# TD 6 : Déduction

## 1. Déduction naturelle

**1.1** Montrer dans $NM$ les assertions suivantes

1. $\vdash p \Rightarrow q \Rightarrow p$
2. $\vdash (p \Rightarrow q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow p \Rightarrow r$
3. $\vdash (p \wedge q) \vee r \Rightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

**1.2** Montrer dans $NJ$ l'équivalence des règles

$$\frac{}{\Gamma \vdash A \vee \neg A}\ TE \qquad \frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ abs \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}\ e_{\neg\neg}$$

**1.3** Montrer dans $NK$ la formule de Pierce

$$\vdash ((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$$

**1.4** Prouver que pour toute formule $A$ (en se limitant au connecteurs $\neg$ et $\Rightarrow$), si $\Gamma \vdash A$ dans $NK$ alors $\Gamma \vdash \neg\neg A$ dans $NJ$.

**1.5** Montrer dans $NJ$ l'assertion

$$\vdash \neg\neg\left(((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p\right)$$

## 2. Systèmes de Hilbert

On ne considère ici que les formules formées avec le connecteur $\Rightarrow$. Soit $\Gamma$ un ensemble de formules. Dans le système $\mathcal{SK}$ de Hilbert, une formule est *démontrable sous* $\Gamma$ si elle peut être dérivée des règles suivantes.

$$\frac{}{A \Rightarrow B \Rightarrow A}\ \mathcal{K} \qquad \frac{}{(A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow A \Rightarrow C}\ \mathcal{S}$$

$$\frac{A \Rightarrow B \quad A}{B}\ MP \qquad\qquad \frac{}{A}\ \text{si } A \in \Gamma$$

On notera $\Gamma \vdash^{\mathcal{SK}} A$ quand une formule est démontrable sous un ensemble $\Gamma$.

**2.1** Prouver que $\vdash^{\mathcal{SK}} p \Rightarrow p$

**2.2** Montrer que $\Gamma \vdash^{\mathcal{SK}} B$ implique $\Gamma, A \vdash^{\mathcal{SK}} B$.

**2.3** Montrer que $\Gamma \vdash^{\mathcal{SK}} A \Rightarrow B$ si et seulement si $\Gamma, A \vdash^{\mathcal{SK}} B$.

**2.4** Prouver les assertions suivantes

1. $p \vdash^{\mathcal{SK}} (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$
2. $\vdash^{\mathcal{SK}} (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
3. $p \Rightarrow q \Rightarrow r \vdash^{\mathcal{SK}} q \Rightarrow p \Rightarrow r$