	C	C	$\overline{C}$

$$X_{MDF}(A,B,C) = \overline{A}\cdot B\cdot\overline{C} + A\cdot C$$

11. Neka su X, Y i Z binarne cifre u trobitnom zapisu nekog binarnog broja.

a) Definisati kombinacionu tabelu za funkciju *F(X, Y, Z)* koja ima vrednost 0 ako bar dve susedne cifre u zapisu binarnog broja imaju istu vrednost, dok u ostalim slučajevima ima vrednost 1.

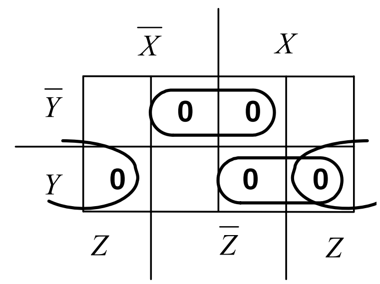
b) Odrediti minimalnu konjuktivnu formu funkcije F primenom Karnoove mape.

Rešenje:

a)

n	X	Y	Z	F
0	**0**	**0**	**0**	0
1	**0**	**0**	1	0
2	0	1	0	1
3	0	**1**	**1**	0
4	1	**0**	**0**	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	**1**	**1**	**1**	0

b)



$$F_{MKF}(X,Y,Z)=(\overline{Y}+\overline{Z})\cdot(Y+Z)\cdot(X+Y)$$

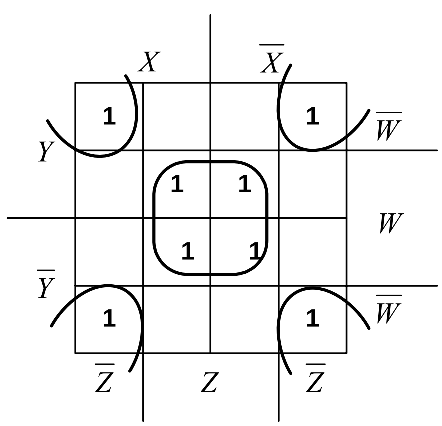
12. Neka su A, B i C tri senzora, čiji su digitalni izlazi dovedeni na ulaz kombinacione mreže. Definisati tabelu istinitosti za mrežu čija logička funkcija *Y(A, B, C)* ima vrednost 0:
    a) kada senzori A i C daju istu vrednost na izlazu
    b) kada senzori A i C daju različite vrednosti na izlazu

    a zatim odrediti minimalnu konjuktivnu formu (MKF) funkcije *Y(A, B, C)* za primere a) i b).

13. Primenom Karnoove mape odrediti minimalnu disjunktivnu formu **(MDF)** funkcije F koja je zadata kao suma potpunih proizvoda:

$$F(X,Y,Z,W)=\Sigma\,(0,3,4,7,8,11,12,15)$$

Rešenje:

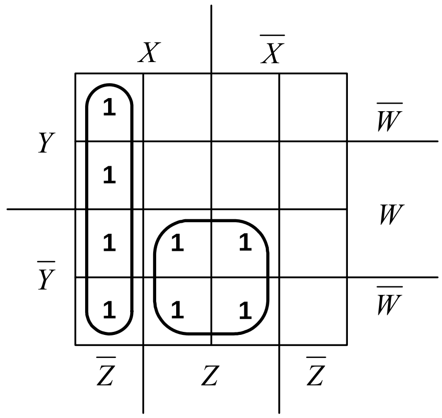


$$F_{MDF}(X,Y,Z,W)=ZW+\overline{Z}\,\overline{W}$$

14. Primenom Karnoove mape odrediti minimalnu disjunktivnu formu **(MDF)** funkcije F koja je zadata kao proizvod potpunih suma (DNF):

$$F(X,Y,Z,W)=\Sigma\,(2,3,8,9,10,11,12,13)$$

Rešenje:

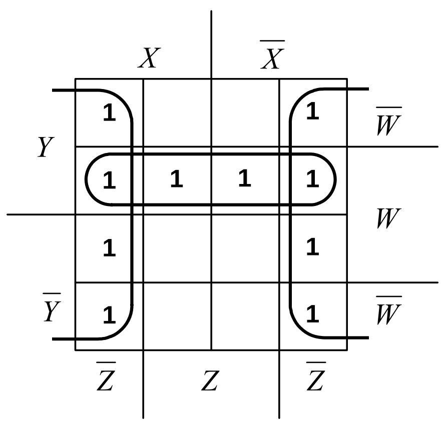


$$F_{MDF}(X,Y,Z,W) = X\overline{Z} + \overline{Y}Z$$

15. Primenom Karnoove mape odrediti minimalnu disjunktivnu formu **(MDF)** funkcije F koja je zadata kao suma potpunih proizvoda:

$$F(X, Y, Z, W) = \Sigma\,(15, 13, 12, 9, 8, 7, 5, 4, 1, 0)$$

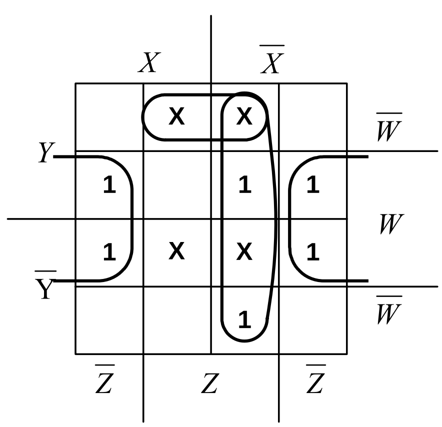
Rešenje:



$$F_{MDF}(X,Y,Z,W) = \overline{Z} + YW$$

16. Za datu funkciju četiri logičke promenljive *F(X,Y,Z,W)*, čiji je skup vrednosti *F(0,1,1,x,0,1,x,1,0,1,0,x,0,1,x,0)*, primenom Karnoovih mapa odrediti njenu minimalnu disjunktivnu formulu **(MDF)**, ako x predstavlja nedefinisano stanje funkcije.

Rešenje:

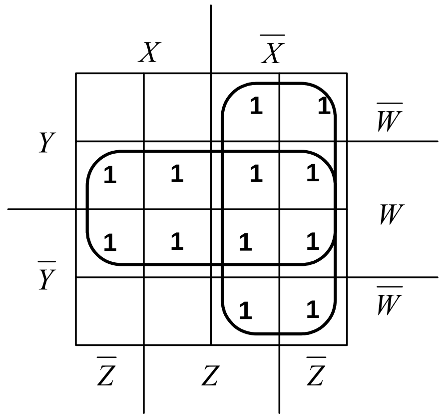


$$F_{MDF}(X,Y,Z,W) = \overline{X}Z + \overline{Z}W + YZ\overline{W}$$

17. Primenom Karnoove mape izvršiti minimizaciju funkcije F minimalnom disjunktivnom formulom **(MDF),** ako je funkcije F zadata na sledeći način:

$$F(X, Y, Z, W) = YW + \overline{X}Z + X\overline{Y}W + \overline{X}Y\overline{Z} + \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$$

<u>Rešenje:</u>

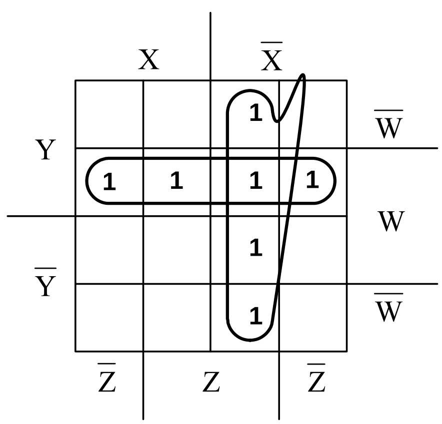


$$F_{MDF}(X,Y,Z,W) = \overline{X} + W$$

18. Primenom Karnoove mape izvršiti minimizaciju funkcije F minimalnom disjunktivnom formulom **(MDF),** ako je funkcije F zadata na sledeći način:

$$\mathrm{F(X, Y, Z, W)} = XYW + \overline{X}Z + \overline{X}Y\overline{Z}W$$

<u>Rešenje:</u>

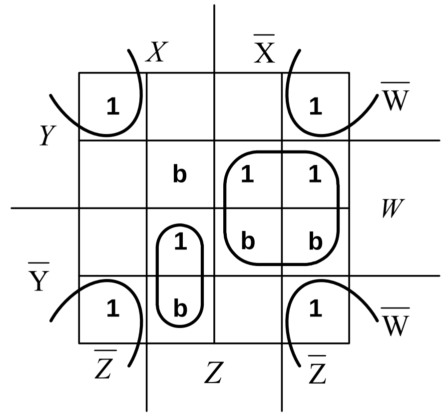


$$F_{MDF}(X,Y,Z,W) = \overline{X}Z + YW$$

19. Primenom Karnoove mape odrediti minimalnu disjunktivnu formu **(MDF)** funkcije *F(X,Y,Z,W)* čije su vrednosti date u sledećoj tabeli, a sa **b** su označena nedefinisana stanja funkcije.

Rešenje:

i	X	Y	Z	W	F
0	0	0	0	0	**1**
1	0	0	0	1	**b**
2	0	0	1	0	**0**
3	0	0	1	1	**b**
4	0	1	0	0	**1**
5	0	1	0	1	**1**
6	0	1	1	0	**0**
7	0	1	1	1	**1**
8	1	0	0	0	**1**
9	1	0	0	1	**0**
10	1	0	1	0	**b**
11	1	0	1	1	**1**
12	1	1	0	0	**1**
13	1	1	0	1	**0**
14	1	1	1	0	**0**
15	1	1	1	1	**b**



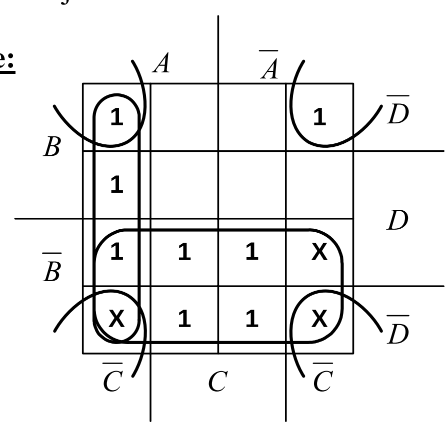
$$F_{MDF}(X,Y,Z,W)=\overline{X}W+\overline{Z}\,\overline{W}+X\overline{Y}Z$$

20. Primenom Karnoove mape odrediti minimalnu disjunktivnu formu **(MDF)** funkcije *F(A,B,C,D)* čije su vrednosti date u tabeli:

i	A	B	C	D	F
0	0	0	0	0	**X**
1	0	0	0	1	**X**
2	0	0	1	0	**1**
3	0	0	1	1	**1**
4	0	1	0	0	**1**
5	0	1	0	1	**0**
6	0	1	1	0	**0**
7	0	1	1	1	**0**
8	1	0	0	0	**X**
9	1	0	0	1	**1**
10	1	0	1	0	**1**
11	1	0	1	1	**1**
12	1	1	0	0	**1**
13	1	1	0	1	**1**
14	1	1	1	0	**0**
15	1	1	1	1	**0**

Sa **X** su označena nedefinisana stanja funkcije i po potrebi se grupišu sa jedinicama za nalaženje minimalne disjunktivne forme

Rešenje:



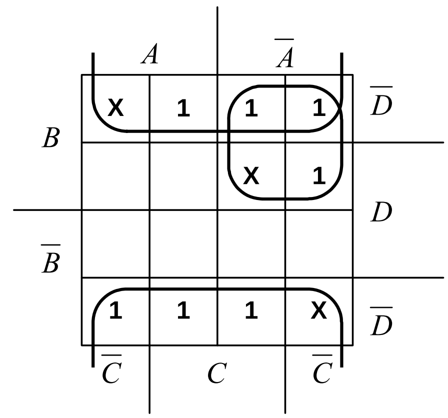
$$F_{MDF}(A,B,C,D)=\overline{B}+A\overline{C}+\overline{C}\,\overline{D}$$

21. Primenom Karnoove mape odrediti minimalnu disjunktivnu formu **(MDF)** funkcije *F(A,B,C,D)* čije su vrednosti date u tabeli:

i	A	B	C	D	F
0	0	0	0	0	**X**
1	0	0	0	1	**0**
2	0	0	1	0	**1**
3	0	0	1	1	**0**
4	0	1	0	0	**1**
5	0	1	0	1	**1**
6	0	1	1	0	**1**
7	0	1	1	1	**X**
8	1	0	0	0	**1**
9	1	0	0	1	**0**
10	1	0	1	0	**1**
11	1	0	1	1	**0**
12	1	1	0	0	**X**
13	1	1	0	1	**0**
14	1	1	1	0	**1**
15	1	1	1	1	**0**

Sa **X** su označena nedefinisana stanja funkcije i po potrebi se grupišu sa jedinicama za nalaženje minimalne disjunktivne forme.

Rešenje:

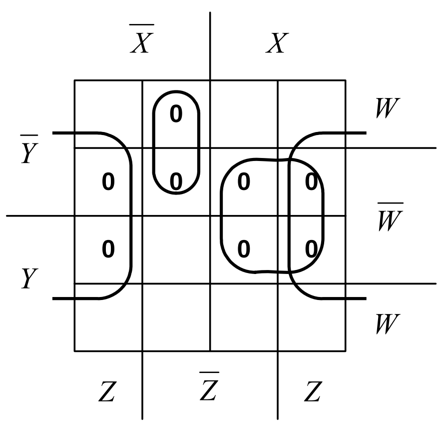


$$F_{MDF}(A,B,C,D) = \overline{D} + \overline{A}B$$

22. Primenom Karnoove mape odrediti minimalnu konjuktivnu formu **(MKF)** funkcije *F* koja je zadata kao proizvod potpunih suma:

$$F(X, Y, Z, W) = \Pi\,(15, 14, 13, 9, 7, 5, 3, 1)$$

Rešenje:

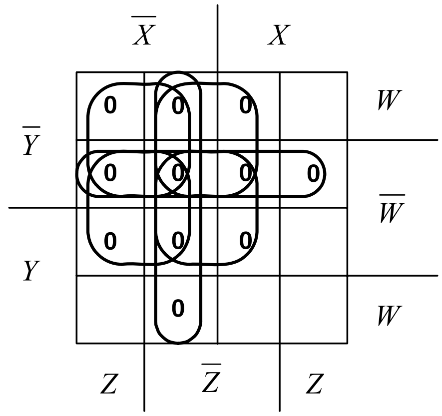


$$F_{MKF}(X,Y,Z,W) = (Z+\overline{W})\cdot(X+\overline{W})\cdot(\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z})$$

23. Primenom Karnoove mape odrediti minimalnu konjuktivnu formu **(MKF)** funkcije F koja je zadata kao suma potpunih proizvoda (KNF):

$$F(X, Y, Z, W) = \Pi\,(3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15)$$

Rešenje:

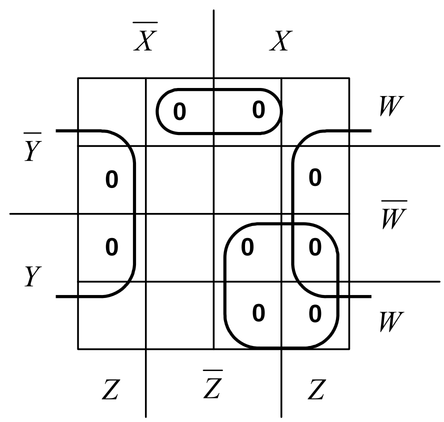


$$F_{MKF}(X,Y,Z,W) = (\overline{Z}+\overline{W})\cdot(\overline{X}+\overline{W})\cdot(\overline{Y}+\overline{W})\cdot(\overline{X}+\overline{Z})\cdot(\overline{X}+\overline{Y})\cdot(\overline{Y}+\overline{Z})$$

24. Primenom Karnoove mape odrediti minimalnu konjuktivnu formu **(MKF)** funkcije F koja je zadata kao proizvod potpunih suma:

$$F(X, Y, Z, W) = \Pi\,(0,1,2,3,5,6,9,13,14)$$

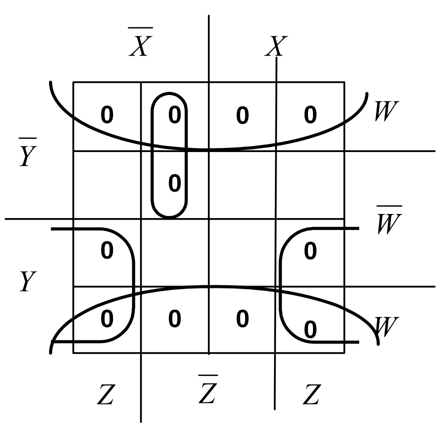
Rešenje:



$$F_{MKF}(X,Y,Z,W) = (X+Y)\cdot(Z+\overline{W})\cdot(\overline{Y}+\overline{Z}+W)$$

25. Primenom Karnoove mape izvršiti minimizaciju funkcije F minimalnom konjuktivnom formulom **(MKF),** ako je funkcija *F(X,Y,Z,W)* zadata kao F(0001010100010100).

Rešenje:

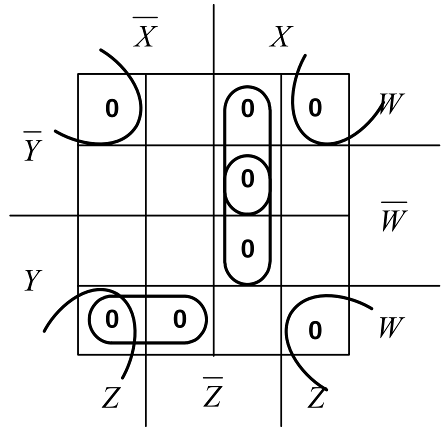


$$F_{MKF}(X,Y,Z,W) = W\cdot(Y+Z)\cdot(\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z})$$

26. Primenom Karnoove mape odrediti minimalnu konjuktivnu formu **(MKF)** funkcije F koja je zadata kao proizvod potpunih suma:

$$F(X, Y, Z, W) = \Pi\ (0,3,4,6,7,8,10,12)$$

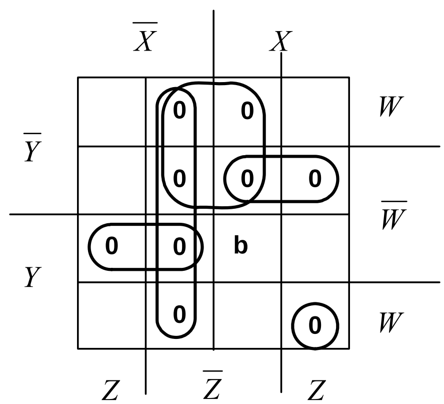
<u>Rešenje:</u>



$$F_{MKF}(X,Y,Z,W) = (Z+W)\cdot(\overline{X}+Y+W)\cdot(X+\overline{Y}+\overline{Z})\cdot(X+\overline{Z}+\overline{W})$$

27. Primenom Karnoove mape izvršiti minimizaciju funkcije F minimalnom konjuktivnom formulom **(MKF),** ako je funkcija *F(X,Y,Z,W)* zadata u formi F(011b100010001100), a sa **b** su označena nedefinisana stanja funkcije:

<u>Rešenje:</u>

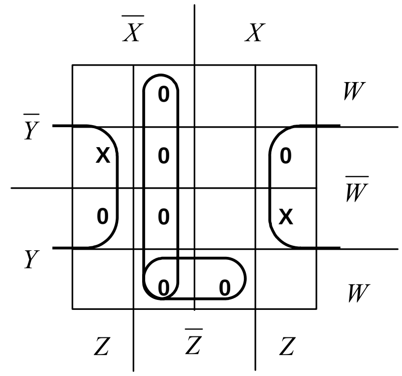


$$F_{MKF}(X,Y,Z,W) = (\overline{X}+\overline{Z})\cdot(\overline{Y}+\overline{Z})\cdot(X+\overline{Y}+\overline{W})\cdot(\overline{X}+Y+\overline{W})\cdot(X+Y+Z+W)$$

28. Primenom Karnoove mape odrediti minimalnu konjuktivnu formu **(MKF)** funkcije *F(X,Y,Z,W)* čije su vrednosti date u sledećoj tabeli, a sa **b** su označena nedefinisana stanja funkcije:

i	X	Y	Z	W	F
0	0	0	0	0	**1**
1	0	0	0	1	**X**
2	0	0	1	0	**0**
3	0	0	1	1	**1**
4	0	1	0	0	**1**
5	0	1	0	1	**0**
6	0	1	1	0	**1**
7	0	1	1	1	**1**
8	1	0	0	0	**1**
9	1	0	0	1	**0**
10	1	0	1	0	**0**
11	1	0	1	1	**0**
12	1	1	0	0	**1**
13	1	1	0	1	**X**
14	1	1	1	0	**0**
15	1	1	1	1	**0**

Rešenje:

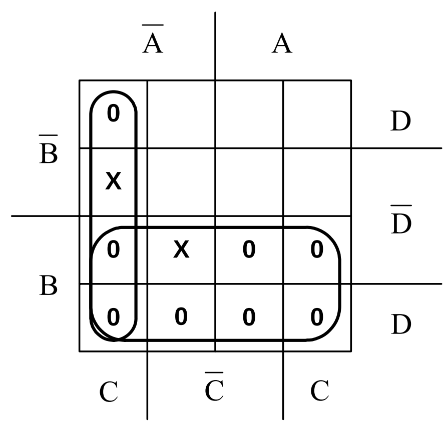


$$F_{MKF}(X,Y,Z,W) = (\overline{X}+\overline{Z})\cdot(Z+\overline{W})\cdot(Y+\overline{Z}+W)$$

29. Primenom Karnoove mape odrediti minimalnu konjuktivnu formu **(MKF)** funkcije *F(A,B,C,D)* čije su vrednosti date u tabeli, a sa **X** su označena nedefinisana stanja funkcije:

i	A	B	C	D	F
0	0	0	0	0	**0**
1	0	0	0	1	**0**
2	0	0	1	0	**0**
3	0	0	1	1	**0**
4	0	1	0	0	**1**
5	0	1	0	1	**1**
6	0	1	1	0	**1**
7	0	1	1	1	**1**
8	1	0	0	0	**0**
9	1	0	0	1	**0**
10	1	0	1	0	**X**
11	1	0	1	1	**X**
12	1	1	0	0	**0**
13	1	1	0	1	**X**
14	1	1	1	0	**1**
15	1	1	1	1	**1**

Rešenje:

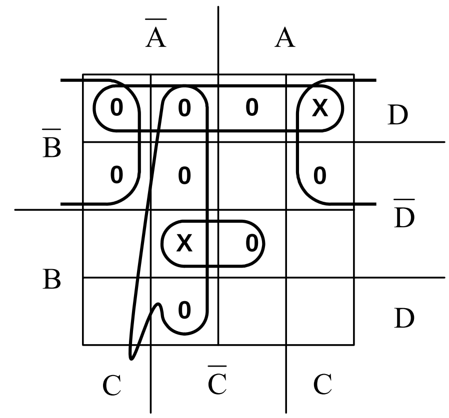


$$F_{MKF}(A,B,C,D) = (\overline{A}+C)\cdot B$$

30. Primenom Karnoove mape odrediti minimalnu konjunktivnu formu **(MKF)** funkcije *F(A,B,C,D)* čije su vrednosti date u tabeli, a sa **X** su označena nedefinisana stanja funkcije i po potrebi ih treba iskoristiti za nalaženje minimalne forme:

i	A	B	C	D	F
0	0	0	0	0	**1**
1	0	0	0	1	**1**
2	0	0	1	0	**1**
3	0	0	1	1	**0**
4	0	1	0	0	**X**
5	0	1	0	1	**0**
6	0	1	1	0	**0**
7	0	1	1	1	**1**
8	1	0	0	0	**1**
9	1	0	0	1	**1**
10	1	0	1	0	**0**
11	1	0	1	1	**X**
12	1	1	0	0	**0**
13	1	1	0	1	**0**
14	1	1	1	0	**0**
15	1	1	1	1	**0**

Rešenje:



$$F_{MKF}(A,B,C,D) = (\overline{A}+\overline{C})\cdot(\overline{B}+D)\cdot(\overline{B}+C)\cdot(B+\overline{C}+\overline{D})$$

31. Niz **1000 000x 1x10 1110** predstavlja izlaze funkcije četiri promenljive A,B,C,D pri čemu prva cifra u nizu predstavlja izlaz kada je A,B,C,D=0,0,0,0, a poslednja, kada je A,B,C,D=1,1,1,1. Cifre izmedju prve i poslednje su izlazi po binarnom redu. A **x** je neodređen izlaz. Svaki od njih može biti bilo nula ili jedinica. Napisati logički izraz koji predstavlja:
    a) Minimalnu disjunktivnu formu ove funkcije.
    b) Minimalnu konjunktivnu formu ove funkcije.

Rešenje :

I) Popunjavanje Karnoove mape drugog tipa

Zadati niz, predstavljen kao tabela istinitosti bi izgledao:

	A	B	C	D	F
0	0	0	0	0	**1**
1	0	0	0	1	**0**
2	0	0	1	0	**0**
3	0	0	1	1	**0**
4	0	1	0	0	**0**
5	0	1	0	1	**0**
6	0	1	1	0	**0**
7	0	1	1	1	**x**
8	1	0	0	0	**1**
9	1	0	0	1	**x**
10	1	0	1	0	**1**
11	1	0	1	1	**0**
12	1	1	0	0	**1**
13	1	1	0	1	**1**
14	1	1	1	0	**1**
15	1	1	1	1	**0**

Formirajmo Karnoovu mapu 4x4 u kojoj ćemo, na primer, po horizontali unositi promenljive (ulaze) A i B, a po vertikali promenljive (ulaze) C i D. *Raspored promenljivih koje će se naći po horizontali i vertikali može da bude potpuno drugačiji i svaki je podjednako dobar (na primer, moguće je da po horizontali budu ulazi A i D, a po vertikali B i C ili bilo koja druga kombinacija). Ipak, praktično je usvojiti jedan od mogućih rasporeda i držati ga se pri svakom korišćenju Karnoovih mapa jer je tada manja mogućnost greške prilikom raspoređivanja.*

Kod određivanja koje će se kombinacije ulaza A i B naći jedan pored drugoga po horizontali, jedino što je bitno je da se dve susedne kombinacije razlikuju u samo jednom ulazu. Na primer, pored kombinacije AB=01 se može naći kombinacija AB=00 (jer je A isto – nula, a samo B se razlikuje, u prvoj kombinaciji je jedinica, u drugoj nula). Pored ove kombinacije (AB=01) se takođe može naći kombinacija AB=11 (samo je A različito, B je jedinica u obe). Međutim, kombinacije AB=01 i AB=10 ne smeju biti susedne jer se i A i B razlikuju.

Praktično je usvojiti jedan raspored i uvek koristiti isti. Na primer, redosled kombinacija koji se najčešće koristi je da prvu kolonu određuje kombinacija AB=00 za njom AB=01, zatim AB=11 (*primetite da ovde ne može biti kombinacija 10, koja bi išla po binarnom redosledu*) i na kraju AB=10. Ako usvojimo isti redosled kombinacija i za ulaze C i D po vertikali, dobijamo da prvu vrstu određuje kombinacija CD=00, drugu, CD=01, zatim CD=11 i na kraju CD=10.

Tako dobijamo sedeću tabelu:

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

U tabelu se upisuju vrednosti funkcije F (0 ili 1) u polja koja određuju ulazi. Tako logičku jedinicu koja je vrednost funkcije F u redu označenom brojem **I** u tabeli istinitosti, treba upisati na mestu gde su ulazi ABCD=0000, tačnije u preseku kolone gde je AB=00 i vrste gde je CD=00. Logičku jedinicu koja je vrednost funkcije F u redu označenom brojem **IX** u tabeli istinitosti, treba upisati na mestu gde su ulazi ABCD=1000, tačnije u preseku kolone gde je AB=10 i vrste gde je CD=00 i tako dalje. U sledećoj tabeli su upisani redni brojevi redova iz tabele istinitosti gde su vrednosti funkcije F jedinice.

CD \ AB	00	01	11	10
00	0		12	8
01			13	
11				
10			14	10

II) Grupisanje logičkih jedinica za minimalnu disjunktivnu formu

Da bi se dobila minimalna disjunktivna forma treba grupisati logičke jedinice uz sledeća opšta pravila (pravila su objašnjena u udžbeniku i na početku ovog poglavlja):

- Treba grupisati po 1, 2, 4, 8, ili 16 jedinica. Grupe sa brojem jedinica koji nije oblika 2^N nisu dozvoljene.
- Treba se truditi da grupe budu što veće i po cenu preklapanja dela grupe sa drugom.
- Preklapanje grupa ne smeta ako se time prave veće grupe.
- Treba se truditi da ukupan broj grupa bude što manji.
- Moraju se grupisati sve jedinice.

Dakle, jednom rečenicom, treba formirati minimalan broj što većih grupa tako da se obuhvate sve jedinice.

Pomenuta pravila garantuju minimalnu funkciju u disjunktivnoj formi sa gledišta potrebnog broja logičkih kola da bi se funkcija realizovala ali to ne znači da ne može da postoji druga funkcija koja bi bila bolja ili jednostavnija za konkretnu primenu. Takođe ne postoji garancija da je disjunktivna forma optimalni izbor uvek.

Minimalna disjunktivna forma ima onoliko članova koliko je grupa napravljeno. Svaki član je logički proizvod (logička I funkcija) do četiri ulaza (za funkciju 4 promenljive) ili njihovih invertovanih vrednosti. Ako grupu čine dve jedinice, član ima tri elementa; ako grupu čine četiri jedinice, član ima dva elementa, a samo jedan element ako smo grupisali osam jedinica. Članovi su međusobno povezani logičkom ILI funkcijom.

III) Određivanje grupa i elemenata u članu za svaku grupu (MDF)

Kod grupisanja, nedefinisane vrednosti izlaza (označene sa x) treba uzeti kao jedinice samo ako pomažu formiranju veće grupe. Tako nedefinisanu vrednost izlaza na mestu gde su ulazi ABCD=1001 treba usvojiti kao jedinicu jer nam pomaže da formiramo grupu četiri jedinice, označenu sa ① na sledećoj tabeli.

Koristeći pomenuta pravila moguće je formirati tri grupe, dve sa po četiri jedinice i jednu sa dve jedinice. Grupe se preklapaju, jedna jedinica (u gornjem desnom uglu tabele) je obuhvaćena čak sa sve tri grupe što ne predstavlja nedostatak. Grupe su označene na sledećoj tabeli:

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	0	1	x
11	0	0	0	0
10	0	x	1	1

Grupu označenu sa ① (isprekidana linija) čine četiri logičke jedinice funkcije F:

- jedinica gore levo u grupi, kada su ulazi ABCD = 1100 (presek kolone u kojoj je AB=11 i vrste u kojoj je CD=00).
- jedinica gore desno u grupi, kada su ulazi ABCD = 1000 (presek kolone u kojoj je AB=10 i vrste u kojoj je CD=00).
- jedinica dole levo u grupi, kada su ulazi ABCD = 1101 (presek kolone u kojoj je AB=11 i vrste u kojoj je CD=01).
- x dole levo u grupi, tretiran kao jedinica, kada su ulazi ABCD = 1001 (presek kolone u kojoj je AB=10 i vrste u kojoj je CD=01).

Ova grupa je, dakle, nastala od jedinica za sledeće ulaze:

A	B	C	D
1	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	1
1	0	0	1
A	-	$\overline{\mathbf{C}}$	-

Ulaz A je za celu grupu na jedinici, ulaz C je za celu grupu na nuli, a ulazi B i D se menjaju. Po pravilima Karnoovih mapa, ulazi koji se menjaju ispadaju iz člana, ulazi koji su stalno na jedinici ulaze u član direktno, a ulazi koji su stalno na nuli ulaze u član kao invertovani. Tako član koji potiče od ove grupe je $\mathbf{A\overline{C}}$.

Grupu označenu sa ③ (puna linija) koja spaja dve jedinice iz prve vrste sa dve jedinice poslednje vrste ("spojena s druge strane papira") čine četiri logičke jedinice funkcije F:

- jedinica kada su ulazi ABCD = 1100 (presek kolone u kojoj je AB=11 i vrste u kojoj je CD=00).
- jedinica kada su ulazi ABCD = 1000 (presek kolone u kojoj je AB=10 i vrste u kojoj je CD=00).
- jedinica kada su ulazi ABCD = 1110 (presek kolone u kojoj je AB=11 i vrste u kojoj je CD=10).
- jedinica, kada su ulazi ABCD = 1010 (presek kolone u kojoj je AB=10 i vrste u kojoj je CD=10).

Ova grupa je, dakle, nastala od jedinica za sledeće ulaze:

A	B	C	D
1	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	0
1	0	1	0
A	-	-	$\overline{\mathbf{D}}$

Ulaz A je za celu grupu na jedinici, ulaz D je za celu grupu na nuli, a ulazi B i C se menjaju. Po pravilima Karnoovih mapa, ulazi koji se menjaju ispadaju iz člana, ulazi koji su stalno na jedinici ulaze u član direktno, a ulazi koji su stalno na nuli ulaze u član kao invertovani. Tako član koji potiče od ove grupe je $\mathbf{A\overline{D}}$.

Grupu označenu sa ② (tačkasta linija) koja spaja dve jedinicu iz prve kolone sa jedinicom poslednje kolone ("spojena s druge strane papira") čine dve logičke jedinice funkcije F:

- jedinica kada su ulazi ABCD = 0000 (presek kolone u kojoj je AB=00 i vrste u kojoj je CD=00).
- jedinica kada su ulazi ABCD = 1000 (presek kolone u kojoj je AB=10 i vrste u kojoj je CD=00).

Ova grupa je, dakle, nastala od jedinica za sledeće ulaze:

A	B	C	D
0	0	0	0
1	0	0	0
-	$\overline{\mathbf{B}}$	$\overline{\mathbf{C}}$	$\overline{\mathbf{D}}$

Ulaz B je za celu grupu na jedinici, ulazi C i D takođe, a ulaz B se menja. Tako član koji potiče od ove grupe ima tri elementa: $\mathbf{\overline{B}\overline{C}\overline{D}}$.

Minimalna disjunktivna forma je logički zbir ova tri člana (svaki je podvučen linijom kakvom je označena odgovarajuća grupa):

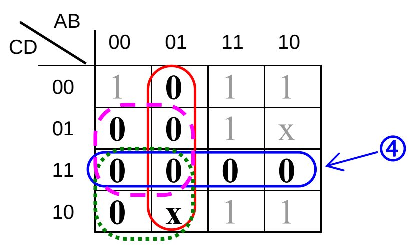
$$F = A\overline{C} + A\overline{D} + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$$

IV) Određivanje grupa i elemenata u članu za svaku grupu (MKF)

Minimalna konjunktivna forma je forma logičkog proizvoda članova koji su logički zbirovi elemenata. Elementi su ili same ulazne promenljive ili njihove invertovane vrednosti.

Da bi se dobila ova forma pomoću Karnoovih mapa potrebno je grupisati nule u grupe po istom principu kao što su grupisane jedinice za dobijanje minimalne disjunktivne forme. Razlog ovakvog grupisanja i pravila su objašnjena u udžbeniku.

Jedan od mogućih načina grupisanja prikazan je na sledećoj tabeli. Neodređeni izlaz **x** na poziciji ABCD=0110 je usvojen kao nula da bi grupa označena tačkastom linijom mogla imati četiri ulaza. Minimalni broj grupa je četiri i svaka od grupa ima po četiri nule. Kao i u slučaju minimalne disjunktivne forme grupa koja obuhvata dve nule smanjuje broj elemenata u tom članu za jedan, grupa od četiri nule smanjuje broj elemenata za dva i tako dalje. Za funkciju četiri ulaza grupa od četiri nule će dati član sa dva elementa.



Ponovo, svaka grupa čini jedan član u minimalnoj konjunktivnoj formi.
Određivanje koji elementi čine član je po principu slično istom postupku u slučaju disjunktivne forme. Ovde će biti prikazano samo za jednu grupu označenu sa ④**.**

Grupu označenu sa ④ (puna linija) čine četiri logičke nule funkcije F:

- nula kada su ulazi ABCD = 0011 (presek kolone u kojoj je AB=00 i vrste u kojoj je CD=11).
- nula kada su ulazi ABCD = 0111 (presek kolone u kojoj je AB=01 i vrste u kojoj je CD=11).
- nula kada su ulazi ABCD = 1111 (presek kolone u kojoj je AB=11 i vrste u kojoj je CD=11).
- nula kada su ulazi ABCD = 1011 (presek kolone u kojoj je AB=10 i vrste u kojoj je CD=11).

Ova grupa je, dakle, nastala od nula za sledeće ulaze:

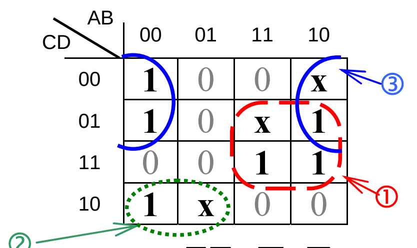
A	**B**	**C**	**D**
0	0	1	1
0	1	1	1
1	1	1	1
1	0	1	1
-	-	$\overline{\mathbf{C}}$	$\overline{\mathbf{D}}$

Ulaz C je za celu grupu na jedinici, ulaz D takođe, ulazi A i B se menjaju. Po pravilima Karnoovih mapa za minimalnu konjunktivnu formu, ulazi koji se menjaju ispadaju iz člana, ulazi koji su stalno na nuli ulaze u član direktno, a ulazi koji su stalno na jedinici ulaze u član kao invertovani. Tako član koji potiče od ove grupe je $\overline{\mathbf{C}}+\overline{\mathbf{D}}$.
Postupak određivanja ostalih članova je isti. Funkcija koja se na ovaj način dobija kao minimalna disjunktivna forma je sledeća (članovi su podvučeni linijom kakvom je označena odgovarajuća grupa)

$$F=(A+\overline{B})(A+\overline{D})(A+\overline{C})(\overline{C}+\overline{D})$$

32. Niz **1110 00x0 x101 0x01** predstavlja izlaze funkcije četiri promenljive A,B,C,D pri čemu prva cifra u nizu predstavlja izlaz kada je A,B,C,D=0,0,0,0, a poslednja, kada je A,B,C,D=1,1,1,1. Cifre izmedju prve i poslednje su izlazi po binarnom redu. **x** je nedefinisan izlaz, svaki od njih pojedinačno može biti bilo nula ili jedinica. Napisati logički izraz koji predstavlja:
    a) Minimalnu disjunktivnu formu ove funkcije.
    b) Minimalnu konjunktivnu formu ove funkcije.

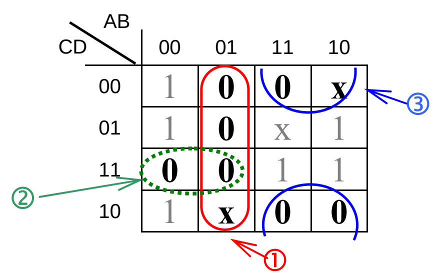
Rešenje:
a) Jedno od mogućih rešenja minimalne disjunktivne forme je dato tabelom:



$$F=AD+\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}C\overline{D}$$

① ③ ②

b) Minimalna konjunktivna forma



$$F=(A+\overline{B})(A+\overline{C}+\overline{D})(\overline{A}+D)$$

① ② ③

33. Niz **0x00 1011 10x0 101x** predstavlja izlaze funkcije četiri promenljive A,B,C,D pri čemu prva cifra u nizu predstavlja izlaz kada je A,B,C,D=0,0,0,0, a poslednja, kada je A,B,C,D=1,1,1,1. Cifre izmedju prve i poslednje su izlazi po binarnom redu. **x** je nedefinisan izlaz, svaki od njih pojedinačno može biti bilo nula ili jedinica. Napisati logički izraz koji predstavlja:
    a) Minimalnu disjunktivnu formu ove funkcije.
    b) Minimalnu konjunktivnu formu ove funkcije.

Rešenje:

a) Minimalna disjunktivna forma:

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	x	0	0	0
11	0	1	x	0
10	0	1	1	x

① ② ③

$$F = C \cdot B + B \cdot \overline{D} + A \cdot \overline{D}$$

b) Minimalna konjunktivna forma

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	x	0	0	0
11	0	1	x	0
10	0	1	1	x

$$F = (C + \overline{D})(\overline{A} + \overline{D})(A + B)$$

34. Data je logička funkcija

$$F = \overline{A} \cdot C \cdot D + \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot D + A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D}$$

Koristeći Karnoove mape pronaći minimalnu disjunktivnu formu ove funkcije

Rešenje:

Data funkcija je očigledno u minimalnoj disjunktivnoj formi. Dakle, mogla je nastati kao rezultat grupisanja jedinica u Karnoovoj mapi. Kako funkcija ima 5 članova, to ukazuje da je bilo ukupno 5 grupa. Prva tri člana imaju po tri elementa što ukazuje da su nastali grupisanjem po dve jedinice. Poslednja dva člana imaju po četiri elementa pa se može zaključiti da su nastali od pojedinačnih jedinica. Pronađimo koja grupa jedinica (dve jedinice) je dala prvi član $\overline{A} \cdot C \cdot D$.

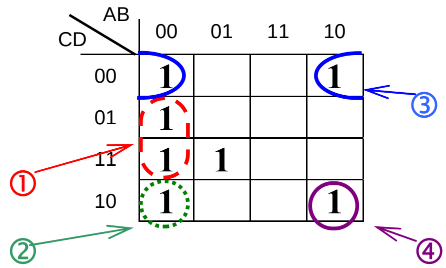
To je grupa u preseku polja u kojima je ulaz A na nuli, ulaz B je bilo nula ili jedinica (B ne učestvuje u članu), a oba ulaza C i D na jedinici.

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01				
11	1	1		
10				

C=1, D=1

A=0, B se menja

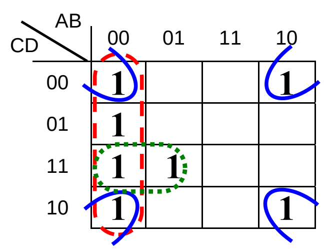
Do pozicije ove grupe može se doći i analitički: $\overline{A}CD = A(B+\overline{B})CD = \overline{A}BCD + \overline{A}\,\overline{B}CD$ što znači da grupu čine polja gde je A,B,C,D = 0,1,1,1 i A,B,C,D = 0,0,1,1



Na sličan način dolazimo do ostalih grupa (označene su sve sem prve):
Neoznačene grupe su dobijene iz polazne funkcije na sledeći način (prva grupa $\overline{A}\cdot C\cdot D$.
nije ponovo naznačena):

$$F = \overline{A}\cdot C\cdot D + \underbrace{\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}}_{③} + \underbrace{\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C}_{①} + \underbrace{\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D}_{②} + \underbrace{A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}}_{④}$$

Boljim grupisanjem može se dobiti znatno jednostavnija funkcija u istoj formi



$$F = \overline{B}\cdot\overline{D} + \overline{A}\cdot C\cdot D + \overline{A}\cdot\overline{B}$$

35. Za funkciju koja je zadata kao proizvod potpunih suma (DNF)
    F (D, C, B, A) = Σ (1, 2, 4, 6, 9, 10, 11, 13, 14, 15)
    a) Odrediti minimalnu disjunktivnu formu funkcije (**MDF**).
    b) Odrediti minimalnu konjuktivnu formu funkcije (**MKF**).

36. Za funkciju koja je zadata kao proizvod potpunih suma (DNF)
    $F(A_4, A_3, A_2, A_1)$ = Σ (4, 6, 7, 10, 12, 13, 14, 15)
    a) Odrediti minimalnu disjunktivnu formu funkcije (**MDF**).
    b) Odrediti minimalnu konjuktivnu formu funkcije (**MKF**).

37. Za funkciju koja je zadata kao suma potpunih proizvoda (KNF)
    $F(X_4, X_3, X_2, X_1)$= Π (0, 1, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15)
    a) Odrediti minimalnu konjuktivnu formu funkcije (**MKF**).
    b) Odrediti minimalnu disjunktivnu formu funkcije (**MDF**).

38. Za funkciju koja je zadata kao suma potpunih proizvoda (KNF)
   $F\,(W, Z, Y, X) = \Pi\ (0, 3, 4, 7, 8, 11, 12, 13, 15) = 0$
   a) Odrediti minimalnu konjuktivnu formu funkcije (**MKF**).
   b) Odrediti minimalnu disjunktivnu formu funkcije (**MDF**).

39. Za funkciju $F_{DNF}\,(A_1, A_2, A_3, A_4) = \Sigma\ (1, 4, 5, 6, 12, 13) = 1$, $F(X) = (8, 9, 14, 15)$, gde je X nedefinisana vrednost funkcije:
   a) Odrediti minimalnu disjunktivnu formu funkcije (**MDF**).
   b) Odrediti minimalnu konjuktivnu formu funkcije (**MKF**).

40. Za funkciju $F_{KNF}\,(X_1, X_2, X_3, X_4) = \Pi\ (0, 4, 7, 8, 12) = 0$, $F(b) = (1, 3, 9, 12, 14, 15)$, gde je b nedefinisana vrednost funkcije:
   a) Odrediti minimalnu konjuktivnu formu funkcije (**MKF**).
   b) Odrediti minimalnu disjunktivnu formu funkcije (**MDF**).