Exercices corrigés – Lois à densité

Exercice 1 p 260

a°) D’après le cours, on a $P(4\leq X\leq 5)=\frac{5-4}{7-2}=\frac{1}{5}=0{,}2$

b°) D’après le cours, on a $P(X=3)=0$. En effet, pour toutes les variables aléatoires continues, $P(X=k)=0$!

c°) D’après le cours, on a $P(X>6)=\frac{7-6}{7-2}=\frac{1}{5}=0{,}2$

On rappelle ici une propriété du cours :
$P(a\leq X\leq b)=P(a<X\leq b)=P(a\leq X<b)=P(a<X<b)$ pour toute variable aléatoire **continue** X.
(Attention, évidemment ce n’est pas vrai pour la loi binomiale, qui est **discrète**!)

Exercice 3 p 260

X prend pour valeur la distance AM, cela signifie ici que X suit la loi uniforme de paramètre [0 ; 6], et attention ici la notation P(X < -5) a un sens ! Simplement, on a P(X < -5) = 0.
X prend donc bien toutes ses valeurs dans IR.

1°) X suit la loi uniforme de paramètre [0 ; 6]
2°)
a°) P(« M est le milieu de [AB] ») = P(X = 3) = 0
b°) P(« M est situé à moins de 4 cm de A ») = $P(X\leq 4)=P(X<4)=\frac{4-0}{6-0}=\frac{2}{3}$
c°) P(« M est situé entre 1 et 2 cm de B ») = $P(4\leq X\leq 5)=\frac{5-4}{6-0}=\frac{1}{6}$

Exercice 5 p 260

Soit X la variable aléatoire qui suit la loi uniforme [0 ; 2].
On a alors P(« un nombre réel pris au hasard entre 0 et 2 est entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$ ») =

$$P(\frac{1}{3}\leq X\leq \frac{1}{2})=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{2-0}=\frac{1}{12}$$

Exercice 6 p 260

Soit X la variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur [0 ; 30]
a°) On a alors P(« Solenn arrive moins d’une minute après Titouan ») =
$P(10\leq X\leq 11)=\frac{11-10}{30-0}=\frac{1}{30}$
b°) P(« Solenn arrive avant Titouan ») = $P(X\leq 10)=\frac{10-0}{30-0}=\frac{1}{3}$
c°) P(« Titouan attend Solenn plus de 10 min ») = $P(X\geq 20)=\frac{30-20}{30-0}=\frac{1}{3}$

Exercice 13 p 261

On applique les formules du cours

Pour rappel :

I°) Espérance et variance d'une variable aléatoire de loi uniforme

Définitions : Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur [a ; b] et f une fonction de densité de la loi uniforme sur [a ; b].

- L'espérance et la variance de X sont les nombres réels, notés E(X) et V(X) définis par :

  E(X) = $\frac{a+b}{2}$ et V(X) = $\frac{(b-a)^2}{12}$

- L'écart-type σ(X) = $\sqrt{V(X)}$

Donc ici,

- E(X) = $\frac{5+20}{2}=12{,}5$
- V(X) = $\frac{(20-5)^2}{12}=\frac{125}{12}$
- σ(X) = $\sqrt{\frac{125}{12}}=\frac{15}{\sqrt{12}}=\frac{15\sqrt{12}}{12}$

Exercice 17 p 262

On applique le cours :

Propriété : Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ. Pour tout intervalle [c ; d] inclus dans $[0;+\infty[$ on a P($c\le X\le d$) = $e^{-\lambda c}-e^{-\lambda d}$.

ET

Propriété : Si une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ alors pour tout x positif ou nul on a $P(X\le x)=1-e^{-\lambda x}$.

a°) $P(T\le 1000)=1-e^{-0{,}02\times 1000}=1-e^{-20}$. On ne nous demande pas d'approximation ici.

b°) Il n'y a pas de formule de cours pour calculer directement P(T > 100).

Pour cela, comme les événements $T\le 100$ et T > 100 forment une partition de l'univers, on a :

P(T > 100) = 1 - P($T\le 100$) donc

P(T > 100) = 1 - ($1-e^{-2}$) = e^{-2}

c°) Comme pour toute variable aléatoire **continue**, on a toujours P(T = 200) = 0

Exercice 19 p 262

Attention ici aux unités, T est exprimée en minutes, toujours vérifier si il y a des conversions d'unités) faire. Ce n'est pas le cas ici.

a°) P(« le temps d'attente est moins de 5 min ») = $P(T\leq 5)=1-e^{-0,1\times 5}=1-e^{-0,5}$

b°) P(« le temps d'attente est plus de 15 min ») = $P(T\geq 15)=e^{-0,1\times 15}=e^{-1,5}$

c°) P(« le temps d'attente est entre 5 et 15 min ») = $P(5\leq T\leq 15)=e^{-0,1\times 5}-e^{-0,1\times 15}=e^{-0,5}-e^{-1,5}$

Exercice 21 p 262

On a $P(T\geq 5000)=0,4\Leftrightarrow e^{(-\lambda\times 5000)}=0,4\Leftrightarrow \ln\left(e^{(-\lambda\times 5000)}\right)=\ln(0,4)$

$$\Leftrightarrow -5000\times\lambda=\ln(0,4)\Leftrightarrow \lambda=\frac{\ln(0,4)}{-5000}\Leftrightarrow \lambda\simeq 0,00018$$

Exercice 23 p 262

On rappelle le cours :

> **Définition :** Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ et de densité f.
>
> L'espérance de X est le réel défini par E(X) = $\frac{1}{\lambda}$.

Donc, tout simplement ici on a $E(T)=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{0,05}=20$

Exercice 25 p 262

On a $E(T)=\frac{1}{\lambda}\Leftrightarrow 1000=\frac{1}{\lambda}\Leftrightarrow \lambda=\frac{1}{1000}=0,001$

Exercice 28 p 262

On fait toujours attention aux unités, mais ici il n'y a pas de problème de conversion.

a°) **TRES IMPORTANT : TOUJOURS TRADUIRE la notion de MOYENNE par ESPERANCE !!**

Ici, il suffit donc de calculer E(T). Comme T suit une loi exponentielle de paramètre λ , on a

$E(T)=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{0{,}000125}=8000$ donc, et on fait une phrase-réponse car la question était en français :

La durée de vie moyenne d'une ampoule est de **8000 heures**.

b°) On a P(« une ampoule est encore en état de marche au bout de 10 000 heure ») =

$P(T\geq 10000)=e^{(-0{,}000125\times 10000)}\simeq 0{,}286$

La probabilité qu'une ampoule soit encore en état de marche au bout de 10 000 heures et environ 0,286

c°) On a P(« une ampoule tombe en panne avant 5000 heures ») =

$P(T\leq 5000)=1-e^{(-0{,}000125\times 5000)}\simeq 0{,}465$

La probabilité qu' une ampoule tombe en panne avant 5000 heures et environ 0,465

d°) On a $P(T\geq t_0)=0{,}85\Leftrightarrow e^{(-0{,}000125\times t_0)}=0{,}85\Leftrightarrow -0{,}000125\times t_0=\ln(0{,}85)\Leftrightarrow t_0=\frac{\ln(0{,}85)}{-0{,}000125}$,

c'est à dire $t_0\simeq 1300{,}151$

Cela signifie qu'il y a 85 % de chance qu'une ampoule tombe en panne après 1300,151 heures.