Exercices corrigés – variables aléatoires – 1G

Exercice 1 page 324

L'univers ici est clairement {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}
On entend par gain algébrique le fait qu'on crée une variable aléatoire G qui :

- à l'événement élémentaire {1} associe -4
- à l'événement élémentaire {2} associe -4
- à l'événement élémentaire {3} associe 5
- à l'événement élémentaire {4} associe -4
- à l'événement élémentaire {5} associe -4
- à l'événement élémentaire {6} associe 5

(algébrique dans le sens ou l'on associe parfois -4, qui est négatif)
1°) C'est donc {-4 ; 5}
2°) L'événement « G = -4 » est donc **égal** à {1 ; 2 ; 4 ; 5}. (voir le cours à ce sujet, et la définition de l'événement « X = x_i », pour X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, \dots, x_n$).
3°) L'événement « G > 0 » est donc égal à l'événement « G = 5 », qui est égal à {3 ; 6}.

Exercice 2 page 324

L'univers ici est clairement {1, …, 15}
X est donc la **fonction** (voir la définition d'une variable aléatoire du cours) qui :

- à un événement élémentaire {e} associe 2 sinon e est un multiple de 2
- à un événement élémentaire {e} associe 7 sinon e est un multiple de 7
- à un événement élémentaire {e} associe – 10 dans tous les autres cas

1°) Ici c'est {2 ; 7 ; - 10}
2°) On a « X = 9 » = $\emptyset$ car l'événement « X = 9 » ne comporte aucune issue de l'univers, car il n'y a aucune issue à laquelle X associe le nombre 9.
3°) On a « $X \leq 0$ » = « X = -10 » = {1 ; 3 ; 5 ; 9 ; 11 ; 13 ; 15}
Autrement dit, l'ensemble des issues auxquelles X associe un nombre négatif ou nul est {1 ; 3 ; 5 ; 9 ; 11 ; 13 ; 15}.

Exercice 4 page 324

L'univers ici est clairement {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}
La variable aléatoire X est la **fonction** donnée par le tableau suivant :

e_i	1	2	3	4	5	6
x_i	2	4	6	8	10	12

Déterminer la loi de probabilité de X revient à donner, par exemple sous forme de tableau, les valeurs $P(X = x_i)$, pour chaque valeur x_i prise par X.

La loi de probabilité de notre expérience aléatoire est la **loi d'équiprobabilité**.

En rappelant que l'événement « $X = x_i$ » est ***égal*** *à l'ensemble des issues de l'univers auxquelles X associe x_i ,*

On a donc :

- $P(X=2)=P(\{1\})=\frac{1}{6}$
- $P(X=4)=P(\{2\})=\frac{1}{6}$
- … $P(X=12)=P(\{6\})=\frac{1}{6}$

et sous forme de tableau :

x_i	2	4	6	8	10	12
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

<u>Exercice 8 page 324</u>

On ne connaît pas l'univers à priori ici, mais cela n'est pas grave, on n'en a pas besoin.
Déterminer la probabilité $P(Y\leq 0)$ revient à calculer la probabilité de l'événement « $Y\leq 0$ ».
On remarque alors que « $Y\leq 0$ » = « Y = -2 » $\cup$ « Y = -1 ».
Ces deux derniers événements sont disjoints, donc

$$P(Y\leq 0)=P(Y=-2\cup Y=-1)=P(Y=-2)+P(Y=-1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{10}{24}=\frac{5}{12}$$

De même, on a $P(-1\leq Y\leq 5)=P(Y=-1)+P(Y=2)+P(Y=5)=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

On a aussi $P(|Y|=2)=P(Y=-2\cup Y=2)=P(Y=-2)+P(Y=2)=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$

<u>Exercice 13 page 325</u>

1°) Déterminer la loi de probabilité de G revient à donner un tableau qui donne $P(X=x_i)$ pour chaque valeur x_i de la variable aléatoire X.
Les valeurs prises par X sont {100 ; 20 ; 0}

Voici donc le tableau :

x_i	100	20	0
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$

2°) On a P(« Gagner à ce jeu ») = P(X > 0) =

$$P(X=20\cup X=100)=P(X=20)+P(X=100)=\frac{1}{10}+\frac{9}{20}=\frac{11}{20}$$

La probabilité de gagner à ce jeu est donc de $\frac{11}{20}$

Exercice 16 page 325

1°) Voici la loi de la variable aléatoire X :

x_i	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	0,2	0,3	0,25	0,25

En effet, X prenant les valeurs 1, 2, 3 et 4, les événements « $X=x_i$ » pour $x_i \in \{1;2;3;4\}$ forment une partition de l'univers, donc
P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 1, c'est à dire 0,2 + 0,3 + 0,25 + P(X = 4) = 1 donc P(X = 4) = 0,25

2°) On a P(«il y a au moins deux caisses en service à midi ») =
$P(X\geq 2)=P(X=2\cup X=3\cup X=4)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=0{,}3+0{,}25+0{,}25=0{,}8$

Exercice 18 page 326

Z prenant les valeurs 10, 20, 30 et 40, les événements « $Z=z_i$ » pour $z_i \in \{10;20;30;40\}$ forment une partition de l'univers, donc

P(Z = 10) + P(Z = 20) + P(Z = 30) + P(Z = 40) = 1
c'est à dire 0,2 + P(Z = 20) + 0,2 + P(Z = 40) = 1
ce qui est équivalent à 0,4 + $2\times P(Z=20)$ + P(Z = 20) = 1
ie 0,4 + $3\times P(Z=20)$ = 1
ie $3\times P(Z=20)=0{,}6$ ie P(Z = 20) = 0,2

Donc **P(Z = 20) = 0,2 et P(Z = 40) = 0,4**

Exercice 23 page 326

On décrit l'univers de cette expérience aléatoire (*rappel* : vous pouvez très bien avoir un autre univers dans votre réponse, il y a toujours une infinité d'univers possibles pour décrire une expérience aléatoire)

Ici l'univers est un ensemble de couples de numéros allant de 1 à 10, désignant les numéros des boules, sans les couples avec deux numéros identiques.

La loi est clairement ici l'**équiprobabilité**. Il y a en tout $10\times 9=90$ issues dans l'univers.

X compte le nombre de pièces défectueuses.
X prend donc ses valeurs dans {0 ; 1 ; 2}.

- P(X = 0) = $\dfrac{\text{nombre d'issues ne comportant pas de numéro de pièce défectueuse}}{\text{nombre d'issues de l'univers}}$ = $\dfrac{7\times 6}{90}=\dfrac{42}{90}$
- P(X = 1) = $\dfrac{\text{nombre d'issues comportant un seul numéro de pièce défectueuse}}{\text{nombre d'issues de l'univers}}$ =

$\frac{3\times 7+7\times 3}{90}=\frac{42}{90}$

- P(X = 2) = $\frac{\text{nombre d'issues comportant deux numéros de pièce défectueuse}}{\text{nombre d'issues de l'univers}}$ =

$\frac{3\times 2}{90}=\frac{6}{90}$

Il faut prendre le temps de dénombrer le nombre d'issues, en faisant un petit dessin au brouillon par exemple.

1°) On a donc E(X) = $P(X=0)\times 0+P(X=1)\times 1+P(X=2)\times 2=\frac{42}{90}\times 0+\frac{42}{90}\times 1+\frac{6}{90}\times 2=\frac{54}{90}$

et $\sigma(X)=\sqrt{\frac{56}{90}\times(0-\frac{54}{90})^2+\frac{32}{90}\times(1-\frac{54}{90})^2+\frac{2}{90}\times(2-\frac{54}{90})^2}$

En appliquant la formule du cours

POUR CALCULER FACILEMENT les ESPERANCES et ECART-TYPES, il est conseillé d'utiliser la calculatrice numworks.

Voici le guide d'utilisation, mais tout est très intuitif.

https://www.numworks.com/fr/ressources/manuel/statistiques/

Vous devez créer la série statistique suivante :

Valeur	**Effectif**
0	21
2	6
4	5

et regarder les espérance et écart-types dans l'onglet correspondant.

2°) On a $P(X\geq 1)=P(X=1\cup X=2)=P(X=1)+P(X=2)=\frac{42}{90}+\frac{6}{90}=\frac{48}{90}$ donc la probabilité qu'au moins une pièce soit défectueuse est de $\frac{48}{90}$

<u>Exercice 24 page 326</u>

Il suffit d'appliquer les formules du cours.

On a E(X) = $P(X=0)\times 0+P(X=2)\times 2+P(X=4)\times 4=\frac{21}{32}\times 0+\frac{6}{32}\times 2+\frac{5}{32}\times 4=\frac{16}{32}=1$

et $\sigma(X)=\sqrt{\frac{21}{32}\times(0-1)^2+\frac{6}{32}\times(2-1)^2+\frac{6}{32}\times(4-1)^2}$

Utiliser la numworks.