TD 8 : calcul des prédicats

1. Formes prénexes et formes de Skolem

1.1 Mettez sous forme prénexe polie les formules suivantes.

1. $\exists x Px \wedge \exists x\,(Px \Rightarrow \forall y Rxy)$
2. $\forall x\,(Px \Rightarrow \exists y\,((Qy \wedge Ty) \Rightarrow \exists y \neg Rxy))$
3. $((Px \wedge \neg\exists y Rxy) \Rightarrow \exists y\,(Rxy \wedge Qy))$

1.

$$\begin{aligned}\exists x Px \wedge \exists x\,(Px \Rightarrow \forall y Rxy) &\equiv \exists z Pz \wedge \exists x \forall y\,(Px \Rightarrow Rxy)\\ &\equiv \exists z \exists x \forall y\,(Pz \wedge (Px \Rightarrow Rxy))\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\forall x\,(Px \Rightarrow \exists y\,((Qy \wedge Ty) \Rightarrow \exists y \neg Rxy)) &\equiv \forall x\,(Px \Rightarrow \exists y \exists z\,((Qy \wedge Ty) \Rightarrow \neg Rxz))\\ &\equiv \forall x \exists y \exists z\,(Px \Rightarrow ((Qy \wedge Ty) \Rightarrow \neg Rxz))\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}((Px \wedge \neg\exists y Rxy) \Rightarrow \exists y\,(Rxy \wedge Qy)) &\equiv \exists z\,(\forall y\,(Px \wedge \neg Rxy) \Rightarrow (Rxz \wedge Qz))\\ &\equiv \exists z \exists y\,((Px \wedge \neg Rxy) \Rightarrow (Rxz \wedge Qz))\end{aligned}$$

1.2 Mettez les formules précédentes sous forme de Skolem.

1.

$$\exists z \exists x \forall y\,(Pz \wedge (Px \Rightarrow Rxy)) \quad \rightarrow \quad \forall y\,(Pa \wedge (Pb \Rightarrow Rby))$$

2.

$$\forall x \exists y \exists z\,(Px \Rightarrow ((Qy \wedge Ty) \Rightarrow \neg Rxz)) \quad \rightarrow \quad \forall x\,(Px \Rightarrow ((Qfx \wedge Tfx) \Rightarrow \neg Rxgx))$$

3.

$$\exists z \exists y\,((Px \wedge \neg Rxy) \Rightarrow (Rxz \wedge Qz)) \quad \rightarrow \quad ((Px \wedge \neg Rxgx) \Rightarrow (Rxfx \wedge Qfx))$$

2. Des propositions aux prédicats : théorème de Herbrand

2.1 Montrer que pour toute formule F du premier ordre ne contenant aucune fonction et aucune variable on peut construire une formule du calcul propositionnel F' telle que F est satisfiable si et seulement si F' est satisfiable.

Toutes les formules atomiques de F sont un prédicat de P appliqué à des constantes de C. On prend une injection γ entre l'ensemble T des formules atomiques de F et l'ensemble des variables propositionnelles. La fonction de transformation Γ est définie inductivement :
- $\forall t \in T, \Gamma(t) = \gamma(t)$
- $\Gamma(\neg F) = \neg\Gamma(F)$
- $\Gamma(F \diamond G) = \Gamma(F) \diamond \Gamma(G)$
- les formules sans variables ne contiennent pas non plus de quantificateur.

Si $\Gamma(F)$ est satisfiable, soit ϕ une valuation qui la satisfait. Alors on définit la structure S par :
- $M = C$
- $\forall c \in C, c^M = c$
- $\forall n \in \mathbf{N}, \forall p \in R_n, p^M = \{(c_1, .., c_n)|\phi(pc_1..c_n) = true\}$

Alors S est un modèle de F (induction sur F). Réciproquement, à tout modèle de F on peut associer la valuation vraie pour tous les atomes mis à $true$ par le modèle.

2.2 Montrer que pour toute formule F du premier ordre sous forme de Skolem et ne contenant aucune fonction on peut construire une formule du calcul propositionnel F' telle que F est satisfiable si et seulement si F' est satisfiable.

Même réponse qu'au précédent en ajoutant : $\Gamma(\forall xF) = \bigwedge_{\{} c \in C\}F[c/x]$.

On nomme *s*tructure de Herbrand une structure dont le domaine est l'ensemble des termes sans variables et l'interprétation d'un terme sans variable est lui-même.

2.3 Montrer que pour toute formule F du premier ordre sous forme de Skolem, on peut construire une formule du calcul propositionnel F' telle que si F' n'est pas satisfiable, alors F n'est pas satisfiable. La réciproque est-elle vraie ? Conclure.

On définit les domaines de Herbrand par :
- $D_0 = C$
- $D_{i+1} = \bigcup_f \{ft_1..t_n|\forall j, t_j \in D_i\}$
- $D = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} D_n$

On étend γ à ces domaines. Soit X l'ensemble des variables de F et $E = \{\Gamma(F[t_1/x1, .., t_m/x_m])|\forall i, t_i \in D \wedge x_i \in X\}$. Alors F admet un modèle de Herbrand si et seulement si E est consistant (induction sur F). Par compacité du calcul propositionnel, si E est inconsistant, alors il possède un sous-ensemble fini inconsistant E'. On pose $F' = \bigwedge_{e\in E'} e$.

Une formule F' peut être construite en un temps fini. Soit $i_{\max} = \max\{i|\exists t_i \in D_i/\gamma(t_i) \in V(F')\}$. Alors $E_{i_{\max}} = \{\Gamma(F[t_1/x1, .., t_m/x_m])|\forall i, t_i \in \bigcup_{n\leq i_{\max}} D_n \wedge x_i \in X\} \supseteq E'$ donc $E_{i_{\max}}$ est inconsistant. Il suffit donc de construire tous les E_i successivement jusqu'à en trouver un qui soit inconsistant.

Ce théorème fournit un algorithme de preuve par réfutation valable pour toute théorie finiment axiomatisable.

3. Applications

3.1 Soit la théorie $\{\forall x(Px \vee \neg Pfx), \neg Pa, Pffa\}$. Construire une formule de Skolem équivalente. Montrer que cette théorie est inconsonsistante.

- $\{\neg Pa, Pa \vee \neg Pfa, Pfa \vee \neg Pffa, Pffa\}$ est inconsistante.

3.2 Soit la théorie $\{\forall x Rxsx, \forall x \forall y \forall z Rxy \wedge Ryz \Rightarrow Rxz, \exists x \neg Rxx\}$. Cette théorie est-elle consistante ? Que donnerait une preuve à la Herbrand dans ce cas ?