0.1 Izračun točke pogleda za dimetrično projekcijo

V prostoru imamo:

- osnovne enotske vektorje $\mathbf{i} = [1, 0, 0]$, $\mathbf{j} = [0, 1, 0]$, $\mathbf{k} = [0, 0, 1]$,
- iščemo **eno samo ravnino** (določeno z njenim **normalnim vektorjem** $\mathbf{n}$, dolžine 1),
- takšno, da bodo **ortogonalne projekcije** vektorjev $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ v to ravnino dajale dolžine:

$$|\mathbf{i}'| = |\mathbf{k}'| = 2|\mathbf{j}'| \quad \text{(dimetrična zahteva)}$$

in

$$|\mathbf{i}'|^2 + |\mathbf{j}'|^2 + |\mathbf{k}'|^2 = 2 \quad \text{(skupna energijska enakost)}$$

Ortogonalna projekcija vektorja v ravnino

Projekcija vektorja $\mathbf{v}$ v ravnino z enotskim normalnim vektorjem $\mathbf{n}$ je:

$$\mathbf{v}_{\text{proj}} = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$$

Dolžina kvadrata te projekcije:

$$|\mathbf{v}_{\text{proj}}|^2 = |\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})^2$$

Ker so $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ enotski, to postane:

$$|\mathbf{i}'|^2 = 1 - (\mathbf{i} \cdot \mathbf{n})^2 = 1 - n_x^2 |\mathbf{j}'|^2 = 1 - n_y^2 |\mathbf{k}'|^2 = 1 - n_z^2$$

Postavimo zdaj pogoje:

1. $|\mathbf{i}'|^2 = |\mathbf{k}'|^2 \Rightarrow n_x^2 = n_z^2$
2. $|\mathbf{i}'|^2 = 4 \cdot |\mathbf{j}'|^2 \Rightarrow 1 - n_x^2 = 4(1 - n_y^2)$
3. $|\mathbf{i}'|^2 + |\mathbf{j}'|^2 + |\mathbf{k}'|^2 = 2$

Reševanje sistema:

Zapišimo:

- $n_x^2 = n_z^2 = a$
- $n_y^2 = b$

Pogoj (2.):

Zaradi $|\mathbf{i}'| = |\mathbf{k}'| = 2|\mathbf{j}'|$, mora veljati:

$$1 - n_x^2 = 4(1 - n_y^2) \Rightarrow 1 - a = 4(1 - b) \Rightarrow a = 1 - 4(1 - b) = 1 - 4 + 4b = -3 + 4b \quad \text{(1) popravljeno}$$

Pogoj (3.):

$$(1 - a) + (1 - b) + (1 - a) = 2 \Rightarrow 3 - 2a - b = 2 \Rightarrow 2a + b = 1 \quad (2)$$

Popravek pogoja (2.):

Vstavimo (1) v (2):

$$2(-3 + 4b) + b = 1 \Rightarrow -6 + 8b + b = 1 \Rightarrow 9b = 7 \Rightarrow b = \frac{7}{9}$$

Potem:

$$a = -3 + 4b = -3 + \frac{28}{9} = \frac{1}{9}$$

Končni rezultati:

$$n_x^2 = n_z^2 = \frac{1}{9}, \quad n_y^2 = \frac{7}{9}$$

Ker gre za **enotski vektor**, to tudi preverimo:

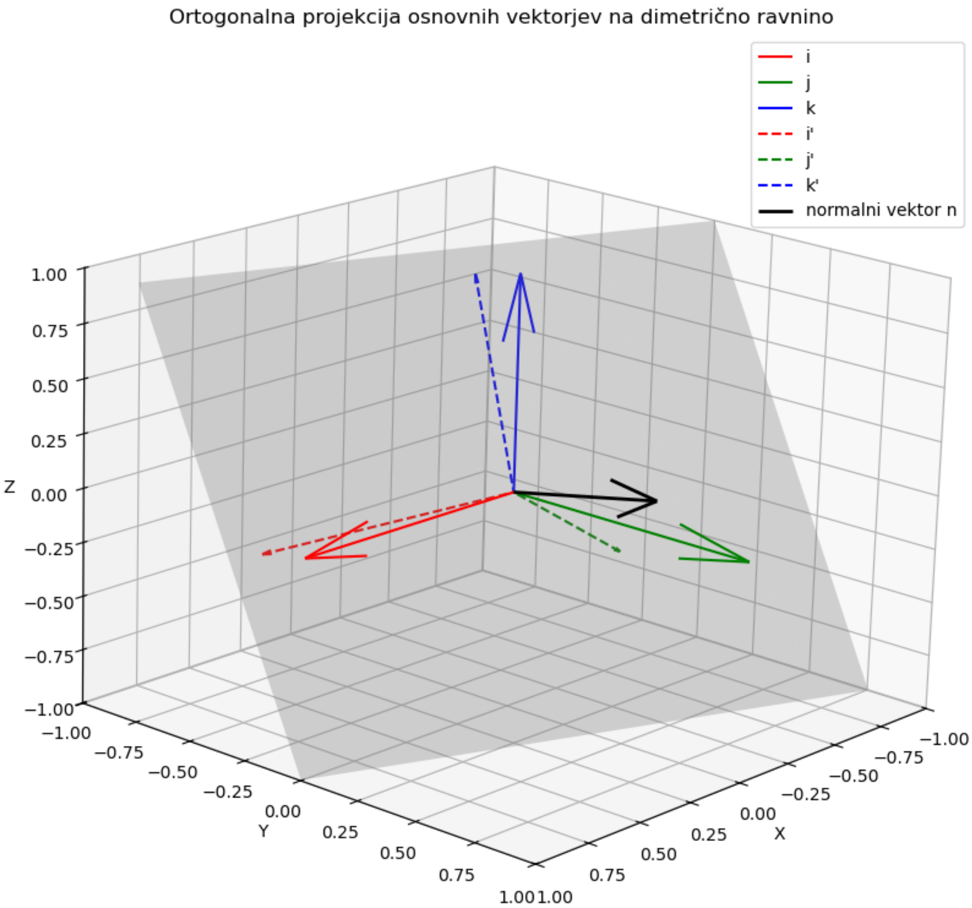
$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \frac{1}{9} + \frac{7}{9} + \frac{1}{9} = \frac{9}{9} = 1 \quad \checkmark$$

Izberemo pozitivne korene:

$$n = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{9}} \\ \sqrt{\frac{7}{9}} \\ \sqrt{\frac{1}{9}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \sqrt{\frac{7}{9}} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0,3333 \\ 0,8819 \\ 0,3333 \end{bmatrix}$$

Kaj to pomeni?

- Če **projiciraš osnovne vektorje** $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ortogonalno na **ravnino z normalo** $\mathbf{n}$ (zgoraj),
- boš dobil **dimetrično projekcijo**, kjer je $|\mathbf{i}'| = |\mathbf{k}'| = 2|\mathbf{j}'|$
- in $|\mathbf{i}'|^2 + |\mathbf{j}'|^2 + |\mathbf{k}'|^2 = 2$



Slika 1: Osnovni vektroji i, j in k, ter njihova dimetrična projekcija na ravnino.

Listing 1: izracun POV dimetricne proj.

```
#! /bin/python3
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
# 1. Osnovni vektorji
i = np.array([1, 0, 0])
j = np.array([0, 1, 0])
k = np.array([0, 0, 1])
# 2. Normalni vektor čdimetrine projekcijske ravnine
n = np.array([1/3, np.sqrt(7)/3, 1/3])
n = n / np.linalg.norm(n)  # normaliziramo
# 3. Funkcija za ortogonalno projekcijo vektorja na ravnino
def project_onto_plane(v, n):
    return v - np.dot(v, n) * n
# 4. Projekcije osnovnih vektorjev
i_proj = project_onto_plane(i, n)
j_proj = project_onto_plane(j, n)
k_proj = project_onto_plane(k, n)
# 5. Priprava 3D grafa
fig = plt.figure(figsize=(10, 8))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.set_title("Ortogonalna projekcija osnovnih vektorjev na čdimetrino ravnino")
# 6. Osnovni vektorji
ax.quiver(0, 0, 0, *i, color='r', label='i', linewidth=1.5)
ax.quiver(0, 0, 0, *j, color='g', label='j', linewidth=1.5)
ax.quiver(0, 0, 0, *k, color='b', label='k', linewidth=1.5)
# 7. Projekcije osnovnih vektorjev
ax.quiver(0, 0, 0, *i_proj, color='r', linestyle='dashed', label="i'", arrow_length_ratio=0.05)
ax.quiver(0, 0, 0, *j_proj, color='g', linestyle='dashed', label="j'", arrow_length_ratio=0.05)
ax.quiver(0, 0, 0, *k_proj, color='b', linestyle='dashed', label="k'", arrow_length_ratio=0.05)
# 8. Normalni vektor
ax.quiver(0, 0, 0, *n, color='k', label='normalni vektor n', linewidth=2)
# 9. Ravnina: čzraunamo y iz čenabe ravnine: n · r = 0
xx, zz = np.meshgrid(np.linspace(-1, 1, 10), np.linspace(-1, 1, 10))
yy = (-n[0]*xx - n[2]*zz) / n[1]
ax.plot_surface(xx, yy, zz, alpha=0.3, color='gray')
# 10. Osi in pogled
ax.set_xlabel('X')
ax.set_ylabel('Y')
ax.set_zlabel('Z')
ax.set_xlim([-1, 1])
ax.set_ylim([-1, 1])
ax.set_zlim([-1, 1])
ax.view_init(elev=25, azim=45)
ax.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()
```