7.1 Izračuni pravokotne projekcije

Za projekcijo vektorja v prostoru lahko uporabimo matrike, kar je posebej uporabno pri računalniški grafiki, linearni algebri in fiziki. Tukaj je razlaga postopka s poudarkom na reševanju z matrikami.

Na primer, da imamo poljuben vektor e:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}.$$

in želimo izračunati pravokotno projekcijo tega vektorja na eno od osnovnih ravnin, na preimer v ravnino XY. Ta ravnina ima normalni vektro n:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Splošna formula za izračun pravokotne projekcije na ravnino, ki gre skozi izhodišče kordinatnega sistema in ima normalo z enotskim vektrojem $\mathbf{n}$ je:

$$P = I - \mathbf{n}\mathbf{n}^T,$$

kjer matriko P poimenujemo **projektor** (to je matrika za pravokotno projekcijo na normalo).

Ker je $\mathbf{n} = [0, 0, 1]^T$, dobimo

$$P = I - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tako je pravokotna projekcija vektorja $\mathbf{e}$:

$$\mathbf{e}' = P\mathbf{e} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Take izračune bomo potrebovali v nadaljevanju, ko bomo želeli poljubne vektorje pravokotno projecirati na osnovne ravnine in določiti njihovo dolžino.

7.1.1 Izračun rotacije

V tridimenzionalnem prostoru lahko vektorje rotiramo okoli koordinatnih osi s pomočjo **rotacijskih matrik**. Vsaka rotacija v 3D prostoru se lahko predstavi z množico osnovnih rotacij okoli osi **X**, **Y** ali **Z**. Tak pristop se pogosto uporablja v:

- računalniški grafiki,
- robotiki,
- fiziki gibanja in simulacijah,
- analizi prostorskih podatkov.

Z uporabo matrik lahko **enostavno kombiniramo več rotacij** – npr. najprej okoli Z, nato okoli Y – z zaporednim množenjem matrik. S tem dobimo **kompozitno rotacijsko matriko**, ki deluje kot ena sama transformacija.

Imamo vektor:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

Vektor želimo najprej:

1. **zarotirati okoli osi Z** za kot α,
2. nato **še okoli osi Y** za kot β.

Rotacijo vektorja okoli osi Z za kot α lahko izračuna tako, da rotacijsko matriko pomnožimo z vektorjem:

$$\mathbf{R}_Z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vmesni rezultat po tej rotaciji:

$$\mathbf{e}' = \mathbf{R}_Z(\alpha) \cdot \mathbf{e}$$

Rotacijo vektorja okoli osi Y (kot β) pa tako, da podobno rotacijsko matriko pomnožimo z zgornjim rezulatom:

$$\mathbf{R}_Y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$

Končni rezultat po drugi rotaciji:

$$\mathbf{e}'' = \mathbf{R}_Y(\beta) \cdot \mathbf{e}' = \mathbf{R}_Y(\beta) \cdot \mathbf{R}_Z(\alpha) \cdot \mathbf{e}$$

7.1.2 Primer

Za izračun bomo vzeli poseben primer, kjer bomo vektor e zarotirali tako, da bo vektor zopet končal na eni od glavnih ravnin prostora. Tako ga bomo lahko bolj nazorno prikazali na fig. 1.

Naj bo:

- **vektor** $\mathbf{e} = [8, 0, 0]^T$
- **rotacija okoli Z** za $\alpha = 60^\circ$
- **nato rotacija okoli Y** za $\beta = -90^\circ$

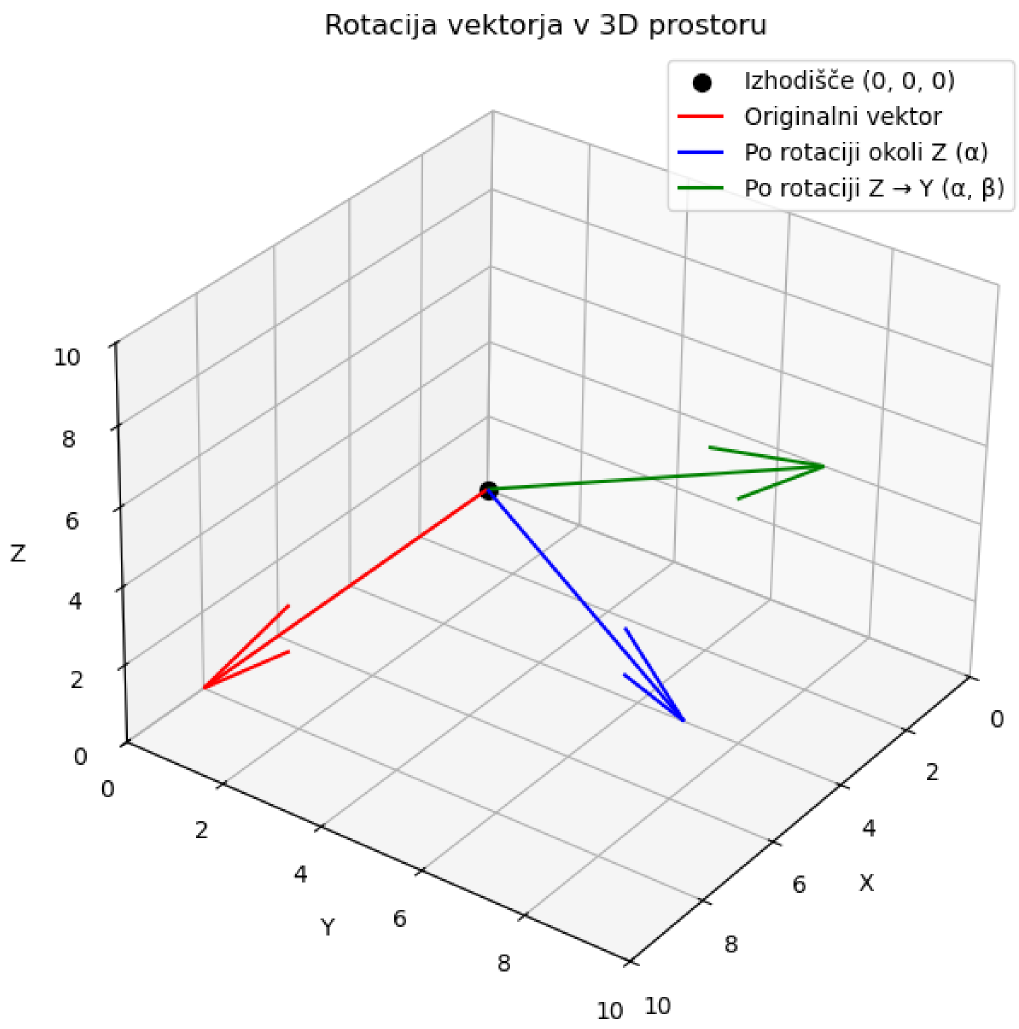

Figure 1: Rezultat rotacije vektorja.

1. Rotacijska matrika okoli Z

$$\mathbf{R}_Z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.8660 & 0 \\ 0.8660 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Rotacijska matrika okoli Y

$$\mathbf{R}_Y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Vmesni rezultat: $\mathbf{e}' = \mathbf{R}_Z(\alpha) \cdot \mathbf{e}$

$$\mathbf{e}' = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.8660 & 0 \\ 0.8660 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.0 \\ 6.9282 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4. Končni rezultat: $\mathbf{e}'' = \mathbf{R}_Y(\beta) \cdot \mathbf{e}'$

$$\mathbf{e}'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4.0 \\ 6.9282 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6.9282 \\ 4.0 \end{bmatrix}$$

5. Rezultat

Po rotaciji vektorja $[8, 0, 0]^T$ za 60° okoli Z in nato še za -90° okoli Y dobimo nov vektor:

$$\mathbf{e}_{\text{rotated}} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 6.93 \\ 4.00 \end{bmatrix}$$

Rezultat je tudi grafično prikazan na fig. 1.