Savoir calculer des probabilités avec la loi normale

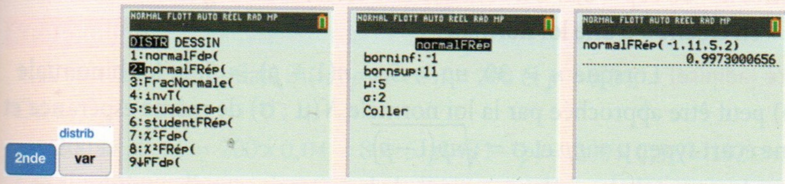
Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma)$, avec $\mu = 5$ et $\sigma = 2$.
Calculer les probabilités suivantes avec une calculatrice.

a. $P(-1 \leqslant X \leqslant 11)$ **b.** $P(X \leqslant 3)$ **c.** $P(X \leqslant 9)$ **d.** $P(X > 9)$

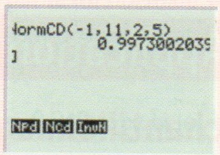
→ Résolution

a. On saisira -1, 11, 5 et 2 dans l'ordre indiqué.

Avec la calculatrice TI-83 PremiumCE



Avec la calculatrice Casio Gaph35+
Menu STAT puis DIST puis NORM puis Ncd



b. Comme $3 < \mu$ puisque $\mu = 5$, on a $P(X \leqslant 3) = 0{,}5 - P(3 \leqslant X \leqslant 5)$. On calcule $P(3 \leqslant X \leqslant 5) \approx 0{,}341\,3$ et on en déduit $P(X \leqslant 3) \approx 0{,}158\,7$.

c. Comme $9 > \mu$, on a $P(X \leqslant 9) = 0{,}5 + P(5 \leqslant X \leqslant 9) \approx 0{,}977\,2$.

d. On a $P(X > 9) = 1 - P(X \leqslant 9)$. De la question **c**, on déduit $P(X > 9) \approx 0{,}022\,8$.

Méthode

- On identifie les paramètres μ et σ de la loi normale étudiée.
- On utilise la calculatrice ou le tableur pour obtenir les probabilités de type : $P(c \leqslant X \leqslant d)$.
- On utilise les formules adaptées pour les probabilités de type $P(X \leqslant d)$ ou $P(X > c)$.

VOIR
EXERCICES D'APPLICATION 14 à 17

Savoir utiliser les probabilités d'intervalles remarquables avec la loi normale

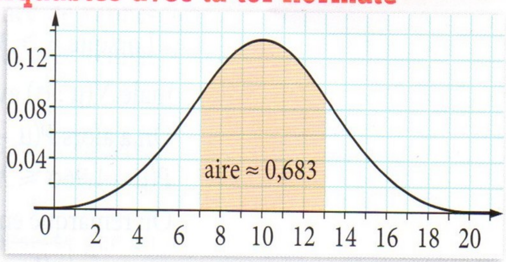
Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma)$, avec $\mu = 10$.

1. Dans cette question uniquement, on suppose que $\sigma = 2$.
Donner des valeurs approchées des probabilités suivantes.

a. $P(8 \leqslant X \leqslant 12)$ **b.** $P(6 \leqslant X \leqslant 14)$ **c.** $P(4 \leqslant X \leqslant 16)$

2. a. Déterminer une valeur approchée de σ pour que : $P(4 \leqslant X \leqslant 16) \approx 0{,}95$.

b. Retrouver ce résultat à l'aide du graphique ci-contre.



→ Résolution

1. a. On a $\mu = 10$ et $\sigma = 2$.
On en déduit : $P(8 \leqslant X \leqslant 12) = P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0{,}683$.

b. De façon analogue $P(6 \leqslant X \leqslant 14) = P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0{,}954$.

c. De même : $P(4 \leqslant X \leqslant 16) = P(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$.

2. a. On a $\mu = 10$ et σ est inconnu. On sait que σ vérifie $P(10 - 2\sigma \leqslant X \leqslant 10 + 2\sigma) \approx 0{,}95$. En cherchant σ tel que $10 - 2\sigma \approx 4$ et $10 + 2\sigma \approx 16$, on obtient $2\sigma \approx 6$, et donc $\sigma \approx 3$.

b. D'après le graphique, $P(7 \leqslant X \leqslant 13) = P(\mu - 3 \leqslant X \leqslant \mu + 3) \approx 0{,}683$. Or $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0{,}683$, donc $\sigma \approx 3$.

Méthode

- On identifie les paramètres μ et σ de la loi normale étudiée.
- On remarque que tous les événements considérés sont de la forme : $(\mu - t\sigma \leqslant X \leqslant \mu + t\sigma)$.
- On utilise les probabilités connues pour ce type d'intervalle avec la loi normale.
- On utilise la lecture graphique d'une probabilité de type $P(c \leqslant X \leqslant d)$.

VOIR
EXERCICES D'APPLICATION 18 à 21