Cours 9

Calcul des prédicats : déduction naturelle

Déduction naturelle

Système de déduction :

$$\Gamma \vdash A$$

La formule A est prouvable à partir de l'ensemble de formules Γ

L'ensemble des *preuves* $\Gamma \vdash A$ est définie inductivement comme l'ensemble des couples (Γ, A)

- tels que $A \in \Gamma$ $\quad \dfrac{}{\Gamma, A \vdash A}\,\text{ax}$
- obtenus à partir d'autres preuves par des règles de déduction de la logique classique (NK), plus 4 nouvelles règles (à suivre)

Rappels : NK

$$\text{intro}_{\Rightarrow}\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \qquad \text{elim}_{\Rightarrow}\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta \vdash A \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta \vdash B}$$

$$\text{intro}_{\wedge}\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \wedge B} \qquad \text{elim}^1_{\wedge}\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \qquad \text{elim}^2_{\wedge}\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}$$

$$\text{intro}^1_{\vee}\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \qquad \text{intro}^2_{\vee}\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$$

$$\text{elim}_{\vee}\frac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Delta, A \vdash C \qquad \Delta', B \vdash C}{\Gamma, \Delta, \Delta' \vdash C}$$

$$\text{intro}_{\neg}\frac{\Gamma, A \vdash \neg B \qquad \Delta, A \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash \neg A} \qquad \text{elim}_{\neg}\frac{\Gamma \vdash \neg A \qquad \Delta \vdash A}{\Gamma, \Delta \vdash B}$$

$$\text{elim}_{\perp}\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash A}$$

$$\text{TE}\frac{}{\Gamma \vdash A \vee \neg A} \qquad \text{abs}\frac{\Gamma, \neg A \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} \qquad \text{elim}_{\neg\neg}\frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}$$

Déduction naturelle

$$\text{intro}_\forall \frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash \forall x F}$$

x n'est pas libre dans Γ

$$\text{elim}_\forall \frac{\Gamma \vdash \forall x F}{\Gamma \vdash F[t/x]}$$

t terme tel que la substitution t/x est licite

$$\text{intro}_\exists \frac{\Gamma \vdash F[t/x]}{\Gamma \vdash \exists x F}$$

t terme tel que la substitution t/x est licite

$$\text{elim}_\exists \frac{\Gamma \vdash \exists x F \qquad \Delta, F \vdash G}{\Gamma, \Delta \vdash G}$$

x n'est libre ni dans Γ, ni dans Δ, ni dans G

Complétude

Nous voulons montrer l'équivalence

$$T \models^* F \quad \text{ssi} \quad T \vdash F$$

avec F une formule et T une théorie.
Nous allons pour cela démontrer l'équivalence

$$T \text{ consistante} \quad \text{ssi} \quad T \text{ cohérente}$$

Définition

Une théorie T est *cohérente* s'il n'existe pas de formule F telle que $T \vdash F$ et $T \vdash \neg F$ (sinon T est dite *incohérente*).

Cohérence : propriétés

Proposition

Pour tout théorie T et toute formule close F

$$T \vdash F \quad \textit{ssi} \quad T \cup \{\neg F\} \textit{ incohérente}$$

Proposition

Pour toute théorie T et toute formule F, si $T \vdash F$ alors il existe un sous-ensemble finie T_0 de T tel que $T_0 \vdash F$.

Proposition

Si T est une théorie dont toutes les parties finies sont cohérentes, alors T est cohérente.

Correction de la déduction

Soit T une théorie.

Théorème

Soit F une formule,

1. *si $T \vdash F$ alors tout modèle de T est un modèle de F ($T \models^* F$)*
2. *si $\vdash F$ alors F est universellement valide.*

Corollaire

Si T a un modèle (i.e est consistante), alors T est cohérente.

Complétude

La réciproque du dernier corollaire est plus difficile : il faut construire un modèle pour toute théorie cohérente.

Nous suivrons la preuve de Henkin :

1. Toute théorie *de Henkin* et *syntaxiquement complète* admet un modèle.
2. Toute théorie cohérente peut être *étendue* en une théorie *de Henkin* et *syntaxiquement complète*.

Complétude

Définition

Une théorie T est *syntaxiquement complète* si T est cohérente et si pour toute formule F, $T \vdash F$ ou $T \vdash \neg F$.

Définition

Une théorie T est dite *de Henkin* dans un langage L si pour toute formule à une variable libre $F[v]$, il existe un symbole c de constante dans L tel que si $T \vdash \exists v F[v]$ alors $T \vdash F[c]$.

Complétude

Théorème

Si T est une théorie de Henkin dans L, syntaxiquement complète, alors T a un modèle.

Théorème

Pour toute théorie T cohérente dans un langage L, il existe $L' \supseteq L$ et une extension T' et T telle que T' est une théorie de Henkin syntaxiquement complète dans L'.

Complétude

Corollaire

Si T est cohérente alors elle admet un modèle (i.e est consistante).

Corollaire

Si $T \models F$ alors $T \vdash F$.

Théorème (Compacité)

Si T est une théorie dont toutes les parties finies sont consistantes, alors T est consistante.

Plan