

8.2 Izračun točke pogleda za dimetrično projekcijo

V prostoru imamo:

- osnovne enotske vektorje $\mathbf{i} = [1, 0, 0]$, $\mathbf{j} = [0, 1, 0]$, $\mathbf{k} = [0, 0, 1]$,
- iščemo **eno samo ravnino** (določeno z njenim **normalnim vektorjem** \mathbf{n} , dolžine 1),
- takšno, da bodo **ortogonalne projekcije** vektorjev $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ v to ravnino dajale dolžine:

$$|\mathbf{i}'| = |\mathbf{k}'| = 2|\mathbf{j}'| \quad (\text{dimetrična zahteva})$$

in

$$|\mathbf{i}'|^2 + |\mathbf{j}'|^2 + |\mathbf{k}'|^2 = 2 \quad (\text{skupna energijska enakost})$$

Ortogonalna projekcija vektorja v ravnino

Projekcija vektorja \mathbf{v} v ravnino z enotskim normalnim vektorjem \mathbf{n} je:

$$\mathbf{v}_{\text{proj}} = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$$

Dolžina kvadrata te projekcije:

$$|\mathbf{v}_{\text{proj}}|^2 = |\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})^2$$

Ker so $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ enotski, to postane:

$$|\mathbf{i}'|^2 = 1 - (\mathbf{i} \cdot \mathbf{n})^2 = 1 - n_x^2, |\mathbf{j}'|^2 = 1 - n_y^2, |\mathbf{k}'|^2 = 1 - n_z^2$$

Postavimo zdaj pogoje:

1. $|\mathbf{i}'|^2 = |\mathbf{k}'|^2 \Rightarrow n_x^2 = n_z^2$
2. $|\mathbf{i}'|^2 = 4 \cdot |\mathbf{j}'|^2 \Rightarrow 1 - n_x^2 = 4(1 - n_y^2)$
3. $|\mathbf{i}'|^2 + |\mathbf{j}'|^2 + |\mathbf{k}'|^2 = 2$

Reševanje sistema:

Zapišimo:

- $n_x^2 = n_z^2 = a$
- $n_y^2 = b$

Pogoj (2.):

Zaradi $|\mathbf{i}'| = |\mathbf{k}'| = 2|\mathbf{j}'|$, mora veljati:

$$1 - n_x^2 = 4(1 - n_y^2) \Rightarrow 1 - a = 4(1 - b) \Rightarrow a = 1 - 4(1 - b) = 1 - 4 + 4b = -3 + 4b \quad (1) \text{ popravljeno}$$

Pogoj (3.):

$$(1 - a) + (1 - b) + (1 - a) = 2 \Rightarrow 3 - 2a - b = 2 \Rightarrow 2a + b = 1 \quad (2)$$

Popravek pogoja (2.):

Vstavimo (1) v (2):

$$2(-3 + 4b) + b = 1 \Rightarrow -6 + 8b + b = 1 \Rightarrow 9b = 7 \Rightarrow b = \frac{7}{9}$$

Potem:

$$a = -3 + 4b = -3 + \frac{28}{9} = \frac{1}{9}$$

Končni rezultati:

$$n_x^2 = n_z^2 = \frac{1}{9}, \quad n_y^2 = \frac{7}{9}$$

Ker gre za **enotski vektor**, to tudi preverimo:

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \frac{1}{9} + \frac{7}{9} + \frac{1}{9} = \frac{9}{9} = 1 \quad \checkmark$$

Izberemo pozitivne korene:

$$n = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{9}} \\ \sqrt{\frac{7}{9}} \\ \sqrt{\frac{1}{9}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \sqrt{\frac{7}{9}} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0,3333 \\ 0,8819 \\ 0,3333 \end{bmatrix}$$

Kaj to pomeni?

- Če **projiciraš osnovne vektorje** i, j, k ortogonalno na **ravnino z normalo** n (zgoraj),
- boš dobil **dimetrično projekcijo**, kjer je $|i'| = |k'| = 2|j'|$
- in $|i'|^2 + |j'|^2 + |k'|^2 = 2$

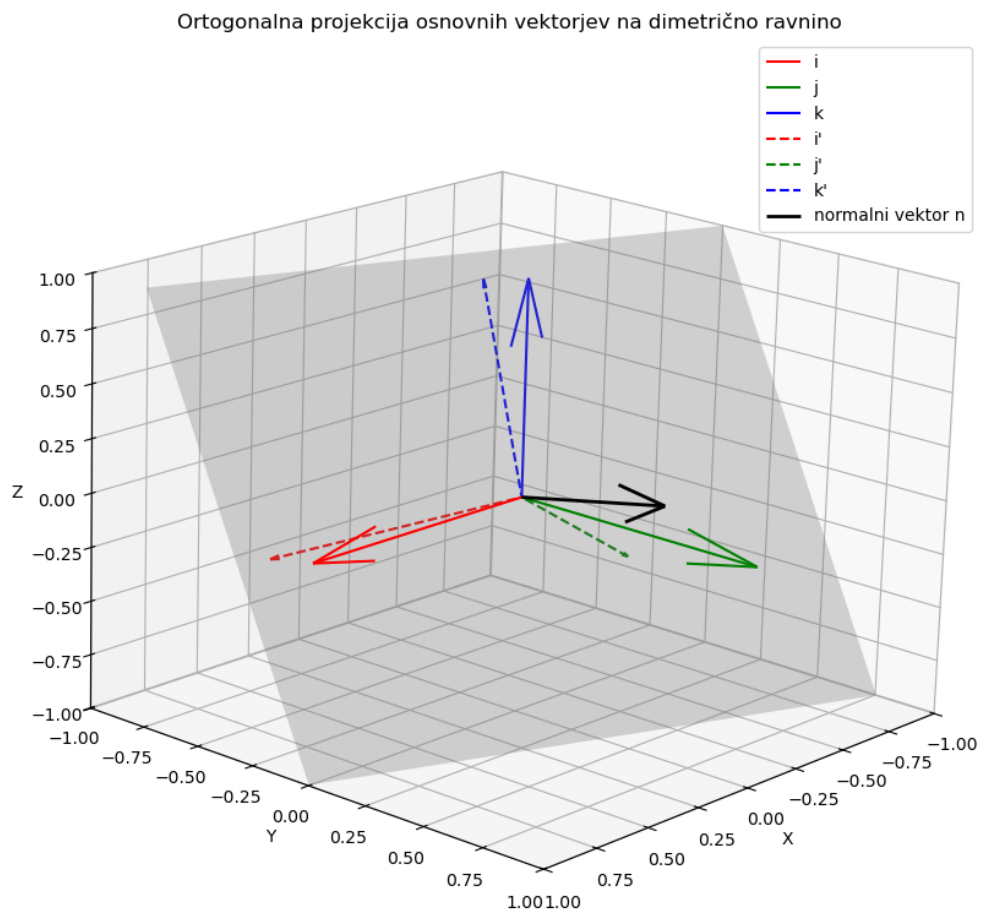


Figure 1: Osnovni vektorji i, j in k , ter njihova dimetrična projekcija na ravnino.

Listing 1: izracun POV dimetricne proj.

```

1  #!/bin/python3
2  import matplotlib.pyplot as plt
3  from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
4  # 1. Osnovni vektorji
5  i = np.array([1, 0, 0])
6  j = np.array([0, 1, 0])
7  k = np.array([0, 0, 1])
8  # 2. Normalni vektor čdimetrine projekcijske ravnine
9  n = np.array([1/3, np.sqrt(7)/3, 1/3])
10 n = n / np.linalg.norm(n) # normaliziramo
11 # 3. Funkcija za ortogonalno projekcijo vektorja na ravnino
12 def project_onto_plane(v, n):
13     return v - np.dot(v, n) * n
14 # 4. Projekcije osnovnih vektorjev
15 i_proj = project_onto_plane(i, n)
16 j_proj = project_onto_plane(j, n)
17 k_proj = project_onto_plane(k, n)
18 # 5. Priprava 3D grafa
19 fig = plt.figure(figsize=(10, 8))
20 ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
21 ax.set_title("Ortogonalna projekcija osnovnih vektorjev na čdimetrino
22             ravnino")
23 # 6. Osnovni vektorji
24 ax.quiver(0, 0, 0, *i, color='r', label='i', linewidth=1.5)
25 ax.quiver(0, 0, 0, *j, color='g', label='j', linewidth=1.5)
26 ax.quiver(0, 0, 0, *k, color='b', label='k', linewidth=1.5)
27 # 7. Projekcije osnovnih vektorjev
28 ax.quiver(0, 0, 0, *i_proj, color='r', linestyle='dashed', label="i'",
29           arrow_length_ratio=0.05)
30 ax.quiver(0, 0, 0, *j_proj, color='g', linestyle='dashed', label="j'",
31           arrow_length_ratio=0.05)
32 ax.quiver(0, 0, 0, *k_proj, color='b', linestyle='dashed', label="k'",
33           arrow_length_ratio=0.05)
34 # 8. Normalni vektor
35 ax.quiver(0, 0, 0, *n, color='k', label='normalni vektor n', linewidth
36           =2)
37 # 9. Ravnina: čzraunamo y iz čenabe ravnine:  $n \cdot r = 0$ 
38 xx, zz = np.meshgrid(np.linspace(-1, 1, 10), np.linspace(-1, 1, 10))
39 yy = (-n[0]*xx - n[2]*zz) / n[1]
40 ax.plot_surface(xx, yy, zz, alpha=0.3, color='gray')
41 # 10. Osi in pogled
42 ax.set_xlabel('X')
43 ax.set_ylabel('Y')
44 ax.set_zlabel('Z')
45 ax.set_xlim([-1, 1])
46 ax.set_ylim([-1, 1])
47 ax.set_zlim([-1, 1])
48 ax.view_init(elev=25, azim=45)
49 ax.legend()
50 plt.tight_layout()
51 plt.show()

```