Temas: Cálculo do raio de convergência usando apenas a sucessão dos coeficientes da série.
Polinómio de Taylor.

Podemos analisar o raio de convergência da série de potências usando apenas a sucessão dos coeficientes da série.

Vamos considerar um caso geral e recorrer, por exemplo ao Critério de D'Alembert:

Série de potências: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}(x-c)^{n+1}|}{|a_n(x-c)^n|}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|\,|x-c|}{|a_n|}$$

$$= |x-c| \times \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

$$= \frac{|x-c|}{\lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}}$$

$\lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ (R):

- $+\infty \Rightarrow L = 0 < 1, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{c\}$
  $\Rightarrow$ Domínio de conv. $= \mathbb{R}$
- $]0,+\infty[\Rightarrow$ A série conv. Absolutamente se $\frac{|x-c|}{R} < 1$
  Se $x \in]c-R, c+R[$
- $0 \Rightarrow L = +\infty > 1, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{c\}$
  $\Rightarrow$ Domínio de conv: $\{c\}$

De forma análoga, aplicando o critério de Cauchy, podemos concluir que:

$$R = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Exemplo 1:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^5+3}$$

Exemplo 2:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{(n-1)!}$$

Exemplo 3 ⊛

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n}$$

Exemplo 4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$$

Exemplo 5

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-2)^n$$

Exemplo 6

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{2n+4}$$

Polinómio de Taylor

<u>Objetivo</u>: usar polinómios para aproximar funções não tão simples de trabalhar.

f admite derivadas até a ordem n

A. Um polinómio do tipo:

$$\boxed{T_c^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k}$$

$$= f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)(x-c)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

Chamamos **Polinómio de Taylor** de ordem n de f no ponto c.

Se $c=0$ chamamos **Polinómio de Maclaurin** de ordem n de f.

<u>Notem!</u>

- $n=1$ $\quad T_c^1 f(x) = f(c)$ Imagem de c
- $n=2$ $\quad T_c^2 f(x) = f(c) + f'(c)(x-c)$

Equacão da reta tangente ao gráfico de f no ponto $x=c$

Curiosidade: ver link seguinte

https://www.geogebra.org/m/Wv4gg9GT?fbclid=IwAR1mRPHR_HYJDLO9AXecrL-GGzDaDHFTDFB7XDUQm0HKcDCXfoRjDKqpd14

Exemplo 1

$$T_0^3(x^3+2x+1)$$

Exemplo 2

$$T_{\pi}^{3}(\cos(x))$$

Exemplo 3

$$T_{1}^{n}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Exemplo 4

$$T_0^n\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

Exemplo 5

$$T_0^n(e^x)$$