Exercices corrigés – Lois à densité

Exercice 1 p 260

a°) D'après le cours, on a $P(4\leq X\leq 5)=\frac{5-4}{7-2}=\frac{1}{5}=0{,}2$

b°) D'après le cours, on a $P(X=3)=0$. En effet, pour toutes les variables aléatoires continues, $P(X=k)=0$!

c°) D'après le cours, on a $P(X>6)=\frac{7-6}{7-2}=\frac{1}{5}=0{,}2$

On rappelle ici une propriété du cours :
$P(a\leq X\leq b)=P(a<X\leq b)=P(a\leq X<b)=P(a<X<b)$ pour toute variable aléatoire **continue** X.
(Attention, évidemment ce n'est pas vrai pour la loi binomiale, qui est **discrète**!)

Exercice 3 p 260

X prend pour valeur la distance AM, cela signifie ici que X suit la loi uniforme de paramètre [0 ; 6], et attention ici la notation P(X < -5) a un sens ! Simplement, on a P(X < -5) = 0.
X prend donc bien toutes ses valeurs dans IR.

1°) X suit la loi uniforme de paramètre [0 ; 6]
2°)
a°) P(« M est le milieu de [AB] ») = P(X = 3) = 0
b°) P(« M est situé à moins de 4 cm de A ») = $P(X\leq 4)=P(X<4)=\frac{4-0}{6-0}=\frac{2}{3}$
c°) P(« M est situé entre 1 et 2 cm de B ») = $P(4\leq X\leq 5)=\frac{5-4}{6-0}=\frac{1}{6}$

Exercice 5 p 260

Soit X la variable aléatoire qui suit la loi uniforme [0 ; 2].
On a alors P(« un nombre réel pris au hasard entre 0 et 2 est entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$ ») =
$P(\frac{1}{3}\leq X\leq\frac{1}{2})=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{2-0}=\frac{1}{12}$

Exercice 6 p 260

Soit X la variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur [0 ; 30]
a°) On a alors P(« Solenn arrive moins d'une minute après Titouan ») =
$P(10\leq X\leq 11)=\frac{11-10}{30-0}=\frac{1}{30}$
b°) P(« Solenn arrive avant Titouan ») = $P(X\leq 10)=\frac{10-0}{30-0}=\frac{1}{3}$
c°) P(« Titouan attend Solenn plus de 10 min ») = $P(X\geq 20)=\frac{30-20}{30-0}=\frac{1}{3}$

Exercice 13 p 261

On applique les formules du cours

Pour rappel :

I°) Espérance et variance d'une variable aléatoire de loi uniforme

Définitions : Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur [a ; b] et f une fonction de densité de la loi uniforme sur [a ; b].

- L'espérance et la variance de X sont les nombres réels, notés E(X) et V(X) définis par :

  E(X) = $\frac{a+b}{2}$ et V(X) = $\frac{(b-a)^2}{12}$

- L'écart-type σ(X) = $\sqrt{V(X)}$

Donc ici,

- E(X) = $\frac{5+20}{2}=12{,}5$
- V(X) = $\frac{(20-5)^2}{12}=\frac{125}{12}$
- σ(X) = $\sqrt{\frac{125}{12}}=\frac{15}{\sqrt{12}}=\frac{15\sqrt{12}}{12}$

Exercice 17 p 262

On applique le cours :

Propriété : Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ. Pour tout intervalle [c ; d] inclus dans $[0\,;+\infty[$ on a P($c\leq X\leq d$) = $e^{-\lambda c}-e^{-\lambda d}$.

ET

Propriété : Si une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ alors pour tout x positif ou nul on a $P(X\leq x)=1-e^{-\lambda x}$.

a°) $P(T\leq 1000)=1-e^{-0{,}02\times 1000}=1-e^{-20}$. On ne nous demande pas d’approximation ici.

b°) Il n’y a pas de formule de cours pour calculer directement P(T > 100).

Pour cela, comme les événements $T\leq 100$ et T > 100 forment une partition de l’univers, on a :

P(T > 100) = 1 - P($T\leq 100$) donc

P(T > 100) = 1 - ($1-e^{-2}$) = e^{-2}

c°) Comme pour toute variable aléatoire **continue**, on a toujours P(T = 200) = 0

Exercice 19 p 262

Attention ici aux unités, T est exprimée en minutes, toujours vérifier si il y a des conversions d'unités) faire. Ce n'est pas le cas ici.

a°) P(« le temps d'attente est moins de 5 min ») = $P(T \leq 5) = 1 - e^{-0,1 \times 5} = 1 - e^{-0,5}$

b°) P(« le temps d'attente est plus de 15 min ») = $P(T \geq 15) = e^{-0,1 \times 15} = e^{-1,5}$

c°) P(« le temps d'attente est entre 5 et 15 min ») = $P(5 \leq T \leq 15) = e^{-0,1 \times 5} - e^{-0,1 \times 15} = e^{-0,5} - e^{-1,5}$