• Estimació Puntual

Paràmetre (θ) (Població)	Estimador ($\hat{\theta}$) (Mostra)
μ (esperança, mitjana poblacional)	$\bar{X}$ (mitjana mostral)
σ^2 (variància poblacional) σ (desviació tipus poblacional)	s^2 (variancia mostral) s (desviació tipus mostral)
π (probabilitat)	p (proporció)

Exemple:

En 9 dies consecutius s'ha observat el nombre de terminals en una Uni connectats a a internet: 587, 470, 676, 451, 436, 672, 584, 697, 408

Una estimació puntual del nombre esperat (μ) de terminals diaris connectats és:

$\bar{X} = (\Sigma x_i)/n = (587+470+676+451+436+672+584+697+408)/9 = 4981/9 = 553{,}44$

Una estimació puntual de la desviació tipus (σ) del nombre de terminals connectats és:

$s = \sqrt{(\Sigma(x_i-\bar{x})^2)/(n-1)} = \sqrt{104148{,}22/9-1} = 114{,}098$

$\Sigma(x_i-\bar{x})^2 = (587-553{,}44)^2 + (470-553{,}44)^2 + \ldots = 104148{,}22$

L'estimació de l'error tipus o variabilitat de la mitjana és:

$se = \sqrt{(\Sigma(x_i-\bar{x})^2)/(n-1)} \cdot 1/\sqrt{n} = s \cdot 1/\sqrt{n} = 114{,}098 \cdot 1/\sqrt{9} = 38{,}03$

• Interval de confiança per μ (σ coneguda) Exemple

- $IC(\mu, 1-\alpha) = \bar{X} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Com que la normal és simètrica, llavors $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$

- Requisits: $n > 30$ o $X \sim N$

Exemple:

Una embotelladora d'ampolles de litre té una dispersió de $\sigma = 10cc$. En una mostra a a l'atzar de $n = 100$ ampolles d'aquesta màquina, la mitjana observada ha sigut $\bar{x} = 995cc$

Calculeu un interval de confiança del 95% de μ.

$IC(\mu, 0.95) = \bar{X} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 995 \pm 1{,}96 \cdot \frac{10}{\sqrt{100}} = 995 \pm 1{,}96 = [993{,}04 , 996{,}96]$

R: Amb una confiança del 95%, μ es troba entre 993,04 i 996,96

Exercici: Terminals (IC)

En 9 dies consecutius s'ha observat el nombre de terminals en una Uni connectats a a internet: 587, 470, 676, 451, 436, 672, 584, 697, 408

Una estimació per interval de μ, nombre esperat de terminals diaris connectats en mitjana si assumim que coneixem que la variabilitat poblacional $\sigma = 100$:

$IC(\mu, 0{,}95) = 553{,}44 \pm 1{,}96 \cdot \frac{100}{\sqrt{9}} = [488{,}11 , 618{,}77]$ ✓

I amb confiança 99% (risc 1%):

$IC(\mu, 0.99) = 553{,}44 \pm 2{,}58 \cdot \frac{100}{\sqrt{9}} = [467{,}44 , 639{,}44]$ ✓

ATENCIÓ: Si augmenta la confiança (disminuint el risc α d'error), la precisió dels IC disminueix (interval més ample)

Una estimació per interval de μ, nombre esperat de terminals diaris connectats en mitjana, sense coneixer σ:

$IC(\mu, 0{,}95) = 553{,}44 \pm \underbrace{2{,}31}_{\substack{t\text{-student} \\ (0{,}975,\ 8)}} \cdot \frac{114{,}09}{\sqrt{9}} = [465{,}59 , 641{,}28]$

Exercici: Embotelladora (IC)

Una embotelladora d'ampolles de litre té una dispersió de $\sigma = 10cc$. En una mostra a a l'atzar de $n = 100$ ampolles d'aquesta màquina, la mitjana observada ha sigut $\bar{x} = 995cc$

Calculeu un interval de confiança del 95% de μ.

$$IC(\mu, 0.95) = \bar{x} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 995 \pm 1{,}96 \cdot \frac{10}{\sqrt{100}} = 995 \pm 1{,}96 = [993{,}04 \, , \, 996{,}96]$$

I un interval sense assumir el valor de la variabilitat poblacional (però suposant que el càlcul de s donava 10):

$$IC(\mu, 0{,}95) = 995 \pm \underbrace{1{,}98}_{t_{99,\,1-\alpha/2}} \frac{10}{\sqrt{100}} = [993{,}02 \, , \, 996{,}98]$$

(l'amplada de l'interval és $1{,}98 \cdot 2 = 3{,}96$)

ATENCIÓ: el IC amb σ desconeguda li correspondrà ser més ample que l'equivalent assumint el verdader valor de σ ja que hi ha més incertesa i usem t enlloc de $N(0,1)$ que és més ample.

preguntar
porq con t si $n \geq 100$?

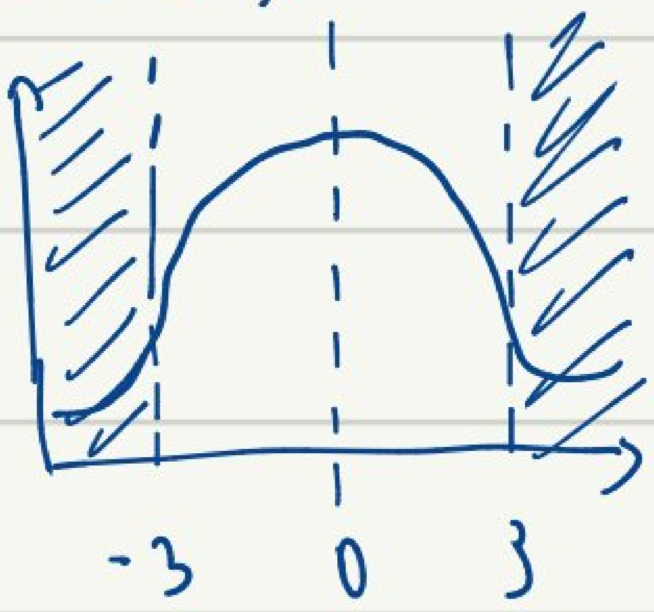
• Proves d'hipòtesi sobre μ. Exemple

Si en el cas d'una embotelladora de 1 litre tenim: $\bar{x} = 997$, $s = 10$; $n = 100$. Podem pensar que la mitjana poblacional és $\mu = 1000$ cc?

1. Variable: contingut en envasos de 1000 cc
2. Estadístic: (no coneixem σ) $\hat{t} = (\bar{x} - \mu) / (s/\sqrt{n})$
3. $H_0: \mu = 1000$ cc vs $H_1: \mu \neq 1000$ cc
4. Distribució de l'estadístic sota H_0: $(\bar{x} - \mu)/(s/\sqrt{n}) \sim N(0,1)$ ja que $n = 100$
5. Càlculs: $\hat{t} = (\bar{x} - \mu)/(s/\sqrt{n}) = \dfrac{997 - 1000}{10/\sqrt{100}} = -3$
6. P-valor $= P(|z| > |-3|) = 0{,}0027$ (Taules: $2 \cdot (1 - 0{,}9987)$)

   $P(z < -3) = 1 - P(z \leq 3) = 1 - 0{,}99865 = 0{,}00135$

   $P(z > 3) = 0{,}00135$



7. Conclusió: com que P és menor que α, es rebutja $H_0: \mu = 1000$cc

   Conclusió pràctica: ens estan estafant! $\alpha = 0{,}05$?

8. $IC(\mu, 0{,}95) = \bar{x} \pm z_{1-\alpha/2} \cdot \dfrac{s}{\sqrt{n}} = 997 \pm 1{,}96 \cdot \dfrac{10}{\sqrt{100}} = [995{,}04 , 998{,}96]$

Nota: per graus llibertat propers a 100, D.t Student és molt propera a DN.

• Proves d'hipòtesi sobre μ. Exercici

En 9 fitxers, la diferencia D entre els temps d'execució de dos programes de compressió de fitxers ha estat de mitjana 6,71 i desviació 6,00. Acceptant que $D \sim N$ ¿Es pot acceptar que $E(D) = \mu = 0$? (és a dir, acceptem que els dos compressors tarden el mateix en mitjana?)

1. Variable: diferencia entre temps d'execució

2. Estadístic: coneixem σ. pero $n<30 \rightarrow t = (\bar{x}-\mu)/(s/\sqrt{n})$

3. $H_0: \mu = 0$ vs $H_1: \mu \neq 0$

4. Distribució de l'estadístic sota H0: $(\bar{x}-\mu)/(s/\sqrt{n}) \sim t_{n-1}$ ja que $D \sim N$

5. Càlculs: $\hat{t} = \dfrac{6{,}71 - 0}{6/\sqrt{9}} = 3{,}355$

6. P-valor: $\left.\begin{array}{l} P(t > 3{,}355) = 1 - P(t < 3{,}355) = 0{,}005 \\ P(t < -3{,}355) = 0{,}005 \end{array}\right\} 0{,}01$

7. Conclusió: és rebutja H_0: $E(D) = \mu = 0$ ja que el valor $(0{,}01)$ és $< \alpha$

   Conclusió pràctica: No triguen el mateix

8. $IC(\mu, 0{,}95)$: $\bar{x} \pm t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{s}{\sqrt{n}} = 6{,}71 \pm 2{,}306 \cdot \dfrac{6}{\sqrt{9}} = [2{,}1 \, , 11{,}3]$

• Proves d'hipòtesi sobre π. Excercici

Llancem una moneda 100 vegades i obtenim 63 cares. Està "trucada" la moneda?

1. Variable: resultat de cada llançament (cara o no)
2. Estadístic: $Z = (p - \pi_0) / (\sqrt{\pi_0 (1-\pi_0)/n})$
3. $H_0: \pi_0 = 0{,}5$ vs $H_1: \pi_1 \neq 0{,}5$
4. Distribució si H_0 es certa $Z \sim N(\pi, \sqrt{\pi \cdot (1-\pi)/n}) = N(0{,}5, 0{,}05)$
5. Calcul estadístic: $= \dfrac{0{,}63 - 0{,}5}{\sqrt{0{,}5\ (1-0{,}5)/100}} = 2{,}6$
6. P-valor: P(X més lluny de H_0 que x) $= 0{,}0094$ bilateral

   $1 - P(z \leq 2{,}6) = 0{,}0047 \cdot 2 = 0{,}0094$

7. Conclusió: Sí, hi ha (certa) evidencia en contra de $H_0: \pi = 0{,}50$
8. IC95%: $IC(\pi, 0{,}95) = p \pm z_{0{,}975} \cdot \sqrt{(\pi \cdot (1-\pi)/n} = 0{,}63 \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{(0{,}63 \cdot 0{,}37)/100}$

   $= [0{,}53, 0{,}73]$

dif observat i teoric — $\dfrac{\text{"Senyal"}}{\text{"Soroll"}} \sim \begin{matrix} Z \\ t \end{matrix}$

variabilitat se.

ratí variabilitats $\begin{matrix} \sigma^2 & \sigma \\ s^2 & s \end{matrix}$

$\dfrac{s^2 (n-1)}{\sigma^2} \sim \chi^2$

• Excercici: Compressor (estimació puntual, IC i PH)

El fabricant d'un determinat compressor d'arxius de 500Kb són comprimits en 5 segons. Aquest compressor ha estat testejat amb 8 arxius i el temps en segons necessari per a cada compressió han estat:

4,85, 4,36, 5,12, 5,64, 5,6, 5,87, 3,91, 4,88

Compleixen que es comprimeixen en 5 sg en mitjana?

Si la variància és superior a 0,22 segons^2 el compressor té una qualitat insuficient. És suficient o no?

$\bar{X} = 4.85 + 4.36 + 5,12 + 5,64 + 5,6 + 5,87 + 3,91 + 4,88 / 8 = 5,03$

$s^2 = ((4,85-5,03)^2 + (4,36-5,03)^2 + (5,12-5,03)^2 + (5,64-5,03)^2 + (5,6-5,03)^2 +$
$(3,91-5,03^2)^2 + (4,88-5,03)^2) / 8-1 = 3,1689 / 7 = 0,4527$ $\quad s = \sqrt{0,4527} = 0,6728$

$H_0: \mu = 5$ vs $H_1: \mu \neq 5$ (bilateral)

σ no coneguda $\rightarrow \hat{t} = (\bar{x} - \mu_0) / s/\sqrt{n} \sim t_{n-1}$

Calcul Estadístic: $\hat{t} = \dfrac{(5,03 - 5)}{0,6728/\sqrt{8}} = 0,1261$

Càlcul Punts Crítics: $t_{n-1,\, 1-\alpha/2} \rightarrow t_{7,\, 0,975} = 2,3646 \begin{cases} \rightarrow 2,3646 \\ \rightarrow -2,3646 \end{cases}$

Càlcul pvalor: $P(T > 0,12) = 1 - P(T < 0,12) = 1 - 0,5460 = 0,4539$

$P(T < -0,12) = 0,4539$

$0,4539 \cdot 2 = 0,907$

$IC(\mu, 0,95) = 5,029 \pm 2,365 \cdot 0,67 / \sqrt{8} = [4,47,\ 5,59]$

Conclusió: el valor $\mu = 5$ posat a prova està dins l'interval IC estadístic 0,12 en regió d'acceptació, entre els punts crítics, p-value gran, 90,7% > α = 5% llavors res s'oposa a acceptar H_0 és a dir que si compleix una mitjana esperada poblacional $\mu = 5$ (la diferencia entre la mitjana mostral i l'esperada és degut a l'atzar)

PH σ^2

$H_0: \sigma^2 = 0{,}22$ vs $H_1: \sigma^2 > 0{,}22$

Estadístic: $\chi^2 = \frac{s^2(n-1)}{\sigma^2} = \frac{0{,}4527 \cdot (8-1)}{0{,}22} = 14{,}32$

Punt crític: $\chi^2_{7,\,0{,}95} = 14{,}067$

Conclusió: valor estadístic, 14,32, està fora de la zona acceptació de punt crític, llavors NO és raonable acceptar la hipotesis de 0,22, i per tant té qualitat insuficient

Exemple: Embotelladora (IC i PH)

Una embotelladora d'ampolles de litre té una dispersió de $\sigma = 10cc$

En una mostra a l'atzar de $n = 100$ ampolles d'aquesta màquina, la mitjana observada ha sigut $\bar{x} = 995cc$

Podem pensar que la mitjana poblacional és 1000cc, és a dir que no ens estafen, amb una confiansa del 95%?

Hipòtesis: $H_0: \mu = 1000cc$ vs $H_1: \mu \neq 1000cc$

Estadístic: $Z = (\bar{x} - \mu) / \sigma / n \sim N(0,1)$

Càlcul estadístic: $z = (995 - 1000) / 10 / \sqrt{100} = -5$

Càlcul punts crítics: $Z_{0,975} = 1,960$ $\quad Z_{0,025} = -1,960$

Càlcul p-value: $P(Z > 5) \simeq 0$

$P(Z < -5) \simeq 0$

$IC(\mu, 0,95) = 995 \pm 1,96 \; 10/\sqrt{100} = 995 \pm 1,96 = [993,04 , 996,96]$

Conclusió: el valor de μ posat a prova està FORA de l'interval p-value petit $(0,0027 < \alpha = 0,05)$

estadístic -5 està FORA de zona acceptació de punts crítics $-1,96 : 1.96$

llavors hi ha prou evidència per no acceptar $H_0 \rightarrow$ estafen

Mitjana de 995 és significativament inferior a 1000cc (diferencia no explicable per atzar)

B5: Proves en dues mostres

Comparació de mitjanes ind ($\mu_1 = \mu_2$) Exemple

Els temps mitjans d'execució de dos programes provats en diferents bancs de dades independents ($n_1 = 50$; $n_2 = 100$) ha sigut: $\bar{y}_1 = 24$ i $\bar{y}_2 = 21$ amb $s_1 = 8$; $s_2 = 6$. Suposem $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$. Es desitja decidir quin programa es posa al mercat. Tenen rendiments diferents?

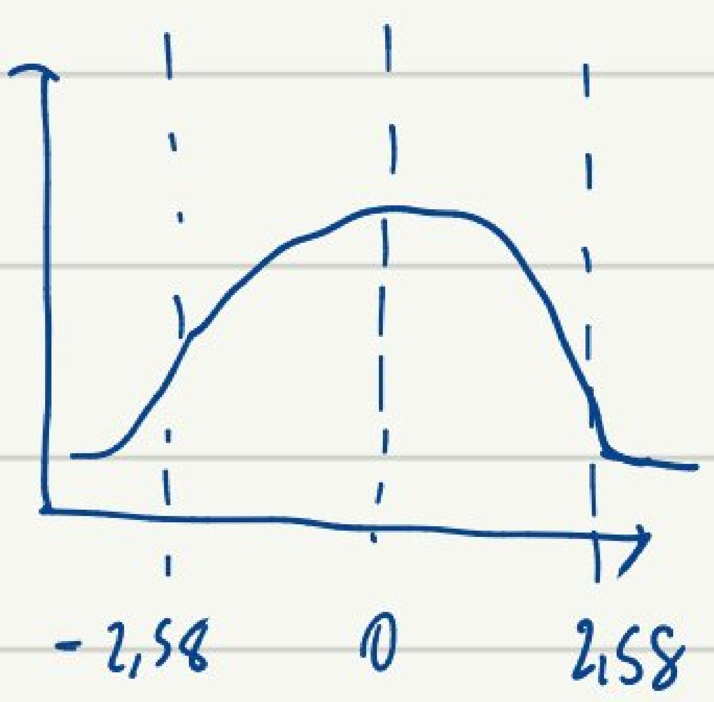
1. Variables: Y_1 i Y_2 de temps d'execució

2. Estadístic: $\hat{t} = \dfrac{(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$ amb $s^2 = \dfrac{(n_1-1)\cdot s_1^2 + (n_2-1)\, s_2^2}{(n_1-1) + (n_2-1)}$

3. Hipòtesi: $\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$ (bilateral)

4. Distribució estadístic: $T \sim t_{n_1+n_2-2} \rightarrow t_{148}$ Premisses: m.a.s i Y_1 i Y_2 Normals amb $\sigma_1 = \sigma_2 = 6$

5. Càlculs estadístics: $s^2 = \dfrac{(50-1)\cdot s_1^2 + (100-1)\cdot s_2^2}{(50-1) + (100-1)} = 45,27 \rightarrow \hat{t} = \dfrac{(24-21)}{6,72\sqrt{\frac{1}{50} + \frac{1}{100}}} = 2,58$



$P_{crític}(t_{146}, 0{,}975) = 1{,}976$ i $-1{,}976$

6. P-valor $= P(|t_{148}| > |2,58|)$

$P(t_{148} > 2,58) = 1 - P(t_{148} < 2,58) = 1 - 0{,}995 = 0{,}005$

$P(t_{148} < -2,58) = + 0{,}005$

$= 0{,}01$

7. Conclusió: 0 esta FORA del IC → valor no acceptable, p-value < 0,05, 2,58 fora de la regió d'acceptació p.crítics
Hi ha prou evidència per rebutjar la hipòtesis de rendiments iguals.

Conclusió pràctica: - (PH): Aquestes dades o més extremes són poc probables ($P = 0{,}01$) si els rendiments fossin iguals: Rebutgem H_0

8. Inferència amb Interval de Confiança: $IC(\mu_1 - \mu_2, 95\%) = (\bar{y}_1 - \bar{y}_2) \pm t_{n_1+n_2-2,\, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{s^2}{n_1} + \frac{s^2}{n_2}} = 3 \pm 1{,}976 \cdot 1{,}165$
$= [0.70,\ 5.30]$

- IC 95%: El programa "2" triga en mitjana entre 0,7 i 5,3 segons menys amb una confiança del 95%.

Comparació de mitjanes ind. ($\mu_1 = \mu_2$). Exercici

Per comparar la velocitat amb la qual resolen dos servidors diferents, SuperSolver i MegaSolver, problemes d'optimització s'envia un total de 70 problemes de maximització diferents als dos servidors, 35 a cadascun. Pel fet que el temps que triguen els servidors per resoldre els problemes, és asimètrica cap a la dreta, treballem a continuació amb els logaritmes dels temps. Siguin X el logaritme del temps que triga el supersolver i Y el del megasolver.

	Mitjana	Mediana	Desv. est	Mínim	Màxim
S.solver	2,63	2,59	0,57	1,63	3,72
M.solver	2,85	2,86	0,44	1,99	3,72

1 Variables: Y_1 i Y_2 temps d'execució

2. Estadístic: $\hat{t} = \dfrac{(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2)}{s\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}}$ amb $s^2 = \dfrac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)\cdot s_2^2}{(n_1-1)+(n_2-1)}$

3. Hipòtesis: $\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$

4. Distribució estadístic: t_{68} Premisses: m.a.s i Y_1, Y_2: Normals amb $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$

5. Calculs estadístic: $s^2 = \dfrac{(35-1)\cdot 0{,}57^2 + (35-1)\cdot 0{,}44^2}{35+35-2} = 0{,}26$ $\quad \hat{t} = \dfrac{(2{,}85 - 2{,}63)}{\sqrt{0{,}26}\cdot\sqrt{1/35 + 1/35}} = 1{,}80$

6. P-valor: $P(|t| > 1{,}80)$

$P(t > 1{,}80) \rightarrow 1 - P(t < 1{,}80) = 0{,}05 \dashrightarrow 0{,}05 \cdot 2 = 0{,}1$

$P(t < -1{,}80) = 0{,}05$

IC 95%: $IC(\mu_1 - \mu_2, 95\%) = 0{,}22 \pm 2{,}000 \cdot \sqrt{\dfrac{0{,}26}{35} + \dfrac{0{,}26}{35}} = [-0{,}02\ ,\ 0{,}46]$

7. Conclusió: P-valor = 0,01 > 0,05. No rebutgem.

No hi ha evidencia per a dir que triguin diferent

Comprar. de var ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$). Mostres independents Ex.

Estem interessats en comparar la duració dels recanvis dels cartutxos de tinta de dos marques: A i B. Hem comprovat que la marca B té una mitjana major de duració que la marca A. Però sospitem que la variabilitat pot ser diferent (provarem si són iguals o no). En dues mostres, hem obtingut els següents resultats:

A $\bar{y}_A = 363$ $S_A^2 = 64$ $n_A = 8$

B $\bar{y}_B = 407$ $S_B^2 = 144$ $n_B = 6$

1. Variable: Y_A i Y_B (duracions)
2. Estadístic: $S^2_{Major} / S^2_{Menor}$
3. Hipòtesis: $H_0: \sigma_B^2 = \sigma_A^2$ vs $H_1: \sigma_B^2 \neq \sigma_A^2$
4. Distribució estadístic: $F_{5,7}$
5. Càlculs: $S_B^2 / S_A^2 = 144/64 = 2{,}25$
6. P-valor: $2 \cdot P(F_{5,7} > 2{,}25) = 0{,}32$
7. Conclusió: Com $2{,}25 < 5{,}29 = F_{5,7,0{,}975}$ i p-valor $> 0{,}05$ llavors no podem rebutjar H_0. No hem trobat evidència per contradir que les variàncies poblacionals siguin iguals.

I si posem a prova si la variabilitat és igual versus superior en B?

3. Hipòtesis: $H_0: \sigma_B^2 = \sigma_A^2$ vs $H_1: \sigma_B^2 > \sigma_A^2$
4. Distribució estadístic sota H_0: $F_{5,7}$
5. Càlculs: $S_B^2 / S_A^2 = 144/64 = 2{,}25$
6. P-valor: $P(F > 2{,}25) = 0{,}16$
7. Conclusió: No podem rebutjar H_0 ja que $2{,}25 < 3{,}97 = F_{5,7,0{,}95}$ o bé p-valor $= 0{,}16 > 0{,}05 = \alpha$.
   No hem trobat evidència per contradir que les variàncies poblacionals siguin iguals.

Nota: si la prova és bilateral, posem al numerador el valor més gran segons les dades; però si és unilateral, segons H_1.

Compar de var ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$) Mostres independents. Exer.

Posa a prova la igualtat de variàncies en l'exercici dels optimitzadors

	Mitjana	Mediana	Desv. est	Mínim	Màxim
S.S	2,63	2,59	0,57	1,63	3,72
M.S	2,85	2,86	0,44	1,99	3,72

1. Variable: Y_A i Y_B (temps)

2. $S^2_{Major} / S^2_{menor}$

3. Hipotèsis: $H_0: \sigma^2_{SS} = \sigma^2_{MS}$ vs $H_1: \sigma^2_{SS} \neq \sigma^2_{MS}$

4. Distribució estadístic sota H_0: $F_{34,34}$

5. Càlculs: $0{,}57^2 / 0{,}44^2 = 1{,}68$

6. P-valor: $2 \cdot P(F_{34,34} > 1{,}68) \approx 0{,}1$ (0,14)

7. Conclusió: No rebutjem H_0 porque p-valor $> 0{,}05 = \alpha$ i $F_{34,34,0{,}95} \to 1{,}68 < 1{,}81$

Comp de prop($\pi_1 = \pi_2$) en mostres indep. Exemple

$(f_{ij} - e_{ij})^2/e_{ij}$	FiB	TELECOS	Total
Utilitzen PC	0,7	0,7	
Utilitzen MAC	1,633	1,633	
Total			4,667

1. Variable : PC o MAC

2. Estadístic: $\hat{X}^2 = \sum_{\forall ij} \frac{(f_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$

3. Hipotesis: H_0: $P(PC|FiB) = P(PC|ETSETB) \equiv \pi_1 = \pi_2 \equiv$ Indep escolor i ordinador

4. Distribució estadístic: X_1^2

5. Càlculs: $\hat{X}^2 = 4,667$

6. P-valor: $P(X_1^2 > 4,667) = 0,0308$ (punt crític $= X^2_{1,0.95} = 3,841$)

7. Conclusió: rebutgem Ho (P-valor < 0,05 o que $4,667 > 3,841$)
Aquestes dades (o més extremes) són poc probables si fos certa la independencia.

Conclusió practica: Els fibers prefereixen més el PC.

En una mostra de 100 estudiants de la FiB 77 prefereixen Linux a Windows. I en una mostra de 100 estudiants de Telecos són 63 els que prefereixen Linux. Es pot considerar que tenen proporcions iguals o la de la FiB o no?
(és a dir tenim $p_{FiB} = 0,77 = p_1$ i $p_{Tel} = 0,63 = p_2$)

Hipotesi: $H_0: \pi_1 - \pi_2 = 0$ vs $H_1: \pi_1 - \pi_2 \neq 0$

Estadístic: $\frac{(p_1 - p_2)}{\sqrt{P(1-P)/n_1 + P(1-P)/n_2}}$ és $N(0,1)$ on la P "pooles" és $P = \frac{n_1 \cdot p_1 + n_2 \cdot p_2}{n_1 + n_2} = \frac{100 \cdot 0,77 + 100 \cdot 0,63}{100 + 100} = 0,7$

Càlcul Estadístic: $(0,77 - 0,63)/se \approx 0,14/0,0648 \approx 2,164$ se amb P combinant $se = \sqrt{P(1-P)/n_1 + P(1-P)/n_2}$

Càlcul P. crític: $-1,96 = z_{0,025}$ $1,96 = z_{0,975}$

Càlcul p-value: $p\text{-value} = (|z| > 2,164) = 1 - P(z < 2,164) = 1 - 0,9846 = 0,0154 \cdot 2 = 0,03$

$IC(\pi_1 - \pi_2, 0,95)$: $(p_1 - p_2) \pm z_{1-\alpha/2} \cdot se = 0,14 \pm 1,96 \cdot 0,06 = [0,02 , 0,26]$

Conclusió: 0 està fora l'interval → valor no acceptable, p-value < 0,05 . 2,164 fora de la regió d'acceptació dels p.crítics
Hi ha prou evidència per rebutjar la hipòtesis de proporcions iguals

Aquestes dades (o més extremes) son poc probables (P=0,028) si les proporcions fossin iguals
A la FiB la proporció de preferencia per Linux és superior que a Telecos amb un 95% de confiança entre un 1,4% i un 26,6% més gran

Comp. de prop ($\pi_1 = \pi_2$) en mostres indep. Exercici

f_{ij}	noi	noia	Total
aprova	68	73	141
suspèn	32	27	59
Total	100	100	200

e_{ij}	noi	noia	Total
aprova	70,5	70,5	141
suspèn	29,5	29,5	59
Total	100	100	200

$(f_{ij}-e_{ij})^2/e_{ij}$	noi	noia	Total
aprova	0,089	0,089	
suspèn	0,212	0,212	
Total			0,601

1. Variable: Aprovat / suspens vs nois/noies

2. Estadístic: $\hat{\chi}^2 = \sum_{\forall ij} \frac{(f_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}}$

3. Hipòtesis H_0: $P(A|\text{Noi}) = P(A|\text{Noia}) \equiv \pi_1 = \pi_2 \equiv$ Homogenitat d'aprovats entre nois i noies

4. Distribució: χ^2_1

5. Càlculs: $\hat{\chi}^2 = 0,601$

6. P-valor: $P(\chi^2_1 > 0,601) \approx 1 - P(\chi^2_1 < 0,601) = 0,438$

Punt crític: $\chi^2_{1,\,0,95} = 3,841$

7. Conclusió: No rebutgem H_0 (P-valor $> 0,05$ o $0,601 < 3,841$)

Les dades són plausibles sota H_0 ($P = 0,438$)

Conclusió pràctica: No hi ha diferències d'aprovats per gènere.

• Mostres Aparellades

Comp de mitjanes ($\mu_1 = \mu_2$) Mostres Aparellades. Exemple

En 6 bancs de dades s'ha obtingut els temps de 2 programes. Es desitja saber si B millora A; o decidir si al mercat canvien.

							Mean	Variances	Var "pooled"
A	23,05	39.06	21.72	24.47	28,56	27,58	27,406	39.428	42.009
B	20,91	37.21	19,29	19,95	25.32	24,07	24,460	44,591	

Es comença a calcular la diferencia A-B per cada parella:

							Mean	Variances
D=A-B	2,13	1,85	2,43	4,51	3,24	3,51	2,946	0,996

1. Variable: D diferència de temps
2. Estadístic: $\hat{t} = \frac{(\bar{D} - \mu_D)}{s_D/\sqrt{n}} = \frac{\bar{D}}{s_D/\sqrt{n}}$
3. Hipòtesis: $H_0: \mu_D = 0$ vs $H_1: \mu_D \neq 0$
4. Distribució estadístic: $\hat{t} \sim t_{n-1}$ Premissa: m.a aparellades $D \sim N$
5. Càlculs: $\hat{t} = \frac{2,946 - 0}{0,998/\sqrt{6}} = 7,229$
6. P-valor $= P(t_5 > 7,229) = 1 - P(t_5 < 7,229) \cdot 2 = 0,0008$ (punt crític $t_{0,975,5} = 2,571$)
7. $IC(\mu_D, 0,95) = 2.946 \pm 2,571 \cdot 0,41 = [1,89, 4.0]$

   $IC(\mu_D, 0,95) = \mu_D \pm t_{n-1, 1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{s^2}{n}}$

8. Conclusió: 0 (valor de prova) està fora dels límits del IC (1,89 ; 4.0) i també, 7.299 està fora de la zona d'acceptació dels punts crítics, i també, el P-value (0,0008) és petit < 0,05

Per tant, hi ha prou evidència per rebutjar la hipòtesis nul·la, i creure que tenen temps diferents.

El temps d'A és entre 1,89 i 4 unitats de temps més lent. amb un 95% de confiança.

• Tipus d' error

Tipus I: $\alpha = P(\text{concloure } H_1 \mid H_0 \text{ certa})$

Actuar com si la hipòtesi fos falsa quan no ho és realment

Tipus II: $\beta = P(\text{concloure } H_0 \mid H_1 \text{ certa})$

L'error de no trobar evidència en contra de la hipòtesi quan realment és falsa.

– Tipus d'errors en una prova d'hipòtesi. Exemple:

– Ch és un navegador amb fama de ràpid, i la marca dominant MD no vol perdre la seva hegemonia.
Suposem que la velocitat mitjana de Ch per carregar una pàgina patró és 700 u i la de MD és de 600 u. La desviació típica és 150 u. Fixem $\alpha = 0{,}025$ (unilateral)

Si fem 10 proves independents de càrrega per cada navegador:

Ch	$\bar{y}_A = 680$	$S_A = 89$	$n = 10$
MD	$\bar{y}_B = 597$	$S_B = 147$	$n = 10$

Com el p-valor resultant és 0,07, no rebutgem la hipòtesi d'igualtat i MD proclama ('testat científicament') que el seu navegador és tan ràpid com Ch

Però aquesta conclusió no és correcta: no poder rebutjar la hipòtesi nul·la no implica demostrar la seva veritat. Com ja hem dit, hi ha un cert risc de que, sent diferents els dos navegadors, no puguem trobar-ne l'evidència.

Com en aquest cas coneixem la diferència real, anem a calcular el risc 'beta' β

- La clau es estudiar la distribució de l'estadístic de referència
. sota H_0. la diferencia de mitjanes mostrals és:

$$\hat{Z} = \frac{\bar{y}_A - \bar{y}_B}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}} \sim N(0,1) \rightarrow \bar{y}_A - \bar{y}_B \sim N\left(0, \sigma\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}\right) = N\left(0, 150\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}\right) = N(0, 67.08)$$

Definint $\alpha = 2{,}5\%$ unilateral, la regió crítica es troba per diferències de les mitjanes mostrals més grans que $1{,}96 \cdot 67.08 = 131{,}48$ u

En realitat. la diferencia entre mitjanes és de 100. Com les mostres provenen d'aquesta situació, comprovem com de probable és que NO puguem rebutjar H_0:

$$P(\text{"Error tipus"}) = P(\bar{y}_A - \bar{y}_B < 131.48 \mid H_1) = P(z < (131.48 - 100)/67.08) = P(z < 0{,}47) = 0{,}68$$

Veiem que MD tenia molt fàcil resoldre la prova a la seva conveniència: era molt probable no trobar cap diferencia significativa. La prova és poc potent (potència $= 1 - \beta$)