

TD 5 : Dédution par coupure

1. Le club écossais

Il existe en Écosse un club très fermé qui obéit aux règles suivantes :

- (R_1) tout membre non écossais porte des chaussettes rouges,
- (R_2) tout membre portant des chaussettes rouges porte un kilt,
- (R_3) les membres mariés ne sortent pas le dimanche,
- (R_4) un membre sort le dimanche si et seulement s'il est écossais,
- (R_5) tout membre qui porte un kilt est écossais et est marié,
- (R_6) tout membre écossais porte un kilt.

Montrer par la méthode de déduction par coupure que les règles de ce club sont si contraignantes qu'il ne peut accepter personne.

2. Systèmes complets de connecteurs

2.1 Montrer que les ensembles suivants sont des systèmes complets de connecteurs.

- $\{\Rightarrow, \neg\}$
- $\{\text{nand}\}$
- $\{\text{nor}\}$

2.2 Montrez que $\{xor\}$ n'est pas un système complet de connecteurs.

3. Stratégies de preuve par coupure

3.1 Proposer des stratégies de preuve par coupure.

Soit C un ensemble de clauses. On appelle preuve par *résolution linéaire* une suite c_0, c_1, \dots, c_n de clauses telles que c_0 soit élément de C et telle que c_i , $1 \leq i \leq n$ soit obtenue comme résolvante de c_{i-1} et d'une clause de $C \cup \{c_0, c_1, \dots, c_{i-1}\}$.

3.2 Donner une preuve par résolution linéaire du résultat de l'exercice 2.

3.3 Soient :

- C un ensemble de clauses,
- a une clause prouvable par résolution à partir de C ,
- c_n une clause prouvable par une résolution linéaire c_0, \dots, c_n sur C .

Montrer que la clause c résultant de la coupure de a et c_n est prouvable par une résolution linéaire commençant par c_0, \dots, c_n .

3.4 Montrer que la preuve par résolution linéaire est correcte et complète.

Soit C un ensemble de clauses. On appelle preuve par *résolution linéaire à entrées directes* une suite c_0, c_1, \dots, c_n de clauses telles que c_0 soit élément de C et telle que c_i , $1 \leq i \leq n$ soit obtenue comme résolvante de c_{i-1} et d'une clause de C .

3.5 Montrer par une résolution linéaire à entrées directes que sans la règle (R_1) , aucun écossais ne peut être membre du club.

On appelle *clause de Horn* une clause dont au plus un littéral est une variable propositionnelle. Dans le cas où exactement un littéral est une variable propositionnelle, on parle de *clause positive* ; si aucun littéral n'est une variable, on parle de *clause négative*.

3.6 Montrer que la preuve par résolution linéaire à entrées directes sur un ensemble de clauses de Horn est correcte et complète.

4. Théorème de la déduction

Soit Σ un système de déduction correct et complet (noté \vdash^Σ). Soit $\Gamma \subset \mathcal{F}$ et $A, B \in \mathcal{F}$. Montrer que $\Gamma \cup \{A\} \vdash^\Sigma B$ si et seulement si $\Gamma \vdash^\Sigma A \Rightarrow B$.