Exercices corrigés – variables aléatoires – 1G

Exercice 28 page 327

1°) Déterminer la loi de probabilité de X qui prend les valeurs {-2 ; 10} c'est donner les valeurs $P(X=-2)$ et $P(X=10)$.
On décrit encore une fois l'univers : l'univers est composé des triplets de P ou F, par exemple (F, F, P) est une issue de cet univers représentant le fait que l'on a obtenu Face puis Face puis Pile.
Ici, bien sûr la loi de probabilité est l'**équiprobabilité**.
On a alors P(X = 10) = P(« Obtenir trois fois Pile » ou « obtenir trois fois Face ») = P(« obtenir trois fois Pile ») + P(« obtenir trois fois Face ») car ces deux événements sont disjoints.
Donc P(X = 10) = $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ et P(X = -2) = 1 – P(X = 10) = $\frac{3}{4}$ car les événements « X = 10 » et « X = -2 » sont complémentaires.

2°) On applique la formule du cours : E(X) =
$P(X=10)\times 10+P(X=-2)\times(-2)=\frac{1}{4}\times 10+\frac{3}{4}\times(-2)=\frac{4}{4}=1$
3°) Oui, on a intérêt à jouer à ce jeu car si l'on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire « lancer 3 fois une pièce de monnaie » et que l'on fait la moyenne des gains obtenus, on sera proche de 1 euros. Donc, si par exemple on répète 1000 fois cette expérience, on peut raisonnablement espérer un gain d'environ 1000 euros.

Exercice 39 page 328

Pour le premier jeu, l'espérance de la variable aléatoire X_1 dont on donne la loi de probabilité dans la colonne « jeu 1 » du tableau est d'après le cours
$E(X_1)=P(X_1=-2)\times(-2)+P(X_1=5)\times 5=\frac{1}{2}\times(-2)+\frac{1}{2}\times 5=\frac{3}{2}=1{,}5$
De même, pour le second jeu, l'espérance de la variable aléatoire X_2 dont on donne la loi de probabilité dans la colonne « jeu 2 » du tableau est d'après le cours
$E(X_2)=P(X_2=-1)\times(-1)+P(X_2=3)\times 3=\frac{3}{8}\times(-1)+\frac{5}{8}\times 3=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}=1{,}5$
Les deux jeux ont les mêmes espérances, donc on peut jouer au premier ou au second, on gagnera en moyenne 1,5 par partie.

Exercice 40 page 328

1°) Les valeurs prises par la variable aléatoire X qui à chaque issues de l'univers associe la gain sont {5 ; 10 ; 0}.
On décrit alors les événements « X = 5 », « X = 10 » et « X = 0 » :
- « X = 5 » = {(1 ; 2) ; (2 ; 4) ; (3 ; 6)}
- « X = 10 » = {(1 ; 3) ; (2 ; 6)}
- « X = 0 » est composé de toutes les autres issues de l'univers

Comme la loi de probabilité est l'équiprobabilité, on a :
- $P(X=5)=\frac{3}{36}$
- $P(X=10)=\frac{2}{36}$
- $P(X=0)=\frac{31}{36}$

2°) Il faut ici traduire « gain moyen » en « espérance ».

On calcule $E(X)=P(X=5)\times 5+P(X=10)\times 10+P(X=0)\times 0$

On a donc $E(X)=\frac{3}{36}\times 5+\frac{2}{36}\times 10+\frac{31}{36}\times 0=\frac{35}{36}$

On peut donc espérer un gain moyen de $\frac{35}{36}$

<u>Exercice 42 page 328</u>

1°) L contiendra 5 nombres entiers entre 2 et 8, par exemple L = [2, 8, 7, 5, 7]

2°) Voici un exemple d'énoncé :

Soit l'expérience aléatoire qui consiste à tirer deux nombres entiers entre 1 et 4, et à noter comme résultat la somme de ces deux nombres.

On répète 5 fois l'expérience et on note les résultats.

Sachant qu'on gagne 2 points si l'on obtient un « 1 » parmi ces 5 nombres, et -1 sinon, calculer l'espérance de jeu.

<u>Exercice 44 page 328</u>

L'univers ici est l'ensemble des couples de nombres entiers de 1 à 6.

Soit S la variable aléatoire qui à chaque issue associe la somme des deux nombres qui la composent.

S prend donc ses valeurs dans {2 ; 3 ; … ; 12}.

La loi de l'expérience aléatoire est ici l'équiprobabilité.

Voici la loi de probabilité de S :

s_k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(S=s_k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

En effet, ici, $P(S=s_k)$ est le nombre de couples d'entiers entre 1 et 6 dont la somme fait s_k divisé par le nombre d'issues de l'univers.

On applique la formule du cours pour l'espérance E(S), et on trouve E(S) = $\frac{252}{36}=7$

<u>Exercice 45 page 328</u>

Ici, les inconnues sont P(X = -2), P(X = -1), P(X = 0) et P(X = 10).

On dispose déjà, d'après l'énoncé, de 3 équations faisant intervenir ces 4 inconnues.

On dispose aussi toujours de l'équation P(X = - 2) + P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 10) = 1 (*), car X prend ses valeurs dans {-2 ; -1 ; 0 ; 10}.

On a d'après la première et la dernière équation : P(X = 10) = 3P(X = 0).

Donc on peut remplacer P(X = - 2), P(X = -1) et P(X = 10) par une expression avec P(X = 0).

On obtient alors en remplaçant dans l'équation (*) :

3P(X = 0) + 0,5P(X = 0) + P(X = 0) + 3P(X = 0) = 1

Donc P(X = 0) = $\frac{1}{7{,}5}$.

Puis, en utilisant les autres équations, on obtient P(X = 10) = P(X = -2) = $\frac{3}{7{,}5}$ et P(X = -1) = $\frac{0{,}5}{7{,}5}$

On vérifie ensuite que ces candidats-solution sont bien solutions.

Exercice 51 page 329

1°)
La loi ici est l'équiprobabilité et « X = 1 », « X = 2 » etc forment les événements élémentaires de l'univers. Donc :

E(X) = $P(X=1)\times 1+P(X=2)\times 2+...+P(X=6)\times 6=\frac{1}{6}\times 1+\frac{1}{6}\times 2+...+\frac{1}{6}\times 6=\frac{21}{6}$

2°) a°) Quels événement élémentaires forment « G = 12 », « G = 0 » et « G = 6 » ?
On a

- $'G=12'='X=1'$
- $'G=0'='X=2'\cup'X=3'\cup'X=4'$
- $'G=6'='X=5'\cup'X=6'$

Voici donc la loi de probabilité de G :

g_k	12	0	6
$P(G=g_k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

b°) Le gain moyen est donné par E(G).
On a E(G) = $\frac{1}{6}\times 12+\frac{1}{2}\times 0+\frac{1}{3}\times 6=\frac{24}{6}=4$

3°) On note T la variable aléatoire égale aux deuxièmes gains.
On a alors

t_k	27	0
$P(T=t_k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

Et E(T) = $\frac{1}{6}\times 27+\frac{5}{6}\times 0=\frac{27}{6}$

On a E(T) > E(G), donc il vaut mieux jouer au jeu de cette dernière question.

Exercice 52 page 329

On lance un dé non truqué à six faces numérotées de 1 à 6.
Si l'on obtient 1 ou 2, on perd 2 euros.
Sinon, l'on gagne 3 euros.
Sachant que l'on a 10 euros à rembourser à celui qui propose le jeu, pourra t-on le rembourser grâce à 50 lancers de dé ?

L'algorithme permet de simuler 50 lancers de dé, et la variable GAIN contiendra la gain après 50 lancers.

Exercice 57 page 330

Si Maelle prend pas d'assurance :
Si elle casse son téléphone, elle devra payer 200 euros, donc elle perd 150 euros par rapport à la situation où elle aurait pris l'assurance. Par contre, si elle ne le casse pas, elle gagne 50 euros.
Soit A la variable aléatoire qui prend les valeurs -150 et 0, avec
$P(A = -150) = 0{,}1$ et $P(A = 50) = 0{,}9$
On a $E(A) = 30$

Si Maelle prend d'assurance :
Si elle casse son téléphone, elle ne paiera rien, donc elle gagne 150 euros par rapport à la situation où elle aurait pris l'assurance. Par contre, si elle ne le casse pas, elle perd 50 euros.
Soit B la variable aléatoire qui prend les valeurs 150 et -50, avec
$P(B = 150) = 0{,}1$ et $P(B = -50) = 0{,}9$
On a $E(B) = -30$

Comme $E(A) > E(B)$, il vaut mieux qu'elle ne prenne pas d'assurance.