

## Capítulo 7

# Desagregación temporal

*“El estudio de la economía normalmente nos muestra que el mejor momento para comprar fue el año pasado.”*

— Woody Allen

### 7.1 Introducción

El marco metodológico propuesto en esta Tesis parte de modelos hedónicos que generan precios con frecuencias anuales y mensuales. De la misma manera que en el Capítulo 6 se ha desarrollado un método que asegura la coherencia geográfica de los precios, en el presente capítulo se aplica un método que asegura la consistencia temporal entre las series de alta y baja frecuencia.

Trabajar con frecuencias distintas conlleva dos problemas: el primero, que los datos mensuales tienden a concentrarse en torno a la media anual, lo que provoca discontinuidades entre los valores de los meses finales de un año y los iniciales del siguiente; y el segundo, que las medias anuales no se corresponden exactamente con el promedio de los valores de la serie mensual. Estas cuestiones se resuelven integrando ambas series mediante la reconciliación de la serie anual y la mensual.

La cuestión plantea varios retos, como la selección de las series de referencia<sup>1</sup> para estimar el precio de una serie de alta frecuencia mensual a partir de una serie de baja frecuencia anual. Pero además, la identificación de información de alta frecuencia actualizada también es problemática, ya que los organismos públicos suelen ofrecer información del mercado con varios meses o años de retraso.

Como se describe más adelante en este capítulo, las series de referencia candidatas tienen retrasos temporales y manejan escalas distintas. Por lo tanto,

---

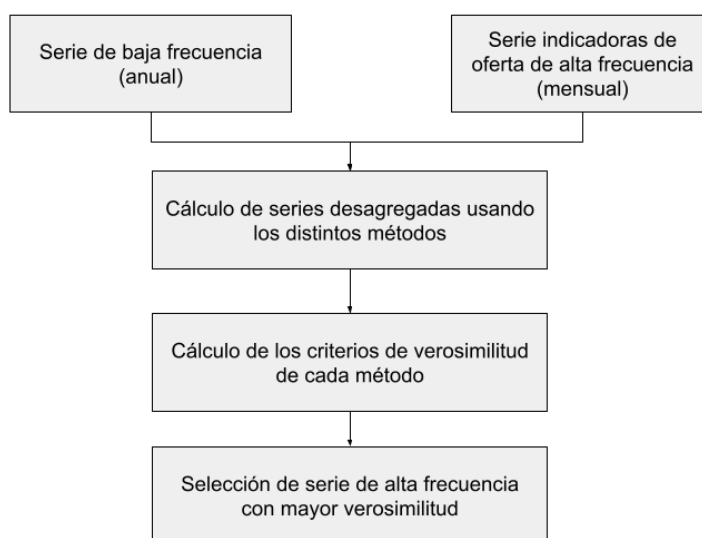
<sup>1</sup>Podrían ser varias series en el caso de la aproximación multivariante.

dada la diversidad en la naturaleza de las series de los estratos poblacionales, es necesario adaptar el método de desagregación en función de cada caso.

Dado que existen múltiples opciones para la reconciliación de los datos, la metodología propuesta toma las series de baja frecuencia y las desagrega utilizando varios métodos. Seleccionando aquellas que, según un criterio de verosimilitud, muestre el mejor ajuste al valor original y ofrezca las series con más alta calidad (reduciendo casos de discontinuidad o comportamientos erráticos de alta frecuencia).

El proceso general sobre la serie de tiempo de una zona se describe en la Figura 7.1. El método calcula las series desagregadas a través de distintas técnicas, partiendo del dato anual de mercado y las series mensuales de oferta. Sobre las series calculadas, se estima su verosimilitud en función de varios criterios de comprobación de calidad, por ejemplo, la variación interanual o las diferencias entre los valores de fin e inicio de año. Finalmente, se toma aquella cuyo valor de verosimilitud sea el más alto.

**Figura 7.1.** Algoritmo de cálculo de selección de series por máxima verosimilitud



*Fuente:* elaboración propia.

El criterio de selección del mejor método se basa en las condiciones de calidad de series temporales más comúnmente utilizadas por las agencias estadísticas. La decisión final sobre el método a utilizar se construye como una combinación de los criterios individuales, mediante un estimador de máxima verosimilitud (MLE) (Bickel y Doksum, 2015) que asegura el máximo cumplimiento de las condiciones de calidad individuales de las series. Los MLE son una herramienta indispensable en muchas técnicas de modelización estadística, especialmente ante datos que no siguen una distribución normal, y por tanto incumplen la restricción normalidad

que exigen algunos métodos.

Para validar el método propuesto se desarrolla un análisis experimental sobre 534 series del alquiler de viviendas, para las 177 zonas de trabajo. Se han usado cinco técnicas de desagregación temporal clásicas: tres de tipo autorregresivo y dos no paramétricos. Los resultados muestran que las series obtenidas usando los métodos seleccionados por nuestra metodología ofrecen mejores indicadores de calidad que las series desagregadas, bien con un único método o una selección aleatoria. Además, por construcción, el método permite añadir nuevos criterios de evaluación de calidad o métodos de agregación, sin necesidad de cambiar el algoritmo. Por otra parte, no es necesario un calibrado manual del método, lo que lo hace aplicable a procesos de desagregación sobre un gran volumen de series.

En la primera parte del capítulo se hace una revisión de la literatura de las distintas técnicas de desagregación temporal de series, así como una mención a las recomendaciones oficiales de Eurostat (2015); la segunda parte describe la metodología aplicada a las series de precios generadas por el modelo hedónico final, y se seleccionan las series más adecuadas según el método propuesto; para, en la parte final, analizar los resultados obtenidos.

## **7.2 Desagregación temporal**

Las series temporales son un instrumento clave para la medición y control de variables macroeconómicas (Eurostat, 2015), y aunque se disponga de información de forma exhaustiva para la cuestión de estudio, los datos pueden encontrarse con diferentes frecuencias temporales y niveles de agregación, lo que dificulta la integración de los datos. El estudio de esta problemática se ha venido realizando desde principios del siglo XX, y se han planteado un gran número de aproximaciones para resolverla (Moauero y Savio, 2005). Los métodos utilizados para homogeneizar las series de tiempo de baja y alta frecuencia, deben aplicar múltiples criterios como mantener el valor medio para todos los niveles de agregación o la ausencia de discontinuidades en la secuencia de valores.

Estas técnicas son ampliamente utilizadas por los institutos de estadística nacionales, como por ejemplo, Francia, Italia y otros países europeos, dónde se calculan las cifras trimestrales del Producto Interno Bruto (PIB) utilizando métodos de desagregación temporal (Sax y Steiner, 2013). En la Unión Europea, a través de Eurostat (2015) y el Sistema Estadístico Europeo (SEE) («European Statistical System», 2023), se han propuesto directrices para ayudar a los productores de datos a obtener series de alta frecuencia (trimestrales o mensuales) a partir de datos de baja frecuencia (anuales, bianuales, etc.).

Las aplicaciones prácticas se enmarcan en tres aspectos: desagregación temporal, evaluación comparativa y reconciliación. Las pautas dadas por Eurostat identifican las mejores prácticas para lograr tres objetivos: el primero, la armonización en todos los procesos nacionales; el segundo, la comparabilidad entre resultados; el tercero, la coherencia entre dominios y entre agregados con sus componentes.

El desglose se puede realizar sin ninguna serie de alta frecuencia, o incluso con más de una, denominadas indicadoras. En todo caso, cuando no hay una serie de indicadores, es posible desagregar temporalmente, si bien la precisión de la serie de alta frecuencia resultante será menor. Todos los métodos de desagregación aseguran que una función de agregación, sea la suma, el promedio, el primer o el último valor de la serie de alta frecuencia, guarda consistencia con la serie original. Estos métodos pueden hacer frente a situaciones en las que la alta frecuencia es un múltiplo entero de la baja frecuencia (por ejemplo, años a trimestres, semanas a días), pero no con frecuencias irregulares (por ejemplo, semanas a meses).

En las últimas décadas, debido a la mejora en las capacidades de proceso de información, se ha desarrollado un gran número de aproximaciones para hacer la desagregación (Dagum y Cholette, 2006a; Quilis, 2018), tales como los basados en: modelos de regresión, aproximaciones no paramétricas, basadas en ondas, mediante modelos bayesianos o redes neuronales, lo que plantea la dificultad de seleccionar el método adecuado.

### 7.2.1 Métodos de desagregación

Existen varias aproximaciones para la adaptación del dato de baja frecuencia a alta frecuencia en series temporales: el proceso de desagregación temporal propiamente dicho, la interpolación, el benchmarking o evaluación comparativa y la reconciliación de series. El objetivo final de cada técnica es combinar las series disponibles para transformar la serie de baja frecuencia a una de alta frecuencia, manteniendo la consistencia entre las mismas.

El benchmarking, o evaluación comparativa, pretende ajustar las discrepancias entre información estadística relacionada. Históricamente, se ha utilizado para la desagregación de magnitudes macroeconómicas anuales a frecuencias trimestrales, usando para ello otras medidas relacionadas con frecuencia trimestral<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>Los enfoques clásicos recogen un buen número de técnicas de desagregación temporal (Boot y Feibes, 1967; Cholette, 1984; Cholette y Dagum, 1994; Chow y Lin, 1971; Denton, 1971; Di Fonzo y Filosa, 1987; Fernandez, 1981; Guerrero y Martínez, 1995; Hillmer y Trabelsi, 1987; Lisman y Sandee, 1964; Litterman, 1983; Vangrevelinghe, 1966; Zani, 1970), para una revisión en detalle de

Las técnicas denominadas de reconciliación (Dagum y Cholette, 2006b) se utilizan para eliminar las discrepancias entre las series de alta y baja frecuencia, por ejemplo, las existentes entre una serie nacional de producción industrial procedente de un organismo público y las series individuales generada por una de las regiones de dicho país. Cuando las series desagregadas se combinan, es posible que su media no coincida con la serie original, en este caso, se requiere llevar a cabo un proceso de reconciliación. Las primeras propuestas de solución datan de la década de los 40 del siglo XX (Deming y Stephan, 1940), cuya evaluación se produjo gracias al uso de los ordenadores para el procesamiento de información. Entre estos estudios encontramos, el de Cholette (1988), Chen y Dagum (1997), y Di Fonzo (2002).

Posteriormente, se publicaron varios artículos especialmente relevantes, tanto sobre los métodos de benchmarking como los de reconciliación. Di Fonzo y Marini (2005) resolvieron varios problemas de agregación de series y reconciliación mediante el principio de preservación de movimiento propuesto por Denton (1971). Posteriormente, los mismos autores desarrollaron un estudio empírico donde estudian las diferencias entre el método Denton Modificado con respecto a Causey Trager (Di Fonzo y Marini, 2011; Fonzo y Marini, 2013). Por otra parte, Daalmans y Di Fonzo (2014) analizaron las relaciones entre los métodos de mantenimiento de la tasa de crecimiento (Causey y Trager, 1981) y las primeras diferencias (Denton, 1971). Daalmans *et al.* (2018) compararon ambos métodos, y propusieron dos mejoras sobre el método Causey Trager que solucionan su irreversibilidad temporal y la singularidad de su función objetivo. Una de las contribuciones más recientes son las basadas en ondas (*wavelet*), que Davies *et al.* (2015), al compararlo con Denton y Cholette-Dagum, confirmaron su mejor comportamiento ante valores atípicos. Más recientemente, Sayal *et al.* (2017) introducen una evolución de este método.

La interpolación genera los valores a través del muestreo, en un intervalo temporal, de la serie original (Dagum y Cholette, 2006b; Eurostat, 2015). Los métodos más habituales son: la interpolación cúbica, por splines, o regresión local. La extrapolación, en cambio, calcula valores de una serie de tiempo para puntos de tiempo que no han sido muestreados y están fuera del intervalo de tiempo de la serie original. Entre estos métodos se encuentran los modelos ARIMA, suavizado exponencial, y los basados en regresión univariantes y multivariantes (Moauero y Savio, 2005).

De forma alternativa a las aproximaciones clásicas, se encuentran los métodos bayesianos, originalmente propuestos por Alba (1988), actualizados más tarde por

---

otros métodos clásicos véase (Miralles, 1997)

Rojo (2005, 2017). Estos se basan en encontrar la relación estadística entre el indicador y la serie a construir, y tiene como ventaja que favorece la regularidad de las series generadas, ofreciendo resultados más estables aún teniendo series indicadoras de alta volatilidad. El uso de aprendizaje automático es más reciente y se ha aplicado a la desagregación de series no económicas (Guyet *et al.*, 2022; Katranji *et al.*, 2016; Scher y Peßenteiner, 2021), a excepción del caso de Zaier y Abed (2014) que aplica redes neuronales a la desagregación de PIB de Estados Unidos.

El software disponible para esta cuestión ha estado restringido históricamente a las agencias estadísticas, donde los más habituales eran: ECOTRIM (Barcellan, 1994), BENCH de la oficina de Estadística de Canada, (Cholette y Dagum, 1994), o la librería MATLAB (Quilis, 2002). Esta situación ha cambiado en los últimos años, con la publicación por Sax y Steiner (2013) de un paquete de acceso libre en los lenguajes R y python.

El Anexo 7a de este capítulo, se describen en profundidad los cinco métodos de desagregación temporal aplicados en la metodología: Denton (1971), Denton y Cholette (Cholette, 1984), Chow-Lin (1971), Causey-Trager (1981) y Litterman (1983).

### 7.2.2 Consideraciones adicionales

Eurostat (2015) recomienda considerar tres criterios en el proceso de desagregación temporal de varias series de baja frecuencia, relacionadas con otras auxiliares de alta frecuencia: el primero, asegurar la calidad de los indicadores de baja frecuencia (en varios niveles de desagregación); el segundo, la disponibilidad y calidad de indicadores de alta frecuencia en varios niveles de desagregación; y el tercero, considerar los aspectos legales y necesidades de desagregación para los usuarios, y las consideraciones estadísticas de la calidad del resultado en los diferentes niveles de desagregación.

La estrategia de estimación está estrictamente relacionada con la identificación del mejor nivel de desagregación temporal. Cuando se deben estimar múltiples series vinculadas por restricciones de agregación, existen varias alternativas posibles: la primera, calcular por separado la variable agregada y sus componentes (método directo), aunque esto no garantiza el cumplimiento de las restricciones de agregación contemporánea; la segunda, el uso del método directo con técnicas de reconciliación, que aseguren el cumplimiento de las limitaciones contemporáneas; y el tercero, calcular los componentes individuales y derivar el valor final agregando los componentes estimados (método indirecto).

Para las tres alternativas anteriores, no existe un razonamiento teórico ni evidencia empírica a favor de un enfoque en particular. El directo es el preferido cuando hay co-movimientos entre agregados y componentes, y cuando la calidad de los componentes no es homogénea, lo cual es habitual a un nivel muy desagregado, el indirecto es la mejor opción si la calidad de estos últimos es lo suficientemente alta.

Por otra parte, no se debe obviar la importancia de los valores atípicos, por su impacto en la calidad del resultado de la desagregación temporal, evaluación comparativa y conciliación. Ante estos casos, es fundamental estudiar las causas de los valores atípicos para poder decidir el mejor tratamiento a aplicar. Si los valores atípicos aparecen en la serie indicadora solo como un único valor extremo (valores atípicos aditivos), y parecen originarse por un error en la fuente, es aconsejable corregirlos antes de ejecutar procedimientos de desagregación.

Si el valor atípico aparece tanto en el indicador de alta frecuencia como en la variable objetivo de baja frecuencia, y son explicables estadística o económicamente, deben modelarse durante el proceso de estimación o eliminarse antes de su inicio y reintroducirse al final del proceso. Finalmente, si aparece más de un valor atípico estructural en unos pocos indicadores, que reflejen cambios en el proceso de producción y que no se recogen en la variable original, se aplicaría un proceso de *winsorización*<sup>3</sup> de las altas frecuencias en las series indicadoras.

Además, es habitual encontrar índices de precios como series encadenadas, por ejemplo, en el IPV del INE (2016a), o en el Manual de Cuentas Nacionales de Eurostat (2013). En estos casos, Eurostat (2015) recomienda trabajar con series no encadenadas, aunque deja abierta la decisión en función de cada caso. El motivo es que una serie de precios encadenada no es, en sentido estricto, una serie temporal coherente, y por tanto, el encadenamiento puede distorsionar la naturaleza de los valores en los cambios de periodo (por ejemplo por el método de superposición trimestral).

---

<sup>3</sup>La *winsorización* es un proceso que limita una serie de valores superiormente a un valor máximo, e inferiormente a un valor mínimo.

## 7.3 Metodología

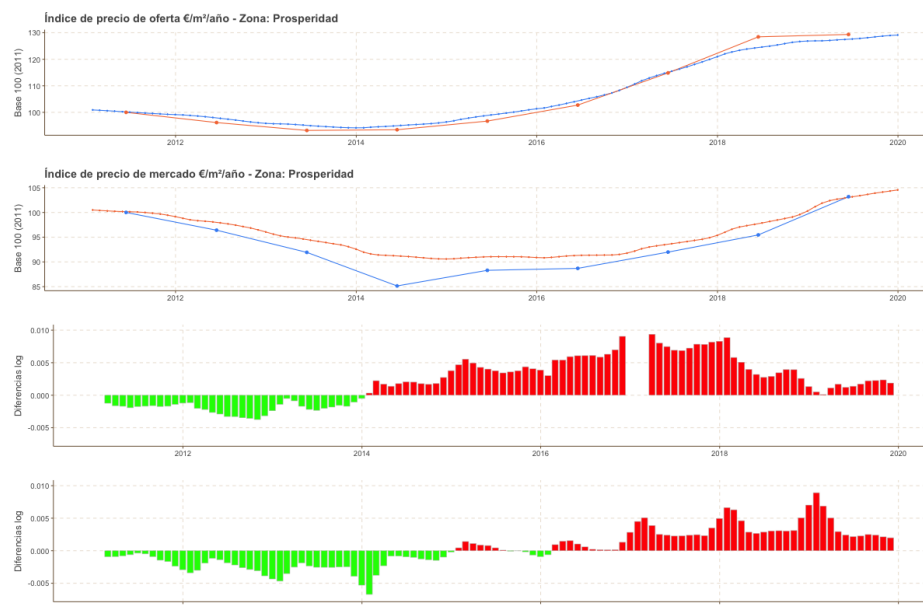
El método propuesto consiste en seleccionar automáticamente el modelo de desagregación temporal más adecuado para cada serie de precios. El proceso consiste en dos pasos: el primero selecciona, en cada zona geográfica, las series indicadoras a utilizar; el segundo desagrega con los 5 métodos distintos las series de baja frecuencia de cada zona, y toma aquella serie con mayor verosimilitud de ser la óptima (en términos de calidad).

Esta aproximación resuelve los dos problemas fundamentales para la desagregación temporal, que remarca Quilis (2018), y que son: por una parte, disponer de mecanismos robustos de comparativa entre métodos; y por otra, encontrar herramientas que reduzcan la complejidad operativa de los métodos estadísticos habituales.

### 7.3.1 Paso 1: Selección de series indicadoras

Se parte de las series de precios generadas anuales y mensuales por el modelo final. En la Figura 7.2 se muestra un ejemplo para el barrio Prosperidad (Madrid)<sup>4</sup>, en la cual se puede comprobar que las series desagregadas no cumplen la condición de que su media se corresponda al precio medio anual.

**Figura 7.2.** Series originales (oferta y alquiler) con diferencias logarítmicas mensuales. Barrio Prosperidad (Madrid)



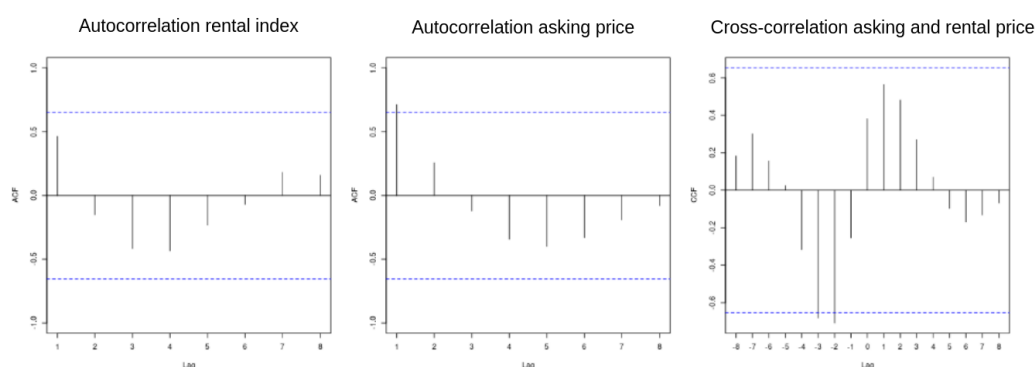
*Fuente:* elaboración propia.

<sup>4</sup>Se toma el barrio de Prosperidad por ser una zona mercado de alta demanda y numerosa muestra, en la que se aprecian diferencias entre los datos mensuales y anuales generados por los modelos de correspondencia. En particular, las medias de los datos mensuales no se corresponden con los datos anuales. La información de todas las series está disponible en los enlaces del Anexo I.



No obstante, existe una alta la coherencia temporal entre las series de alta y las de baja frecuencia, por tanto se han tomado las series mensuales (series indicadoras) como base para la desagregación. Tras un análisis preliminar, se observa la existencia de una correlación alta entre la serie de oferta y alquiler, aunque con un desfase temporal, como muestra la Figura 7.3. Las autocorrelaciones de las series anuales de oferta y alquiler, y la correlación cruzada entre alquiler y oferta, demuestran que la serie de alquiler va retrasada con respecto a la de oferta. La interpretación económica del fenómeno anterior es que la oferta actúa de forma adelantada al mercado, con diferencias en función de las características del mercado (Kokot y Bas, 2015), principalmente en función del grado de absorción de la oferta (Galesi *et al.*, 2020).

**Figura 7.3.** Autocorrelación series anuales de alquiler, de series en oferta y cruzada oferta y alquiler. Pacífico (Madrid)



*Fuente:* elaboración propia.

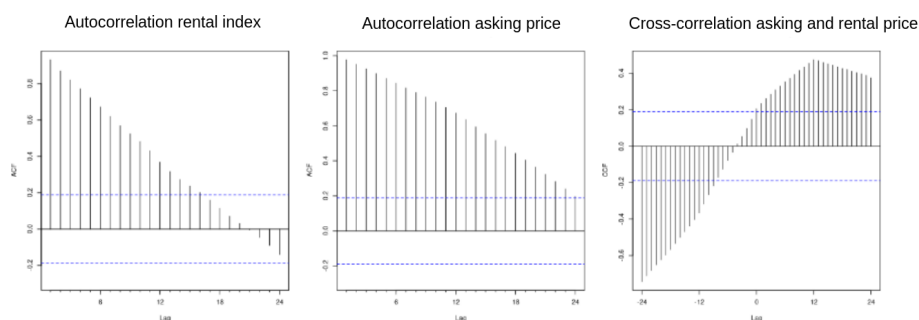
El grado de absorción, o liquidez del mercado, se puede estimar bien a través de la tasa de reposición del *stock* en oferta, o por su reflejo en la tensión de la demanda, medida como número de contactos medios mensuales de los anuncios de una zona<sup>5</sup>. La serie de alquiler muestra un retraso de entre uno y dos años respecto de la serie de alquiler<sup>6</sup>.

La Figura 7.4 muestra que las autocorrelaciones entre las series mensuales son muy fuertes en los meses contiguos, como consecuencia de la mayor influencia del componente de tendencia. La autocorrelación cruzada refleja ciclos más largos en la oferta que en el alquiler, con una serie de oferta que va, aproximadamente, un año por delante de la de alquiler.

<sup>5</sup>Este dato procede del portal inmobiliario Idealista. Un contacto es un dato recogido por la plataforma que se produce cuando un demandante de vivienda envía un mensaje al propietario indicando que tiene interés en alquilarla o adquirirla.

<sup>6</sup>Este fenómeno depende de la zona y de la capacidad de absorción y reposición del *stock* de viviendas de alquiler por nuevos contratos, se puede decir que el dinamismo del mercado guarda una relación con el retraso entre series.

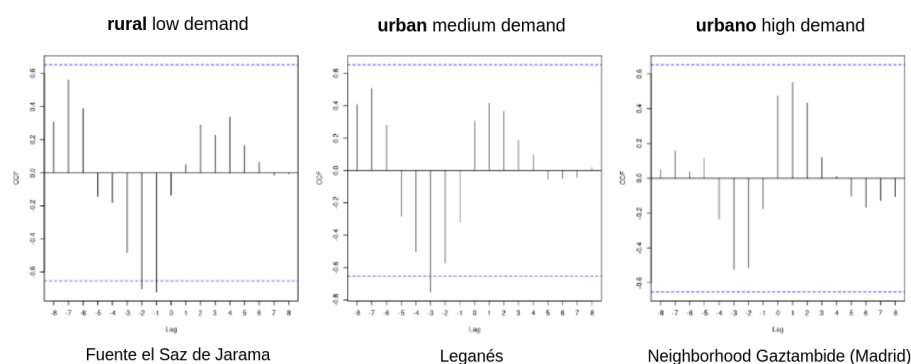
**Figura 7.4.** Autocorrelación series mensuales de alquiler, de series en oferta y cruzada oferta y alquiler. Pacífico (Madrid)



*Fuente:* elaboración propia.

A tenor de lo comentado anteriormente, las dinámicas de mercado parecen indicar que aquellas áreas menos activas reaccionan más lentamente ante cambios en la oferta. Para corroborar la hipótesis anterior se han tomado tres mercados representativos de áreas clasificadas según su dinamismo inmobiliario: Área de Fuente el Saz de Jarama (zona rural, de baja demanda y, por tanto, poco activa); el municipio de Leganés (zona urbana de demanda media, con un dinamismo mediano); y el barrio de Gaztambide de Madrid (zona urbana de alta demanda que representa un mercado con alta liquidez). Dichas zonas, representadas en la Figura 7.4, muestran que las correlaciones cruzadas en la zona rural tienen un rango mucho más amplio que las zonas urbanas. Por otra parte, Gaztambide tiene un rango más estrecho, lo que significa que el mercado de alquiler reacciona más rápidamente ante el comportamiento de la oferta. Se puede, por tanto, confirmar la hipótesis de que la longitud del retraso es inversamente proporcional al nivel de actividad del submercado inmobiliario. Por tanto, la estructura temporal de la serie dependerá de la dinámica de oferta y demanda de la zona y determinará la longitud del adelanto oferta-mercado y la excentricidad de los cambios.

**Figura 7.5.** Correlación cruzada de series mensuales de oferta y alquiler: Zonas Fuente del Saz, Barrio Gaztambide y Leganés



*Fuente:* elaboración propia.

Las 177 localizaciones cuentan con dos series temporales de baja frecuencia (anual), una con el índice de precios de compra y otra con el precio del alquiler. Existe una gran diversidad de zonas ya que se incluyen tanto con barrios en el centro de la ciudad de Madrid como municipios de tipo rural de la comunidad de Madrid. Como *a priori* no se conoce cual es el mejor método y cada serie tiene una naturaleza diferente, se opta por un proceso de selección automática del método a aplicar.

La estrategia a seguir, para cada serie, asume de que el método a seleccionar es el que ofrezca la mayor de verosimilitud para desarrollar una desagregación temporal óptima. Dicha verosimilitud atiende al comportamiento estructural de la serie, la validez de los datos, la consistencia entre las series de alta y baja frecuencia, y la coherencia entre la serie generada y su serie indicadora.

Se crean un total del 10 series indicadoras para las series zonales, formadas por 5 grupos de zonas de Madrid y otros 5 para el resto de la provincia. Dichos grupos se construyen en función del nivel de demanda<sup>7</sup> con el algoritmo K-Medias (Lloyd, 1982). El tamaño de cada grupo se recoge en la Tabla 7.1, observándose que en la capital hay una mayor concentración de zonas de los grupos 2 y 3 (demanda media), mientras que en el resto de la Comunidad, las zonas están distribuidas de una forma más equitativa entre grupos.

**Tabla 7.1.** Número de zonas contenidas en cada grupo

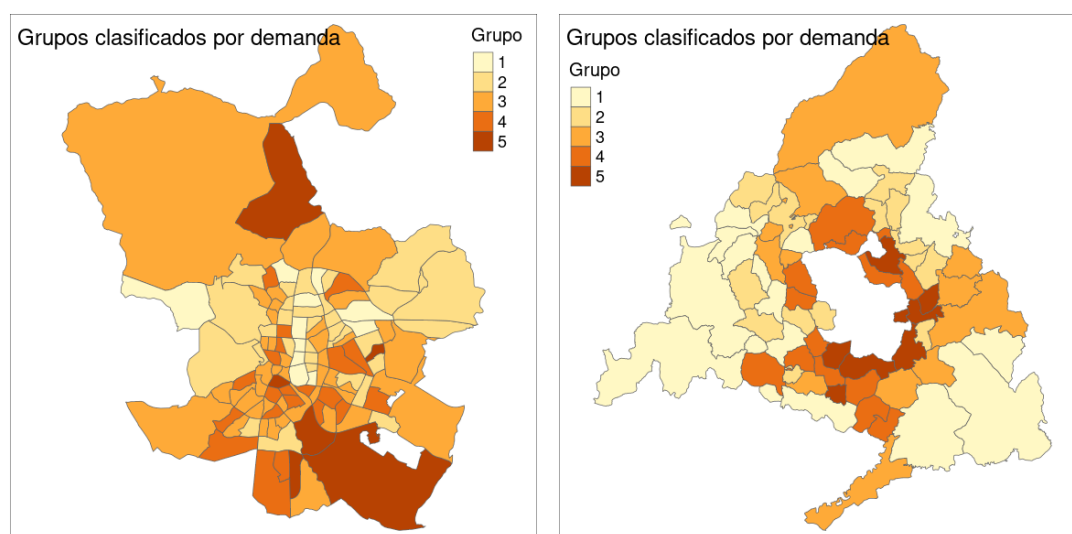
Área	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5
Madrid	11	32	42	21	6
Resto CAM	17	15	12	13	8

Fuente: elaboración propia

El desglose zonal de grupos, mostrado en la Figura 7.6, refleja que en la capital los grupos se encuentran bastante repartidos geográficamente, mientras que el resto de la Comunidad aquellos con mayor demanda se agrupan de forma concéntrica alrededor de la capital.

<sup>7</sup>Medida como el número de contactos medios por anuncio al mes.

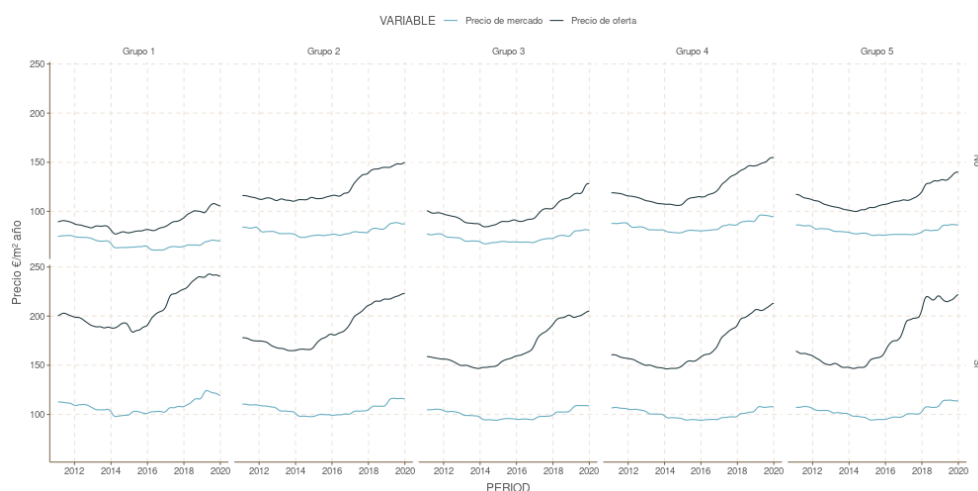
**Figura 7.6.** Grupos de zonas para la creación de series indicadoras de mercado



*Fuente:* elaboración propia.

Sobre las 10 series mensuales indicadoras se aplica una media móvil triangular<sup>8</sup> con  $N = 3$ , cuyo resultado se representa en la Figura 7.7. Se aprecian que, a pesar del suavizado, las transiciones anuales son relativamente bruscas.

**Figura 7.7.** Series indicadoras sin procesar utilizadas para el desglose zonal, grupos Madrid y resto de provincia



*Fuente:* elaboración propia.

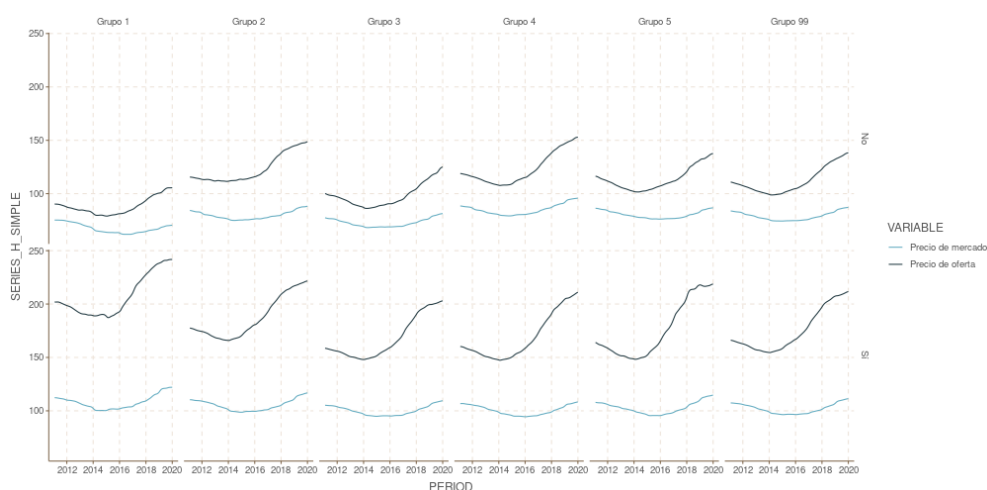
Las variaciones abruptas entre los meses finales e iniciales de año son consecuencia de la falta de capacidad de los modelos hedónicos de incorporar adecuadamente las variaciones intermensuales entre enero y diciembre. La causa se debe a que los árboles que especifican el tiempo a través de variables dummy

<sup>8</sup>Es una media móvil cuyo dato en momento  $t$  se calcula como la media de los datos originales en los periodos:  $t - 1$ ,  $t$  y  $t + 1$ .

de periodo, tienden a infraestimar la influencia de los componentes de tendencia y estacionalidad. Como consecuencia, ofrecen valores cercanos a la media la media anual de los precios, ignorando la componente temporal.

Para mitigar el efecto anterior, se descomponen las series indicadoras originales promediándolas con series de interpoladas<sup>9</sup>. El resultado suaviza los cambios entre años como se aprecia en la Figura 7.8.

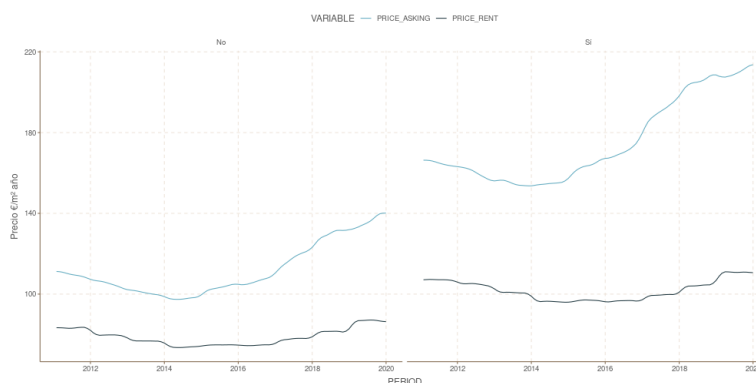
**Figura 7.8.** Series indicadoras finales, Madrid y resto de Comunidad



*Fuente:* elaboración propia.

Para los índices de tipo funcional se utiliza un desglose por capital o resto de provincia análogo, como muestra la Figura 7.9.

**Figura 7.9.** Series indicadoras utilizadas para el desglose funcional, grupos Madrid y resto de provincia



*Fuente:* elaboración propia.

<sup>9</sup>Las series interpoladas se construyen mediante la interpolación mensual de los valores anuales.

### 7.3.2 Paso 2: Selección de las mejores series

En esta etapa del proceso, se selecciona la mejor serie a partir de un conjunto de pruebas utilizando diferentes métodos. Todos ellos emplean un enfoque univariante de desagregación temporal<sup>10</sup> con los 5 métodos mostrados en la Tabla 7.2. Los cuales se encuentran entre las técnicas más habituales en las agencias estadísticas<sup>11</sup> (Quilis, 2018) (Moauero y Savio, 2005). El método Chow-Lin, utiliza la variante propuesta por Silva y Cardoso (2001), dónde el parámetro autorregresivo  $\rho$  se estima automáticamente. Se descarta el método Denton original por su inestabilidad en los primeros valores de las series (Cholette y Dagum, 1994).

**Tabla 7.2.** Métodos de desagregación temporal de series temporales

Método	Tipo	Notas
Chow-Lin Max Log	Regresión	Basado en Chow-Lin
Litterman Max Log	Regresión	Basado en Litterman
Dynamic	Regresión	Basado en Litterman
Denton-Cholette	Denton	Implementación Denton-Cholette
Causey-Trager	No paramétrico	Basado en el método Causey-Trager

Fuente: elaboración propia

La efectividad de cada metodología puede fluctuar dependiendo de la especificidad inherente a las series de datos en consideración. Mientras que es viable optimizar la parametrización de cada modelo para alcanzar un mejor rendimiento en cada caso, los manuales suministrados por los institutos estadísticos no ofrecen un criterio cuantitativo unificado para la elección del método que se adecúe de modo más pertinente. Por lo general, la decisión se basa en la opinión de un experto (Moauero y Savio, 2005; Quilis, 2018). Sin embargo, un proceso manual como este no permite la desagregación eficiente ante un gran número de series con características diversas, ya que requiere la intervención de muchas personas y, la aproximación de desagregación empleada podría no ser la más apropiada, si se utiliza un solo modelo para todos los casos.

Se propone un método cuantitativo objetivo que imita el criterio del experto, el cual consiste en seleccionar la serie que tenga un comportamiento más similar al de la serie de referencia y que, además, presente unas métricas estructurales cercanas al valor óptimo.

<sup>10</sup>Se ha utilizado el paquete R *tempdisagg* (Sax y Steiner, 2013).

<sup>11</sup>La popularidad de estos métodos se debe a su conexión los modelos lineales generales de econometría. Además, de su relativa simplicidad que facilita la comunicación con los usuarios finales.

Se define un estimador de máxima verosimilitud ( $\mathcal{L}$ ), que selecciona la serie cuya medida de verosimilitud  $\theta$  es máxima para los parámetros de la misma. El valor final se calcula como la probabilidad de un conjunto de criterios de calidad  $c$ , calculados sobre la serie desagregada  $H$  con un método  $m$  dado. Para facilitar su cálculo, se asume la independencia los sucesos de los criterios, de manera que la verosimilitud se estima como el producto de las probabilidades individuales, según:

$$\mathcal{L}(\theta | \hat{H}^m) = \prod_{c=1}^n p(\hat{H}_c^m | \theta_c) \quad [7.1]$$

donde  $\hat{H}^m$  es la serie mensual estimada con el método  $m$ , y  $\theta_c$  una medida de verosimilitud según el criterio de calidad  $c$ .

Para facilitar la comprensión del método, la expresión anterior se puede calcular, para cada criterio de calidad, la probabilidad de que dicha serie desagregada  $H$  pertenezca a la distribución óptima de valores óptima (según dicho criterio).

Finalmente, se seleccionará el método de desagregación  $m$ , de entre los distintos métodos candidatos, que hace máxima la expresión de verosimilitud de la expresión 7.1, y cuya definición recoge la siguiente expresión:

$$\hat{\theta}(\hat{H})_{mle} = \arg \max_{\theta \in \Theta} \mathcal{L}(\theta | \hat{H}^m), \forall m \in m_1, \dots, m_k \quad [7.2]$$

Que transformada a verosimilitudes logarítmicas sería:

$$\log \hat{\theta}(\hat{H})_{mle} = \arg \max_{\theta \in \Theta} \sum_{i=1}^n \log p(\hat{H}_c^m | \theta_c), \forall m \in m_1, \dots, m_k \quad [7.3]$$

En el cálculo de las probabilidades de cada criterio se asume que siguen una distribución normal-logarítmica, por lo que se estiman los parámetros de una distribución de dicho tipo<sup>12</sup> que se más se ajuste a los datos originales. Para aumentar la robustez de la estimación, se eliminan los valores extremos de cada variable (menores del percentil 1 y mayores del percentil 99).

### 7.3.3 Criterios de evaluación de la calidad de las series

La verosimilitud se estima para cinco criterios de calidad que forman parte de los propuestos por Chen y Andrews (2008) y que se miden a través de cinco métricas correspondientes. Estos criterios reflejan el buen comportamiento de una serie temporal:

<sup>12</sup>A través del paquete R *fitdistrplus* (Delignette-Muller *et al.*, 2015).

- Deben cumplirse los requisitos de agregación: en nuestro caso, se impone que la media de las series desagregadas coincida con el valor de la serie agregada. El nivel de discrepancia se calcula como error cuadrático<sup>13</sup>.
- No debe haber variaciones bruscas entre un año y otro. Como afirma Hood et al. (2005) en el estudio comparativo de procesos de benchmarking, la homogeneidad a lo largo del año no es consistente, lo que puede causar distorsiones importantes en ciertos métodos. Para evaluar este cambio, Chen y Andrews (2008) prefieren medir la media de las variaciones entre noviembre y febrero, y compararla con la media de las variaciones entre marzo y octubre.
- Los movimientos de corto plazo del indicador deben mantenerse lo máximo posible: para ello se compara la discrepancia entre las diferencias logarítmicas de la serie indicadora con la serie generada.
- La serie estimada no debe mostrar cambios bruscos al inicio o fin de la serie, situación habitual en métodos como el Denton original.
- La serie no debe ofrecer valores fuera de rango, en particular, los valores nunca deben ser negativos.

En consecuencia, se definen cinco métricas para evaluar el cumplimiento de los criterios anteriores, recogidas en la Tabla 7.3. La variación intraperiodo se calcula como diferencias logarítmicas en valor absoluto, y permiten comparar los valores de cambio entre diferentes zonas. Siendo  $\hat{H}_t^{m,z}$  el precio medio estimado<sup>14</sup> por el modelo  $m$  de una zona  $z$  para un periodo mensual  $t$ , y la diferencia logarítmica:

$$\Delta_{log}(\hat{H}_{t,t-1}^{m,z}) = |\log(\hat{H}_{t-1}^{m,z}) - \log(\hat{H}_t^{m,z})| \quad [7.4]$$

**Tabla 7.3.** Métricas de evaluación de series

Requisito	Métrica
Agregación MSPE	Media mensual con valor anual (MSE)
Cambios inter-anales	Variación máxima frontera anual (VF)
Movimientos a corto plazo	Media de las variaciones mensuales (VM)
Cambios bruscos inicio y fin	Ratio variación periodos extremos / mediana (REP)
Positividad de la serie	0 si hay negativos, 1 en caso contrario (POS)

Fuente: elaboración propia

A continuación se describe el método de cálculo de las 5 métricas, siendo  $h_t$  la serie de baja frecuencia original,  $\hat{H}_t$  la serie estimada de alta frecuencia e  $I_t$  la

<sup>13</sup>El error cuadrático se calcula como la diferencia al cuadrado entre el dato anual y la media de las series desagregadas.

<sup>14</sup> $H$  representa el precio real del alquiler y  $\hat{H}$  el estimado por el modelo.



serie indicadora de alta frecuencia utilizada.

- *MSE*: error cuadrático medio tipificado de la media anual de alquiler y la serie anual original, y expresada en porcentaje para hacerla comparable entre zonas, definida a continuación:

$$MSE(\hat{H}^{m,z}) = \left[ \mu(H^{m,z}) - \mu(\hat{H}^{m,z}) \right]^2 \quad [7.5]$$

donde  $\mu(H_t^z)$  es la media anual de la serie para la zona  $z$  y el momento  $t$ , y la  $\mu(H_t^{m,z})$  la media mensual.

- *VF*: máxima variación de frontera anual, medida como la máxima diferencia logarítmica en valor absoluto entre el mes de diciembre y el mes de enero del año siguiente, de la serie temporal de valores mensuales, según:

$$VF(\hat{H}^{m,z}) = \max \left| \log \left( \frac{\hat{H}_{y,12}^{m,z}}{\hat{H}_{y+1,1}^{m,z}} \right) \right|, \forall y \in [y_1..y_n] \quad [7.6]$$

donde  $\hat{H}_{y,12}^{m,z}$  es el valor de la serie mensual para diciembre y  $\hat{H}_{y,1}^{m,z}$  el dato para enero.

- *VM*: variación media calculada como la media de las diferencias logarítmicas de la serie, calculada como:

$$VM(\hat{H}^{m,z}) = \frac{1}{N-1} \sum_{t=1}^{N-1} |\log(\hat{H}_{t+1}^{m,z}) - \log(\hat{H}_t^{m,z})| \quad [7.7]$$

donde  $\hat{H}_t^{m,z}$  es el valor de la serie candidata en la zona  $z$  y el mes  $t$ , y  $\hat{H}_{t+1}^{m,z}$  el correspondiente valor para el mes siguiente.

- *REP*: mide la diferencia de la variaciones de los periodos inicial  $t = 1$  y final  $t = n$ .

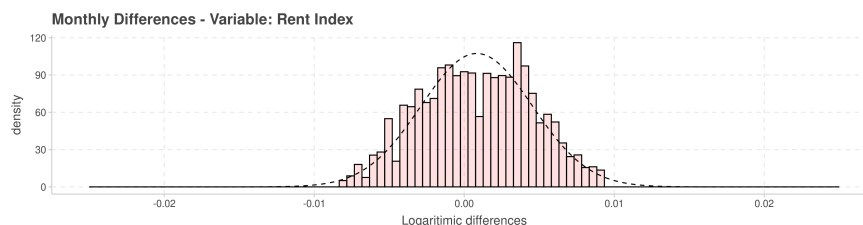
$$REP(\hat{H}^z) = \frac{\argmax \left[ \Delta_{\log}(\hat{H}_{2,1}^z), \Delta_{\log}(\hat{H}_{n,n-1}^z) \right]}{\text{med}\{\Delta_{\log}(\hat{H}_{t,t-1}^z)\}} \quad [7.8]$$

- *POS*: de positividad, calculada como un indicador con valor 1 si la serie tiene todos los valores positivos, y 0 si tiene algun valor negativo. Esta medida se incluye porque algunos métodos de regresión pueden ofrecer valores negativos.

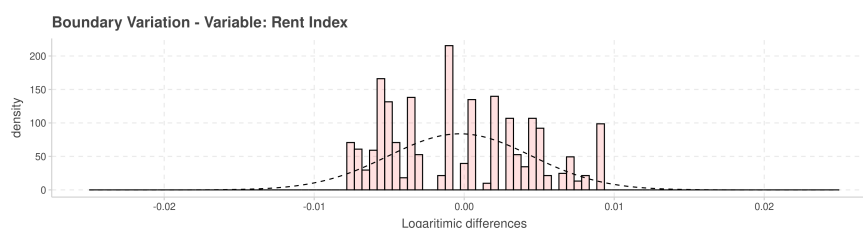
Para el caso de la distribución de variaciones logarítmicas mes a mes del alquiler, se obtiene una función de distribución normal estimada  $\mathcal{N}(0, 0.065)$ . La Figura 7.10 muestra dos de las funciones estimadas. En el caso de las diferencias mensuales, la aproximación de la distribución normal tiene un buen ajuste, en cambio, para la

variación frontera la forma es menos asimilable a una distribución normal. En ese caso, se acepta al ser más restrictiva antes variaciones mayores en valor absoluto y favorecerá transiciones año a año menores.

**Figura 7.10.** Funciones de densidad de la función de verosimilitud



**(a)** Variación de precios mensuales



**(b)** Variación de precios frontera

*Fuente:* elaboración propia.

Para el caso particular de la métrica *POS*, la función de densidad utilizada para estimar la verosimilitud no es una normal, sino que toma dos valores: para 1 (todos positivos), la verosimilitud es 1; y para 0, el valor es  $10^{-10}$ .

## 7.4 Resultados

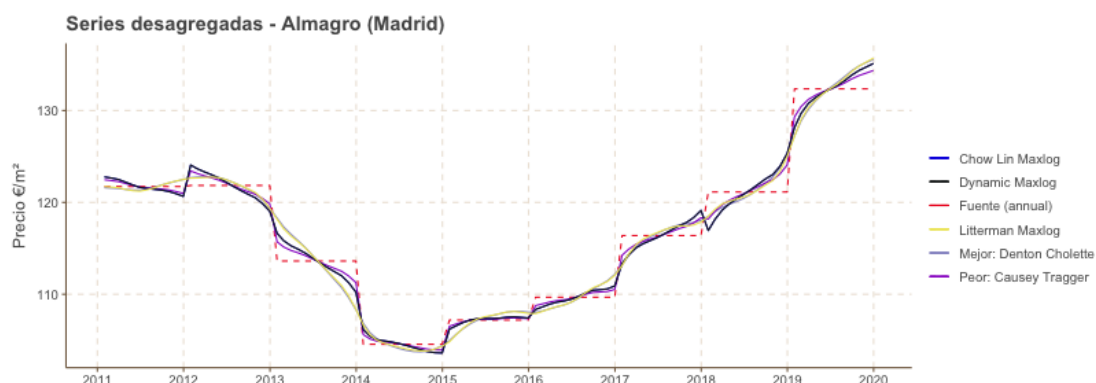
El método propuesto se ha evaluado sobre las series de alquiler de las 177 áreas de estudio, en base a tres aspectos:

- Comparativa de las métricas de calidad de los cinco modelos.
- Mejora del método comparado con una selección aleatoria de modelo.
- Diferencias entre modelos autorregresivos y no autorregresivos.
- Influencia del criterio de calidad.

Los tres ángulos anteriores se examinan tanto para las series candidatas como para la serie seleccionada de cada zona. Para su mejor comprensión, a continuación, se presenta un ejemplo representativo de todas ellas en la Figura 7.11, correspondiente al caso de un barrio madrileño con un comportamiento medio típico, como es el caso de Almagro (para ver todos los ejemplos, consúltase el Anexo I). La serie discontinua de color naranja ilustra los valores de la serie anual, que se busca desagregar, mientras que la serie discontinua de mayor

grosor y en color negro representa la serie óptima seleccionada mediante el método propuesto en la sección 7.3.2. El resto de las series, mostradas en diferentes colores, corresponden a los resultados de los 4 métodos que no fueron considerados óptimos.

**Figura 7.11.** Desagregación mensual del precio del alquiler. Zona: Barrio de Almagro (Madrid)



*Fuente:* elaboración propia.

De los cinco criterios de evaluación presentados en la metodología se ha decidido excluir en esta sección los resultados del de ajuste por MSE, ya que todos los métodos analizados presentan diferencias extremadamente bajas en todos los casos estudiados, siendo estas inferiores a  $10^{-10}$ . Por consiguiente, la evaluación del ajuste basado en el MSE no proporciona información valiosa ni relevante para el análisis en curso. Por este motivo se ha optado por centrar nuestra atención en otros criterios que permitan diferenciar y comparar más eficazmente los distintos métodos aplicados en la investigación.

### 7.4.1 Comparativa de métricas de calidad

La Tabla 7.4, muestra la distribución de los métodos seleccionados con el método aplicado para las series de alquiler desagregadas. Para cada uno, se representa la probabilidad media por criterio y la verosimilitud media total, se observa que el método más seleccionado es el método autorregresivo Litterman Maxlog, seguido por Dynamic Maxlog, que además ofrece mayor probabilidad para los criterios de variación frontera y mensuales.

Los métodos autorregresivos son los que acaparan más del 95% de las series finales, en detrimento de Denton y Causey-Trager, que muestran peor comportamiento en los cambios de año. La probabilidad del 100% en el criterio de positividad, indica que ninguna serie ganadora<sup>15</sup> ofrece valores negativos, y

<sup>15</sup>El término de “serie ganadora” se refiere a aquella que se selecciona por el modelo, por considerarla

por tanto no será un criterio discriminante para comparar métodos.

**Tabla 7.4.** Probabilidad y verosimilitud para las series seleccionadas, desglosadas por método ganador.

Método	% Casos	Prob. VF	Prob. VM	Prob. POS	Prob. final
Denton Cholette	34.7%	12.08%	17.75%	100.0%	2.27%
Dynamic Maxlog	30.2%	15.70%	17.13%	100.0%	2.96%
Litterman Maxlog	29.0%	17.45%	20.95%	100.0%	4.16%
Causey Tragger	3.3%	28.27%	17.26%	100.0%	5.83%
Chow Lin Maxlog	2.9%	18.11%	14.98%	100.0%	2.92%

Fuente: elaboración propia

Para el criterio de variaciones mensuales, en general, tal como se evidencia en la Tabla 7.5, los métodos con probabilidades medias más bajas están relacionados con valores de medidas de  $VF$  más extremos. Esto significa que, a mayor variación entre diciembre y enero, menor es la probabilidad de que dicho evento ocurra en la distribución de referencia.

Para el caso del método Causey Trager, se observa una probabilidad media alta pero con unos valores de variación frontera media intermedia similares al resto de casos. Este comportamiento se debe una la alta dispersión de los valores de  $VF$  para este método.

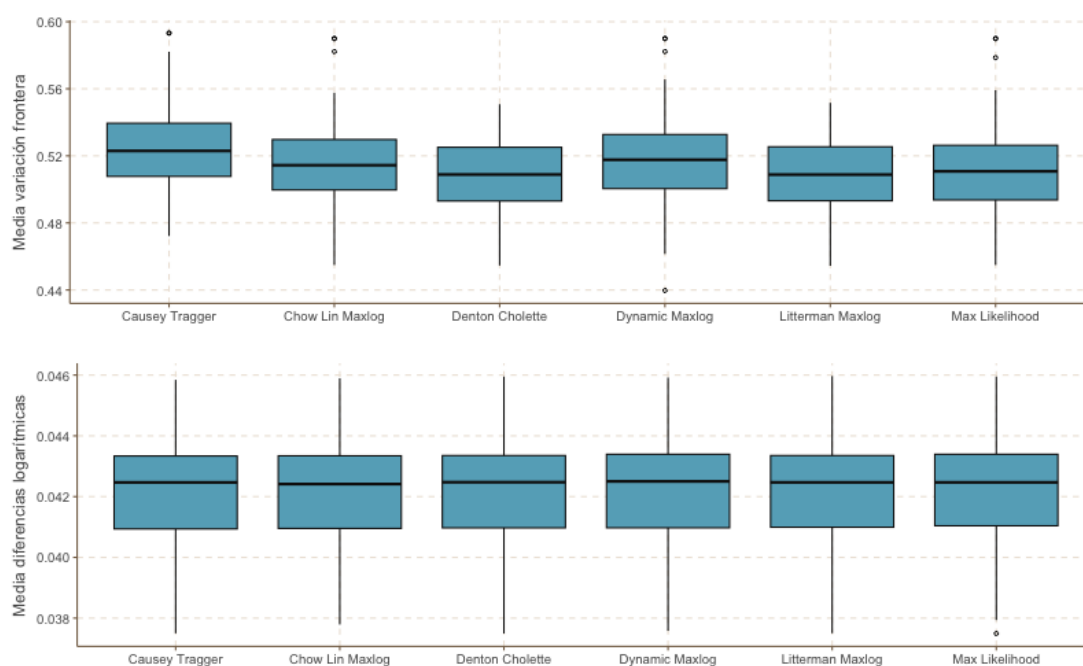
**Tabla 7.5.** Relación entre valores medios de variación frontera y probabilidad

Método	% Casos	media VF	mediana VF	Stdev. VF	Prob. VF
Denton Cholette	34.7%	0.553	0.557	0.032	12.08%
Dynamic Maxlog	30.2%	0.548	0.549	0.023	15.70%
Litterman Maxlog	29.0%	0.550	0.558	0.035	17.45%
Causey Tragger	3.3%	0.563	0.557	0.026	28.27%
Chow Lin Maxlog	2.9%	0.560	0.569	0.038	18.11%

Fuente: elaboración propia

El estudio de los rangos intercuartílicos de los distintos métodos, como muestra la Figura 7.12, indica un mayor grado de variabilidad en el método Denton-Cholette, con la presencia de valores muy extremos en ambas medidas. El resto de los métodos ofrecen comportamientos similares, sin apreciarse diferencias notables en las series seleccionadas por el MLE.

óptima dentro de las 5 candidatas.

**Figura 7.12.** Comparación de métricas clave según los diferentes métodos

*Fuente:* elaboración propia.

En el análisis comparativo de diversos métodos aplicados a las series de alquiler desagregadas, el enfoque autorregresivo se posiciona como el preferido por el modelo, representando más del 95% de las series finales. Se observó, además, una propensión menor a seleccionar los métodos que ofrecen variaciones intermensuales extremas o diferencias abruptas entre enero y diciembre, como es el caso de Denton-Cholette y Causey-Trager, respectivamente.

### 7.4.2 Mejora incremental del método

Para evaluar cuanto mejor es una selección por máxima verosimilitud que un único método, se comparan las probabilidades y verosimilitud de las series generada por MLE contra una selección de un sólo método. El cual puede ser fijo o seleccionando de forma arbitraria para cada zona (aleatorio<sup>16</sup>).

Para el primer escenario, se comparan la probabilidad y para la medida  $VF$  de cómo funcionaría un proceso que seleccionara un método de desagregación aleatoria. Como se observa en la Tabla 7.6 de probabilidad, y la Tabla 7.7 de valores de  $VF$ , la selección aleatoria es notablemente peor. Con probabilidades de verosimilitud menores y peores indicadores de calidad, que si hubiéramos tomado el método recomendado por el criterio de máxima verosimilitud.

<sup>16</sup>Se denomina aleatorio, porque en este caso el método elige un método al azar para cada una de las zonas.

**Tabla 7.6.** Comparativa de probabilidades en series seleccionadas por máxima verosimilitud contra una selección aleatoria

Método	Prob. VF	Prob. VM	Prob. POS	Prob. final
Máxima verosimilitud	37.65%	20.91%	100.00%	8.88%
Aleatorio	24.94%	16.79%	100.00%	5.64%

Fuente: elaboración propia

**Tabla 7.7.** Comparativa de valores en series seleccionadas por máxima verosimilitud contra una selección aleatoria

Método	media VF	mediana VF	Stdev. VF
Máxima verosimilitud	0.511	0.511	0.023
Aleatorio	0.514	0.515	0.023

Fuente: elaboración propia

En el segundo caso, se estudia la mejora comparativa contra un único métodos. Se corrobora de nuevo la superioridad del método, como se aprecia en la Tabla 7.8. tanto la probabilidad como las medidas de  $VF$  y  $VM$  son claramente mejores en método de máxima verosimilitud. Se observa, además, que el uso de un único método inapropiado puede afectar seriamente a los resultados finales (ver caso de Causey-Trager).

**Tabla 7.8.** Comparativa de probabilidades en series seleccionadas por máxima verosimilitud contra todos los métodos y una selección aleatoria

Método	Prob. VF	Prob. VM	Prob. POS	Prob. final
Máxima verosimilitud	37.65%	20.91%	100.00%	8.88%
Denton Cholette	32.38%	20.41%	100.00%	7.57%
Litterman Maxlog	30.01%	19.92%	100.00%	6.94%
Dynamic Maxlog	27.54%	15.54%	100.00%	6.45%
Aleatorio	24.94%	16.79%	100.00%	5.64%
Chow Lin Maxlog	23.40%	17.45%	100.00%	5.33%
Causey Tragger	11.36%	10.61%	100.00%	1.92%

Fuente: elaboración propia

### 7.4.3 Modelos autorregresivos contra no autorregresivos

En el análisis los métodos no autorregresivos, se confirma que los métodos Causey-Trager y Denton-Cholette muestran dificultades para suavizar las transiciones en el cambio de año, tal y como muestra la Figura 7.13. Esta situación se corrobora

con una menor probabilidad de la variación frontera de los métodos como se observa en la Tabla 7.8.

**Figura 7.13.** Desagregación no paramétrica: Denton y Causey-Trager



*Fuente:* elaboración propia.

Los métodos de regresión ofrecen una mayor capacidad para suavizar las transiciones anuales, como muestra la Figura 7.14. En el método Dynamic Maxlog no es infrecuente encontrar valores extremos al inicio de las series como vemos en la propia figura. Si bien es cierto que no tanto como en el método Denton original, que se descartó por mostrar frecuentemente este patrón. Por contra, los de tipo autorregresivo muestran transiciones más suaves tanto en las fronteras, entre los meses de diciembre y enero, como en los cambios mes a mes.

**Figura 7.14.** Desagregación basados en regresión



*Fuente:* elaboración propia.

La ventaja de los métodos paramétricos es la posibilidad de estudiar la bondad del ajuste. Para el caso de estudio, tal y como muestra la Tabla 7.9, el ajuste de tanto Dynamic Maxlog y Chow-Lin en  $R^2$  es muy alto, y, en cambio, para Litterman existe un valor sensiblemente más bajo. Las diferencias pueden estar motivadas por la mayor sensibilidad de este último método ante valores atípicos y series ruidosas,

además de que los dos primeros métodos se adaptan mejor a series sin un patrón de tendencia estable (véase Anexo 7a).

**Tabla 7.9.** Parámetros principales de las diferencias logarítmicas

Método	R <sup>2</sup>
Dynamic Maxlog	87.68%
Chow Lin Maxlog	80.25%
Litterman Maxlog	65.69%

Fuente: elaboración propia

#### 7.4.4 Influencia del criterio de calidad en la selección

Puesto que la decisión de seleccionar una serie está condicionada a la verosimilitud de la combinación de una serie de criterios, un cambio en el modo de agregarlos puede dar lugar a una selección totalmente diferente. Para evaluar el grado de sensibilidad de la misma para un caso concreto, se comparan los resultados en caso de seleccionar a través de un solo criterio.

En primer ejemplo, que usa solamente el error cuadrático de los valores y representado en la Figura 7.16, muestra como la mejor selección tiene un nivel bajo de variabilidad mensual, en el primer año replica la forma del escalón y las transiciones anuales de los primeros años son ligeramente abruptas.

**Figura 7.15.** Mejor y peor serie por MSE



Fuente: elaboración propia.

Para la variación frontera (Figura 7.16), se observa un comportamiento más suave a lo largo del tiempo, favoreciéndose la transición suave entre años.



**Figura 7.16.** Mejor y peor serie por verosimilitud por VF

*Fuente:* elaboración propia.

Finalmente, si el criterio son las variaciones intermensuales (Figura 7.17), se aprecia que la selección coincide con el caso anterior, lo que estaría asociado a que el criterio VF contiene parcialmente los requisitos del criterio VM.

**Figura 7.17.** Mejor y peor serie por VM

*Fuente:* elaboración propia.

En resumen, se constata la superioridad de los métodos autorregresivos sobre los que no lo son, para el caso de estudio. El motivo es la dificultad de los métodos Causey-Tragger y Denton-Cholette para suavizar las transiciones en los cambios de año y los casos de alta variabilidad, ambas son cuestiones específicas de las series generadas por nuestro modelo y que se ligan a los problemas de estimación mencionados en los capítulos precedentes.

Por otra parte, los métodos autorregresivos también muestran diferencias debidas a las peculiaridades de las series de entrada. Siendo los métodos más sensibles al ruido en las series originales aquellos que pueden provocar más dificultad a ciertos métodos.

Finalmente, aunque las series generadas cualquiera de los métodos solucionan de una forma razonable el problema, el uso de una verosimilitud combinada en

base a distintos criterios ofrece un método más robusto ante las debilidades de un criterio en particular.

A lo largo de este capítulo se ha presentado una novedosa metodología para asistir el proceso de desagregación temporal. Las series resultantes aseguran la coherencia y la calidad temporal entre los distintos niveles de agregación, al igual que se ha conseguido la coherencia zonal en el método presentado en el capítulo anterior. En el siguiente capítulo, se analizan las series temporales generadas para los índices de precio de oferta y de mercado, atendiendo a sus características estructurales como de mercado.

## Anexo 7a. Métodos de desagregación temporal

### Método Denton

El método de benchmarking conocido como método Denton (Denton, 1971) o de primeras diferencias, tiene como objetivo minimizar los cambios en las series de alta frecuencia, en adelante indicadoras, al tiempo que cumple un conjunto de restricciones de evaluación comparativa.

Este método minimiza los cuadrados de las desviaciones, absolutas o relativas, de la serie original y de la serie indicadora, denominándose el parámetro  $h$  como el grado de diferencias. La técnica se basa en el principio de preservación del movimiento, sobre la que existen las modalidades aditiva y proporcional. En el caso de la versión aditiva, cuando  $h = 0$  se minimiza la suma de los cuadrados de las diferencias entre la serie original y la indicadora, para  $h = 1$  se minimiza la suma de las primeras diferencias, para  $h = 2$  las segundas diferencias, y así en adelante. Para la versión proporcional del método, las diferencias se miden en términos absolutos.

El método utiliza la minimización restringida, de una forma cuadrática, en relación con las diferencias entre las estimaciones desagregadas y una serie de indicadores. La función de penalización se puede especificar tanto como diferencias aritméticas como proporcionales. Este método es comúnmente utilizado por la facilidad y estabilidad de su implementación, así como por su robustez ante problemas de armonización. El problema se plantea como una minimización cuadrática de una función de penalización, minimizando los ajustes en el movimiento de la serie original, y expresado como:

$$\min x_q \sum_{t=2}^{4y} [(X_t/X_{t-1}) - (I_t/I_{t-1})]^2 \quad [7.9]$$

$$s.a. \sum_{4n-3}^{4n} X_t = A_n. \quad n = 1, \dots, y \quad [7.10]$$

donde  $X_t$  es la serie trimestral a estimar,  $I_t$  es la serie trimestral disponible (indicador),  $A_n$  es la serie anual de la variable,  $t = 1, \dots, 4y$  es el índice de la serie trimestral y  $n = 1, \dots, y$  es el índice de la serie anual.

Este método no preserva explícitamente las tasas de variación trimestral de la serie indicadora, utilizadas comúnmente por los analistas de coyuntura económica. Para hacerlo, existe una alternativa no paramétrica desarrollada por Causey y Trager (1981), descrita posteriormente, que mantiene lo máximo

posible las tasas del indicador. Por último, el método Denton proporcional tiende a producir series más suavizadas y se considera una aproximación adecuada cuando la serie indicadora de referencia no muestra cambios inesperados entre periodos, o en los casos en los que la serie indicadora no es muy volátil.

### **Método Denton-Cholette**

También conocido como Cholette-Dagum, es una generalización del método Denton que elimina los movimientos espurios al principio de las series de resultados. Cholette y Dagum (1994) proponen un procedimiento basado en una regresión por mínimos cuadrados generalizada, la cual toma en consideración la presencia de sesgo en el indicador de autocorrelación y heterocedasticidad en los errores de los datos originales, y se define según:

$$I_t = a_t + X_t + e_t, t = 1, \dots, q \quad [7.11]$$

$$A_t = \sum_{4n-3}^{4n} X_t + w_n, n = 1, \dots, y \quad [7.12]$$

donde  $X_t$  es la serie trimestral a ser estimada;  $I_t$  es la serie trimestral disponible (indicador);  $A_n$  es la serie anual de la variable;  $t = 1, \dots, 4y$  es el índice de la serie trimestral;  $n = 1, \dots, y$  es el índice de la serie anual;  $a_t$  es un efecto determinístico combinado;  $e_t$  es un error trimestral autocorrelacionado y heterocedástico; y  $w_n$  es el error heterocedástico de  $A_n$  incorrelacionado con  $e_t$ .

En una publicación posterior. Dagum y Cholette (2006a) definen un marco de regresión unificado construyendo una regresión de los indicadores de alta frecuencia sobre las restricciones de baja frecuencia, los efectos deterministas y los errores autocorrelacionados. El modelo es también adaptable a una forma multiplicativa y puede anidar otros métodos comunes de desagregación como en Chow-Lin, Fernández o Litterman.

### **Método de Chow y Lin**

Este método desarrollado por Chow y Lin (1971), en adelante Chow-Lin, pertenece a la familia de los modelos basados en regresión, donde se incluyen también los de Fernández (1981) y Litterman (1983).

Los métodos autorregresivos se basan en modelos lineales generalizados sobre la serie anual y un conjunto de series indicadoras, en ellos se asume la existencia de una relación lineal entre las series de baja y alta frecuencia. Esta tipología

de aproximaciones difieren, esencialmente, en los modelos propuestos para la estructura de los residuos. Chow y Lin (1971), amplían el enfoque de mínimos cuadrados generalizados para la desagregación temporal, proponiendo una regresión univariante de los datos objetivo de baja frecuencia sobre indicadores de alta frecuencia. El método proporciona una solución óptima para la extrapolación, y propone un mecanismo para interpolar, armonizar y extrapolar series, basado en una regresión que usa, como variable explicativa, el indicador observado de alta frecuencia. Por tanto, se construye un modelo de regresión entre la variable no observada, de alta frecuencia (la serie armonizada), y una serie de indicadores relacionados de alta frecuencia observados, tal y como indica la expresión analítica siguiente:

$$X_t = \sum_{j=1}^p \beta_j I_{j,t} + u_t \quad [7.13]$$

donde  $X_t$  es la serie trimestral a estimarse,  $I_t$  es la serie trimestral disponible (indicador),  $\beta_j$  es el coeficiente de regresión del indicador  $j$  anualizado y  $u_t$  es un error aleatorio  $AR(1)$  con  $v_t$ . Como  $X_t$  no es observable, y por tanto desconocido, la expresión [7.13] no puede estimarse directamente, el método asume que la misma relación entre la variable y los indicadores en frecuencia trimestral se mantiene en la frecuencia anual, y propone una agregación del modelo a estimar según:

$$A_n = \sum_{j=1}^p \beta_j I_{j,t} + u_n^a \quad n = 1, \dots, y \quad [7.14]$$

donde  $A_n$  se define como una agregación de valores trimestral:

$$A_n = \sum_{4n-3}^{4n} X_t \quad [7.15]$$

donde  $I_t$  es la serie trimestral del índice,  $\beta_j$  es el coeficiente de regresión del indicador  $j$  anualizado y  $u_n^a$  es un error anual  $ARMA(1,1)$  derivado del autorregresivo  $AR(1)$  de alta frecuencia. El método asume que los residuos de la serie de alta frecuencia siguen un proceso autorregresivo de orden 1,  $AR(1)$ ,  $u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t$ , donde  $\epsilon$  es  $WN(0, \sigma_\epsilon)$  <sup>17</sup>.

Chow y Lin derivan un estimador BLUE <sup>18</sup> de los coeficientes  $\beta$  y de  $\rho$ . Más recientemente, Dagum y Cholette (2006a) demostraron que el modelo de Chow y Lin es un caso particular de su modelo de regresión aditivo, con una serie relacionada. El método asume un comportamiento  $AR(1)$  para los residuos de la

<sup>17</sup>WN hace referencia a Ruido Blanco, del inglés *White Noise*.

<sup>18</sup>Mejor estimador lineal insesgado, o Best Linear Unbiased Estimator.

regresión, estimando su coeficiente autorregresivo con los datos, en lugar de mediante un calibrarlo por el usuario.

## Método Causey y Trager

El método desarrollado por Causey y Trager (1981) plantea armonizar la serie de alta frecuencia minimizando los ajustes a la tasa de variación de la serie del índice, para el caso trimestral viene definida según las expresiones [7.16] y [7.17]. Como se observa en la expresión [7.16], la función objetivo es cuadrática y no lineal, y por tanto no es posible obtener una solución algebraica para la serie a estimar, las condiciones de primer orden del problema. La estimación de la serie de alta frecuencia armonizada debe realizarse a través de procedimientos de optimización no lineales.

$$\min x_q \sum_{t=2}^{4y} [(X_t/X_{t-1}) - (I_t/I_{t-1})]^2 \quad [7.16]$$

$$s.a. \sum_{4n-3}^{4n} X_t = A_n, n = 1, \dots, y \quad [7.17]$$

La eficiencia y robustez de los procedimientos utilizados en la estimación dependen de las particularidades de cada caso. Por lo tanto, esta aproximación puede dar lugar, en ocasiones, a problemas de falta de convergencia en la búsqueda de solución, estimaciones inexactas o resultados muy dependientes de los valores iniciales.

## Parámetro autorregresivo y otros métodos

Los métodos restantes como Fernández o Litterman, se aplican a los casos en los que los indicadores de alta frecuencia y la serie anual no están cointegrados <sup>19</sup>. Fernández y Litterman asumen que los residuos trimestrales siguen un proceso no estacionario, es decir,  $u_t = u_{t-1} + v_t$ , donde  $v$  es un un modelo autorregresivo de orden 1, ( $v_t = \rho \cdot v_{t-1} + \epsilon_t$ , donde  $\epsilon$  Es  $\mathcal{WN}(0, \sigma_\epsilon)$ ).

Fernández es un caso especial de Litterman, donde  $\rho = 0$ , y por tanto,  $u$  sigue una camino aleatorio aleatoria. La matriz de varianza-covarianza puede calcularse según como:

---

<sup>19</sup>La cointegración es una propiedad estadística de las variables en series temporales, donde al menos dos series temporales presentan una tendencia estocástica común. Esto indica que las series están vinculadas en el largo plazo y, aunque puedan desviarse temporalmente, retornarán a su relación de equilibrio a lo largo del tiempo (Enders, 2014).

$$\Sigma_L(\rho) = \sigma_\epsilon^2 [\Delta' H(\rho)' H(\rho) \Delta]^{-1} \quad [7.18]$$

donde  $\Delta$  es la misma matriz de diferencias  $n \times n$  que en el método Denton;  $H(\rho)$  es una matriz  $n \times n$  con 1 en su diagonal principal,  $-\rho$  en su primera subdiagonal y 0 en el resto. Para el caso particular de Fernández, con el parámetro autoregresivo  $\rho = 0$ , la matriz de covarianzas resultado tendría la forma indicada en la siguiente ecuación:

$$\Sigma_L(0) = \sigma_\epsilon^2 \cdot (\Delta \Delta')^{-1} = \sigma_{\epsilon_{\text{psilon}}}^2 \cdot \Sigma_D \quad [7.19]$$

En general, no existe un método único para el cálculo del parámetro autorregresivo  $\rho$ , el método Chow-Lin (Chow y Lin, 1971) propone un procedimiento iterativo, que infiere el parámetro de la autocorrelación observada de los residuos de baja frecuencia,  $u_l$ . En un enfoque diferente, Paige (1979) sugiere la maximización de la probabilidad de la regresión generalizada GLS. Por otro lado, Barbone *et al.* (1981) sugiere un minimizar la suma ponderada de los cuadrados de los residuos como indica la siguiente expresión:

$$RSS(\rho, \sigma_\epsilon^2, \beta) = u_l' (C \Sigma C')^{-1} u_l \quad [7.20]$$

Al contrario del enfoque de máxima verosimilitud,  $\sigma^2$  no se cancela, por tanto, los resultados son sensibles a la especificación de  $\sigma$ , con diferentes implementaciones que conducen a estimaciones diferentes pero inconsistentes de  $\rho$ .

Más recientemente, se han desarrollado métodos alternativos a través de aproximaciones bayesianas Rojo-García y Sanz-Gómez (2005), cuyo objetivo es la estimación de la regularidad de las series en comparación con las técnicas clásicas que habitualmente muestran mayor volatilidad.

#### 7.4.5 Estimadores de máxima verosimilitud

La estimación de máxima verosimilitud (MLE) es un enfoque fundamental en la estadística para estimar los parámetros de un modelo probabilístico. A pesar de su aparente simplicidad este método tiene propiedades teóricas sólidas, y ha demostrado su utilidad en una amplia variedad de aplicaciones prácticas. Este estimador permite trabajar con variables que no siguen una distribución normal, y se basa en la verosimilitud de que la muestra se haya generado con una función de distribución específica (Bickel y Doksum, 2015; Casella y Berger, 2021; DeGroot y Schervish, 2012).

La estimación de máxima verosimilitud fue introducido por Fisher (1922b), y ha sido ampliamente utilizado para estimar los parámetros de modelos probabilísticos. Se basa en un proceso que encuentra los valores de los parámetros de un modelo, que maximizan la función de verosimilitud que representa la probabilidad de observar los datos inferidos por el modelo.

Su estimación parte de una muestra aleatoria  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  de observaciones independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) de una distribución de probabilidad  $f(x; \theta)$ , donde  $\theta$  es un vector de parámetros desconocidos. La función de verosimilitud, denotada por  $L(\theta; \mathbf{x})$ , se define como el producto de las funciones de densidad de probabilidad (PDF) de las observaciones individuales:

$$L(\theta; \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) \quad [7.21]$$

El objetivo del método MLE es encontrar el valor de  $\theta$  que maximiza la función de verosimilitud:

$$\hat{\theta}_{\text{MLE}} = \arg \max_{\theta} L(\theta; \mathbf{x}) \quad [7.22]$$

Dado que el logaritmo es una función monótona creciente, maximizar la función de verosimilitud es equivalente a maximizar la log-verosimilitud, que se define como:

$$\ell(\theta; \mathbf{x}) = \log L(\theta; \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \log f(x_i; \theta) \quad [7.23]$$

Para encontrar el valor de  $\theta$  que maximiza la log-verosimilitud, se toma la derivada parcial de  $\ell(\theta; \mathbf{x})$  con respecto a cada componente de  $\theta$  y se iguala a cero:

$$\frac{\partial \ell(\theta; \mathbf{x})}{\partial \theta_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad [7.24]$$

donde  $k$  es la dimensión de  $\theta$ . Las ecuaciones resultantes se conocen como ecuaciones de puntuación, y su solución proporciona los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros desconocidos. En general, las ecuaciones de puntuación pueden ser no lineales y requerir métodos numéricos para encontrar su solución, como el método de Newton-Raphson o el algoritmo EM (Expectation-Maximization).

El método MLE tiene varias propiedades deseables. Bajo ciertas condiciones regulares<sup>20</sup>, los estimadores de máxima verosimilitud son asintóticamente no

---

<sup>20</sup>Véase, por ejemplo, Casella y Berger (2021)



sesgados, eficientes y normalmente distribuidos:

$$\hat{\theta}_{\text{MLE}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\theta, I(\theta)^{-1}), \quad [7.25]$$

donde  $I(\theta)$  es la matriz de información de Fisher, que se define como:

$$I_{ij}(\theta) = -\mathbb{E} \left[ \frac{\partial^2 \ell(\theta; \mathbf{x})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right]. \quad [7.26]$$

La matriz de información de Fisher juega un papel importante en la inferencia estadística, ya que proporciona una medida de la incertidumbre en la estimación de los parámetros y permite construir intervalos de confianza y realizar pruebas de hipótesis.

Los estimadores de máxima verosimilitud han sido aplicados en diversos campos y a través de diferentes técnicas. Entre las técnicas más utilizadas se encuentra el algoritmo de maximización de la esperanza (Expectation-Maximization, EM), que fue propuesto por Dempster, Laird y Rubin (1977) y posteriormente perfeccionado por Meng y Rubin (1993). El algoritmo EM es especialmente útil en problemas de estimación donde los datos presentan cierto grado de falta de información o incompletitud, conocidos como datos ausentes o datos censurados.

El algoritmo EM es un método iterativo que busca maximizar la función de verosimilitud incompleta mediante la actualización alternativa de dos pasos: el paso de esperanza (E-step) y el paso de maximización (M-step). En el paso de esperanza, se calcula la esperanza condicional de la verosimilitud completa, dada la muestra observada y los valores actuales de los parámetros. En el paso de maximización, se actualizan los parámetros maximizando la esperanza condicional calculada en el paso de esperanza. El algoritmo EM se repite hasta que se alcanza la convergencia en los parámetros estimados.

