TD 8 : calcul des prédicats

1. Formes prénexes et formes de Skolem

1.1 Mettez sous forme prénexe polie les formules suivantes.

1. $\exists x Px \wedge \exists x\,(Px \Rightarrow \forall y Rxy)$
2. $\forall x\,(Px \Rightarrow \exists y\,((Qy \wedge Ty) \Rightarrow \exists y \neg Rxy))$
3. $((Px \wedge \neg\exists y Rxy) \Rightarrow \exists y\,(Rxy \wedge Qy))$

1.2 Mettez les formules précédentes sous forme de Skolem.

2. Des propositions aux prédicats : théorème de Herbrand

2.1 Montrer que pour toute formule F du premier ordre ne contenant aucune fonction et aucune variable on peut construire une formule du calcul propositionnel F' telle que F est satisfiable si et seulement si F' est satisfiable.

2.2 Montrer que pour toute formule F du premier ordre sous forme de Skolem et ne contenant aucune fonction on peut construire une formule du calcul propositionnel F' telle que F est satisfiable si et seulement si F' est satisfiable.

2.3 Montrer que pour toute formule F du premier ordre sous forme de Skolem, on peut construire une formule du calcul propositionnel F' telle que si F' n'est pas satisfiable, alors F n'est pas satisfiable. La réciproque est-elle vraie ? Conclure.

3. Applications

3.1 Soit la théorie $\{\forall x(Px \vee \neg Pfx), \neg Pa, Pffa\}$. Construire une formule de Skolem équivalente. Montrer que cette théorie est inconsonsistante.

3.2 Soit la théorie $\{\forall x Rxsx, \forall x \forall y \forall z(Rxy \wedge Ryz \Rightarrow Rxz), \exists x \neg Rxx\}$. Cette théorie est-elle consistante ? Que donnerait une preuve à la Herbrand dans ce cas ?