Bloc 1: Càlcul de probabilitats

1. Experiència aleatòria

- Fenòmens deterministes: porten a uns mateixos resultats a partir d'unes mateixes condicions inicials.

- Fenòmens Aleatoris: incertesa en el resultat

$\boxed{\Omega \rightarrow \text{conjunt de resultats posibles}}$

- Qualsevol subconjunt de Ω és un esdeveniment o succés

p.e.: Ω (segur) o $\emptyset$ (impossible)

$\boxed{2^n \text{ esdeveniments possible}}$

- Una partició és un conjunt d'esdeveniments $A_i \neq \emptyset$, disjunts i que la seva unió és Ω.

- **Simples**

- llençar una moneda → $\Omega = \{\text{cara}, \text{creu}\}$
- llençar un dau → $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- **Complexes**

Combinació de simples

- extreure amb reposició dues boles d'una urna $\{bb, bn, nn \ldots\}$

- Dos conjunts A i B són complementaris (o formen una partició) si $A \cap B = \emptyset$ i $A \cup B = \Omega$

- Dos conjunts, A i B són disjunts si $A \cap B = \emptyset$

← Experiencia aleatoria. Exercici.

– nombre de defectes ("tares") en una peça industrial

Solució: $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

- treure 2 boles d'una urna amb 4 boles negres i una blanca

No reposició, no ordre: $\Omega = \{nn, bn\}$

No reposició, si ordre: $\Omega = \{nn, bn, nb\}$

Sí reposició, no ordre: $\Omega = \{nn, bn, bb\}$

Sí reposició, si ordre: $\Omega = \{nn, bn, nb, bb\}$

→ diferencia en valor absolut entre nombre de caras i creus entre deu tirades.

$\Omega = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$

C	X	D
10	0	10
9	1	8
8	2	6
⋮	⋮	⋮
0	10	10

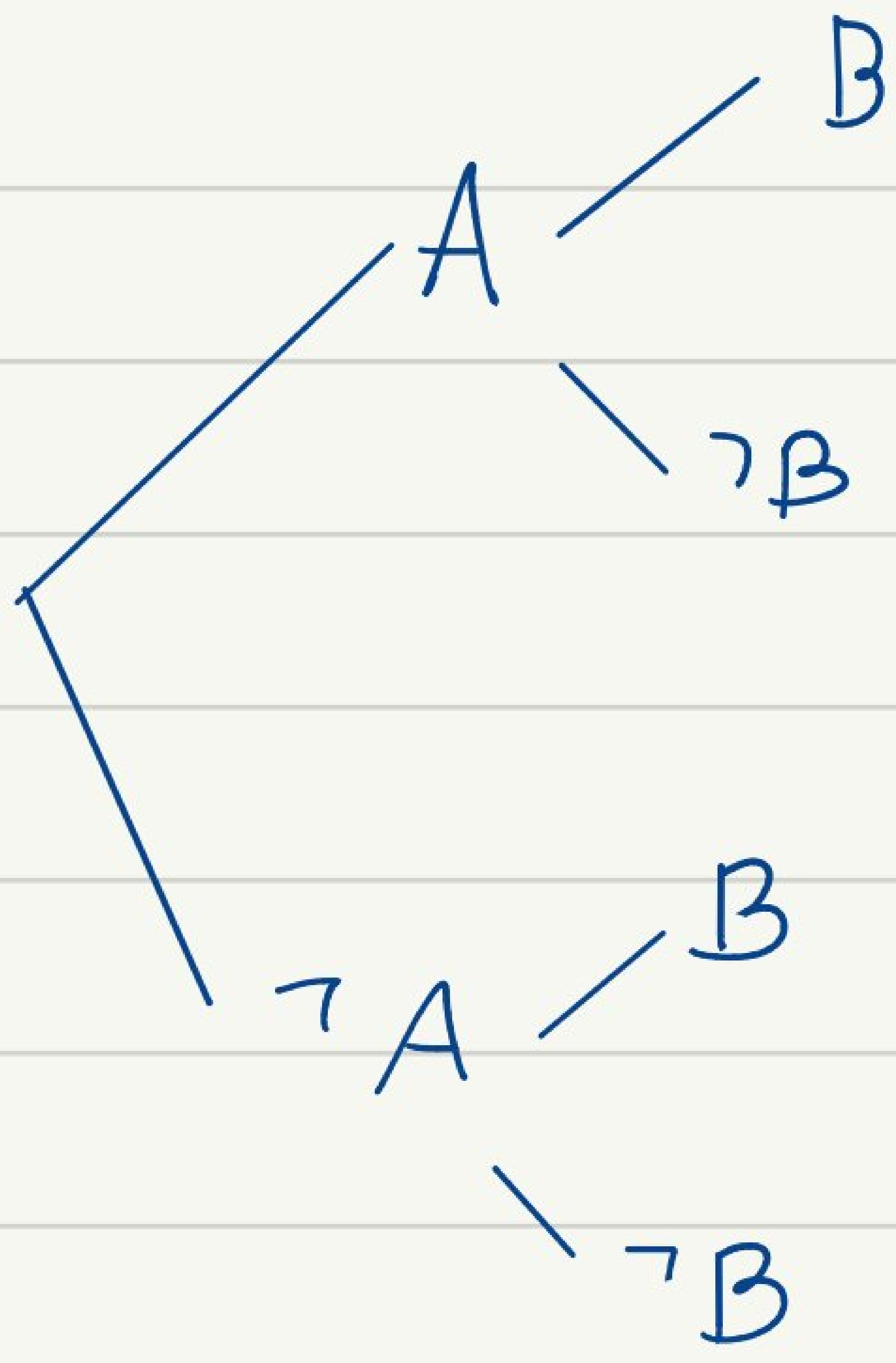
Ω

$A \cap B$

$A \cap \neg B$

$\neg A \cap B$

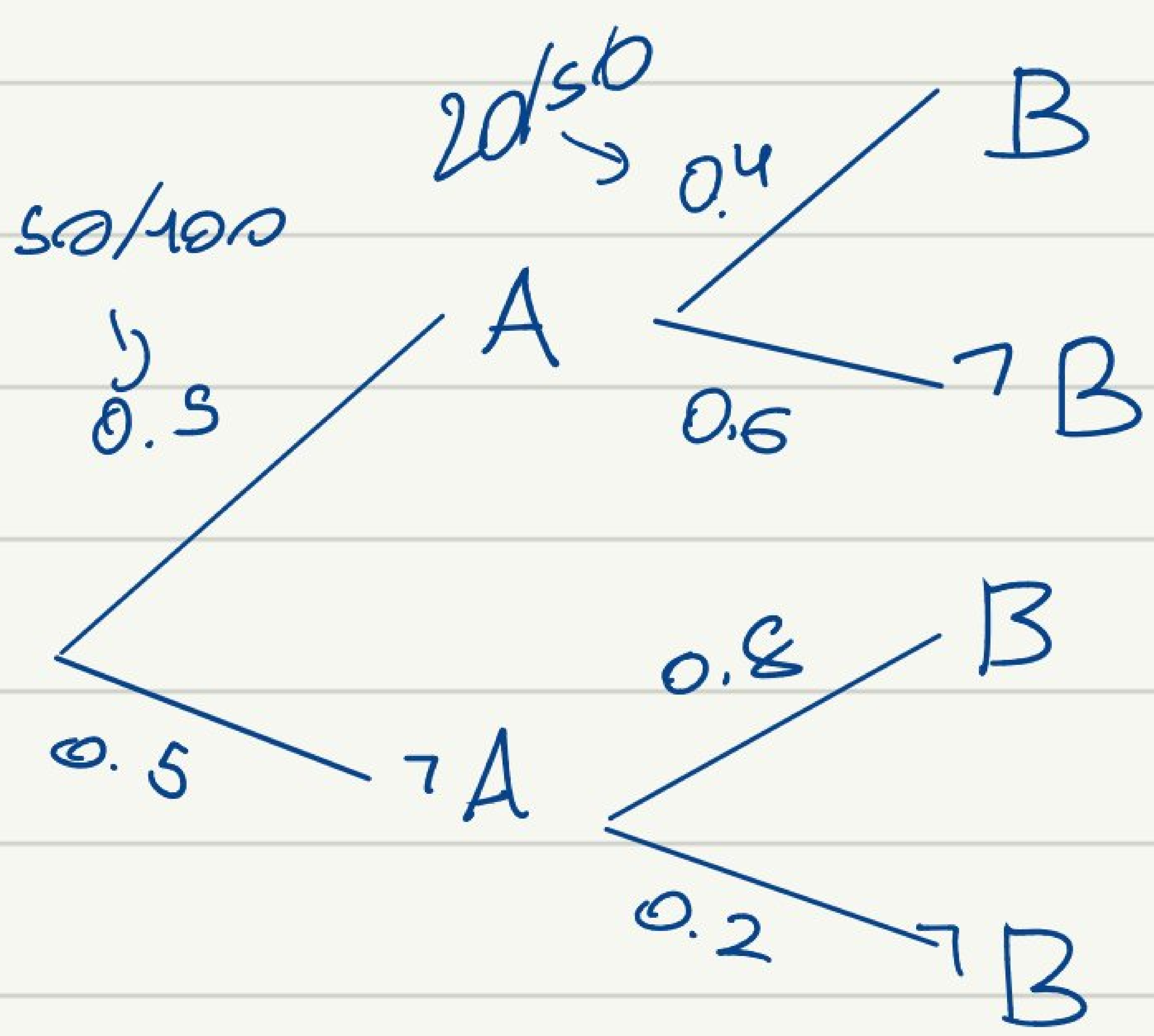
$\neg A \cap \neg B$

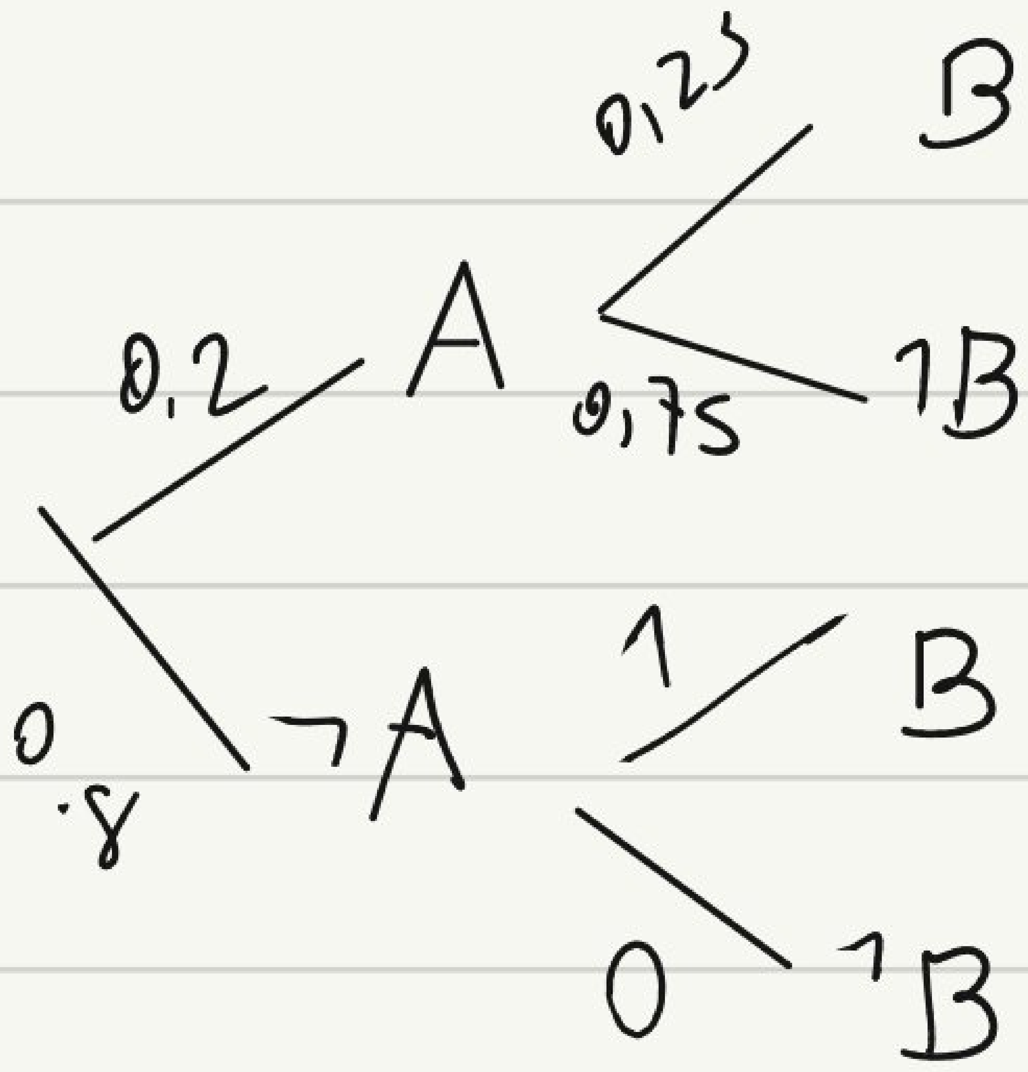


No tenen que estar representats cronològicament

Arbre a partir de taula 2x2

	B	¬B	Total
A	20	30	50
¬A	40	10	50
Total	60	40	100





	B	¬B	Total
A	5	15	20
¬A	80	0	80
Total	85	15	100

$$\frac{x}{20} = 0{,}25$$

$$x = 20 \cdot 0{,}25 = 5$$

2 Probabilitat

- És una aplicació en els succesos amb un valor entre 0 i 1.

- Propietats per definició

  - $0 \leq P(A) \leq 1$
  - $P(A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_n) = P(A_0) + P(A_1) + \dots + P(A_n)$ si $A_i \cap A_j = \emptyset$ per $i \neq j$
  - $P(\Omega) = 1$

- Propietats deduïdes

  - $P(\neg A) = 1 - P(A)$
  - $P(\emptyset) = 0$
  - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

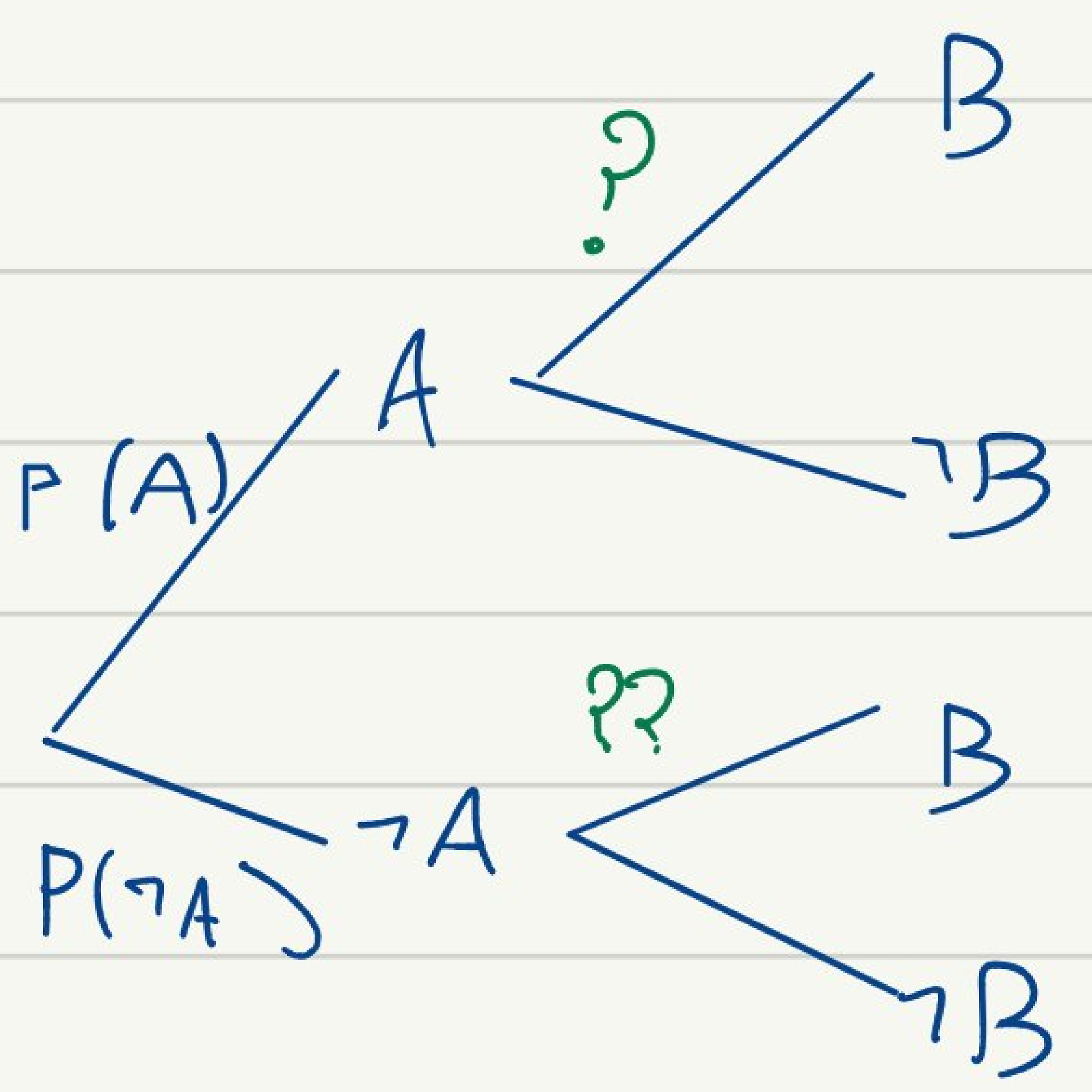
Independencia

Independència aplicat a 2 (o més) esdeveniments és defineix com:

A i B són independents $\iff P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

[3 o més succesos són independents si la probabilitat de un no afecta a l'altre]

p.e: dos daus



si són independents ? = ??

si no són independents ? ≠ ??

Probabilitat Condicionada

- Si un esdeveniment afecta a l'expectativa d'un altre parlem de probabilitat condicionada $P(A|B)$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- A la pràctica, condicionar per B significa que reduïm a B el conjunt de resultats observables, i les probabilitats han de recalcular-se respecte $P(B)$

- En considerar $P(A|B)$, cada esdeveniment juga un paper diferent: A és incert però B és conegut.

- En general, $P(A|B) \neq P(B|A) \neq P(A \cap B)$

• Independència i Prob. Condicionada. Exemple

Per estudiar l'eficiència en un aeroport, una primera aproximació ens porta a estudiar les probabilitats d'haver-se d'esperar a l'hora de facturar i a l'hora d'embarcar. Considerem el cas d'un aeroport on s'ha comprovat que per a un viatger que arriba, la probabilitat de trobar cua a facturació és 0,4; i de trobar cua a l'embarcament és 0,6 si va trobar cua a facturació, i 0,2 si no en va trobar.

Per cua:

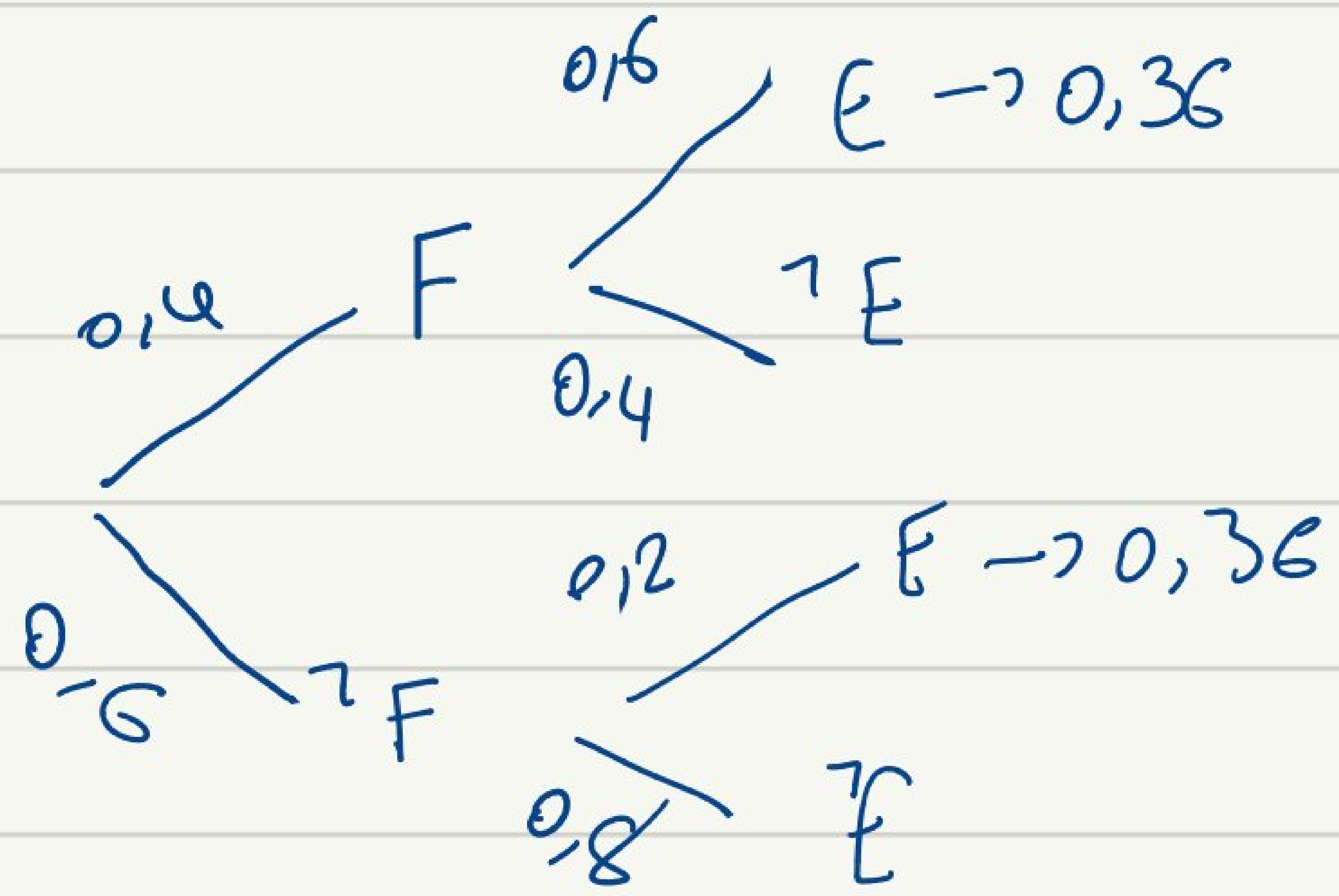
E: embarcar

F: Facturar

Calculen les següents probabilitats:

a) de trobar cua a la facturació i a l'embarcament

$$P(F\cap E) = \underbrace{P(E|F)}\cdot P(F) = 0{,}6\cdot 0{,}4 = 0{,}24$$



b) de trobar cua a l'embarcament

$$P(E) = \underbrace{\underbrace{(F\cap E)}_{0{,}24} + \underbrace{(\neg F\cap E)}_{(0{,}6\cdot 0{,}2)\ =\ 0{,}12}}_{0{,}36}$$

c) de trobar cua a l'embarcament si s'ha trobat cua a la facturació

$$P(E|F) = 0{,}6 \text{ (Enunciado)}$$

d) d'haver trobat cua a la facturació si no ha trobat cua a l'embarcament

$$P(F|\neg E) = \frac{P(F\cap\neg E)}{P(\neg F)}$$

$$P(\neg E) = \underbrace{P(F\cap\neg E)}_{0{,}16} + \underbrace{P(\neg F\cap\neg E)}_{0{,}48} = 0{,}64$$

$$0{,}25 = \frac{0{,}16}{0{,}64}$$

Un client es vol connectar amb un servidor remot mitjançant una xarxa de comunicacions. El procés consisteix en realitzar n intents de connexió a la xarxa en un periode determinat. Tenim èxit si, en algun intent, hem trobat un camí per la xarxa fins al servidor i si el servidor està en marxa. En primer lloc representarem l'experiencia pels casos de 1 i 2 intents:

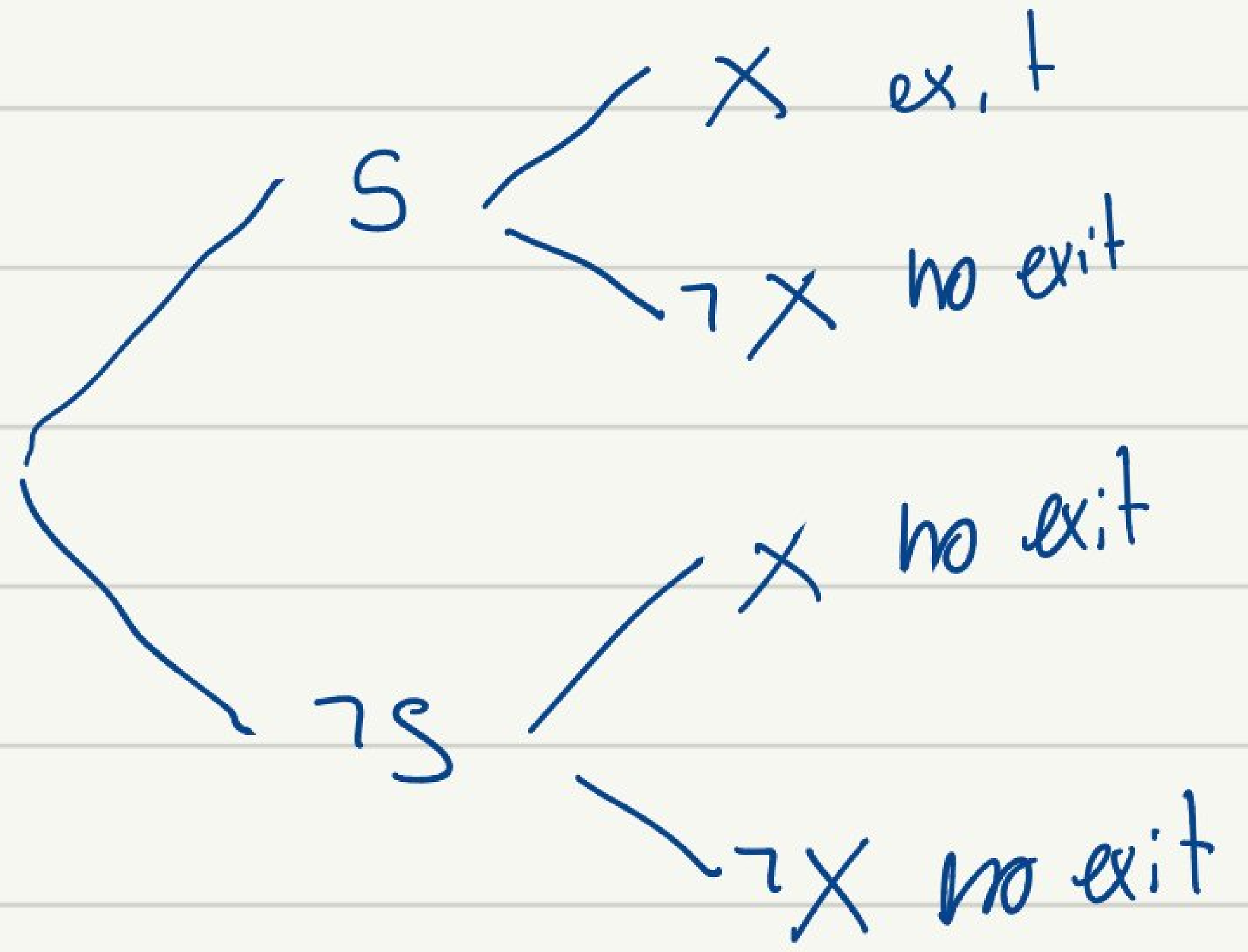
S = "el servidor està en marxa" (respon)

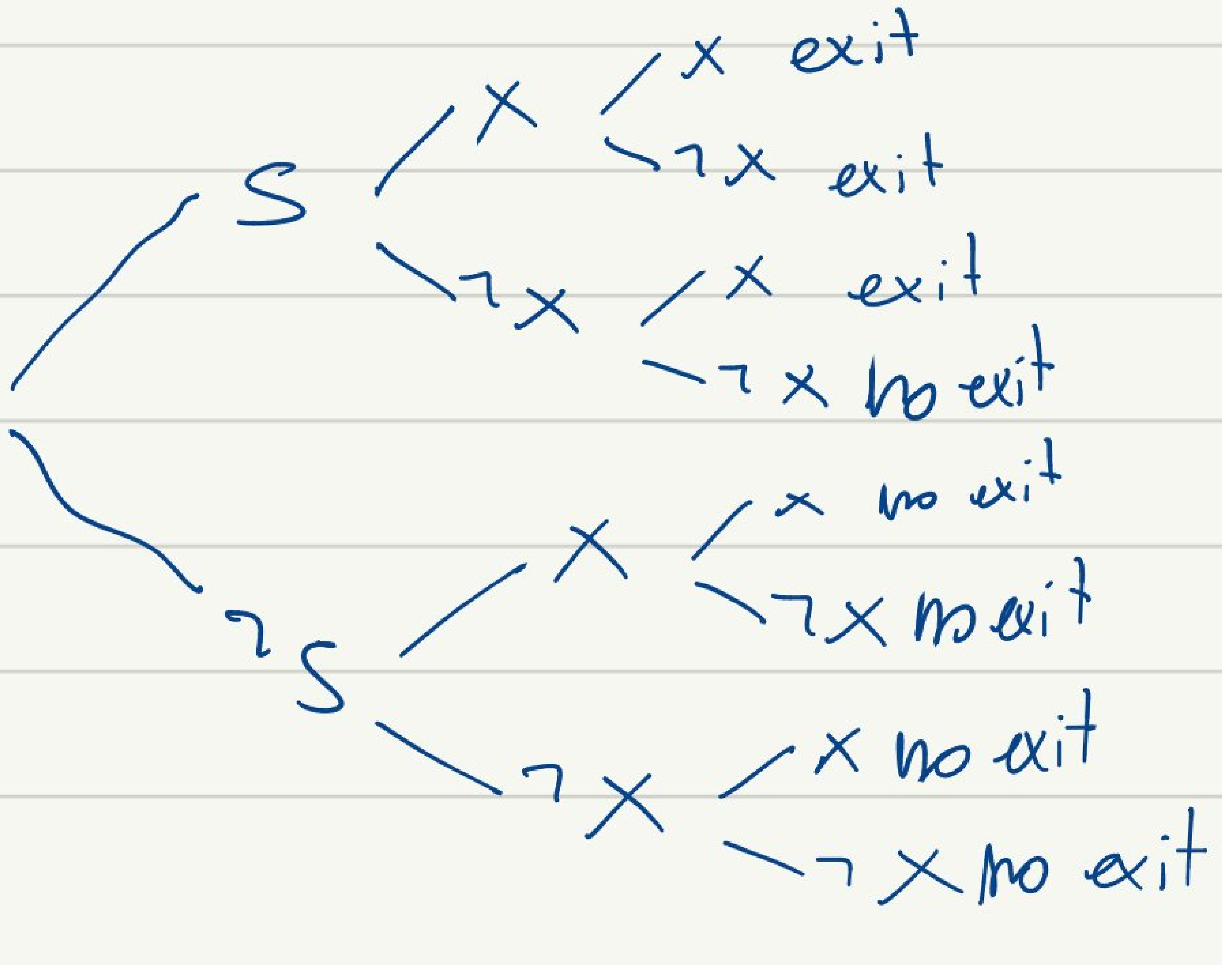
$\neg S$ = "no en marxa" (no respon)

X = "la petició del client ha trobat camí per la xarxa"

$\neg X$ = "no camí a la xarxa"

1) representeu l'arbre pels casos 1 i 2 intents

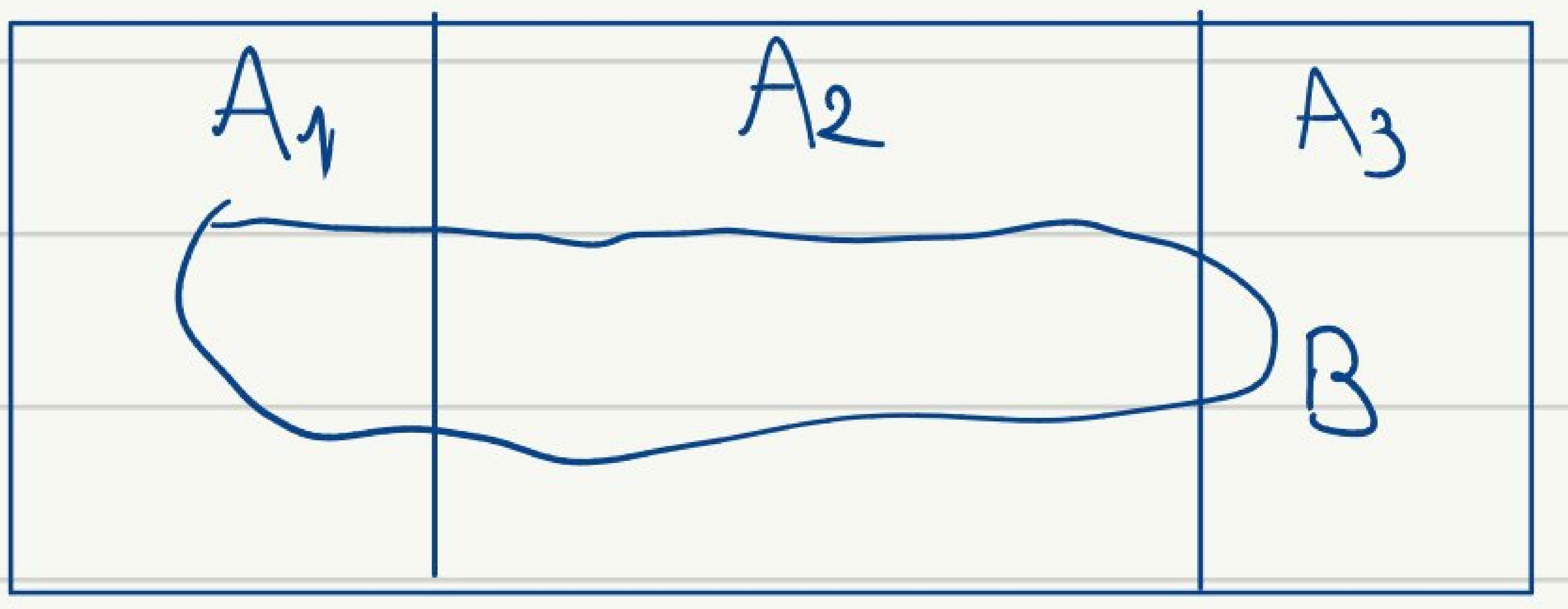




Si en aquest exemple podem suposar:

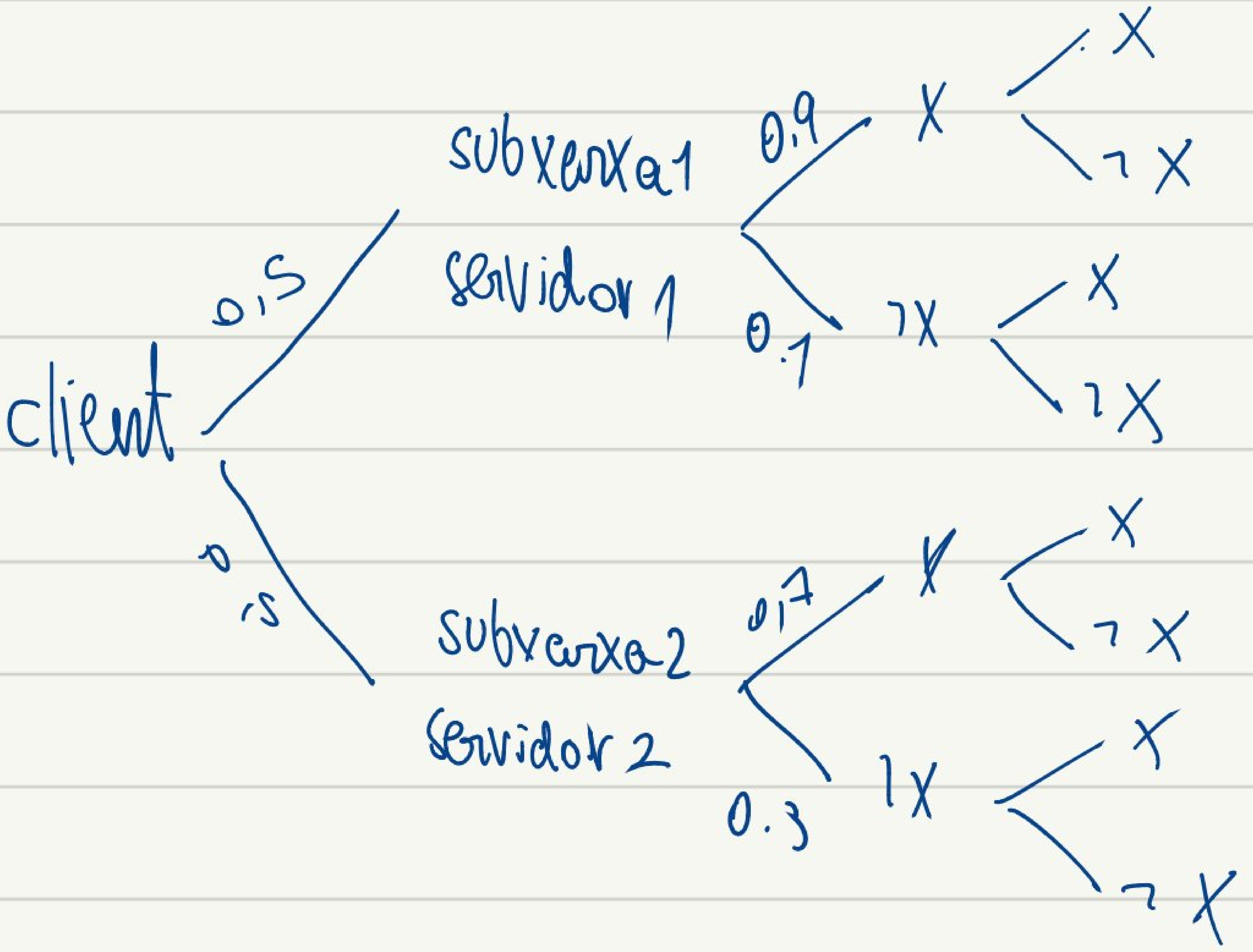
- en n intents, el servidor no canvia d'estat
- els estats del servidor i de la xarxa són independents
- els n intents de connexió són independents uns d'altres
- el servidor falla a l'atzar, 1 de cada 10 vegades; $P(\neg S) = p1 = 1/10$
- i la xarxa una de cada 5 vegades $P(\neg X) = p2 = 1/5$

Jordi Cortes Martinez



$$P(B) = P(B\cap A_1) + P(B\cap A_2) + P(B\cap A_3) =$$

$$= P(B|A_1)\cdot P(A_1) + P(B|A_2)\cdot P(A_2) + \dots$$



$Y=0$: $P(\neg X\cap\neg X)$ $\quad (0{,}5\cdot 0{,}1\cdot 0{,}1) + (0{,}5\cdot 0{,}3\ 0{,}3)$

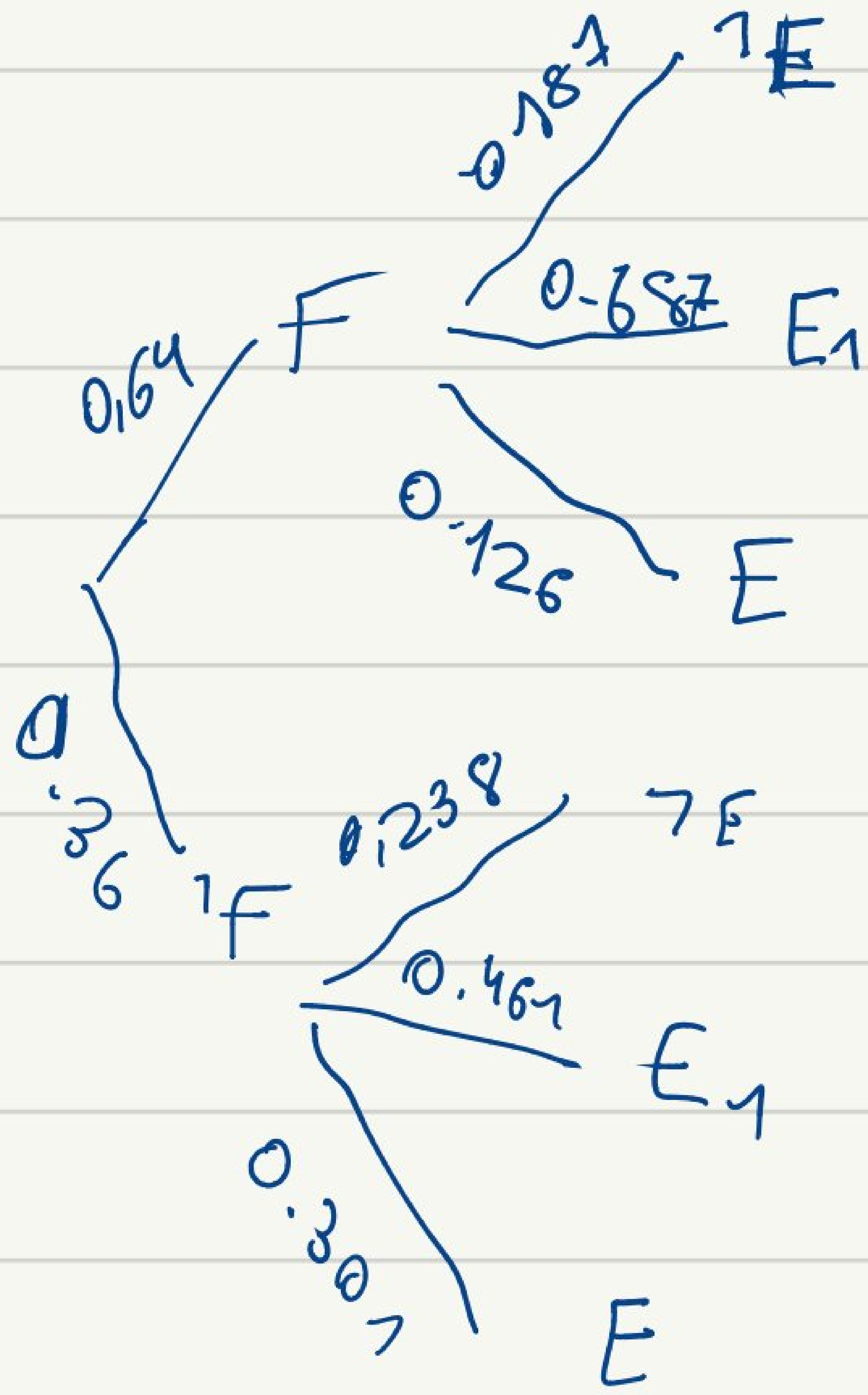
$Y=1$: $(0{,}5\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1) + (0{,}5\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9) + (0{,}5\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3)$

$+ (0{,}5\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7)$ o $P(Y=1) = 1-(P(Y=0)+P(Y=2))$

$Y=2$: $(0{,}5\cdot 0{,}9\cdot 0{,}9) + (0{,}5\cdot 0{,}7\cdot 0{,}7)$

$$P(S_1|Y_0) = \frac{P(Y_0|S_1)\cdot P(S_1)}{P(Y_0)} = \frac{0,01\cdot 0,5}{0,05} = 0,1$$

Aplicació de Bayes. Exercici



1. $P(\neg F \cap \neg CP) = P(\neg F \cap \neg E) = 0,36 \cdot 0,238$

2. $P(\neg E) = P(F \cap \neg E) + P(\neg F \cap \neg E)$

$$(0,64\cdot 0,187) + (0,36 \cdot 0,238)$$

3. $1-(0,36\cdot 0,238)$ o sumem todos los casos en que se cumplen las condiciones.

4. $0,64$