Problema 1

Solutie

a) Fie $d =$ nr. de zone patratice de dimensiune 16×16 posibile ($d = 256^{16\times16}$).
Fie $\phi : X \to \mathbb{R}^d$, $\phi(x) = [\phi_{p_1}(x), \phi_{p_2}(x), \phi_{p_3}(x), \ldots, \phi_{p_d}(x)]$, unde

$$\phi_{p_k}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \text{ conține zona patratica } p_k \\ 0 & \text{în caz contrar} \end{cases}$$

$\phi(x) \cdot \phi(x') = \sum_{i=1}^{d} \phi_{p_i}(x) \cdot \phi_{p_i}(x')$, care reprezintă numărul de zone patratice comune imaginii x și $x' = \phi(x) \cdot \phi(x') = k_1(x, x')$

b) Fie $n = 3$ și $k_2(x_1, x_2) = 1, k_2(x_2, x_3) = 0, k_2(x_1, x_3) = 1$

$$G = \begin{bmatrix} k_2(x_1,x_1) & k_2(x_1,x_2) & k_2(x_1,x_3) \\ k_2(x_2,x_1) & k_2(x_2,x_2) & k_2(x_2,x_3) \\ k_2(x_3,x_1) & k_2(x_3,x_2) & k_2(x_3,x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fie $f = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $x, y, z \in \mathbb{R}$

$f^T G f = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x+y+z \\ x+y \\ x+z \end{bmatrix} = x^2 + xy + xz +$
$xy + y^2 + z^2 + zx$

Fie $x = -1, y = 1, z = 1 \Rightarrow f^T G f = 1 - 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 = -1 \Rightarrow \exists f \in \mathbb{R}^3$, astfel incat $f^T G f < 0$ (generalizarea se realizează prin inducție).