Chapitre : Lois à densité

I°) Loi uniforme sur [a ; b]

A°) Variable aléatoire de loi uniforme

Définition : Soit a et b deux nombres réels tels que a < b. Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur [a ; b] quand pour tout intervalle [c ; d] inclus dans [a; b], la probabilité de l'événement « X ∈ [c ; d]» est

- P(« X ∈ [c ; d]») = $\int_c^d f(x).dx$ avec f(x) = $\frac{1}{b-a}$ pour tout x dans [a ; b].

Remarque : La fonction f ainsi définie est appelée fonction de densité de la loi uniforme sur [a ; b].

Propriété essentielle de la loi uniforme : Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur [a ; b]. Pour tout intervalle [c ; d] inclus dans [a; b] on a alors :

- P(« X ∈ [c ; d]») = $\frac{d-c}{b-a}$

Remarque : il suffit d'intégrer $\int_c^d f(x).dx$ pour obtenir $\frac{d-c}{b-a}$.

Remarque : On a bien $\int_a^b f(x).dx = \frac{b-a}{b-a} = 1$.

Exemple :

Ici, la fonction de densité est la fonction f définie sur [0 ; 5] par f(x) = $\frac{1}{5-0} = \frac{1}{5}$ pour tout x dans [0 ; 5].

Donc par exemple la probabilité qu'un véhicule tombe en panne entre 0 et 2 km est donnée par

P(X ∈ [0 ; 2]) = $\frac{2-0}{5-0} = \frac{2}{5}$.

II°) Espérance et variance d'une variable aléatoire de loi uniforme

Définitions : Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur [a ; b] et f une fonction de densité de la loi uniforme sur [a ; b].

- L'espérance et la variance de X sont les nombres réels, notés E(X) et V(X) définis par :

  E(X) = $\frac{a+b}{2}$ et V(X) = $\frac{(b-a)^2}{12}$

- L'écart-type σ(X) = $\sqrt{V(X)}$

Exemple : Si X suit la loi uniforme sur [2 ; 5], alors : E(X) = $\frac{2+5}{2} = \frac{7}{2}$ et V(X) = $\frac{3}{4}$

III°) Rappels sur la loi binomiale

Ce III°) fait partie du chapitre Loi à densité mais présente une loi ici sans densité, rappels de première.

1°) Schéma de Bernoulli

2°) Variable aléatoire, espérance et variance

Exemple : Si on jette 10 fois un dé à 6 faces équilibré de manière identique et indépendante, on a un schéma de Bernoulli de paramètre n = 10 et p = $\frac{1}{6}$. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où le dé tombe sur 5 (succès). X suit alors une loi binomiale de paramètres 10 et $\frac{1}{6}$ et P(X = 3) est alors la probabilité d'obtenir 3 succès, c'est à dire celle d'obtenir 3 fois la face 5 sur les 10 lancers.

Propriétés : Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p.

- L'espérance mathématique de X, notée E(X) est donnée par E(X) = np.
- La variance de X, notée V(X) est donnée par V(X) = np(1- p)
- On en déduit l'écart-type noté σ(X), qui vérifie σ(X) = $\sqrt{np(1-p)}$

IV°) Loi exponentielle

1°) Variable aléatoire de loi exponentielle

Définition : Soit λ un nombre réel tel que λ > 0. Une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ si pour tout intervalle [c ; d] inclus dans $[0\,;+\infty[$ la probabilité de l'événement « X ∈ [c ; d]» est :

- P(« X ∈ [c ; d]») = $\int_c^d f(x).dx$ avec f(x) = $\lambda e^{-\lambda x}$ pour tout x dans $[0\,;+\infty[$.

Remarque : La fonction f ainsi définie est appelée fonction de densité de la loi exponentielle de paramètre λ.

Propriété : Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ. Pour tout intervalle [c ; d] inclus dans $[0\,;+\infty[$ on a P ($c \leq X \leq d$) = $e^{-\lambda c}-e^{-\lambda d}$.

Démonstration : P ($c \leq X \leq d$) = $\int_c^d \lambda e^{-\lambda x}.dx$ = $e^{-\lambda c}-e^{-\lambda d}$

Propriété : Si une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ alors pour tout x positif ou nul on a $P(X \leq x)=1-e^{-\lambda x}$.

Démonstration : $P(X \leq x)=P(0 \leq X \leq x)$ = $\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}.dt$ = $1-e^{-\lambda x}$

Exemple : Si X suit la loi exponentielle de paramètre λ = 0,5 alors :

- P(X = 3) = 0
- P($3 \leq X \leq 4$) = $e^{-3\times 0{,}5}-e^{-4\times 0{,}5}$
- P($X \leq 4$) = $1-e^{-4\times 0{,}5}$

2°) Espérance d'une variable aléatoire de loi exponentielle

Définition : Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ et de densité f.

L'espérance de X est le réel défini par E(X) = $\frac{1}{\lambda}$.

Exemple : Si X est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}04$ alors :

- E(X) = $\frac{1}{0{,}04}=25$

Interprétation : Lorsqu'une expérience aléatoire faisant intervenir une variable aléatoire X de loi exponentielle de paramètre λ est répétée un très grand nombre de fois, la moyenne des valeurs prises par X se rapproche de $\frac{1}{\lambda}$.

III°) Loi normale

1°) Variable aléatoire de loi normale

Définition : Soit μ et σ deux réels tels que $\sigma > 0$.

Une variable aléatoire X suit la loi normale de paramètres μ et σ si, pour tout intervalle [c ; d] borné inclus dans IR, la probabilité de l'événement « X ∈ [c ; d]» est :

- P(« X ∈ [c ; d]») = $\int_c^d f(x).dx$ avec f(x) = $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}\times(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$

  pour tout x dans $[0\,;+\infty[$.

La fonction f ainsi définie est appelée fonction de densité de la loi normale de paramètres μ et σ. Cette loi est notée N(μ, σ).

Propriétés (admises) : Si X est un variable aléatoire suivant la loi normale N(μ, σ), alors :

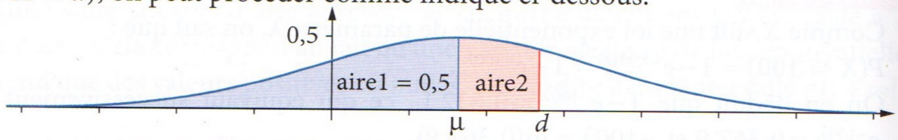
- La courbe représentative de la densité f est symétrique par rapport à la droite D d'équation $x = \mu$.
- P($X\leq\mu$) = P($X\geq\mu$) = 0,5.

Propriété (admise) : Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale N(μ, σ), alors :

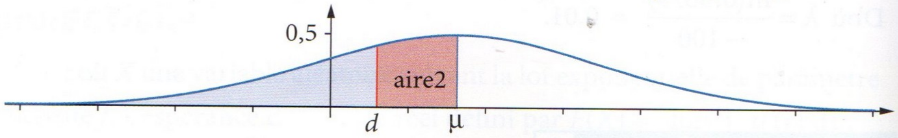
- E(X) = μ
- σ(X) = σ

2°) Calcul de P($X \leq d$) à la calculatrice :

Comme certaines calculatrices ne fournissent pas $P(X \leqslant d)$ mais seulement $P(c \leqslant X \leqslant d)$, on peut procéder comme indiqué ci-dessous.



Si $d > \mu$, alors $P(X \leqslant d) = \text{aire1} + \text{aire2} = 0{,}5 + P(\mu \leqslant X \leqslant d)$.



Si $d < \mu$, alors $P(X \leqslant d) = \text{aire1} - \text{aire2} = 0{,}5 - P(d \leqslant X \leqslant \mu)$.

Sinon, on peut :

- Pour calculer P(X < a), demander à la calculatrice de calculer P(-10^99 < X < a)
- Pour calculer P(X > a), demander à la calculatrice de calculer P(a < X < 10^99)

3°) Intervalles remarquables

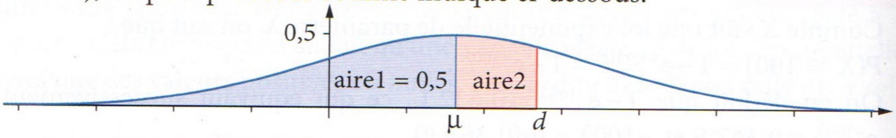
Propriété (admise) : Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale $N(\mu, \sigma)$, alors :

- $P(\mu - \sigma, \mu + \sigma) \approx 0{,}683$
- $P(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma) \approx 0{,}954$
- $P(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$

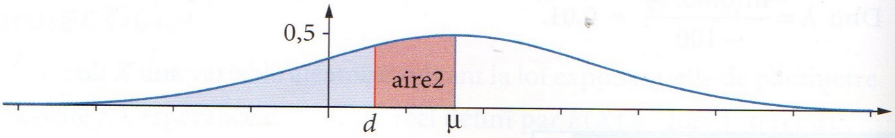
4°) Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Propriété (admise) : Lorsque $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$, la loi binomiale B(n ; p) peut être approchée par la loi normale $N(\mu, \sigma)$, de même espérance et de même écart-type avec $\mu = np$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

Comme certaines calculatrices ne fournissent pas $P(X \leqslant d)$ mais seulement $P(c \leqslant X \leqslant d)$, on peut procéder comme indiqué ci-dessous.

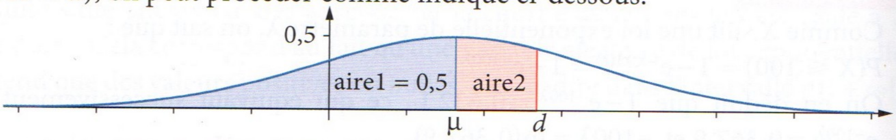


Si $d > \mu$, alors $P(X \leqslant d) = \text{aire1} + \text{aire2} = 0{,}5 + P(\mu \leqslant X \leqslant d)$.

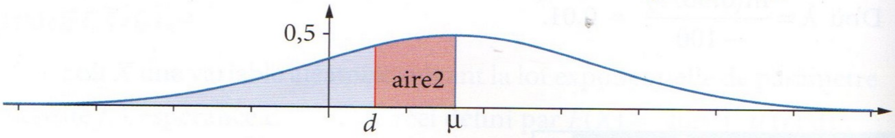


Si $d < \mu$, alors $P(X \leqslant d) = \text{aire1} - \text{aire2} = 0{,}5 - P(d \leqslant X \leqslant \mu)$.

Comme certaines calculatrices ne fournissent pas $P(X \leqslant d)$ mais seulement $P(c \leqslant X \leqslant d)$, on peut procéder comme indiqué ci-dessous.

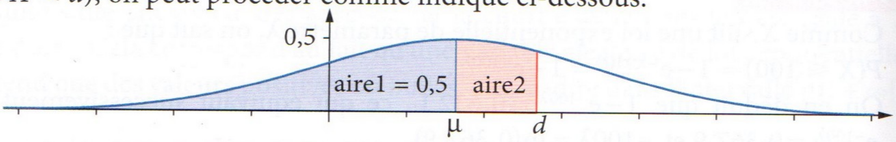


Si $d > \mu$, alors $P(X \leqslant d) = \text{aire1} + \text{aire2} = 0{,}5 + P(\mu \leqslant X \leqslant d)$.

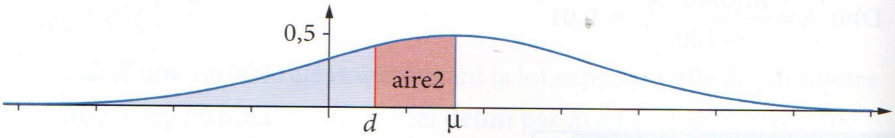


Si $d < \mu$, alors $P(X \leqslant d) = \text{aire1} - \text{aire2} = 0{,}5 - P(d \leqslant X \leqslant \mu)$.

Comme certaines calculatrices ne fournissent pas $P(X \leqslant d)$ mais seulement $P(c \leqslant X \leqslant d)$, on peut procéder comme indiqué ci-dessous.



Si $d > \mu$, alors $P(X \leqslant d) = \text{aire1} + \text{aire2} = 0{,}5 + P(\mu \leqslant X \leqslant d)$.



Si $d < \mu$, alors $P(X \leqslant d) = \text{aire1} - \text{aire2} = 0{,}5 - P(d \leqslant X \leqslant \mu)$.