Exercices corrigés – variables aléatoires – 1G

Exercice 28 page 327

1°) Déterminer la loi de probabilité de X qui prend les valeurs {-2 ; 10} c'est donner les valeurs $P(X=-2)$ et $P(X=10)$.
On décrit encore une fois l'univers : l'univers est composé des triplets de P ou F, par exemple (F, F, P) est une issue de cet univers représentant le fait que l'on a obtenu Face puis Face puis Pile.
Ici, bien sûr la loi de probabilité est l'**équiprobabilité**.
On a alors P(X = 10) = P(« Obtenir trois fois Pile » ou « obtenir trois fois Face ») = P(« obtenir trois fois Pile ») + P(« obtenir trois fois Face ») car ces deux événements sont disjoints.
Donc P(X = 10) = $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ et P(X = -2) = 1 – P(X = 10) = $\frac{3}{4}$ car les événements « X = 10 » et « X = -2 » sont complémentaires.

2°) On applique la formule du cours : E(X) =
$P(X=10)\times 10+P(X=-2)\times(-2)=\frac{1}{4}\times 10+\frac{3}{4}\times(-2)=\frac{4}{4}=1$
3°) Oui, on a intérêt à jouer à ce jeu car si l'on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire « lancer 3 fois une pièce de monnaie » et que l'on fait la moyenne des gains obtenus, on sera proche de 1 euros. Donc, si par exemple on répète 1000 fois cette expérience, on peut raisonnablement espérer un gain d'environ 1000 euros.

Exercice 39 page 328

Pour le premier jeu, l'espérance de la variable aléatoire X_1 dont on donne la loi de probabilité dans la colonne « jeu 1 » du tableau est d'après le cours
$E(X_1)=P(X_1=-2)\times(-2)+P(X_1=5)\times 5=\frac{1}{2}\times(-2)+\frac{1}{2}\times 5=\frac{3}{2}=1{,}5$
De même, pour le second jeu, l'espérance de la variable aléatoire X_2 dont on donne la loi de probabilité dans la colonne « jeu 2 » du tableau est d'après le cours
$E(X_2)=P(X_2=-1)\times(-1)+P(X_2=3)\times 3=\frac{3}{8}\times(-1)+\frac{5}{8}\times 3=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}=1{,}5$
Les deux jeux ont les mêmes espérances, donc on peut jouer au premier ou au second, on gagnera en moyenne 1,5 par partie.

Exercice 40 page 328

1°) Les valeurs prises par la variable aléatoire X qui à chaque issues de l'univers associe la gain sont {5 ; 10 ; 0}.
On décrit alors les événements « X = 5 », « X = 10 » et « X = 0 » :

- « X = 5 » = {(1 ; 2) ; (2 ; 4) ; (3 ; 6)}
- « X = 10 » = {(1 ; 3) ; (2 ; 6)}
- « X = 0 » est composé de toutes les autres issues de l'univers

Comme la loi de probabilité est l'équiprobabilité, on a :

- $P(X=5)=\frac{3}{36}$
- $P(X=10)=\frac{2}{36}$
- $P(X=0)=\frac{31}{36}$

2°) Il faut ici traduire « gain moyen » en « espérance ».

On calcule $E(X)=P(X=5)\times 5+P(X=10)\times 10+P(X=0)\times 0$

On a donc $E(X)=\frac{3}{36}\times 5+\frac{2}{36}\times 10+\frac{31}{36}\times 0=\frac{35}{36}$

On peut donc espérer un gain moyen de $\frac{35}{36}$

<u>Exercice 42 page 328</u>

1°) L contiendra 5 nombres entiers entre 2 et 8, par exemple L = [2, 8, 7, 5, 7]

2°) Voici un exemple d'énoncé :

Soit l'expérience aléatoire qui consiste à tirer deux nombres entiers entre 1 et 4, et à noter comme résultat la somme de ces deux nombres.

On répète 5 fois l'expérience et on note les résultats.

Sachant qu'on gagne 2 points si l'on obtient un « 1 » parmi ces 5 nombres, et -1 sinon, calculer l'espérance de jeu.

<u>Exercice 44 page 328</u>

L'univers ici est l'ensemble des couples de nombres entiers de 1 à 6.

Soit S la variable aléatoire qui à chaque issue associe la somme des deux nombres qui la composent.

S prend donc ses valeurs dans {2 ; 3 ; … ; 12}.

La loi de l'expérience aléatoire est ici l'équiprobabilité.

Voici la loi de probabilité de S :

s_k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(S=s_k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

En effet, ici, $P(S=s_k)$ est le nombre de couples d'entiers entre 1 et 6 dont la somme fait s_k divisé par le nombre d'issues de l'univers.

On applique la formule du cours pour l'espérance E(S), et on trouve E(S) = $\frac{252}{36}=7$