Temas: Fórmula de Taylor/MacLaurin com resto integral e de Lagrange.

Vamos rever aula passada :

Exemplo 1

$T_0^5(\text{sen}(x))$

Exemplo 2

$T_1^n(\ln(x))$

Exemplo 3

$$T_1^3 (xe^x)$$

Fórmula de Taylor c/ Resto de Lagrange

Sejam $n \in \mathbb{N}_0$, f uma função com derivadas contínuas até a ordem $(n+1)$ num intervalo I e $c \in I$. Então $\forall x \in I \setminus \{c\}$ existe um θ entre x e c, tal que:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{K=0}^{n} \frac{f^{(K)}(c)}{K!}(x-c)^K}_{\substack{\text{Polinómio de Taylor} \\ T_c^n f(x)}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}}_{\substack{\text{Resto de Lagrange} \\ R_c^n f(x)}}$$

↳ Podemos usar a fórmula de Taylor para obter uma estimativa para $f(a)$ e também uma estimativa para o erro que se comete ao fazer essa estimativa.

Se $f^{(n+1)}$ é contínua em $[a,b]$ então é limitada e por isso:

$$\left| R_c^n f(x) \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} (x-c)^{n+1} \right| \leq \underbrace{\frac{M}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}}_{\text{Majorante do erro}}$$

$$M = \sup_{\theta \in [a,b]} \left| f^{(n+1)}(\theta) \right|$$

Exemplo 4

4. Considere $f(x) = e^x$.

   (a) Escreva a fórmula de MacLaurin de ordem n da função f.

(b) Mostre que o polinómio de MacLaurin de ordem n permite aproximar e^x no intervalo $]-1, 0[$, com erro inferior a $\frac{1}{(n+1)!}$.

(c) Escolha um dos polinómios de MacLaurin de f e use-o para obter uma aproximação de $\frac{1}{\sqrt{e}}$, indicando uma estimativa para o erro cometido nessa aproximação.

Exemplo 5

5. Usando o resto de Lagrange, determine um majorante para o erro cometido na aproximação de sen(3) quando se usa o polinómio de Taylor de ordem 5 em torno do ponto $a = \pi$.

Exemplo 6

Usando o polinómio de Taylor de ordem 4 centrado em 0 de $f(x) = \ln(x+1)$, calcula uma aproximação de $\ln(1,5)$ e calcula uma estimativa para o erro cometido na aproximação.

Fórmula de Taylor c/ Resto Integral

Sejam $n \in \mathbb{N}_0$, f uma função com derivadas contínuas até a ordem $(n+1)$ num intervalo I e $c \in I$. Então $\forall x \in I$ existe um θ entre x e c, tal que:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k}_{T_c^n(f(x))} + \underbrace{\frac{1}{n!}\int_c^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt}_{R_c^n(f(x))}$$

Polinómio de Taylor de f

Resto Integral

$$\left| R_c^n f(x) \right| \leq \frac{(b-a)^n}{n!}\int_a^b \left| f^{(n+1)}(t) \right| dt \leq \underbrace{\frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}}_{\text{Majorante do erro cometido}}$$

Voltando ao exemplo 6 e usando o resto integral