

## Exercices corrigés – variables aléatoires – 1G

### Exercice 28 page 327

1°) Déterminer la loi de probabilité de  $X$  qui prend les valeurs  $\{-2 ; 10\}$  c'est donner les valeurs  $P(X = -2)$  et  $P(X = 10)$ .

On décrit encore une fois l'univers : l'univers est composé des triplets de P ou F, par exemple (F, F, P) est une issue de cet univers représentant le fait que l'on a obtenu Face puis Face puis Pile.

Ici, bien sûr la loi de probabilité est l'**équiprobabilité**.

On a alors  $P(X = 10) = P(\text{« Obtenir trois fois Pile » ou « obtenir trois fois Face »}) = P(\text{« obtenir trois fois Pile »}) + P(\text{« obtenir trois fois Face »})$  car ces deux événements sont disjoints.

Donc  $P(X = 10) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$  et  $P(X = -2) = 1 - P(X = 10) = \frac{3}{4}$  car les événements «  $X = 10$  » et «  $X = -2$  » sont complémentaires.

2°) On applique la formule du cours :  $E(X) =$

$$P(X = 10) \times 10 + P(X = -2) \times (-2) = \frac{1}{4} \times 10 + \frac{3}{4} \times (-2) = \frac{4}{4} = 1$$

3°) Oui, on a intérêt à jouer à ce jeu car si l'on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire « lancer 3 fois une pièce de monnaie » et que l'on fait la moyenne des gains obtenus, on sera proche de 1 euros. Donc, si par exemple on répète 1000 fois cette expérience, on peut raisonnablement espérer un gain d'environ 1000 euros.

### Exercice 39 page 328

Pour le premier jeu, l'espérance de la variable aléatoire  $X_1$  dont on donne la loi de probabilité dans la colonne « jeu 1 » du tableau est d'après le cours

$$E(X_1) = P(X_1 = -2) \times (-2) + P(X_1 = 5) \times 5 = \frac{1}{2} \times (-2) + \frac{1}{2} \times 5 = \frac{3}{2} = 1,5$$

De même, pour le second jeu, l'espérance de la variable aléatoire  $X_2$  dont on donne la loi de probabilité dans la colonne « jeu 2 » du tableau est d'après le cours

$$E(X_2) = P(X_2 = -1) \times (-1) + P(X_2 = 3) \times 3 = \frac{3}{8} \times (-1) + \frac{5}{8} \times 3 = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1,5$$

Les deux jeux ont les mêmes espérances, donc on peut jouer au premier ou au second, on gagnera en moyenne 1,5 par partie.

### Exercice 40 page 328

1°) Les valeurs prises par la variable aléatoire  $X$  qui à chaque issues de l'univers associe la gain sont  $\{5 ; 10 ; 0\}$ .

On décrit alors les événements «  $X = 5$  », «  $X = 10$  » et «  $X = 0$  » :

- «  $X = 5$  » =  $\{(1 ; 2) ; (2 ; 4) ; (3 ; 6)\}$
- «  $X = 10$  » =  $\{(1 ; 3) ; (2 ; 6)\}$
- «  $X = 0$  » est composé de toutes les autres issues de l'univers

Comme la loi de probabilité est l'équiprobabilité, on a :

- $P(X = 5) = \frac{3}{36}$
- $P(X = 10) = \frac{2}{36}$
- $P(X = 0) = \frac{31}{36}$

2°) Il faut ici traduire « gain moyen » en « espérance ».

On calcule  $E(X) = P(X=5) \times 5 + P(X=10) \times 10 + P(X=0) \times 0$

On a donc  $E(X) = \frac{3}{36} \times 5 + \frac{2}{36} \times 10 + \frac{31}{36} \times 0 = \frac{35}{36}$

On peut donc espérer un gain moyen de  $\frac{35}{36}$

### **Exercice 42 page 328**

1°) L contiendra 5 nombres entiers entre 2 et 8, par exemple  $L = [2, 8, 7, 5, 7]$

2°) Voici un exemple d'énoncé :

Soit l'expérience aléatoire qui consiste à tirer deux nombres entiers entre 1 et 4, et à noter comme résultat la somme de ces deux nombres.

On répète 5 fois l'expérience et on note les résultats.

Sachant qu'on gagne 2 points si l'on obtient un « 1 » parmi ces 5 nombres, et -1 sinon, calculer l'espérance de jeu.

### **Exercice 44 page 328**

L'univers ici est l'ensemble des couples de nombres entiers de 1 à 6.

Soit S la variable aléatoire qui à chaque issue associe la somme des deux nombres qui la composent.

S prend donc ses valeurs dans  $\{2 ; 3 ; \dots ; 12\}$ .

La loi de l'expérience aléatoire est ici l'équiprobabilité.

Voici la loi de probabilité de S :

|            |                |                |                |                |                |                |                |                |                |                |                |
|------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $s_k$      | 2              | 3              | 4              | 5              | 6              | 7              | 8              | 9              | 10             | 11             | 12             |
| $P(S=s_k)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

En effet, ici,  $P(S=s_k)$  est le nombre de couples d'entiers entre 1 et 6 dont la somme fait  $s_k$  divisé par le nombre d'issues de l'univers.

On applique la formule du cours pour l'espérance  $E(S)$ , et on trouve  $E(S) = \frac{252}{36} = 7$

### **Exercice 45 page 328**

Ici, les inconnues sont  $P(X = -2)$ ,  $P(X = -1)$ ,  $P(X = 0)$  et  $P(X = 10)$ .

On dispose déjà, d'après l'énoncé, de 3 équations faisant intervenir ces 4 inconnues.

On dispose aussi toujours de l'équation  $P(X = -2) + P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 10) = 1$  (\*), car X prend ses valeurs dans  $\{-2 ; -1 ; 0 ; 10\}$ .

On a d'après la première et la dernière équation :  $P(X = 10) = 3P(X = 0)$ .

Donc on peut remplacer  $P(X = -2)$ ,  $P(X = -1)$  et  $P(X = 10)$  par une expression avec  $P(X = 0)$ .

On obtient alors en remplaçant dans l'équation (\*) :

$$3P(X = 0) + 0,5P(X = 0) + P(X = 0) + 3P(X = 0) = 1$$

$$\text{Donc } P(X = 0) = \frac{1}{7,5}.$$

Puis, en utilisant les autres équations, on obtient  $P(X = 10) = P(X = -2) = \frac{3}{7,5}$  et  $P(X = -1) =$

$$\frac{0,5}{7,5}$$

On vérifie ensuite que ces candidats-solution sont bien solutions.

### **Exercice 51 page 329**

1°)

La loi ici est l'équiprobabilité et «  $X = 1$  », «  $X = 2$  » etc forment les événements élémentaires de l'univers. Donc :

$$E(X) = P(X=1) \times 1 + P(X=2) \times 2 + \dots + P(X=6) \times 6 = \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2 + \dots + \frac{1}{6} \times 6 = \frac{21}{6}$$

2°) a°) Quels événements élémentaires forment «  $G = 12$  », «  $G = 0$  » et «  $G = 6$  » ?

On a

- ' $G=12$ ' = ' $X=1$ '
- ' $G=0$ ' = ' $X=2$ '  $\cup$  ' $X=3$ '  $\cup$  ' $X=4$ '
- ' $G=6$ ' = ' $X=5$ '  $\cup$  ' $X=6$ '

Voici donc la loi de probabilité de  $G$  :

|            |               |               |               |
|------------|---------------|---------------|---------------|
| $g_k$      | 12            | 0             | 6             |
| $P(G=g_k)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ |

b°) Le gain moyen est donné par  $E(G)$ .

$$\text{On a } E(G) = \frac{1}{6} \times 12 + \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{3} \times 6 = \frac{24}{6} = 4$$

3°) On note  $T$  la variable aléatoire égale aux deuxièmes gains.

On a alors

|            |               |               |
|------------|---------------|---------------|
| $t_k$      | 27            | 0             |
| $P(T=t_k)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{5}{6}$ |

$$\text{Et } E(T) = \frac{1}{6} \times 27 + \frac{5}{6} \times 0 = \frac{27}{6}$$

On a  $E(T) > E(G)$ , donc il vaut mieux jouer au jeu de cette dernière question.

### **Exercice 52 page 329**

On lance un dé non truqué à six faces numérotées de 1 à 6.

Si l'on obtient 1 ou 2, on perd 2 euros.

Sinon, l'on gagne 3 euros.

Sachant que l'on a 10 euros à rembourser à celui qui propose le jeu, pourra-t-on le rembourser grâce à 50 lancers de dé ?

L'algorithme permet de simuler 50 lancers de dé, et la variable GAIN contiendra le gain après 50 lancers.

### **Exercice 57 page 330**

Si Maelle prend pas d'assurance :

Si elle casse son téléphone, elle devra payer 200 euros, donc elle perd 150 euros par rapport à la situation où elle aurait pris l'assurance. Par contre, si elle ne le casse pas, elle gagne 50 euros.

Soit  $A$  la variable aléatoire qui prend les valeurs -150 et 0, avec

$P(A = -150) = 0,1$  et  $P(A = 0) = 0,9$

On a  $E(A) = 30$

Si Maelle ne prend pas d'assurance :

Si elle casse son téléphone, elle ne paiera rien, donc elle gagne 150 euros par rapport à la situation où elle aurait pris l'assurance. Par contre, si elle ne le casse pas, elle perd 50 euros.

Soit  $B$  la variable aléatoire qui prend les valeurs 150 et -50, avec

$P(B = 150) = 0,1$  et  $P(B = -50) = 0,9$

On a  $E(B) = -30$

Comme  $E(A) > E(B)$ , il vaut mieux qu'elle ne prenne pas d'assurance.