Probabilités : loi binomiale

I°) Schéma de Bernoulli

1°) Définition

a) On lance un dé 5 fois de suite et on note à chaque fois le résultat. On répète ainsi la même expérience (lancer un dé) et les expériences sont indépendantes l'une de l'autre (un lancer n'influence pas le résultat d'un autre lancer).
A chaque lancer, on considère comme succès "*obtenir un six*" et comme échec "*ne pas obtenir un six*".

b) On lance une pièce de monnaie 20 fois de suite. Ces expériences sont identiques et indépendantes.
On considère comme succès "*obtenir Pile*" et comme échec "*obtenir Face*".

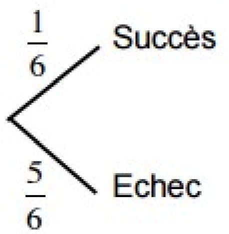
Définition : Un schéma de Bernoulli est la répétition de n expériences aléatoires indépendantes et identiques (des épreuves de Bernoulli), à deux issues, que l'on peut nommer « succès » et « échec ».
Un schéma de Bernoulli est donc composé de deux paramètres : n et la probabilité de succès.

2°) Arbre pondéré

Exemples

On reprend les exemples précédents :

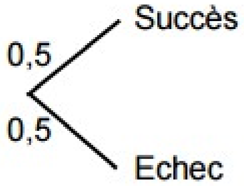
a) Pour chaque expérience (lancer de dé), on a les probabilités suivantes :



On répète cette expérience 5 fois, la probabilité du succès est égale à $\frac{1}{6}$.

On dit ici que n = 5 et $p=\frac{1}{6}$ sont les paramètres du schéma de Bernoulli.

b) Pour chaque expérience (lancer d'une pièce), on a les probabilités suivantes :



On répète cette expérience 20 fois, la probabilité du succès est égale à 0,5.
On dit ici que n = 20 et $p=0,5$ sont les paramètres du schéma de Bernoulli.

Méthode

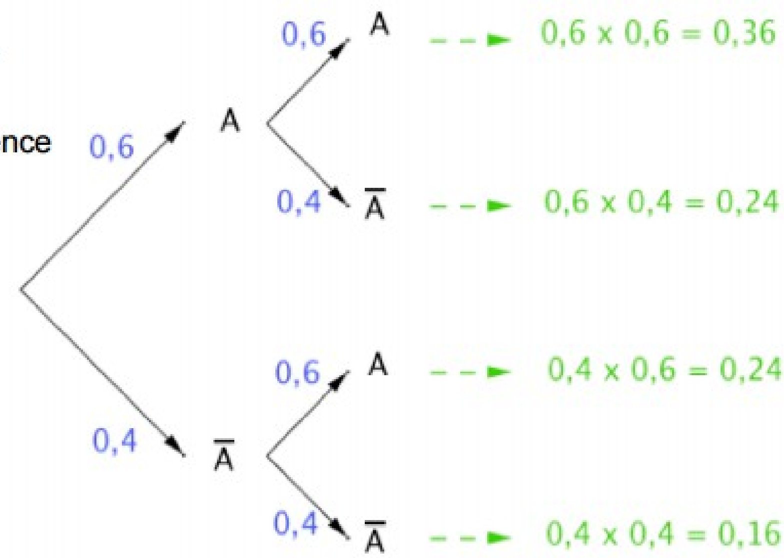
On considère l'expérience suivante :
Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules rouges. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne. On répète l'expérience deux fois de suite.
1) Représenter l'ensemble des issues de ces expériences dans un arbre.
2) Déterminer les probabilités suivantes :

- a) On tire deux boules blanches.
- b) On tire une boule blanche et une boule rouge.
- c) On tire au moins une boule blanche.

1) On note A l'issue "On tire une boule blanche" et $\overline{A}$ l'issue contraire "On tire une boule rouge".

$P(A) = \frac{3}{5} = 0{,}6$ et $P(\overline{A}) = \frac{2}{5} = 0{,}4$.

On résume les issues de l'expérience dans un arbre pondéré :



2) a) Obtenir deux boules blanches correspond à l'issue $(A\ ;\ A)$:
$P_1 = 0{,}36$ (d'après l'arbre).

b) Obtenir une boule blanche et une boule rouge correspond aux issues $(A\ ;\ \overline{A})$ et $(\overline{A}\ ;\ A)$:
$P_2 = 0{,}24 + 0{,}24 = 0{,}48$.

c) Obtenir au moins une boule blanche correspond aux issues $(A\ ;\ \overline{A})$, $(A\ ;\ A)$ et $(\overline{A}\ ;\ A)$:
$P_2 = 0{,}24 + 0{,}36 + 0{,}24 = 0{,}84$.

II°) Loi binomiale

Définition : On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p. Soit X la fonction qui à chaque issue de ce schéma de Bernoulli, associe le nombre de succès obtenus.

- On dit que X est la variable aléatoire associée à ce schéma de Bernoulli.
- Pour tout entier k de 0 à n, on note « X = k » l'événement « On obtient k succès » et donc P(X = k) la probabilité de cet événement.
- On appelle loi de probabilité de X la donnée de chacune des valeurs de P(X = k) et cela pour toutes les valeurs de k de 0 à n. On dit alors que X suite la loi binomiale de paramètres n et p.

Exemple : Si on jette 10 fois un dé à 6 faces équilibré de manière identique et indépendante, on a un schéma de Bernoulli de paramètre n = 10 et p = $\frac{1}{6}$. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où le dé tombe sur 5 (succès). X suit alors une loi binomiale de paramètres 10 et $\frac{1}{6}$ et P(X = 3) est alors la probabilité d'obtenir 3 succès, c'est à dire celle d'obtenir 3 fois la face 5 sur les 10 lancers.

VOIR LA PARTIE EXERCICES POUR CALCULER AVEC LA CALCULATRICE P(X = k) quand X suit une loi binomiale B(n,p).

Propriétés : Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p.

- L'espérance mathématique de X, notée E(X) est donnée par E(X) = np.
- La variance de X, notée V(X) est donnée par V(X) = np(1- p)
- On en déduit l'écart-type noté σ(X), qui vérifie σ(X) = $\sqrt{np(1-p)}$

Remarque : Si l'on repète un grand nombre de fois l'expérience liée à un schéma de Bernoulli de paramètres n et p, auquel est associée la variable aléatoire X, alors on obtient en moyenne E(X) = np succès.

III°) Utilisation de la loi binomiale en échantillonnage

1°) Rappel

Échantillon : Comme on l'a vu en seconde, un échantillon de taille n est le n-uplet $(e_1\,;e_2\,;\ldots\,;e_i\,;\ldots\,;e_n)$ obtenu en répétant n fois une même expérience aléatoire.

Intervalle de fluctuation : Supposons qu'un caractère apparaisse dans une proportion p dans une population. Pour un échantillon de taille n, $n \geqslant 25$, on peut estimer que sa fréquence f observée appartient à l'intervalle $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ dans au moins 95 % des cas.

Cet intervalle s'appelle aussi intervalle de confiance, il peut être restreint en utilisant la loi binomiale.

2°) Intervalle de fluctuation au seuil de 95% avec la loi binomiale

Propriétés : Soit une population dans laquelle une proportion p d'individus possède un caractère C. Soit X la variable aléatoire, qui à tout échantillon de taille n constitué au hasard et avec remise compte le nombre d'individus possédant le caractère C et f la fréquence d'apparition du caractère C dans l'échantillon. Alors :

- X suit la loi binomiale de paramètres n et p.
- L'intervalle [$\frac{a}{n};\frac{b}{n}$] où a est le plus petit entier tel que $P(X\leq a)>0{,}025$ et b le plus petit entier tel que $P(X\leq b)\geq 0{,}975$ est un intervalle de fluctuation de la fréquence f au seuil de 95%.

<u>3°) Prise de décision à partir d'un échantillon</u>

On considère une population dans laquelle on suppose que la proportion d'un caractère est p.
On observe la fréquence f de ce caractère dans un échantillon de taille n et on considère l'hypothèse « la proportion de ce caractère dans la population est p ».

On a alors la règle de décision suivante :

— Si $f \in \left[\frac{a}{n}\,;\,\frac{b}{n}\right]$: on considère que l'hypothèse n'est pas remise en question et l'on accepte au seuil de risque de 5 % ;
— Si $f \notin \left[\frac{a}{n}\,;\,\frac{b}{n}\right]$: on rejette l'hypothèse au seuil de risque de 5 %.