TD 7 : isomorphisme de Curry Howard

1. Introduction à l'isomorphisme de Curry-Howard

Soit $\{x, y, \ldots\}$ un ensemble dénombrable de variables, et $\{\alpha, \beta, \ldots\}$ un ensemble dénombrable d'éléments appelés *types de base*.

Définition (rappel) L'ensemble des *lambda-termes* est défini comme le plus petit ensemble $\mathcal{T}$ tel que
– les variables sont des lambda-termes,
– si u et v sont des termes alors $(u\ v)$ est un lambda-terme,
– si t est un terme et x une variable, alors $\lambda x.\, t$ est un lambda-terme.
De la même façon que pour le calcul des prédicats, on définit les notions de variables libres et liées d'un lambda-terme.

Définition L'ensemble des *types simples* est défini comme le plus petit ensemble tel que
– tout type de base est un type simple,
– si A, B sont des types simples alors $(A \to B)$ est un type simple.
Un *contexte* est un ensemble de couples de la forme (x, A) (noté $x : A$) avec x une variable et A un type.

Définition Soit Γ un contexte, t un terme et A un type. L'ensemble des triplets (Γ, t, A) *bien typés* est défini comme le plus petit ensemble tel que
– si $(x, A) \in \Gamma$ alors (Γ, x, A) est bien typé,
– si $(\Gamma, u, A \to B)$ et (Γ, v, A) sont bien typés alors $(\Gamma, (u\ v), B)$ est bien typé,
– si $(\Gamma \cup \{(x, A)\}, t, B)$ est bien typé alors $(\Gamma, \lambda x.\, t, A \to B)$ est bien typé.

Notation Quand le triplet (Γ, t, A) est bien typé, on dit que t *a le type* A *dans* Γ, et on écrit $\Gamma \vdash t : A$.

1.1 Donner un système d'inférence (*i.e.* un ensemble de règles de la forme $\dfrac{i_1\ \ldots\ i_n}{i}$) permettant de typer un lambda-terme.

1.2 Quel(s) type(s) peut-on associer au lambda-terme $\lambda x.x$?

1.3 Montrer que le terme $(x\ x)$ n'est pas typable.

1.4 Donner un type pour les termes suivants.

1. $\lambda x.\, \lambda y.\, \lambda z.\, ((x\ y)\ z)$
2. $\lambda x.\, \lambda y.\, \lambda z.\, (x\ (y\ z))$

1.5 Montrer que l'on peut associer chaque règle de typage avec une règle de NM. Cette analogie est à la base de l'isomorphisme de Curry-Howard entre termes et preuves.

1.6 Donner une preuve des formules suivantes sous forme de lambda-terme.

1. $A \Rightarrow B \Rightarrow A$
2. $(A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow A \Rightarrow C$
3. $(A \Rightarrow B \Rightarrow (C \Rightarrow D) \Rightarrow E) \Rightarrow ((A \Rightarrow D) \Rightarrow F) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow E) \Rightarrow C) \Rightarrow (C \Rightarrow D) \Rightarrow F$

2. Traduction de propriétés

2.1 On désire exprimer par une formule d'un langage des prédicats du premier ordre le fait que les éléments de rang 1 à n d'un tableau à valeurs entières sont triés en ordre croissant. Préciser le domaine du langage et donner une formule appropriée.

2.2 Exprimer également : le tableau possède un sous-tableau gauche dans lequel tous les éléments sont nuls et un sous-tableau droit dans lequel tous les éléments sont de valeur 1.

3. Calcul des prédicats

On considère le langage L défini par $\mathcal{C} = \{a, b\}$, $\mathcal{F}_1 = \{f\}$, $\mathcal{F}_2 = \{g\}$, $\mathcal{R}_1 = \{P\}$ et $\mathcal{R}_2 = \{R\}$.

3.1 Indiquer les occurrences libres et les occurrences liées des variables de la formule

$$\forall v_1 \, (\exists v_2 R v_2 v_1 \Rightarrow P g a v_2) \vee (\forall v_0 \exists v_2 R f v_0 v_2 \wedge R v_0 g b v_1)$$

L désigne désormais un langage du premier ordre quelconque.

3.2 Montrer que pour que deux formules soient équivalentes, il ne suffit pas que leurs clôtures universelles le soient.