Cours 6

Calcul propositionnel : déduction naturelle

Déduction naturelle (Gentzen)

Système de déduction :

$$\Gamma \vdash A$$

La formule A est prouvable à partir de l'ensemble de formules Γ

L'ensemble des *preuves* $\Gamma \vdash A$ est définie inductivement comme l'ensemble des couples (Γ, A)

- tels que $A \in \Gamma$ $\qquad \dfrac{}{\Gamma, A \vdash A}\,\text{ax}$
- obtenus à partir d'autres preuves par des règles de déduction de la forme $\qquad \dfrac{\textit{hypotheses}}{\textit{conclusions}}$ (voir suite)

Notations :

$$\Gamma, A \;=\; \Gamma \cup \{A\} \qquad\qquad \Gamma, \Delta \;=\; \Gamma \cup \Delta$$

Logique minimale (NM)

$$\text{intro}_{\Rightarrow}\,\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \qquad \text{elim}_{\Rightarrow}\,\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta \vdash A \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta \vdash B}$$

$$\text{intro}_{\wedge}\,\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \wedge B}$$

$$\text{elim}^1_{\wedge}\,\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \qquad \text{elim}^2_{\wedge}\,\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}$$

$$\text{intro}^1_{\vee}\,\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \qquad \text{intro}^2_{\vee}\,\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$$

$$\text{elim}_{\vee}\,\frac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Delta, A \vdash C \qquad \Delta', B \vdash C}{\Gamma, \Delta, \Delta' \vdash C}$$

Exemple

$$\frac{\cdots}{\vdash (a \land b) \Rightarrow (b \land a)}$$

Logique intuitionniste (NJ)

Deux nouvelles règles :

$$\text{intro}_{\neg}\ \frac{\Gamma, A \vdash \neg B \qquad \Delta, A \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash \neg A} \qquad \text{elim}_{\neg}\ \frac{\Gamma \vdash \neg A \qquad \Delta \vdash A}{\Gamma, \Delta \vdash B}$$

De manière équivalente, on ajoute le symbole $\perp$ (= absurde), et la règle

$$\text{elim}_{\perp}\ \frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} \qquad \textit{ex falso quodlibet sequitur}$$

et $\neg A$ devient une abréviation de $A \Rightarrow \perp$.

Logique intuitionniste (NJ)

Exercice : Prouver $(a \Rightarrow b) \Rightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$ en logique minimale.

Exercice : intro$_\neg$ est dérivable dans NM.

Remarque : elim$_\neg$ est *équivalent* à *elim*$_\perp$.

NJ est *plus forte* que NM

$$\Gamma \vdash_{NM} A \text{ implique } \Gamma \vdash_{NJ} A$$

Logique classique (NK)

On ajoute un nouveau moyen d'inférence : le *tiers exclus*.

3 règles possibles :

$$\text{TE}\,\frac{}{\Gamma \vdash A \vee \neg A} \qquad \text{abs}\,\frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A} \qquad \text{elim}_{\neg\neg}\,\frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}$$

NK strictement plus forte que NJ : il existe des formules sans négation dérivables dans NK et pas dans NJ.

$$\vdash_{NK} ((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p \qquad \text{(loi de Peirce)}$$

NK *vs* NJ

Tautologies prouvables dans NK :

$$\vdash_{NK} (A \vee B) \iff \neg(\neg A \wedge \neg B)$$
$$\vdash_{NK} (A \Rightarrow B) \iff (\neg A \vee B)$$
$$\vdash_{NK} (A \wedge B) \iff \neg(\neg A \vee \neg B)$$

Dans NJ on ne peut en prouver qu'un sens.

Traduction de NK vers NJ

Définition

Soient $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}'$ deux logiques, $\mathfrak{L}$ plus forte que $\mathfrak{L}'$, et φ associant à toute formule de $\mathfrak{L}$ une formule de $\mathfrak{L}'$. φ est une *traduction* de $\mathfrak{L}$ vers $\mathfrak{L}'$ si pour toute formule A de $\mathfrak{L}$ on a :

- $\vdash_{\mathfrak{L}} A \iff \varphi(A)$
- si $\vdash_{\mathfrak{L}} A$ alors $\vdash_{\mathfrak{L}'} \varphi(A)$

Traduction de NK vers NJ (Glivenko 1929) : $\varphi(A) = \neg\neg A$
(ça ne marche pas avec le calcul des prédicats).

Correction et complétude

Théorème (Correction)

Si $\Gamma \vdash_{NM} A$*, alors* $\Gamma \models A$.
Si $\Gamma \vdash_{NJ} A$*, alors* $\Gamma \models A$.
Si $\Gamma \vdash_{NK} A$*, alors* $\Gamma \models A$.

Théorème (Complétude)

Si $\Gamma \models A$*, alors* $\Gamma \vdash_{NK} A$.

Preuve de complétude

Nous le considérons le système de connecteur complet $\{\neg, \Rightarrow\}$. Nous ne prouvons la complétude de $\vdash_{NK}$ que pour les formules ne contenant que les connecteurs $\neg$ et $\Rightarrow$. Attention, cela ne prouve pas la complétude pour les formules comportant d'autres connecteurs !

$$\begin{aligned}
\mu(A) = \; & \text{nombre d'occurrence de } \neg \text{ dans } A \\
& + 2\times \text{ nombre d'occurrence de } \Rightarrow \text{ dans } A
\end{aligned}$$

$$\mu(\Gamma, A) = \mu(A) + \sum_{F \in \Gamma} \mu(F)$$

Nous montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(n) = \; & \text{"pour tout } \Gamma, A \text{ tels que } \mu(\Gamma, A) = n, \\
& \Gamma \models A \text{ implique } \Gamma \vdash_{NK} A\text{"}
\end{aligned}$$

Hypothèse de récurrence forte (HR) :

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, k < n \text{ implique } \mathcal{P}(k)$$

Nous supposons : $\Gamma \models A$ et $\mu(\Gamma, A) = n$

Étude de cas sur la forme de A :

- $A = \neg\neg A'$
- $A = A_1 \Rightarrow A_2$
- $A = \neg(A_1 \Rightarrow A_2)$
- $A = p$ ou $A = \neg p$

Si $A = \neg\neg A'$

- $\Gamma \models \neg\neg A'$ implique $\Gamma \models A'$
- HR sur $\mu(\Gamma, A') = n - 2$: $\Gamma \models A'$ implique $\Gamma \vdash A'$
- $\Gamma \vdash A'$ implique $\Gamma \vdash \neg\neg A'$

Si $A = A_1 \Rightarrow A_2$

- $\Gamma \models A_1 \Rightarrow A_2$ implique $\Gamma, A_1 \models A_2$
- HR sur $\mu(\Gamma \cup \{A_1\}, A_2) = n - 2$: $\Gamma, A_1 \models A_2$ implique $\Gamma, A_1 \vdash A_2$
- $\Gamma, A_1 \vdash A_2$ implique $\Gamma \vdash A_1 \Rightarrow A_2$

Si $A = \neg(A_1 \Rightarrow A_2)$

- $\Gamma \models \neg(A_1 \Rightarrow A_2)$ implique $\Gamma \models A_1$ et $\Gamma \models \neg A_2$
- HR sur $\mu(\Gamma, A_1) = n - \mu(A_2) - 3$ et $\mu(\Gamma, \neg A_2) = n - \mu(A_1) - 2$: donc $\Gamma \models A_1$ implique $\Gamma \vdash A_1$ et $\Gamma \models \neg A_2$ implique $\Gamma \vdash \neg A_2$
- $\Gamma \vdash A_1$ et $\Gamma \vdash \neg A_2$ implique $\Gamma \vdash \neg(A_1 \Rightarrow A_2)$

Si $A = p$ ou $A = \neg p$: on étudie la forme des formules dans Γ

- $\Gamma = \Gamma', \neg\neg B$
- $\Gamma = \Gamma', B_1 \Rightarrow B_2$
- $\Gamma = \Gamma', \neg(B_1 \Rightarrow B_2)$
- Γ ne contient que des formules de la forme r, $\neg r$

Si $\Gamma = \Gamma', \neg\neg B$

- $\Gamma', \neg\neg B \models A$ implique $\Gamma', B \models A$
- HR sur $\mu(\Gamma' \cup \{B\}, A) = n - 2$: $\Gamma', B \models A$ implique $\Gamma', B \vdash A$
- $\Gamma', B \vdash A$ implique $\Gamma', \neg\neg B \vdash A$

Si $\Gamma = \Gamma', B_1 \Rightarrow B_2$

- $\Gamma', B_1 \Rightarrow B_2 \models A$ implique $\Gamma', \neg B_1 \models A$ et $\Gamma', B_2 \models A$
- HR sur $\mu(\Gamma' \cup \{\neg B_1\}, A) = n - \mu(B_2) - 1$ et $\mu(\Gamma' \cup \{B_2\}, A) = n - \mu(B_1) - 2$: $\Gamma', \neg B_1 \models A$ implique $\Gamma', \neg B_1 \vdash A$ et $\Gamma', B_2 \models A$ implique $\Gamma', B_2 \vdash A$
- $\Gamma', \neg B_1 \vdash A$ et $\Gamma', B_2 \vdash A$ implique $\Gamma', B_1 \Rightarrow B_2 \vdash A$

Si $\Gamma = \Gamma', \neg(B_1 \Rightarrow B_2)$

- $\Gamma', \neg(B_1 \Rightarrow B_2) \models A$ implique $\Gamma', B_1, \neg B_2 \models A$
- HR sur $\mu(\Gamma' \cup \{B_1, \neg B_2\}, A) = n - 2 : \Gamma', B_1, \neg B_2 \models A$ implique $\Gamma', B_1, \neg B_2 \vdash A$
- $\Gamma', B_1, \neg B_2 \vdash A$ implique $\Gamma', \neg(B_1 \Rightarrow B_2) \vdash A$

Enfin, si Γ ne contient que des littéraux et $A = p$ ou $A = \neg p$.
Notons $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$ (séparation littéraux positifs/négatifs)

- Si $\neg\Gamma^+ \cap \Gamma^- \neq \emptyset$, Γ est de la forme $\Gamma', r, \neg r$ et donc $\Gamma', r, \neg r \vdash A$.
- $A = p$ et $p \in \Gamma^+$: OK
- $A = p$ et $p \notin \Gamma^+$: $\Gamma \not\models A$
- $A = \neg p$ et $\neg p \in \Gamma^-$: OK
- $A = \neg p$ et $\neg p \notin \Gamma^+$: $\Gamma \not\models A$

Lemmes techniques sur $\models$

Lemme

- $\Gamma \models \neg\neg A$ *implique* $\Gamma \models A$
- $\Gamma \models A_1 \Rightarrow A_2$ *implique* $\Gamma, A_1 \models A_2$
- $\Gamma \models \neg(A_1 \Rightarrow A_2)$ *implique* $\Gamma \models A_1$ *et* $\Gamma \models \neg A_2$
- $\Gamma, \neg\neg B \models A$ *implique* $\Gamma, B \models A$
- $\Gamma, B_1 \Rightarrow B_2 \models A$ *implique* $\Gamma, \neg B_1 \models A$ *et* $\Gamma, B_2 \models A$
- $\Gamma, \neg(B_1 \Rightarrow B_2) \models A$ *implique* $\Gamma, B_1, \neg B_2 \models A$

Lemmes techniques sur $\vdash$

Lemme

Si $\Gamma \vdash A$ *alors* $\Gamma, B \vdash A$.

Lemme

- $\Gamma \vdash A$ *implique* $\Gamma \vdash \neg\neg A$
- $\Gamma, A_1 \vdash A_2$ *implique* $\Gamma \vdash A_1 \Rightarrow A_2$
- $\Gamma \vdash A_1$ *et* $\Gamma \vdash \neg A_2$ *implique* $\Gamma \vdash \neg(A_1 \Rightarrow A_2)$
- $\Gamma, B \vdash A$ *implique* $\Gamma, \neg\neg B \vdash A$
- $\Gamma, \neg B_1 \vdash A$ *et* $\Gamma, B_2 \vdash A$ *implique* $\Gamma, B_1 \Rightarrow B_2 \vdash A$
- $\Gamma, B_1, \neg B_2 \vdash A$ *implique* $\Gamma, \neg(B_1 \Rightarrow B_2) \vdash A$
- $\Gamma, B, \neg B \vdash A$

Toutes les règles de déduction

$$\text{intro}_{\Rightarrow}\,\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \qquad \text{elim}_{\Rightarrow}\,\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta \vdash A \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta \vdash B}$$

$$\text{intro}_{\wedge}\,\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \wedge B} \qquad \text{elim}^1_{\wedge}\,\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \qquad \text{elim}^2_{\wedge}\,\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}$$

$$\text{intro}^1_{\vee}\,\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \qquad \text{intro}^2_{\vee}\,\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$$

$$\text{elim}_{\vee}\,\frac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Delta, A \vdash C \qquad \Delta', B \vdash C}{\Gamma, \Delta, \Delta' \vdash C}$$

$$\text{intro}_{\neg}\,\frac{\Gamma, A \vdash \neg B \qquad \Delta, A \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash \neg A} \qquad \text{elim}_{\neg}\,\frac{\Gamma \vdash \neg A \qquad \Delta \vdash A}{\Gamma, \Delta \vdash B}$$

$$\text{elim}_{\perp}\,\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash A}$$

$$\text{TE}\,\frac{}{\Gamma \vdash A \vee \neg A} \qquad \text{abs}\,\frac{\Gamma, \neg A \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} \qquad \text{elim}_{\neg\neg}\,\frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}$$

Plan