

Exercices corrigés – variables aléatoires – 1G

Exercice 1 page 324

L'univers ici est clairement $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

On entend par gain algébrique le fait qu'on crée une variable aléatoire G qui :

- à l'événement élémentaire $\{1\}$ associe 5
- à l'événement élémentaire $\{2\}$ associe 5
- à l'événement élémentaire $\{3\}$ associe -4
- à l'événement élémentaire $\{4\}$ associe 5
- à l'événement élémentaire $\{5\}$ associe 5
- à l'événement élémentaire $\{6\}$ associe -4

(algébrique dans le sens où l'on associe parfois -4, qui est négatif)

1°) C'est donc $\{-4 ; 5\}$

2°) L'événement « $G = -4$ » est donc **égal** à $\{3 ; 6\}$ (voir le cours à ce sujet, et la définition de l'événement « $X = x_i$ », pour X une variable aléatoire prenant les valeurs x_1, \dots, x_n).

3°) L'événement « $G > 0$ » est donc égal à l'événement « $G = 5$ », qui est égal à $\{1 ; 2 ; 4 ; 5\}$.

Exercice 2 page 324

L'univers ici est clairement $\{1, \dots, 15\}$

X est donc la **fonction** (voir la définition d'une variable aléatoire du cours) qui :

- à un événement élémentaire $\{e\}$ associe 2 si e est un multiple de 2
- à un événement élémentaire $\{e\}$ associe 7 si e est un multiple de 7
- à un événement élémentaire $\{e\}$ associe -10 dans tous les autres cas

1°) Ici c'est $\{2 ; 7 ; -10\}$

2°) On a « $X = 9$ » = \emptyset car l'événement « $X = 9$ » ne comporte aucune issue de l'univers, car il n'y a aucune issue à laquelle X associe le nombre 9.

3°) On a « $X \leq 0$ » = « $X = -10$ » = $\{1 ; 3 ; 5 ; 9 ; 11 ; 13 ; 15\}$

Autrement dit, l'ensemble des issues auxquelles X associe un nombre négatif ou nul est $\{1 ; 3 ; 5 ; 9 ; 11 ; 13 ; 15\}$.

Exercice 4 page 324

L'univers ici est clairement $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

La variable aléatoire X est la **fonction** donnée par le tableau suivant :

e_i	1	2	3	4	5	6
x_i	2	4	6	8	10	12

Déterminer la loi de probabilité de X revient à donner, par exemple sous forme de tableau, les valeurs $P(X = x_i)$, pour chaque valeur x_i prise par X .

La loi de probabilité de notre expérience aléatoire est la **loi d'équiprobabilité**.

En rappelant que l'événement « $X = x_i$ » est **égal** à l'ensemble des issues de l'univers auxquelles X associe x_i ,

On a donc :

- $P(X=2)=P(\{1\})=\frac{1}{6}$
- $P(X=4)=P(\{2\})=\frac{1}{6}$
- ... $P(X=12)=P(\{6\})=\frac{1}{6}$

et sous forme de tableau :

x_i	2	4	6	8	10	12
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Exercice 8 page 324

On ne connaît pas l'univers à priori ici, mais cela n'est pas grave, on n'en a pas besoin.
 Déterminer la probabilité $P(Y \leq 0)$ revient à calculer la probabilité de l'événement « $Y \leq 0$ ».
 On remarque alors que « $Y \leq 0$ » = « $Y = -2$ » \cup « $Y = -1$ ».
 Ces deux derniers événements sont disjoints, donc

$$P(Y \leq 0) = P(Y = -2 \cup Y = -1) = P(Y = -2) + P(Y = -1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$$

De même, on a $P(-1 \leq Y \leq 5) = P(Y = -1) + P(Y = 2) + P(Y = 5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

On a aussi $P(|Y| = 2) = P(Y = -2 \cup Y = 2) = P(Y = -2) + P(Y = 2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$

Exercice 13 page 325

1°) Déterminer la loi de probabilité de G revient à donner un tableau qui donne $P(X=x_i)$ pour chaque valeur x_i de la variable aléatoire X.
 Les valeurs prises par X sont {100 ; 20 ; 0}

Voici donc le tableau :

x_i	100	20	0
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$

2°) On a $P(\text{« Gagner à ce jeu »}) = P(X > 0) =$

$$P(X=20 \cup X=100) = P(X=20) + P(X=100) = \frac{1}{10} + \frac{9}{20} = \frac{11}{20}$$

La probabilité de gagner à ce jeu est donc de $\frac{11}{20}$

Exercice 16 page 325

1°) Voici la loi de la variable aléatoire X :

x_i	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	0,2	0,3	0,25	0,25

En effet, X prenant les valeurs 1, 2, 3 et 4, les événements « $X=x_i$ » pour $x_i \in \{1; 2; 3; 4\}$ forment une partition de l'univers, donc
 $P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 1$, c'est à dire $0,2 + 0,3 + 0,25 + P(X=4) = 1$ donc
 $P(X=4) = 0,25$

2°) On a $P(\text{«il y a au moins deux caisses en service à midi »}) =$

$$P(X \geq 2) = P(X=2 \cup X=3 \cup X=4) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 0,3 + 0,25 + 0,25 = 0,8$$

Exercice 18 page 326

Z prenant les valeurs 10, 20, 30 et 40, les événements « $Z=z_i$ » pour $z_i \in \{10; 20; 30; 40\}$ forment une partition de l'univers, donc

$$P(Z=10) + P(Z=20) + P(Z=30) + P(Z=40) = 1$$

$$\text{c'est à dire } 0,2 + P(Z=20) + 0,2 + P(Z=40) = 1$$

$$\text{ce qui est équivalent à } 0,4 + 2 \times P(Z=20) + P(Z=40) = 1$$

$$\text{ie } 0,4 + 3 \times P(Z=20) = 1$$

$$\text{ie } 3 \times P(Z=20) = 0,6 \text{ ie } P(Z=20) = 0,2$$

Donc **$P(Z=20) = 0,2$ et $P(Z=40) = 0,4$**

Exercice 23 page 326

On décrit l'univers de cette expérience aléatoire (*rappel* : vous pouvez très bien avoir un autre univers dans votre réponse, il y a toujours une infinité d'univers possibles pour décrire une expérience aléatoire)

Ici l'univers est un ensemble de couples de numéros allant de 1 à 10, désignant les numéros des boules, sans les couples avec deux numéros identiques.

La loi est clairement ici l'**équiprobabilité**. Il y a en tout $10 \times 9 = 90$ issues dans l'univers.

X compte le nombre de pièces défectueuses.

X prend donc ses valeurs dans $\{0; 1; 2\}$.

- $P(X=0) = \frac{\text{nombre d'issues ne comportant pas de numéro de pièce défectueuse}}{\text{nombre d'issues de l'univers}} = \frac{8 \times 7}{90} = \frac{56}{90}$
- $P(X=1) = \frac{\text{nombre d'issues comportant un seul numéro de pièce défectueuse}}{\text{nombre d'issues de l'univers}} =$

$$\frac{2 \times 8 + 8 \times 2}{90} = \frac{32}{90}$$

$$\bullet \quad P(X = 2) = \frac{\text{nombre d'issues comportant les deux numéros de pièce défectueuse}}{\text{nombre d'issues de l'univers}} = \frac{2}{90}$$

Il faut prendre le temps de dénombrer le nombre d'issues, en faisant un petit dessin au brouillon par exemple.

$$1^\circ) \text{ On a donc } E(X) = P(X=0) \times 0 + P(X=1) \times 1 + P(X=2) \times 2 = \frac{56}{90} \times 0 + \frac{32}{90} \times 1 + \frac{2}{90} \times 2 = \frac{36}{90}$$

$$\text{et } \sigma(X) = \sqrt{\frac{56}{90} \times \left(0 - \frac{36}{90}\right)^2 + \frac{32}{90} \times \left(1 - \frac{36}{90}\right)^2 + \frac{2}{90} \times \left(2 - \frac{36}{90}\right)^2}$$

En appliquant la formule du cours

POUR CALCULER FACILEMENT les ESPERANCES et ECART-TYPES, il est conseillé d'utiliser la calculatrice numworks.

Voici le guide d'utilisation, mais tout est très intuitif.

<https://www.numworks.com/fr/ressources/manuel/statistiques/>

Vous devez créer la série statistique suivante :

Valeur	Effectif
0	21
2	6
4	5

et regarder les espérance et écart-types dans l'onglet correspondant.

$$2^\circ) \text{ On a } P(X \geq 1) = P(X=1 \cup X=2) = P(X=1) + P(X=2) = \frac{32}{90} + \frac{2}{90} = \frac{34}{90} \text{ donc la probabilité qu'au moins une pièce soit défectueuse est de } \frac{34}{90}$$

Exercice 24 page 326

Il suffit d'appliquer les formules du cours.

$$\text{On a } E(X) = P(X=0) \times 0 + P(X=2) \times 2 + P(X=4) \times 4 = \frac{21}{32} \times 0 + \frac{6}{32} \times 2 + \frac{5}{32} \times 4 = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

$$\text{et } \sigma(X) = \sqrt{\frac{21}{32} \times (0 - 0,5)^2 + \frac{6}{32} \times (2 - 0,5)^2 + \frac{5}{32} \times (4 - 0,5)^2}$$

Utiliser la numworks.