# TD 4 : Calcul propositionnel

## 1. Formules propositionnelles valides

**1.1** Parmis les mots suivants, lesquels sont des formules propositionnelles ?
– $m_1 = (p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$
– $m_2 = (\neg((\neg p \vee q) \Leftrightarrow (q \wedge r)) \Rightarrow \neg q)$
– $m_3 = (q \Rightarrow (\neg p))$
– $m_4 = (((p \wedge (\neg q \Rightarrow \neg p)) \wedge (\neg q \vee \neg r)) \Rightarrow (r \Rightarrow \neg p))$

**1.2** Pour chacune de ces formules donner une représentation sous forme d'arbre et donner sa hauteur.

Dans la suite du cours et des TD, on se permettra de supprimer certaines parenthèses dans les formules. Ce raccourci d'écriture se fera selon les règles suivantes.
– priorité des opérateurs : $\neg \prec \{\wedge, \vee\} \prec \{\Rightarrow, \Leftrightarrow\}$
– associativité : à gauche pour $\wedge$ et $\vee$, à droite pour $\Rightarrow$.
– les parenthèses extérieures sont implicites.

**1.3** En déduire des simplifications d'écriture pour les formules suivantes
– $f_1 = ((p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(q \wedge p))$
– $f_2 = (((p \vee q) \vee r) \Rightarrow ((\neg p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge r)))$
– $f_3 = (p \vee ((p \Leftrightarrow q) \wedge (\neg q \Rightarrow r)))$

## 2. Définitions inductives et preuves par induction structurelle

Soit $A = \{\langle, \rangle\}$ l'alphabet constitué de deux parenthèses (ouvrante et fermante).

**2.1** Définir par induction l'ensemble des parenthésages bien formés (appelé langage de Dyck).

**2.2** Montrer par induction structurelle que tout mot du langage de Dyck a autant de parenthèses ouvrantes que fermantes.

**2.3** Montrer que $D$ peut être caractérisé par

$$L = \{x \in A^* \mid g(x) = d(x) \text{ et } g(y) \geq d(y) \text{ pour tout préfixe } y \text{ de } x\}$$

## 3. Théorème de décomposition unique

Le but de cette exercice est de démontrer le théorème de décomposition unique.

**Théorème :** Pour toute formule $F \in \mathcal{F}$, un et un seul des trois cas suivants se présente :

1. $f \in \mathcal{P}$ ($\mathcal{P}$ est l'ensemble des variables propositionnelles)
2. il existe une unique formule $G \in \mathcal{F}$ telle que $F = \neg G$
3. il existe un unique symbole $\alpha \in C \backslash \{\neg\}$ et un unique couple de formules $(G, H) \in \mathcal{F}^2$ tels que $F = (G \, \alpha \, H)$

On rappelle que $\mathcal{P}$ est l'ensemble des variables propositionnelles et que $C = \{\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$.

**3.1** Montrer que $\mathcal{F} = \mathcal{P} \cup \{\neg F \mid F \in \mathcal{F}\} \cup \{(F \,\alpha\, G) \mid (F, G) \in \mathcal{F}^2,\ \alpha \in C \backslash \{\neg\}\}$.

On note, pour tout mot $M \in (C \cup \mathcal{P} \cup \{(, )\})^*$,
– $o[M]$ : nombre de parenthèses ouvrantes ;
– $f[M]$ : nombre de parenthèses fermantes.

**3.2** Montrer que pour toute formule $F \in \mathcal{F}$, $o[F] = f[F]$.

**3.3** Montrer que pour toute formule $F \in \mathcal{F}$ et pour tout préfixe $M$ de $F$, on a $o[M] \geq f[M]$.

On rappelle qu'un préfixe $p$ d'un mot $m$ est *propre* s'il est différent de $m$.

**3.4** Montrer que pour toute formule $F \in \mathcal{F}$ dont le premier symbole est une parenthèse ouvrante et pour tout préfixe propre $M$ non vide de $F$, on a $o[M] > f[M]$.

**3.5** Montrer que pour toute formule $F \in \mathcal{F}$, si $M$ est un préfixe propre de $F$ alors $M$ n'est pas une formule.

**3.6** Déduire des questions précédentes le théorème de décomposition unique.

## 4. Valuation à valeurs dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

En identifiant l'ensemble d'arrivée $\{0, 1\}$ d'une valuation $\varphi$ avec $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, réécrire les règles de prolongation de $\varphi$ en utilisant cette fois l'addition et la multiplication sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

## 5. Tautologies

Montrer que les formules suivantes sont des tautologies.

1. $p \vee q \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow q)$
2. $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$

Votre intuition est-elle d'accord ?

## 6. Notion de conséquence sémantique

Montrer

$$\{p_1 \Rightarrow q_1, p_2 \Rightarrow q_2, q_1 \wedge q_2 \Rightarrow r\} \models p_1 \wedge p_2 \Rightarrow r$$

et

$$\{p_1 \Rightarrow q_1, p_2 \Rightarrow q_2, q_1 \wedge q_2 \Rightarrow r\} \not\models p_1 \vee p_2 \Rightarrow r$$