Cours 11

Logiques temporelles

Motivations

But : modéliser (puis vérifier) le comportement dynamique d'un système.

Plusieurs langages :

- LTL : *Linear time temporal logic*
- CTL : *Computation tree logic*
- CTL* : combine LTL et CTL

CTL* : syntaxe

$\mathbb{V}$ un ensemble dénombrable de variables propositionnelles.
C ensemble fini de connecteurs propositionnels : $C = \{\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$
T ensemble fini de connecteurs temporelles : $T = \{X, F, G, U, A, E\}$

Définition (Formules CTL*)

L'ensemble des formules CTL* est un langage sur $\mathbb{V} \cup C \cup T \cup \{(,)\}$ défini inductivement par :

- $\mathbb{V} \subseteq \text{CTL}^\star$
- si $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{CTL}^\star$, alors $\neg\varphi_1, (\varphi_1 \wedge \varphi_2), (\varphi_1 \vee \varphi_2), (\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2), (\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2) \in \text{CTL}^\star$
- si $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{CTL}^\star$, alors $X\varphi, F\varphi, G\varphi, A\varphi, E\varphi, (\varphi_1 U \varphi_2) \in \text{CTL}^\star$

Remarque : cette définition inductive est non-ambiguë.

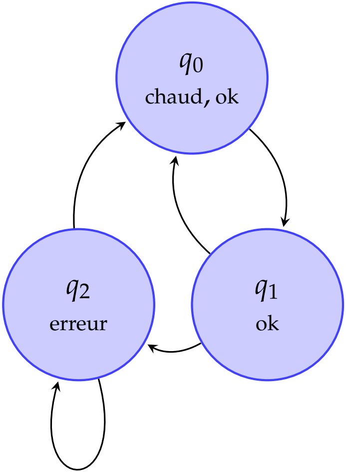
Sémantique : structures de Kripke

Les formules sont interprétés vis-à-vis d'un modèle particulier : les structures de Kripke.

Définition

Une *structure de Kripke* est un quadruplet $< S, R, q_0, L >$ tel que

- S est un ensemble d'états,
- $R \subseteq S \times S$ est une relation de transition entre états,
- $q_0 \in S$ est un état initial,
- $L \in S \to \mathcal{P}(\mathbb{V})$ est une fonction de labélisation.



Remarque : nous nous restreignons au cas où tout état a au moins un successeur.

Sémantique : structures de Kripke

Définition

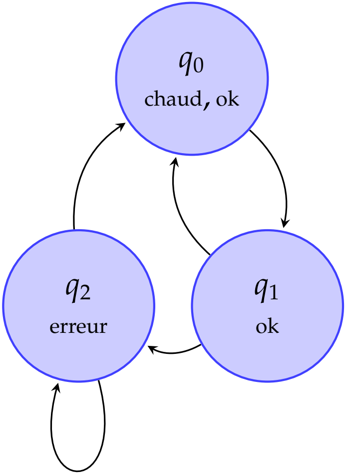
Un *chemin* dans une structure de Kripke est une séquence **maximale**

$$\pi = s_0, s_1, s_2, \ldots$$

telle que $(s_i, s_{i+1}) \in R$ pour tout $i \geqslant 0$.

Exemple :

$$\begin{aligned}\pi_1 &= q_0, q_1, q_0, q_1, \ldots \\ \pi_2 &= q_0, q_1, q_2, q_0, \ldots \\ \pi_3 &= q_0, q_1, q_2, q_2, q_2 \ldots\end{aligned}$$



Sémantique de CTL*

Soit $\mathcal{K}$ une structure de Kripke, π un chemin de $\mathcal{K}$, i un entier et φ une formule de CTL*.

$$\mathcal{K}, \pi, i \models \varphi : \text{au temps } i \text{ du chemin } \pi, \varphi \text{ est vraie}$$

Définition : $\mathcal{K}$ *satisfait* φ ($\mathcal{K} \models \varphi$) ssi $\mathcal{K}, \pi, 0 \models \varphi$ pour tout chemin π de $\mathcal{K}$ tel que $\pi(0) = q_O$.

Définition de $\mathcal{K}, \pi, i \models \varphi$:

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{K}, \pi, i \models p & \text{ssi} & p \in L(\pi(i)) \\
\mathcal{K}, \pi, i \models \neg\varphi & \text{ssi} & \mathcal{K}, \pi, i \not\models \varphi \\
\mathcal{K}, \pi, i \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2) & \text{ssi} & \mathcal{K}, \pi, i \models \varphi_1 \text{ et } \mathcal{K}, \pi, i \models \varphi_2 \\
 & \ldots &
\end{array}$$

Sémantique de CTL*

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{K},\pi,i \models X\varphi & \text{ssi} & \mathcal{K},\pi,i+1 \models \varphi \\
\mathcal{K},\pi,i \models F\varphi & \text{ssi} & \text{il existe } j \geqslant i \text{ tel que } \mathcal{K},\pi,j \models \varphi \\
\mathcal{K},\pi,i \models G\varphi & \text{ssi} & \text{pour tout } j \geqslant i \text{ on a } \mathcal{K},\pi,j \models \varphi \\
\mathcal{K},\pi,i \models (\varphi_1 U \varphi_2) & \text{ssi} & \text{il existe } j \geqslant i \text{ tel que } \mathcal{K},\pi,j \models \varphi_2 \text{ et} \\
 & & \text{pour tout } k \text{ tel que } i \leqslant k < j,\ \mathcal{K},\pi,k \models \varphi_1 \\
\mathcal{K},\pi,i \models E\varphi & \text{ssi} & \text{il existe } \pi' \text{ tel que} \\
 & & \pi(0),\ldots,\pi(i) = \pi'(0),\ldots,\pi'(i) \\
 & & \text{et } \mathcal{K},\pi',i \models \varphi \\
\mathcal{K},\pi,i \models A\varphi & \text{ssi} & \text{pour tout } \pi' \text{ tel que} \\
 & & \pi(0),\ldots,\pi(i) = \pi'(0),\ldots,\pi'(i) \\
 & & \text{on a } \mathcal{K},\pi',i \models \varphi
\end{array}
$$

Les combinateurs temporel linéaires

$X\varphi$: l'état suivant vérifie φ (*neXt*)

- π_1, π_2, π_3 vérifient $XX\text{erreur} \vee XXX\text{ok}$

$F\varphi$: un état futur vérifie φ (*Futur*)

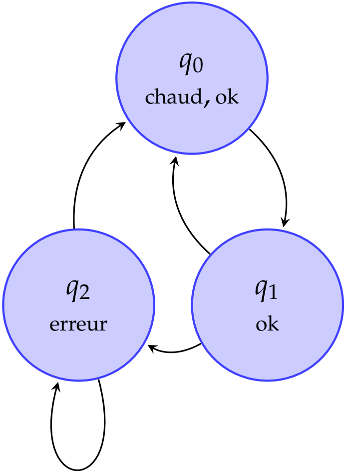
- $\mathcal{K} \models F(\text{ok} \vee \text{erreur})$

$G\varphi$: tous les états futurs vérifient φ (*Globally*)

- $\mathcal{K} \models G(\text{chaud} \Rightarrow \text{ok})$
- $\mathcal{K} \models G(\text{chaud} \Rightarrow F\neg\text{chaud})$

$\varphi_1 U \varphi_2$: φ_1 vraie jusqu'à ce que φ_2 le soit (et φ_2 le sera un jour) (*Until*)

- $\mathcal{K} \models (\text{ok}\, U\, (\text{chaud} \vee \text{erreur}))$



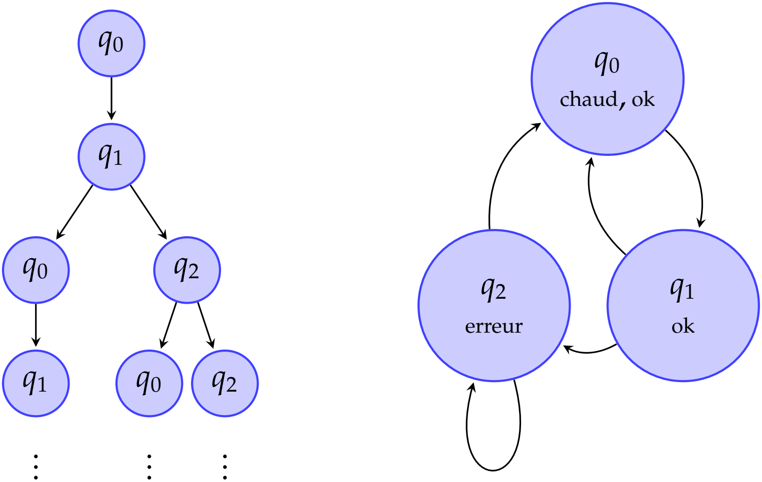
Les combinateurs temporel arborescents

On s'intéresse à tous les exécutions possibles à partir de l'instant présent.

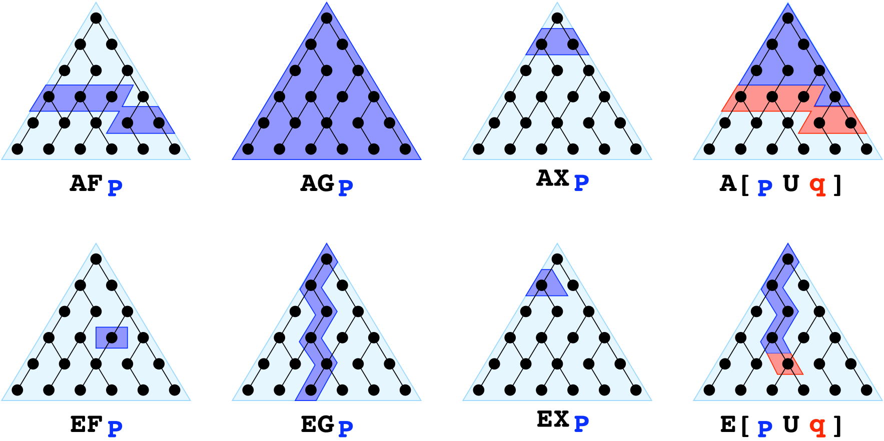
- $A\varphi$: toutes les exécutions à partir de l'instant présent satisfont φ (*All*).
- $E\varphi$: il existe une exécution à partir de l'instant présent satisfont φ (*Exists*).

Il est utile de raisonner sur un dépliage d'une structure de Kripke : un arbre infinie représentant tous les chemins de la structure.

Exemple de dépliage



Logique du temps arborescent



Equivalences sémantiques

Définition

Deux formules φ_1 et φ_2 sont *équivalentes* ($\varphi_1 \equiv \varphi_2$) ssi pour toute structure de Kripke $\mathcal{K}$,

$$\mathcal{K} \models \varphi_1 \text{ ssi } \mathcal{K} \models \varphi_2$$

Exemple :

$$\begin{aligned} F\varphi &\equiv \neg G \neg \varphi \\ E\varphi &\equiv \neg A \neg \varphi \end{aligned}$$

Exercice

Expliquer la différence d'expressivité entre les deux formules $AGFp$ et $AGEFp$.

Restrictions de CTL*

LTL : on enlève A et E, on ne peut alors plus raisonner sur les différents chemins possibles

CTL : les quantificateurs X, F, G, U doivent être directement sous la portée de A ou E.

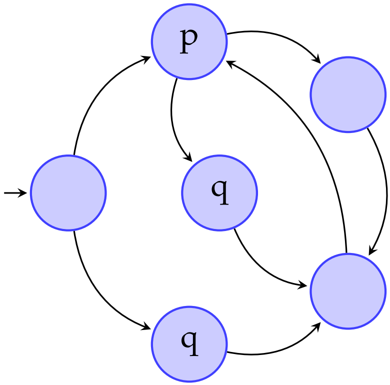
$$
\begin{aligned}
\varphi ::= \; & p \mid \neg\varphi \mid \cdots \\
& \mid AX\varphi \mid EX\varphi \mid AF\varphi \mid EF\varphi \mid AX\varphi \mid EX\varphi \mid A[\varphi U \varphi] \mid E[\varphi U \varphi]
\end{aligned}
$$

Avantages de ces logiques : moins expressives, mais plus efficace pour la vérification.

Exercice

Pour chacune des formules de CTL* suivantes, indiquer celles qui sont satisfaites par la structure de Kripke ci-contre.

- Xp
- $EX(p \wedge AGFp)$
- $AG(q \Rightarrow XXp)$
- $AXA(p\,U\,q)$
- $A(\neg q\,U\,q)$



Exercice

Donner deux structures de Kripke qui ne sont pas distinguables par une formule de LTL, mais qui le sont par une formule de CTL.

Exercice

Démontrer l'équivalence

$$\varphi_1 \, U \, \varphi_2 \equiv (\varphi_2 \vee (\varphi_1 \wedge X(\varphi_1 \, U \, \varphi_2))$$

pour toutes formules φ_1, φ_2 de CTL*.