B2: Variable aleatòria

- Variable Discreta (VAD): Si el conjunt de valors que podem agafar es numerable.

- Variable Contínua (VAC): Si agafa valors d'un conjunt no discret

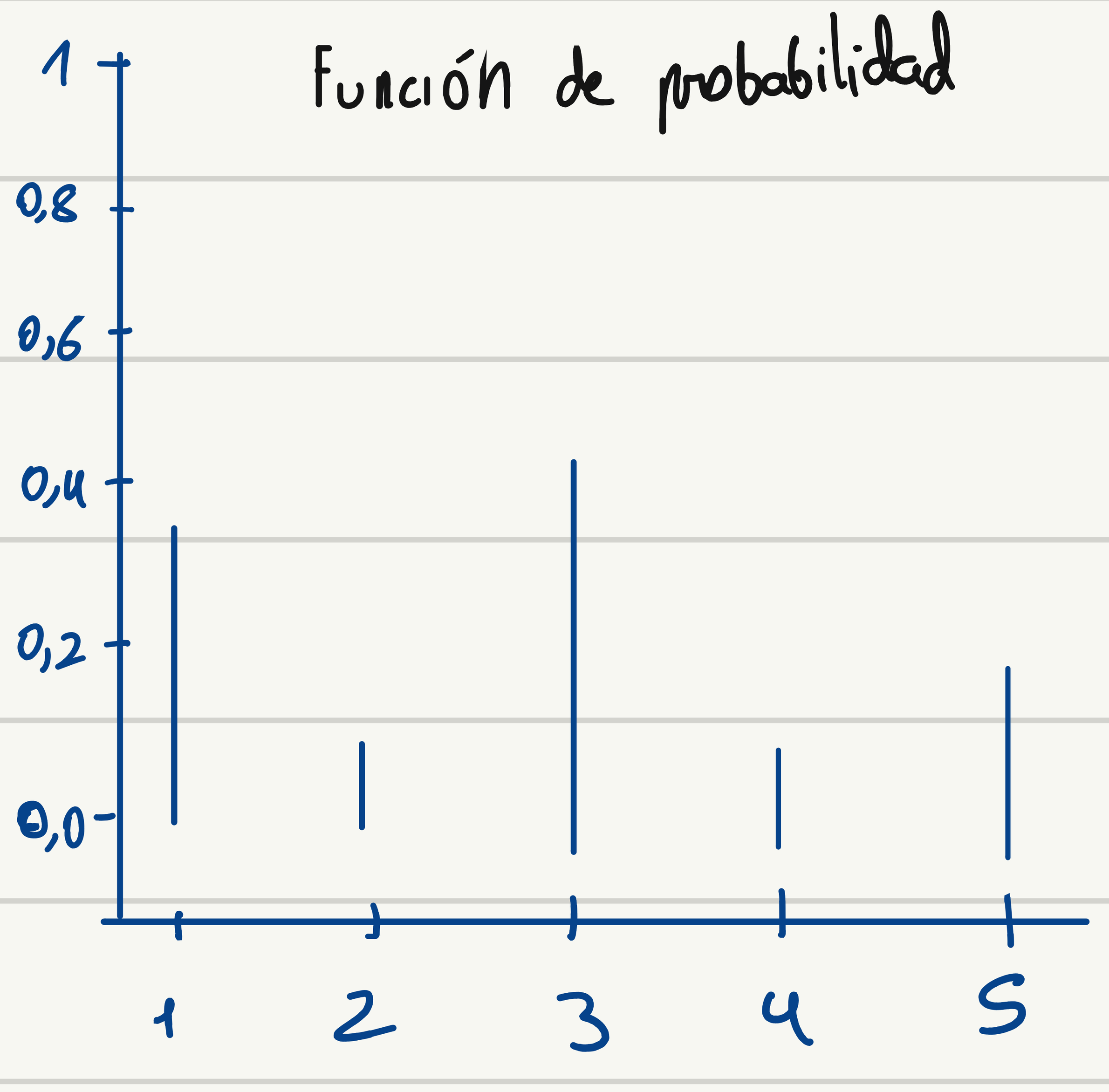
• Funció de probabilitat i distribució

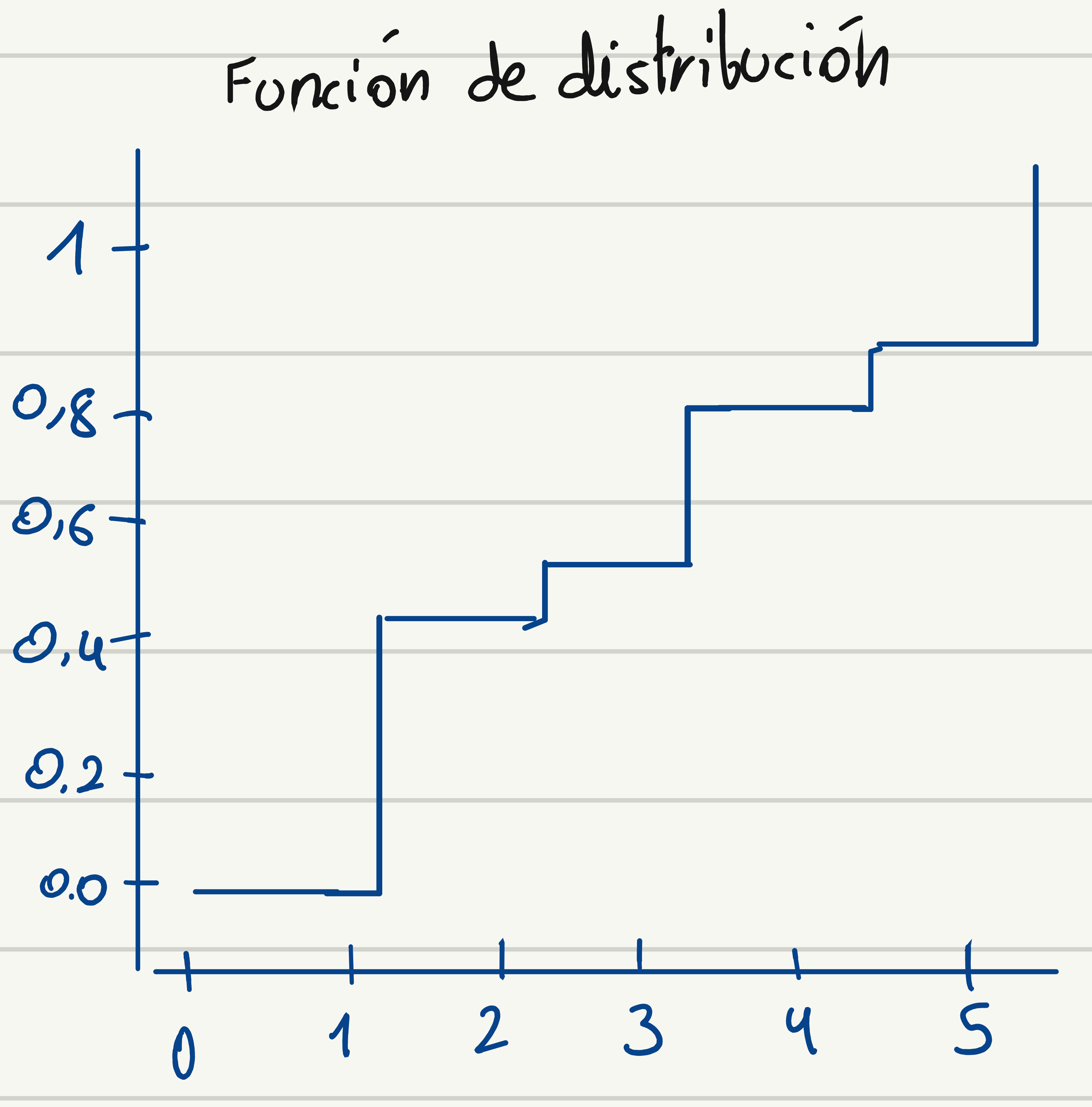
- La funció de probabilitat (p_X) en una VAD defineix la probabilitat puntual de cada un dels possibles valors k

$$p_X(k) = P(X=k) \quad (\text{complint } \textstyle\sum_k p_X(k)=1)$$

- La funció de distribució (F_X) de probabilitat en una VAD defineix la probabilitat acumulada, és a dir:

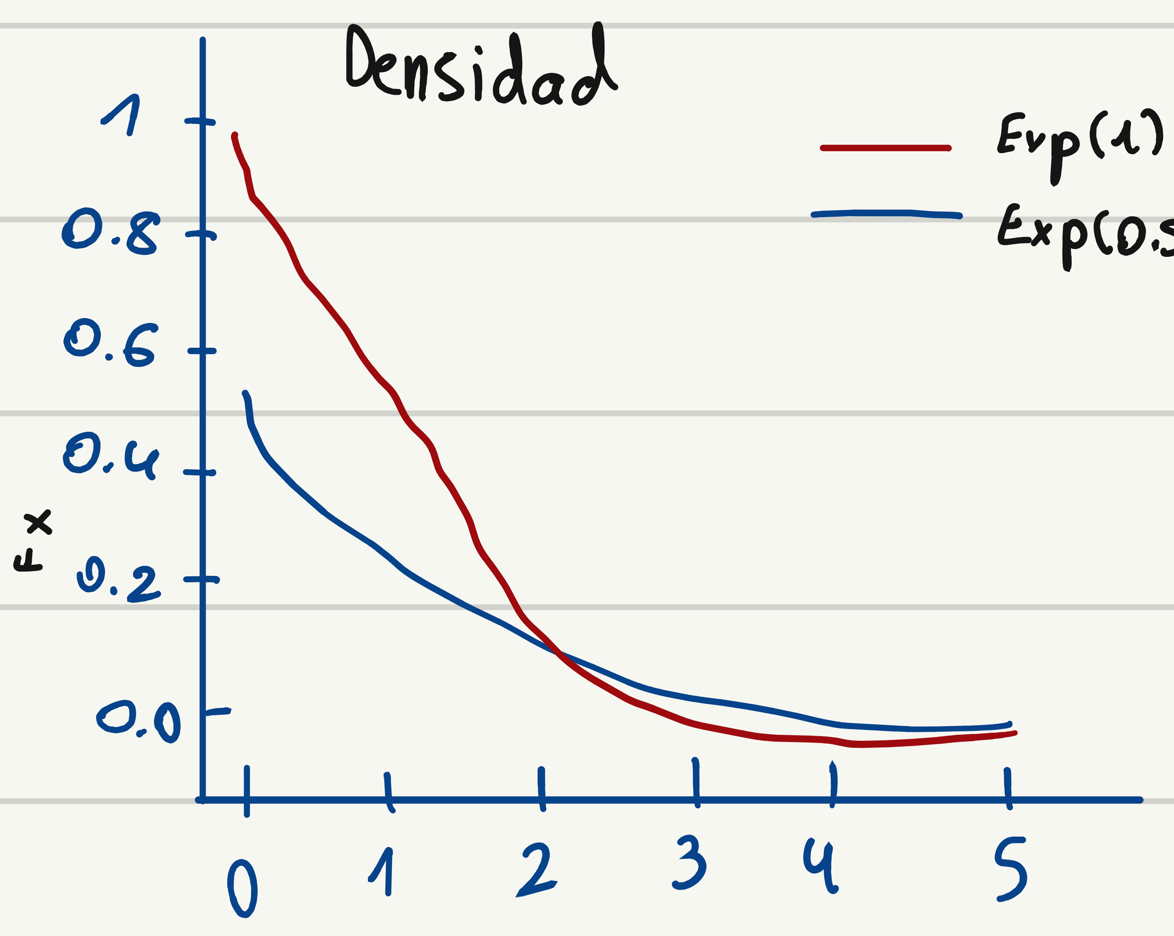
$$F_X(k) = P(X \leq k) = \sum_{j \leq k} p_X(j)$$

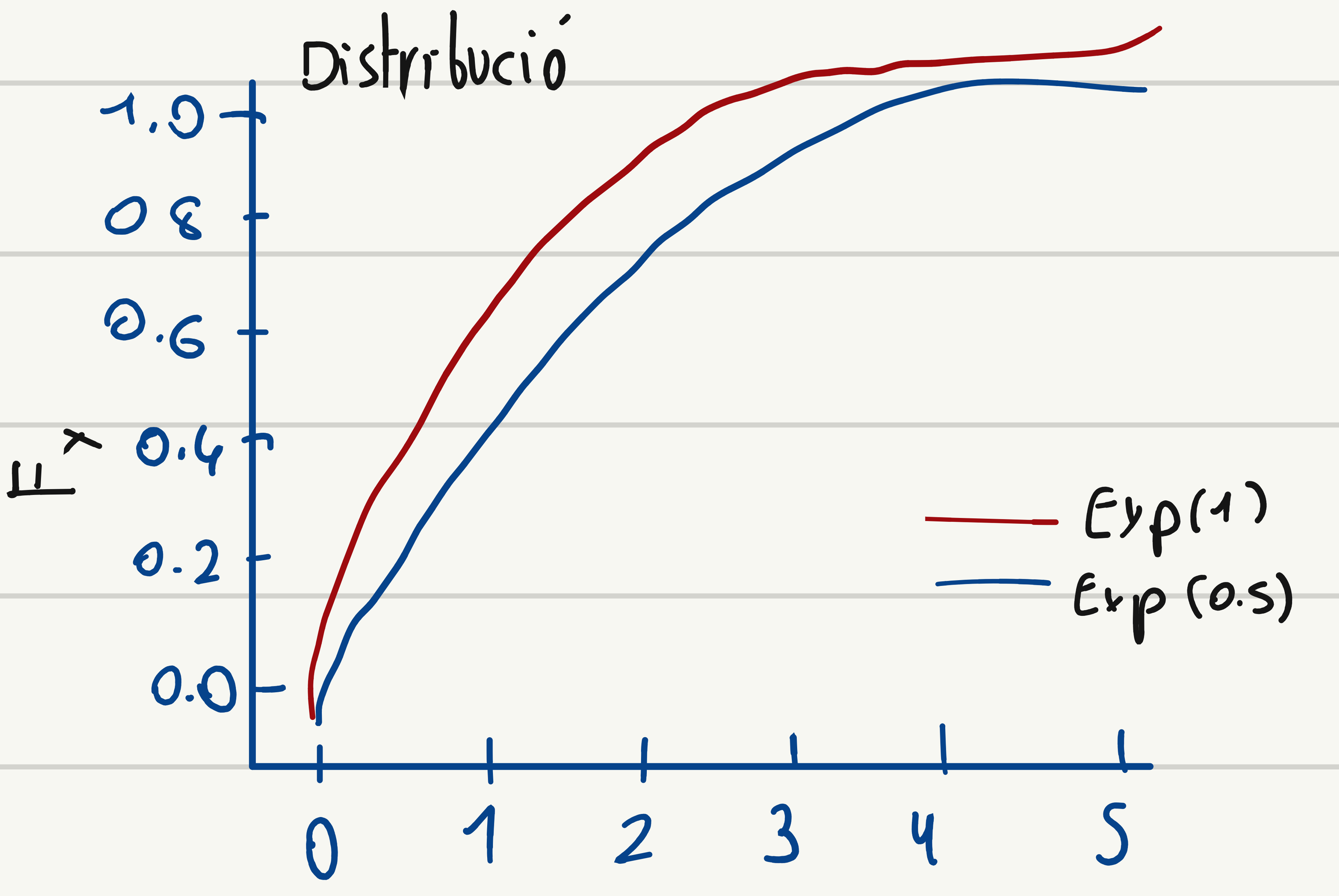




- La funció de densitat de probabilitat (f_X) d'una VAC és la funció que recobreix l'àrea on està definida la variable complint: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$ No hay valores puntuales, valen 0.

- La funció de distribució de probabilitat (F_X) d'una VAC defineix la probabilitat acumulada és a dir: $F_X(K) = P(X \leq K) = \int_{-\infty}^{K} f_X(x)\,dx$ Observem que $f_X(x) = \dfrac{dF_X(x)}{dx}$





En el cas de VAC, qualsevol funció positiva, $f(x) \geq 0$ que compleix:
$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$ és una funció de densitat vàlida, és a dir caracteritza la variable

La funció de distribució s'obté amb: $F_X(u) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\,dx$

$$\boxed{\int_a^b f_X(x)\,dx = F_X(b) - F_X(a)}$$

• Probabilitats acumulades. Quantils

- Sigui X una variable aleatòria, i α un valor real ($0 \leq \alpha \leq 1$) diem que X_α és el quantil α de X si es compleix: $F_X(X_\alpha) = \alpha$

- Calcular un quantil és el problema invers al càlcul de probabilitats acumulades. La funció inversa de la funció de distribució ens retorna X_α

• Indicadors de V.A. Com es calculen?

- Esperança de X

$$\text{VAD} \rightarrow E(X) = \mu_X = \sum_{\forall k} (k \cdot p_X(k))$$

$$\text{VAC} \rightarrow E(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\, dx$$

- Variància de X

$$\text{VAD} \rightarrow V(X) = \sigma_X^2 = \sum_{\forall k} \left[(k - E(x))^2 \cdot p_X(k)\right] \rightarrow \sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{V(X)}$$

$$\text{VAC} \rightarrow V(X) = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(x))^2 \cdot f_X(x)\, dx \rightarrow \sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{V(x)}$$

- Relació entre Esperança i Variància (en VAD i VAC)

$$V(X) = E\left[(x - E(x))^2\right] = E(X^2) - E(X)^2$$