



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

EL MÈTODE DE NEWTON COM A SISTEMA DINÀMIC

Autor: David Rosado Rodríguez

Director: Dr. Xavier Jarque i Ribera
Realitzat a: Departament de
Matemàtica Aplicada

Barcelona, 13 de febrer de 2025

The beauty of mathematics only
shows itself to more patient
followers.

Maryam Mirzajani, 2008

Abstract

Newton's method, first introduced in 1669, is one of the most well-known root-finding algorithm. At the end of the nineteenth century, it emerged the idea of study the algorithm as a dynamical system in the complex plane, with the aim of understand the behavior of the method in a global way. The main goal of this thesis is to understand Newton's method applied to polynomials as a rational function, studying properties and convergence results, as well as, showing an algorithm to find all roots of a complex polynomial through Newton's method. We are also going to study the iterative system applied to a special case of entire function and we will give a possible innovation to find all roots of a complex polynomial with Newton's method through this type of functions.

Resum

El mètode de Newton, presentat per primera vegada al 1669, és dels algoritmes iteratius més coneguts per a trobar zeros de funcions. A finals del segle XIX neix la idea d'estudiar l'algoritme vist com un sistema dinàmic en el pla complex, amb l'objectiu d'entendre el comportament del mètode de manera global. L'objectiu principal d'aquesta tesi és entendre el mètode de Newton aplicat a polinomis com una funció racional, estudiant propietats i resultats relacionats amb la convergència d'aquest, així com, mostrar un algoritme per a trobar totes les arrels d'un polinomi a través del mètode. Estudiarem també el sistema iteratiu aplicat a una classe de funcions enteres i donarem una possible innovació per a trobar totes les arrels d'un polinomi amb el mètode de Newton mitjançant aquesta classe de funcions.

Agraïments

En primer lloc, voldria agrair al Dr. Xavier Jarque i Ribera, el supervisor d'aquest treball. Gràcies per les nombroses hores dedicades, per ensenyar-me la teva manera d'entendre les matemàtiques i per fer-me gaudir de la dinàmica holomorfa com ho he fet.

Als meus pares. Gràcies per ajudar-me sempre que ho he necessitat, per donar-me suport en totes les decisions que prenc i per aguantar-me a mi i a les explicacions sobre temes de matemàtiques que us explico i feu veure que us interessa.

A la Fina. Gràcies per obrir-me la porta de les matemàtiques al batxillerat i ensenyar-me que aquestes poden ser més que números. Sense tu, de ben segur que no estaria aquí.

A l'Aitor. Gràcies pel teu suport incondicional, per tots els passejos nocturns després d'una jornada llarga d'estudi, per fer-me sentir com a casa sempre i per tot el que hem viscut junts. T'admiro.

A tots els amics de la universitat, per les nombroses hores d'estudi, dubtes, estrès, patiment... però també per tots els moments divertits viscuts.

Índex

1	Introducció	1
2	Resultats previs	5
3	Iteració racional	7
3.1	Preliminars	7
3.2	Teoria local	8
3.3	Punts crítics i conca d'atracció	12
3.4	Conjunts de Fatou i Julia	13
3.5	Teorema de distorsió de Koebe	17
4	El mètode de Newton	20
4.1	Propietats bàsiques del mètode de Newton	20
4.2	Velocitat de convergència	22
4.3	Punt de l'infinit i punts crítics	24
4.4	Mètode de Newton per a polinomis de grau dos	28
4.5	Conques d'atracció de l'aplicació de Newton	29
4.6	Aplicacions numèriques al càlcul de les arrels per N_p	30
5	El mètode de Newton i la funció exponencial	34
5.1	Punts fixos parabòlics i teoria local	34
5.2	Conques d'atracció i comportament asimptòtic	37
5.3	Aplicacions numèriques al càlcul de les arrels per N_F	39
5.4	Evidències numèriques; la família cúbica	42
6	Conclusions	45

1 Introducció

Un dels problemes més usals que ens podem trobar a les matemàtiques és el de trobar les x de \mathbb{R}^d o \mathbb{C}^d que satisfan $f(x) = 0$ per alguna funció f donada. Aquest tipus de problema, pot ser extremadament complicat o inclús impossible de resoldre explícitament i és per aquest motiu que fem ús de mètodes iteratius per aproximar-ne les solucions. Començant per una estimació inicial, tractem d'arribar a la solució del problema mitjançant successives aproximacions a aquesta. Un dels mètodes més coneguts per a resoldre l'equació $f(x) = 0$ per a funcions derivables, és l'anomenat mètode de Newton. Pel cas $d = 1$, és a dir, en \mathbb{R} o \mathbb{C} , el mètode, conegut també com el mètode de Newton-Raphson o Newton-Fourier, consisteix en el següent esquema iteratiu:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (1.1)$$

L'algoritme ha sigut estudiat en nombrosos articles de manera numèrica des d'un punt de vista de local, on l'objecte d'estudi principal és, triar una condició inicial de manera que la seqüència iterativa convergeixi a una solució de l'equació $f(x) = 0$. No obstant, a finals del segle XIX, apareix la idea d'estudiar l'algoritme des d'una perspectiva global, focalitzant l'estudi en la sorprenent dinàmica que qualsevol successió de punts de \mathbb{C} , $\{z_n\}$, creada pel mètode, pot exhibir.

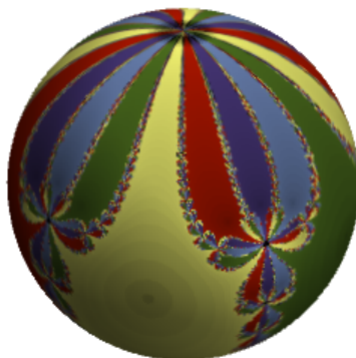


Figura 1: Dinàmica en l'esfera de Riemann del mètode de Newton aplicat a un polinomi de grau 5.

Són moltes, però, les preguntes que ens podem fer respecte aquest mètode, en relació a la convergència d'aquest o respecte quines són les condicions inicials a escollir per a que l'algoritme convergeixi a una solució de l'equació $f(x) = 0$ o $f(z) = 0$ si ho pensem en \mathbb{C} . De fet, aquest és un dels principals problemes de qualsevol sistema iteratiu, cal triar una condició inicial per a poder posar en marxa qualsevol algoritme d'aquest estil. L'objectiu d'aquest treball és estudiar, entendre i resoldre aquest problema en el cas particular del mètode de Newton aplicat a polinomis, ja estudiat per J.Hubbard², D.Schleicher³ i

²John Hamal Hubbard, matemàtic americà, 1945.

³Dierk Schleicher, matemàtic alemany, 1965.

S.Sutherland⁴ al 2001 a [11] publicat a *Inventiones mathematicae*⁵, així com, donar un algorisme alternatiu al proposat en aquest article, veient-ne les avantatges i desavantatges d'aquest. Abans però, posem en context al lector de la trajectòria històrica del sistema iteratiu presentat en (1.1). Per això, hem utilitzat [2], [9] i [16].

Context històric

Descrit per primera vegada al 1669 en el tractat *De analysi per equationes numero terminorum infinitas* publicat al 1711, Isaac Newton⁶ presentava un nou mètode per a trobar arrels de polinomis. L'algorisme diferia substancialment del conegut avui en dia, procedint de forma purament algebraica, començava amb una estimació inicial de l'arrel i reescribia el polinomi en termes de la diferència entre la solució i l'aproximació, negligia els termes d'ordre gran i trobava una nova aproximació. Reiterant aquest procés, Newton obtenia una aproximació de l'arrel del polinomi. El matemàtic anglès, només aplicava aquest algorisme algebraic a polinomis i no va ser fins el 1687 en *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* que l'autor descriu les tècniques per a la solució de l'equació de Kepler, una equació no polinòmica.

El mètode fou discutit sistemàticament per Joseph Raphson⁷ en el tractat publicat al 1690, *Analysis aequationum universalis*. Raphson, tot i continuar treballant de forma algebraica, va apropar el mètode al sistema iteratiu presentat en (1.1) i tot i no ser tan reconegut com els treballs de Newton, se li atribueix un gran reconeixement pel desenvolupament que va fer del mètode. Finalment, al 1740, Thomas Simpson⁸ descriu la primera formulació del mètode matemàticament equivalent a (1.1) per resoldre equacions no lineals usant càlcul diferencial, així com, la generalització de l'algorisme per a sistemes de dos equacions. La formulació usual del mètode, usant notació d'anàlisi, no va ser publicada fins l'any 1798 per Joseph-Louis Lagrange⁹, mencionant a Newton i Raphson però sense fer cap referència al treball de Simpson. Trenta anys després, al 1831, es publica pòstumament *Analyse des Équations Déterminées* de Joseph Fourier¹⁰ on es feia referència al mètode (1.1) com "le méthode newtonienn". Aquest influent llibre, va marcar la falta de reconeixement per les aportacions dels matemàtics anglesos Raphson i Simpson al mètode de Newton, ja que Fourier no va fer cap menció.

La primera aportació i generalització del mètode al pla complex la va fer Ernst Schröder¹¹ al 1870 i 1871 en dos escrits, [14] i [15], on estudiava iteració de funcions racionals al pla complex. Estava interessat en entendre la dinàmica dels iterats del mètode de Newton d'un polinomi lluny de les arrels, ja que com veurem en aquest treball, en un entorn de l'arrel el problema és immediat. Al 1879, Arthur Cayley¹² en *The Newton-Fourier imaginary problem* també presentava el mateix problema. De fet, el conegut com,

⁴Scott Sutherland, matemàtic americà, 1958.

⁵Revista matemàtica publicada mensualment per Springer. Considerada com una de les revistes matemàtiques més prestigioses del món.

⁶Sir Isaac Newton, matemàtic, físic, astrònom i teòleg anglès, 1642-1727.

⁷Joseph Raphson, matemàtic anglès, 1648-1715.

⁸Thomas Simpson, inventor i matemàtic anglès, 1710-1761.

⁹Joseph-Louis Lagrange, físic, matemàtic i astrònom italià, 1736-1813.

¹⁰Jean-Baptiste Joseph Fourier, matemàtic i físic francès, 1768-1830.

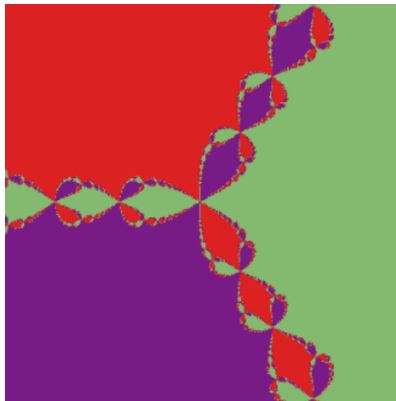
¹¹Ernst Schröder, matemàtic alemany, 1841-1902.

¹²Arthur Cayley, matemàtic anglès, 1821-1895.

problema de Cayley i presentat per ell mateix en [7] deia:

...the problem is to determine the regions of the plane, such that P [initial condition] being taken at pleasure anywhere within one region we arrive ultimately at the point A [a root of the polynomial]...

Els dos matemàtics van arribar a solucionar el cas en que els polinomis són de grau dos, conegut com el cas quadràtic. És més, en el mateix document, Cayley deia que la solució pel cas quadràtic era fàcil i elegant però que pel cas cúbic, aparentava ser considerablement més complicat. De fet, Cayley no va poder arribar a cap conclusió per a polinomis de grau superior a dos i no és d'estranyar, veure Figura 2, doncs per polinomis de grau més gran que dos, les fronteres de les conques d'atracció de les arrels són corbes fractals que divideixen el pla en infinites components connexes, impossible de trobar-les sense les eines que disposem avui en dia.



(a) $p(z) = z^3 - 1$



(b) $q(z) = z^3 + (1 + i)z^2 + iz$

Figura 2: Conques d'atracció de les arrels del polinomi $p(z)$ i $q(z)$ pel mètode de Newton en $[-2, 2] \times [-2, 2]$.

No fou fins la dècada del 1910-1920 que els matemàtics francesos Pierre Fatou¹³ i Gaston Julia¹⁴ van estudiar en profunditat la iteració de funcions holomorfes en l'esfera de Riemann més enllà del cas estudiat fins al moment, al voltant dels mètodes numèrics. Al 1915, l'Acadèmica de la Ciència Francesa va oferir el *Grand Prix des Sciences mathématiques* de 1918 i un premi econòmic al millor estudi sobre iteració, motivat per la importància d'aquesta en els treballs de Henri Poincaré¹⁵ sobre mecànica celeste. Els dos francesos van fer aportacions brillants i va ser Julia qui es va emportar el premi. Fatou no va participar i es creu que no ho va fer perquè va anunciar uns resultats els quals ja havien sigut provats per Julia i van fer créixer molts malentesos entre els matemàtics. Es diu que Julia va acusar públicament a Fatou de robar els seus resultats, tot i que no va ser mai provat.

La innovació més important introduïda pels matemàtics francesos i exposada per primera vegada per Paul Montel¹⁶, fou l'ús de famílies normals per dividir l'esfera de Riemann en dos conjunts totalment invariants amb dinàmica diferent. Són coneguts com el

¹³Pierre Joseph Louis Fatou, matemàtic i astrònom francès, 1878-1929.

¹⁴Gaston Maurice Julia, matemàtic francès, 1893-1978.

¹⁵Jules Henri Poincaré, matemàtic i físic francès, 1854-1912.

¹⁶Paul Antoine Aristide Montel, matemàtic francès, 1876-1975.

conjunt estable i caòtic. No obstant, no és fins en la dècada del 1980-1990 amb l'ajuda dels ordinadors i la visualització d'imatges de tot el treball elaborat per Fatou i Julia que els sistemes dinàmics comencen a tenir un paper molt important i que de fet, segueixen sent un objecte d'investigació activa avui en dia.

Estructura de la memòria

Un cop contextualitzat i presentat l'objecte d'estudi d'aquest treball, ens centrarem en la part tècnica. Hem dividit l'escrit en cinc capítols. El primer, és un breu recordatori de conceptes bàsics d'anàlisi complexa que usarem de manera usual en el treball. En el segon capítol, farem un preàmbul d'iteració racional, amb l'objectiu de familiaritzar conceptes relacionats amb les funcions racionals, l'esfera de Riemann o els conjunts de Fatou i Julia, imprescindibles per estudiar el mètode de Newton de forma global. Seguirem amb un capítol dedicat a estudiar propietats del mètode de Newton aplicat a polinomis, veurem, que les arrels del polinomi són punts fixos de l'aplicació del mètode de Newton i farem un estudi del punt de l'infinit, veient que és un punt fix repulsor. Estudiarem també les conques d'atracció dels punts fixos finits i veurem que les seves conques d'atracció immediates són no acotades. Per tancar aquest capítol discutirem el problema de les condicions inicials comentat en la introducció, usant com a referència [11].

Per acabar el treball, en el penúltim capítol, considerarem el mètode de Newton aplicat a una classe de funcions enteres, concretament, aplicarem l'algoritme a $F(z) = \exp(z)p(z)$ i veurem que es preserven moltes de les propietats ja estudiades en el capítol anterior i que de fet, el mètode aplicat a F tindrà el mateix objectiu que l'anterior, trobar zeros del polinomi. No obstant, hi haurà diferències amb el mètode aplicat al polinomi, la més rellevant serà que el punt de l'infinit passarà de ser un punt fix repulsor a un punt fix parabòlic. Finalitzarem l'escrit mostrant un possible algoritme alternatiu a la solució del problema de les condicions inicials, donant evidències numèriques de l'èxit d'aquest.

El treball està dotat de multitud d'imatges que ajuden a visualitzar i entendre el mètode de Newton de forma global. Aquestes imatges han sigut desenvolupades íntegrament per l'autor, elaborant programes en llenguatge C i Mathematica.

2 Resultats previs

Recordem conceptes elementals relacionats amb l'àmbit de l'anàlisi complexa, necessaris per a poder seguir el treball. Aquests es poden trobar en detall en [1] i [8]. Comencem definint el principal objecte d'estudi de l'anàlisi complexa, les funcions derivables a \mathbb{C} , més conegut com funcions holomorfes.

Definició 2.1. *Sigui Ω un obert de \mathbb{C} i $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funció, direm que f és holomorfa en $z_0 \in \Omega$ si el límit*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

existeix. Si el límit existeix per tot $z \in \Omega$, direm que f és holomorfa en Ω . A més, en el cas que $\Omega = \mathbb{C}$, direm que f és entera.

Podem distingir dos tipus de funcions enteres: les funcions enteres polinòmiques, que permeten ser esteses a ∞ i les funcions enteres transcendents, que tenen ∞ com a singularitat essencial. En aquest treball, considerarem funcions racionals, que permeten ser esteses a ∞ i de fet, en el Teorema 3.6, veurem que qualsevol funció holomorfa en $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ és racional i viceversa. Per fer-ho, necessitarem el següent resultat:

Teorema 2.2 (Liouville). *Sigui $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funció entera i acotada, és a dir, existeix $M > 0$ tal que $|f(z)| < M \forall z \in \mathbb{C}$, aleshores f és constant.*

Veurem que el mètode de Newton és una aplicació racional i que el punt de l'infinit és fix. Cal remarcar però, que les dinàmiques entre funcions racionals i transcendents són molt diferents. Pel que fa a les funcions transcendents, el teorema de Picard, ens assegura que en un entorn de l'infinit, la funció cobreix tot el pla excepte un punt com a molt. Més concretament:

Teorema 2.3 (de Picard). *Sigui f una funció entera amb una singularitat essencial en $z = a$ i sigui U un entorn de a , aleshores $f(U \setminus \{a\})$ cobreix tot el pla complex excepte potser un valor, un nombre infinit de vegades.*

per el teorema Un resultat fonamental d'anàlisi complexa que serà essencial per l'estudi de la dinàmica de funcions racionals, és, que els zeros de les funcions holomorfes no constants, són aïllats. Veurem que això és essencial en gran part de l'estudi del mètode de Newton, doncs per exemple, els punts crítics són aïllats. Concretament, el resultat és el següent.

Teorema 2.4. *Sigui Ω un obert de \mathbb{C} i $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funció holomorfa en Ω , $f \neq 0$, aleshores, si $z_0 \in \Omega$ és tal que $f(z_0) = 0$, aleshores existeix un únic $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, tal que $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ amb g holomorfa a Ω i $g(z_0) \neq 0$. En conseqüència, els zeros de f són aïllats.*

Per acabar aquesta secció donarem la definició de corba tancada simple per poder enunciar el teorema de Rouché. Aquest resultat ens permetrà trobar un disc de radi R centrat en l'origen, en el que estiguin contingudes totes les arrels d'un polinomi qualsevol. Ho utilitzarem en la Secció 4.6, per tal de poder fer un re-escalament del polinomi i considerar totes les arrels en el cercle unitat, doncs si p és un polinomi amb totes les seves arrels contingudes en un disc de radi R centrat en l'origen, aleshores el polinomi $p(Rz)$ tindrà totes les seves arrels en el disc unitat.

Definició 2.5. Una corba tancada és una aplicació contínua $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\alpha(0) = \alpha(1)$. A més direm que és simple si l'aplicació α és injectiva, és a dir, si $\alpha([0, 1])$ no s'interseca a ella mateixa.

Teorema 2.6 (Rouché). Sigui Ω un obert simplement connex de \mathbb{C} i f, g dues funcions holomorfes a Ω . Donada γ una corba tancada simple en Ω , si

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \quad \forall z \in \gamma,$$

aleshores f i g tenen el mateix nombre de zeros envoltats per γ , comptats amb multiplicitat.

Per acabar el recordatori, definirem el concepte de disc topològic, que ens serà útil per la Secció 3.5, concretament per poder enunciar el Teorema de distorsió de Koebe, Teorema 3.50, amb total generalitat.

Definició 2.7. Un disc topològic és una superfície homeomorfa a un disc del pla.

3 Iteració racional

Un cop recordats els conceptes bàsics d'anàlisi complexa que usarem en el treball, comencem amb un primer capítol de caire introductori, que té com a objectiu familiaritzar conceptes que seran clau per l'estudi del mètode de Newton en el pla complex. Exposarem primer la noció de funció racional, on ens serà útil pensar en l'infinit com un punt més del domini de definició i seguirem amb certs resultats locals que ens seran d'ajuda per entendre alguns aspectes locals del mètode de Newton. Per acabar el capítol, definirem família normal de funcions holomorfes i conjunts de Fatou i Julia, que divideixen l'esfera de Riemann en dos conjunts totalment invariants i enunciem el Teorema de distorsió de Koebe, necessari per l'estudi de les conques d'atracció del mètode de Newton en el següent capítol. Els resultats inclosos en aquest capítol han sigut extrets de [4], [6], [12] i [13].

3.1 Preliminars

Denotarem $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ l'esfera de Riemann, és a dir, el pla complex afegint el punt de l'infinit.

Definició 3.1. Una funció racional és una funció de la forma $R(z) = P(z)/Q(z)$ on P i Q són polinomis en la variable z .

Considerarem polinomis P i Q tals que $\deg(P) \geq 2$ i $\deg(Q) \geq 2$, on $\deg(P)$ i $\deg(Q)$ són els graus dels polinomis P i Q respectivament, de manera que no cal preocupar-se de definir els casos degenerats com per exemple el cas $P \equiv Q \equiv 0$. Definirem $R(\infty)$ com el límit de $R(z)$ quan $z \rightarrow \infty$.

Definició 3.2. El grau d'una aplicació racional, $R(z) = P(z)/Q(z)$, es defineix per

$$\deg(R) = \max \{ \deg(P), \deg(Q) \}.$$

Observació 3.3. També podem definir la noció de grau d'una aplicació racional com el número d'antiimatges d'un punt genèric contades amb multiplicitat, vegem un exemple.

Exemple 3.4. L'aplicació $f(z) = z^2$ té grau 2 ja que donat qualsevol punt diferent de $z = 0$, tenim dos antiimatges per aquest punt. Per exemple, $f^{-1}(1) = \{1, -1\}$.

Definició 3.5. Una funció f està definida en un entorn de ∞ si està definida en $\{|z| > r\} \cup \{\infty\}$ i en aquest cas, f és holomorfa en ∞ si l'aplicació $z \rightarrow f(1/z)$ és holomorfa en un entorn del zero.

Podem donar la següent caracterització de les funcions racionals.

Teorema 3.6. $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ és una funció holomorfa si i només si, f és racional.

Demostració. La direcció de dreta a esquerra és immediata, provem només que si f és una funció holomorfa de $\hat{\mathbb{C}}$, aleshores és racional. Suposem doncs f holomorfa a $\hat{\mathbb{C}}$, no constant, altrament ja hauríem acabat. Sabem que els zeros de f són aïllats i també ho són els pols de f , doncs com $1/f$ és holomorfa i no constant, els zeros de $1/f$ són aïllats i com els zeros de $1/f$ són els pols de f obtenim que tant els zeros com els pols de f són aïllats. Anomenant p_0, \dots, p_n els zeros de f , q_0, \dots, q_m els pols de f , $\alpha_0, \dots, \alpha_n$

les respectives multiplicitats dels zeros i β_0, \dots, β_m les respectives multiplicitats dels pols. Definim una funció g com:

$$g(z) := f(z) \frac{(z - q_0)^{\beta_0} \dots (z - q_m)^{\beta_m}}{(z - p_0)^{\alpha_0} \dots (z - p_n)^{\alpha_n}},$$

o equivalentment

$$f(z) = g(z) \frac{(z - p_0)^{\alpha_0} \dots (z - p_n)^{\alpha_n}}{(z - q_0)^{\beta_0} \dots (z - q_m)^{\beta_m}}.$$

Demostrem ara que g és una funció entera. Clarament g és holomorfa en tot $z \in \mathbb{C}$, $z \neq p_j$ i $z \neq q_j$, doncs g serà el producte de dues funcions holomorfes en aquests punts. Suposem que $z = p_j$, aleshores existeix una funció holomorfa h de manera que $f(z) = (z - p_j)^{\alpha_j} h(z)$ i $h(p_j) \neq 0$ amb el que

$$g(z) = h(z) \frac{(z - q_0)^{\beta_0} \dots (z - q_m)^{\beta_m}}{(z - p_0)^{\alpha_0} \dots (z - p_j)^{\alpha_j} \dots (z - p_n)^{\alpha_n}},$$

i g serà el producte de dues funcions holomorfes en p_j i per tant, holomorfa en p_j . Anàlogament, veiem que g és també holomorfa en el cas $z = q_j$, amb el que concloem que g és entera. Raonant de la mateixa manera, podem veure que $1/g$ és també entera. Ara, si g és entera i acotada, pel Teorema de Liouville obtenim que g és constant. Si g no és acotada, aleshores $1/g$ és acotada i com també és entera, pel Teorema de Liouville, $1/g$ és constant. En qualsevol cas, g és constant, amb el que existeix $C \in \mathbb{C}$ de manera que

$$f(z) = C \frac{(z - p_0)^{\alpha_0} \dots (z - p_n)^{\alpha_n}}{(z - q_0)^{\beta_0} \dots (z - q_m)^{\beta_m}}.$$

i per tant f és racional. □

Definició 3.7. Donada una funció racional $R : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, denotarem els iterats de R com $R^1 = R$ i $R^n = R^{n-1} \circ R$. Donada una condició inicial $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ podem definir la seva òrbita per:

$$\mathcal{O}(z_0) = \{z_n := R^n(z_0)\}_{n \geq 0} = \{z_0, R(z_0), R^2(z_0), \dots\}$$

3.2 Teoria local

Les òrbites més senzilles d'estudiar són els punts fixos i els punts periòdics. Aquests, són fonamentals per entendre la dinàmica de qualsevol sistema dinàmic i de fet, en el cas del mètode de Newton aplicat a polinomis, són imprescindibles, doncs amb l'estudi d'aquests, entendrem gran part de la dinàmica global del mètode.

Definició 3.8. Sigui $z_0 \in \mathbb{C}$, U un entorn de z_0 i $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una funció holomorfa, direm que z_0 és un punt fix si $f(z_0) = z_0$.

Hi ha punts fixos que poden “atraure” o “repel·lir” òrbites properes i existeixen d'altres que no els hi succeïx cap de les dues. Passem a formalitzar aquesta noció:

Definició 3.9. Sigui $z_0 \in \mathbb{C}$, U un entorn de z_0 i $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una funció holomorfa, direm que z_0 és atractor si $\exists \epsilon > 0$ tal que

$$\forall z \in D(z_0, \epsilon) \subset U, f^n(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0,$$

on $D(z_0, \epsilon)$ és el disc de centre z_0 i radi ϵ . Direm que el punt fix és repulsor, si és atractor per f^{-1} .

Donem ara un teorema per a funcions holomorfes que permet saber quan el punt fix és atractor o repulsor en termes del seu multiplicador, és a dir, en termes de $f'(z_0)$.

Teorema 3.10. *Sigui $z_0 \in \mathbb{C}$, U un entorn de z_0 i $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una funció holomorfa, tenim*

1) Si $|f'(z_0)| < 1$ aleshores z_0 és atractor.

2) Si $|f'(z_0)| > 1$ aleshores z_0 és repulsor.

Demostració. Provem 1). Donat que $|f'(z_0)| < 1$, existeix $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $|f'(z_0)| < \lambda < 1$. Per definició de funció holomorfa sabem que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} = |f'(z_0)|.$$

Així, $\exists \epsilon > 0$ tal que si $z \in D(z_0, \epsilon) \setminus \{z_0\}$,

$$\frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} < \lambda,$$

amb el que $|f(z) - f(z_0)| \leq \lambda |z - z_0| \forall z \in D(z_0, \epsilon)$. D'aquesta manera, com $f(z_0) = z_0$, $f(z) \in D(z_0, \epsilon)$ i podem iterar com segueix:

$$|f^2(z) - z_0| \leq \lambda |f(z) - z_0| \leq \lambda^2 |z - z_0|.$$

Repetint l'argument, podem observar que

$$|f^n(z) - z_0| \leq \lambda^n |z - z_0| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Amb un raonament similar, provem 2), veient que z_0 és un punt fix atractor per f^{-1} . \square

Definició 3.11. *Direm que un punt fix z_0 és superatractor quan $f'(z_0) = 0$.*

Aquest criteri ens serà de molta utilitat per saber si un punt fix d'una funció holomorfa és atractor o repulsor i el farem servir de manera constant en el treball. No obstant, existeixen punts fixos que, a priori, no sabem si atrauen o repelleixen òrbites properes. Aquests els classifiquem de la següent manera:

Definició 3.12. *Sigui $z_0 \in \mathbb{C}$, U un entorn de z_0 i $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una funció holomorfa, direm que z_0 és:*

- *Racionalment neutral o parabòlic si $|f'(z_0)| = 1$ i $f'(z_0)$ és una arrel de la unitat.*
- *Irracionalment neutral si $|f'(z_0)| = 1$ i $f'(z_0)$ no és una arrel de la unitat.*

Definició 3.13. *Sigui $z_0 \in \mathbb{C}$, U un entorn de z_0 i $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una funció holomorfa, direm que z_0 és un punt periòdic de període $p \geq 2$ si $f^p(z_0) = z_0$ i $f^k(z_0) \neq z_0 \forall k = 1, \dots, p - 1$. Per tal punt, podem considerar el conjunt finit de punts $\{z_0, f(z_0), \dots, f^{p-1}(z_0)\}$, que s'anomena cicle de z_0 .*

Observació 3.14. Els punts fixos són punts periòdics de període 1.

Un punt periòdic de període p pot ser classificat com un punt fix de f^p . De fet, anomenant $z_m = f^m(z)$, $m = 0, 1, 2, \dots, p-1$, tenim

$$(f^p)'(z_m) = \prod_{k=0}^{p-1} f'(f^k(z_m)) = \prod_{k=0}^{p-1} f'(z_k).$$

Notem que la derivada $(f^n)'$ té el mateix valor a cada punt z_m de l'òrbita amb el que cada punt d'aquesta, té la mateixa classificació que qualsevol altre punt de l'òrbita. Podem doncs parlar de cicles atractors o repulsors, usant el criteri donat en el Teorema 3.10 i també de cicles neutrals.

Donat que els punts periòdics de període p poden ser classificats com a punts fixos de f^p , per estudiar el comportament local d'aquests, serà suficient estudiar només el cas dels punts fixos, és a dir, el cas $p = 1$. Veurem, que en un entorn d'un punt fix atractor, la funció “s'assembla” en termes de dinàmica a una funció lineal. De la mateixa manera, veurem què passa amb els punts fixos repulsors i superatractors. Definirem primer el concepte de conjugació, que ens servirà per entendre què vol dir que dues funcions s'assemblin en termes de dinàmica.

Definició 3.15. *Siguin U, V oberts de \mathbb{C} i siguin $f : U \rightarrow U$, $g : V \rightarrow V$ dues funcions holomorfes, direm que f i g són conjugades si existeix una funció analítica i injectiva $\phi : U \rightarrow V$ tal que $g = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$. La funció ϕ s'anomena conjugació.*

Observació 3.16. Podem entendre la definició anterior com una canvi de coordenades entre les funcions f i g . Notem també que la mateixa definició implica que els iterats f^n i g^n també són conjugades. Així, podem transformar un problema de dinàmica en f a un problema de dinàmica en g , possiblement més simple. També, observem que la conjugació respecte els punts fixos, en el sentit que, f fixa z , si i només si, g fixa $\phi(z)$. A més, els multiplicadors dels corresponents punts fixos coincideixen.

Teorema 3.17. *Sigui $z_0 \in \mathbb{C}$, U un entorn de z_0 i $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una funció holomorfa tal que z_0 és un punt fix de f amb multiplicador λ , $0 < |\lambda| < 1$. Aleshores existeix una funció analítica i injectiva $\zeta = \phi(z)$ definida en un entorn $V \subseteq U$ de z_0 sobre un entorn W de 0 tal que conjuga $f(z)$ a V amb la funció lineal $g(\zeta) = \lambda\zeta$ a W . La funció és única llevat del producte per un factor escalar diferent de zero.*

Demostració. Podem suposar $z_0 = 0$, doncs si $z_0 \neq 0$, únicament cal conjuguar amb la funció $\xi(z) = z - z_0$. Definim $\phi_n(z) := \lambda^{-n} f^n(z)$ i notem que

$$\phi_n \circ f = \lambda^{-n} f^{n+1} = \lambda \phi_{n+1}.$$

Així, si existeix funció ϕ tal que $\phi_n \rightarrow \phi$ uniformement en compactes de U , tindrem que $\phi \circ f = \lambda\phi$ amb el que $\phi \circ f \circ \phi^{-1} = \lambda\zeta$ i ϕ serà una conjugació. Per veure la convergència, veiem primer que per un $\delta > 0$ prou petit, existeix una constant $C > 0$ tal que

$$|f(z) - \lambda z| \leq C|z|^2, \quad |z| \leq \delta.$$

En efecte, desenvolupant per Taylor, $f(z) = \lambda z + \frac{f''(0)}{2} z^2 + \mathcal{O}(z^3)$ amb el que $|f(z) - \lambda z| \leq \left| \frac{f''(0)}{2} z^2 \right| \leq C|z|^2$ on $C := \frac{f''(0)}{2}$. Així, $|f(z)| \leq \lambda|z| + C|z|^2 \leq (|\lambda| + C\delta)|z|$. Ara, provem per inducció que si $(|\lambda| + C\delta) < 1$, aleshores

$$|f^n(z)| \leq (|\lambda| + C\delta)^n |z|, \quad |z| \leq \delta.$$

Pel cas $n = 2$, observem que

$$|f^2(z)| = |f(f(z))| \leq (|\lambda| + C\delta)|f(z)| \leq (|\lambda| + C\delta)(|\lambda| + C\delta)|z| = (|\lambda| + C\delta)^2|z|.$$

Suposem-ho cert per a n i provem-ho per $n + 1$.

$$|f^{n+1}(z)| = |f^n(f(z))| \leq (|\lambda| + C\delta)^n|f(z)| \leq (|\lambda| + C\delta)^n(|\lambda| + C\delta)|z| = (|\lambda| + C\delta)^{n+1}|z|.$$

Hem aplicat la hipòtesi d'inducció a la primera desigualtat. Així doncs, triant $\delta > 0$ prou petit, de manera que $\rho = \frac{(|\lambda| + C\delta)^2}{|\lambda|} < 1$ obtenim que

$$|\phi_{n+1}(z) - \phi_n(z)| = \left| \frac{f^n(f(z)) - \lambda f^n(z)}{\lambda^{n+1}} \right| \leq \frac{C|f^n(z)|^2}{|\lambda|^{n+1}} \leq \frac{\rho^n C|z|^2}{|\lambda|}, \quad |z| \leq \delta.$$

Per tant, $\phi_n(z)$ convergeix uniformement per $|z| \leq \delta$ i hem trobat la funció que buscàvem. Per veure la unicitat, és suficient estudiar el cas $f(z) = \lambda z$. Sabem que existeix una funció analítica i injectiva $\phi(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \dots$, que conjuga $z \mapsto \lambda z$ a ella mateixa. Aleshores la sèrie

$$\phi(\lambda z) = c_1 \lambda z + c_2 \lambda^2 z^2 + \dots,$$

ha de ser igual a

$$\lambda \phi(z) = c_1 \lambda z + c_2 \lambda z^2 + \dots.$$

Comparant coeficients, com $0 < |\lambda| < 1$, obtenim que $c_1 \in \mathbb{C}$ i $c_k = 0 \ \forall k \geq 2$. Així, la funció és única llevat del producte per un factor escalar diferent de 0. \square

Observació 3.18. L'existència d'una conjugació pel cas repulsor se segueix immediatament del cas atractor. En efecte, suposem $f(z) = z_0 + \lambda(z - z_0) + \dots$, amb $|\lambda| > 1$. Aleshores $f^{-1}(z) = z_0 + (z - z_0)/\lambda + \dots$, té un punt fix atractor en z_0 . Qualsevol aplicació que conjugui $f^{-1}(z)$ amb ζ/λ , també conjuga $f(z)$ amb $\lambda\zeta$.

Teorema 3.19. *Sigui $z_0 \in \mathbb{C}$, U un entorn de z_0 i $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una funció holomorfa tal que z_0 és un punt fix de f superatractor,*

$$f(z) = z_0 + a_p(z - z_0)^p + \dots, \quad a_p \neq 0, p \geq 2.$$

Aleshores existeix una aplicació analítica i injectiva $\zeta = \phi(z)$ definida en un entorn $V \subseteq U$ de z_0 sobre un entorn W de 0 tal que conjuga $f(z)$ a V amb ζ^p a W . La conjugació és única llevat del producte d'una $(p - 1)$ -èsima arrel de la unitat.

Demostració. De la mateixa manera que el teorema anterior, podem suposar $z_0 = 0$. Podem també suposar que per $|z|$ petit, existeix una constant $C > 1$ tal que $|f(z)| \leq C|z|^p$ ja que $f(z) = a_p z^p + \dots$. Provem per inducció que

$$|f^n(z)| \leq (C|z|)^{p^n}, \quad |z| \leq \delta.$$

Pel cas $n = 2$ observem que

$$|f^2(z)| = |f(f(z))| \leq C|f(z)|^p \leq C(C^p|z|^{p^2}) = C^{p+1}|z|^{p^2} \leq (C|z|)^{p^2}.$$

L'última desigualtat s'obté del fet que $C > 1$ i $p \geq 2$ amb el que $C^{p+1} \leq C^{p^2}$. Suposem-ho cert per n i demostrem-ho per $n+1$.

$$|f^{n+1}(z)| = |f^n(f(z))| \leq (C|f(z)|)^{p^n} \leq C^{p^n} (C|z|^p)^{p^n} = C^{2p^n} |z|^{p^{n+1}} \leq (C|z|)^{p^{n+1}}.$$

Hem usat la hipòtesi d'inducció a la primera desigualtat i que $p \geq 2$ a l'última. Així, $f^n(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ super-exponencialment.

Fent el canvi de variables $w = cz$ on $c^{p-1} = 1/a_p$, podem conjuguar f a una funció de la forma $f(w) = w^p + \dots$. Assumirem doncs que $a_p = 1$. Volem trobar una conjugació $\phi(z) = z + \dots$, tal que $\phi(f(z)) = \phi(z)^p$, que és equivalent a la condició $\phi \circ f \circ \phi^{-1} = \zeta^p$. Definim:

$$\phi_n(z) := f^n(z)^{p^{-n}} = (z^{p^n} + \dots)^{p^{-n}} = z(1 + \dots)^{p^{-n}},$$

que està ben definida en un entorn del zero. Les funcions ϕ_n satisfan

$$\phi_{n-1} \circ f = (f^{n-1} \circ f)^{p^{-n+1}} = \phi_n^p,$$

així que si $\phi_n \rightarrow \phi$, ϕ satisfà $\phi \circ f = \phi^p$ i tindrem l'existència de la conjugació. Veiem que $\{\phi_n\}$ convergeix uniformement en compactes de U .

$$\frac{\phi_{n+1}}{\phi_n} = \left(\frac{\phi_1 \circ f^n}{f^n} \right)^{p^{-n}} = (1 + \mathcal{O}(|f^n|))^{p^{-n}} = 1 + \mathcal{O}(p^{-n}) \mathcal{O}(|z|^{p^n} C^{p^n}) = 1 + \mathcal{O}(p^{-n}).$$

Així, si $|z| \leq 1/C$ el producte

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_{n+1}}{\phi_n},$$

convergeix uniformement i per tant $\{\phi_n\}$ convergeix uniformement en compactes de U amb el que hem trobat la funció que buscàvem. Per veure la unicitat, és suficient estudiar el cas $f(z) = z^p$. Sabem que existeix una funció analítica i injectiva $\phi(z) = c_1 z + c_k z^k + \dots$, que conjugua $z \mapsto z^p$ a ella mateixa. Aleshores la sèrie

$$\phi(z^p) = c_1 z^p + c_k z^{kp} + \dots,$$

ha de ser igual a

$$\phi(z)^p = c_1^p z^p + p c_1^{p-1} c_k z^{p+k-1} + \dots,$$

amb $pk > p + k - 1$. Comparant coeficients, obtenim que $c_1^{p-1} = 1$ i $c_k = 0 \ \forall k \geq 2$. Així, la funció és única llevat del producte d'una $(p-1)$ -èsima arrel de la unitat. \square

3.3 Punts crítics i conca d'atracció

En aquesta secció introduïrem el concepte de punt crític d'una funció, concepte rellevant en l'estudi de la dinàmica d'aquesta.

Definició 3.20. Donada una funció racional $R : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, un punt $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ es diu que és crític si $R'(z_0) = 0$. El valor $w = R(z_0)$ s'anomena valor crític.

Observació 3.21. Es pot veure fàcilment que z_0 és un punt crític d'una funció racional R , si i només si, R no és injectiva en algun entorn de z_0 i R no és constant.

El nombre de punts crítics d'una funció racional és un valor finit que depèn del grau de la funció. Enunciem el resultat sense demostració, aquesta pot ser trobada en [4].

Proposició 3.22. *Una aplicació racional R de grau d té com a molt $2d - 2$ punts crítics en $\hat{\mathbb{C}}$.*

En els Teoremes 3.17 i 3.19 hem vist com actua la dinàmica en un entorn d'un punt fix atractor o superatractor. Tanmateix, el nostre objectiu és estudiar el mètode de Newton de forma global, així, un concepte important que ens ajudarà a estudiar les òrbites formades pel mètode és el de conca d'atracció. La definició és la següent:

Definició 3.23. *Definim la conca d'atracció d'una funció racional R respecte d'un punt fix $z_0 \in \mathbb{C}$, i la denotem $\mathcal{A}(z_0)$, per*

$$\mathcal{A}(z_0) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid R^n(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0 \right\}.$$

Proposició 3.24. *Donada una funció racional R i $z_0 \in \mathbb{C}$, la conca d'atracció del punt z_0 és un conjunt obert.*

Demostració. Donat un punt $z_1 \in \mathcal{A}(z_0)$, volem trobar un entorn del punt que estigui també en la conca d'atracció. Com $z_1 \in \mathcal{A}(z_0)$, $R^n(z_1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0$, amb el que existeix $\epsilon > 0$ i un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$, $R^n(z_1) \in D(z_0, \epsilon)$. Així, anomenant $\delta = \text{dist}(R^{n_0}(z_1), \partial D(z_0, \epsilon))$ i definint l'obert $V := D(R^{n_0}(z_1), \delta/2) \subseteq D(z_0, \epsilon)$. Per continuïtat de l'aplicació R , donat l'obert V existeix un obert W tal que $z_1 \in W$ i $R^{n_0}(W) \subseteq V$. Per tant, $R^{n_0}(W) \subseteq D(z_0, \epsilon)$, amb el que hem trobat un entorn de z_1 , W , que està en la conca d'atracció. \square

Observació 3.25. Notem que $\mathcal{A}(z_0) \subset \hat{\mathbb{C}}$, no pot ser el total, doncs $\forall n \geq 1$, l'equació $R^n(z) = z$ admet solució i aquests punts, excepte el z_0 , no pertanyen a $\mathcal{A}(z_0)$.

Definició 3.26. *Amb la notació de la definició anterior, la màxima component connexa de $\mathcal{A}(z_0)$ que conté z_0 s'anomena la conca d'atracció immediata. La denotem $\mathcal{A}^*(z_0)$.*

3.4 Conjunts de Fatou i Julia

Enunciarem ara les definicions i algunes de les propietats de dos conjunts que divideixen l'esfera de Riemann en dues regions amb comportament dinàmic totalment diferent, el conjunt estable o conjunt de Fatou i el conjunt caòtic o el conjunt de Julia.

Definició 3.27. *Sigui Λ un espai de paràmetres i $\mathcal{G} = \{g_\lambda : D \rightarrow \hat{\mathbb{C}}, \lambda \in \Lambda\}$ una família de funcions holomorfes definides en un domini $D \subseteq \hat{\mathbb{C}}$. Diem que \mathcal{G} és una família normal si tota successió $\{g_\lambda\}_\lambda$ de \mathcal{G} conté una subsuccessió que convergeix uniformement en compactes de D .*

Un cas particular de família de funcions holomorfes en la que treballarem serà la donada per una única funció racional R i els seus iterats, és a dir, $\{R^n\}_n$.

Definició 3.28. *Donada una funció racional $R : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ definim el conjunt de Fatou, \mathcal{F} , com:*

$$\mathcal{F}(R) = \left\{ z \in \hat{\mathbb{C}} \mid \{R^n\}_n \text{ és normal en algun entorn de } z \right\}.$$

Definim el conjunt de Julia, \mathcal{J} , com el complementari del conjunt de Fatou, és a dir,

$$\mathcal{J}(R) = \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{F}(R).$$

Podem entendre el conjunt de Fatou com el conjunt estable, ja que el comportament de punts propers del conjunt de Fatou és similar quan apliquem R i en conseqüència, el conjunt de Julia és el conjunt inestable.

Observació 3.29. Per definició, el conjunt de Fatou és obert i per tant, el conjunt de Julia és tancat.

Exemple 3.30. Considerem la funció $f(z) = z^2$. Notem que $f^n(z) = z^{2^n}$ convergeix uniformement a zero en qualsevol compacte de $\{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid |z| < 1\}$ i ho fa a ∞ en qualsevol compacte de $\{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid |z| > 1\}$. Per tant, aquests dos conjunts pertanyen al conjunt de Fatou. A més, $\mathcal{J}(f) = \{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid |z| = 1\}$, doncs si no fos així, i existís un z tal que $|z| = 1$ i $\{f^n\}_n$ fos normal en algun entorn de z , aleshores, l'entorn tindria punts propers que sota iteració van a infinit i també a 0, cosa incompatible amb la normalitat.

Abans de veure un seguit de propietats dels conjunts de Fatou i Julia, enunciem una proposició que mostra que la conca d'atracció immediata d'un punt fix atractiu conté almenys un punt crític.

Proposició 3.31. Si z_0 és un punt fix atractiu d'una funció racional R , aleshores la conca d'atracció immediata $\mathcal{A}^*(z_0)$ conté almenys un punt crític.

Demostració. Donat que z_0 és un punt fix atractiu, podem considerar un entorn de z_0 , $U_0 = D(z_0, \epsilon)$ per $\epsilon > 0$ petit, tal que $R(U_0) \subseteq U_0$. Suposem que $\mathcal{A}^*(z_0)$ no té cap punt crític. En aquest cas, existeix una branca g de R^{-1} , ben definida, que satisfà $g(z_0) = z_0$ i envia U_0 a $g(U_0) =: U_1$ de manera que $U_0 \subset U_1 \subset \mathcal{A}^*(z_0)$. Reiterant el procés anterior, construïm $U_{n+1} := g(U_n) \supset U_n$ i estenem g analíticament a U_{n+1} . Si el procediment no acaba, obtenim una seqüència de funcions analítiques $g^n : U_0 \rightarrow U_n \subset \mathcal{A}^*(z_0)$ que ometen \mathcal{J} . Com z_0 és un punt fix repulsor de g , la família $\mathcal{G} = \{g^n\}_n$ no és normal, en contradicció amb que la funcions g^n ometin \mathcal{J} . Obtenim doncs que no podem arribar a U_n estenent g , així, hi ha un punt crític $p \in \mathcal{A}^*(z_0)$ tal que $R(p) \in U_n$. \square

Presentem ara un seguit de propietats d'aquests conjunts.

Proposició 3.32. Sigui R una funció racional de grau $d \geq 2$, aleshores $\mathcal{J}(R) \neq \emptyset$.

Demostració. Suposem que $\mathcal{J}(R) = \emptyset$. Aleshores $\{R^n\}$ és normal en tot $\hat{\mathbb{C}}$ amb el que existeix una subsuccessió $\{n_k\}$ tal que $R^{n_k}(z) \rightarrow f(z)$ per alguna funció analítica $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$. Pel Teorema 3.6, la funció f és racional. Si f és constant, aleshores la imatge de R^{n_k} està eventualment continguda en un petit entorn de la constant, cosa impossible ja que R^n cobreix $\hat{\mathbb{C}}$. Si f no és constant, pel mateix argument, eventualment R^{n_k} té el mateix nombre de zeros que f , cosa impossible també degut a que R^n té grau $d^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. \square

Definició 3.33. Donada R una funció racional, direm que un conjunt E és totalment invariant per R si $R^{-1}(E) = E$.

Proposició 3.34. Sigui R una funció racional no constant tal que $\deg(R) \geq 2$, aleshores $\mathcal{J}(R)$ i $\mathcal{F}(R)$ són totalment invariants.

Demostració. Veurem per doble inclusió que $R^{-1}(\mathcal{F}(R)) = \mathcal{F}(R)$ i en conseqüència tindrem també que $\mathcal{J}(R)$ és totalment invariant. Veiem primer $R^{-1}(\mathcal{F}(R)) \subseteq \mathcal{F}(R)$, sigui $z \in \mathcal{F}(R)$, existeix un entorn U de z tal que $\{R^n\}_n$ és normal. Anomenem

$w := R^{-1}(z)$ i com R és contínua, notem que $R^{-1}(U)$ és un entorn obert de w . Ara bé $R^2(z) = R^3(R^{-1}(z))$, $R^3(z) = R^4(R^{-1}(z))$, etc., amb el que $\{R^{n+1}\}_n$ és normal en $R^{-1}(U)$. Per tant $w \in \mathcal{F}(R)$.

Veiem ara que $\mathcal{F}(R) \subseteq R^{-1}(\mathcal{F}(R))$. Per veure això, serà suficient provar que $R(\mathcal{F}(R)) \subseteq \mathcal{F}(R)$, ja que en aquest cas, $\mathcal{F}(R) \subseteq R^{-1}(R(\mathcal{F}(R))) \subseteq R^{-1}(\mathcal{F}(R))$. Sigui doncs $z \in \mathcal{F}(R)$, suposem que $\{R^{n_k+1}\}_{n_k}$ convergeix uniformement en compactes d'un entorn de z . Donat que R és una aplicació holomorfa no constant, és oberta i per tant R envia entorns oberts de z a entorns oberts de $R(z)$. Per tant, $R(z) \in \mathcal{F}(R)$ ja que $\{R^{n_k}\}_{n_k}$ convergeix uniformement en compactes d'un entorn de $R(z)$ doncs, $R(R(z)) = R^2(z)$, $R^2(R(z)) = R^3(z)$, etc. Per tant, els conjunts de Fatou i de Julia, són totalment invariants. \square

Proposició 3.35. *Sigui R una funció racional, per qualsevol $N \geq 1$ es satisfà que $\mathcal{J}(R) = \mathcal{J}(R^N)$ i $\mathcal{F}(R) = \mathcal{F}(R^N)$.*

Demostració. Com abans, veurem per doble inclusió $\mathcal{F}(R) = \mathcal{F}(R^N)$ i en conseqüència tindrem també que $\mathcal{J}(R) = \mathcal{J}(R^N)$. Per veure que $\mathcal{F}(R) \subseteq \mathcal{F}(R^N)$, notem que si $z \in \mathcal{F}(R)$, aleshores existeix un entorn de z on $\{R^n\}_n$ és normal. Per tant, la subsuccessió $\{R^{Nn}\}_n$ serà també normal en l'entorn anterior de z . Així, $\mathcal{F}(R) \subseteq \mathcal{F}(R^N)$.

Per veure el recíproc, suposem que tenim $z \in \mathcal{F}(R^N)$. Considerem el cas $N = 2$ per fixar idees. En aquest cas, existeix un entorn de z tal que $\{R^{2n}\}_n$ és normal. Aleshores, la seva imatge $R(\{R^{2n}\}_n) = \{R^{2n+1}\}_n$ és també normal en el mateix entorn. Podem escriure,

$$\{R^n\}_n = R \cup \{R^{2n}\}_n \cup \{R^{2n+1}\}_n,$$

així, qualsevol subsuccessió de $\{R^n\}_n$ té un nombre infinit d'elements de $\{R^{2n}\}_n$ o $\{R^{2n+1}\}_n$, que són normals, amb el que la successió convergirà uniformement en compactes de l'entorn i per tant, $\{R^n\}_n$ serà normal en l'entorn. Generalment, el resultat es dedueix de la mateixa manera tenint present que

$$\{R^n\}_n = R \cup \dots \cup R^{k-1} \cup \{R^{kn}\}_n \cup \dots \cup \{R^{kn+(k-1)}\}_n.$$

Així, $z \in \mathcal{F}(R)$ i per tant, $\mathcal{F}(R) = \mathcal{F}(R^N)$. \square

Proposició 3.36. *Sigui R una funció racional i z_0 un punt fix atractor de R , aleshores $z_0 \in \mathcal{F}(R)$ i la seva conca d'atracció també pertany a $\mathcal{F}(R)$.*

Demostració. Sigui z_0 un punt fix atractor de R . Sabem que $\mathcal{A}(z_0)$ és un conjunt obert. Per tant, per cada $z \in \mathcal{A}(z_0)$, podem trobar un entorn U de z i una subsuccessió $\{n_k\}_k \subseteq \{n\}_n$ de manera que $\{R^{n_k}\}_{n_k}$ convergeix uniformement en compactes de U a z_0 . Per tant, $\{R^n\}_n$ és normal en U amb el que $z \in \mathcal{F}(R)$. \square

Proposició 3.37. *Sigui R una funció racional i z_0 un punt fix repulsor de R , aleshores $z_0 \in \mathcal{J}(R)$.*

Demostració. Considerem un entorn U del punt fix repulsor. Inicialment, iterant R , qualsevol $z \in U$ sortirà de U excepte z_0 que és fix. Si $z_0 \in \mathcal{F}(R)$, existeix una subsuccessió $\{R^{n_k}\}_{n_k}$ que convergeix uniformement en compactes de U a una funció holomorfa g tal que $g(z_0) = z_0$. Per continuïtat de g , obtindríem que $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = z_0$, cosa incompatible amb el fet que z_0 és repulsor i els iterats en un entorn de z_0 s'allunyen d'ell. \square

Com era d'esperar, els punts fixos atractors corresponen al conjunt estable i els punts fixos repulsors al conjunt inestable. Un fet potser menys intuïtiu, és que els punts parabòlics corresponen al conjunt inestable. Abans però, enunciarem sense demostració un resultat d'anàlisi que necessitarem per demostrar aquest fet, la demostració es pot trobar en [13].

Teorema 3.38 (Convergència uniforme de Weierstrass). *Sigui U un obert de \mathbb{C} , si una successió de funcions holomorfes $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$ convergeix uniformement a una funció límit f , aleshores f és holomorfa. A més, la successió de derivades f'_n convergeix a f' uniformement en compactes de U . En particular, la successió de segones derivades f''_n convergeixen a f'' uniformement en compactes, etcètera.*

Proposició 3.39. *Sigui R una funció racional i z_0 un punt fix parabòlic, aleshores $z_0 \in \mathcal{J}(R)$.*

Demostració. Conjugant amb la funció $\phi(z) = z - z_0$ podem suposar que $z_0 = 0$. Com el punt fix és parabòlic, localment l'aplicació racional R ha de ser de la forma $w \mapsto w + a_q w^q + a_{q+1} w^{q+1} + \dots$, on $q \geq 2$ i $a_q \neq 0$. D'aquesta manera, R^k , l'aplicació iterada k vegades correspon a una funció de la forma $w \mapsto w + k a_q w^q + \dots$. Així, la derivada q -èssima de R^k en el 0 és $q! k a_q$, que divergeix a infinit quan $k \rightarrow \infty$. Del Teorema 3.38, se segueix que cap subsuccessió $\{R^{k_j}\}$ pot localment convergir uniformement quan $k_j \rightarrow \infty$. \square

Enunciem un teorema sense demostració, la prova la podem trobar en [6].

Teorema 3.40. (Montel) *Sigui \mathcal{G} una família de funcions analítiques definides en un domini D . Si existeixen tres valors omesos per tota $g \in \mathcal{G}$, aleshores \mathcal{G} és una família normal.*

Proposició 3.41. *Sigui R una funció racional, si $z \in \mathcal{J}(R)$ i U és un entorn de z , $\bigcup_n R^n(U)$ recobreix tot $\hat{\mathbb{C}}$ excepte com a molt dos punts. A més, aquests dos punts pertanyen al conjunt de Fatou.*

Demostració. Raonem per contradicció, suposem que existissin tres punts sense recobrir, pel Teorema de Montel, obtindríem que $z \in \mathcal{F}(R)$, en contradicció amb que $z \in \mathcal{J}(R)$. Veiem ara que els punts han de pertànyer al conjunt de Fatou. Fixem z_0 , un dels punts que queden sense recobrir. Notem que $R(z_0)$ és, o bé fix, o bé l'altre punt sense recobrir, z_1 , i $R(z_1)$ és, o bé fix, o bé z_0 . Així, z_0 és l'única solució de $R^2(z) = z_0$ i z_0 és un punt fix superatractor per R^2 , és a dir, $z_0 \in \mathcal{F}(R^2) = \mathcal{F}(R)$. \square

Proposició 3.42. *Sigui R una funció racional, el conjunt de totes les antiimatges de $z_0 \in \mathcal{J}(R)$ és dens en $\mathcal{J}(R)$.*

Demostració. Sigui $w \in \mathcal{J}(R)$ i U un entorn de w , volem veure que U conté qualsevol antiimatge de z_0 . Per la proposició anterior, les imatges per U recobreixen tot $\hat{\mathbb{C}}$ excepte com a molt dos punts que són del conjunt de Fatou, així, existeix un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $z_0 \in R^{n_0}(U)$. Per tant, U conté algun punt, que sota iteració acaba en z_0 , tal i com volíem veure. \square

Proposició 3.43. *Sigui R una funció racional, el conjunt de Julia $\mathcal{J}(R)$ no conté punts aïllats, és a dir, $\mathcal{J}(R)$ és un conjunt perfecte.*

Demostració. Sigui $z_0 \in \mathcal{J}(R)$ i U un obert de z_0 . Suposem que z_0 no és un punt periòdic i sigui z_1 tal que $R(z_1) = z_0$. Com z_0 no és periòdic, $R^n(z_0) \neq z_1 \forall n$. Per tant, $z_1 \in \mathcal{J}(R)$ i com el conjunt de totes les antiimatges de z_1 és dens en $\mathcal{J}(R)$, existeix $\zeta \in U$ tal que $R^m(\zeta) = z_1$. Per tant, $\zeta \in \mathcal{J}(R) \cap U$ i $\zeta \neq z_0$.

Suposem ara que $R^n(z_0) = z_0$ amb n el mínim enter que ho satisfà. Si z_0 fos la única solució de $R^n(z) = z_0$ aleshores z_0 seria un punt fix superatractor per R^n , en contradicció amb que $z_0 \in \mathcal{J}(R)$. Així, existeix z_1 , $z_1 \neq z_0$ amb $R^n(z_1) = z_0$. A més, $R^j(z_0) \neq z_1 \forall j$, altrament es satisfaria per alguna $0 \leq j < n$ (per periodicitat) amb el que $R^j(z_0) = R^{n+j}(z_0) = R^n(z_1) = z_0$, en contradicció amb la minimalitat de n . Com abans, z_1 ha de tenir una antiimatge en $U \cap \mathcal{J}(R)$ diferent de z_0 . \square

Proposició 3.44. *Sigui R una funció racional i z_0 un punt periòdic atractor. Aleshores $\mathcal{J}(R) = \partial\mathcal{A}(z_0) = \overline{\mathcal{A}(z_0)} \setminus \text{int}(\mathcal{A}(z_0))$.*

Demostració. Raonem per doble inclusió. Sigui U un entorn d'un punt $p \in \mathcal{J}(R)$, per la Proposició 3.41, existeix un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $R^{n_0}(U) \cap \mathcal{A}(z_0) \neq \emptyset$, amb el que $U \cap \mathcal{A}(z_0) \neq \emptyset$. Això demostra que $\mathcal{J}(R) \subseteq \overline{\mathcal{A}(z_0)}$. Com $\mathcal{J}(R) \cap \mathcal{A}(z_0) = \emptyset$ ja que $\mathcal{A}(z_0) \subseteq \mathcal{F}(R)$ tenim doncs $\mathcal{J}(R) \subseteq \partial\mathcal{A}(z_0)$. Per veure el recíproc, notem que els iterats de R convergeixen a z_0 en $\mathcal{A}(z_0)$ i no ho fan al seu complementari. Per tant, els iterats no poden ser normals en cap conjunt obert de $\partial\mathcal{A}(z_0)$. Així, $\partial\mathcal{A}(z_0) \subseteq \mathcal{J}(R)$. \square

Presentem ara un resultat útil per provar la última proposició d'aquest capítol, la demostració pot ser trobada en [6].

Lema 3.45. *El nombre total de cicles atractors i neutrals per una funció racional R de grau d és com a molt $6d - 2$.*

Proposició 3.46. *Sigui R una funció racional de grau $d \geq 2$, $\mathcal{J}(R)$ és l'adherència dels punts periòdics repulsors.*

Demostració. Suposem que existís un disc obert U que intersequi $\mathcal{J}(R)$ i no contingui punts fixos de R^m . Podem assumir que U no conté ni pols ni punts crítics de R , doncs per la Proposició 3.22, tenim un nombre finit d'aquests. Sigui f_1, f_2 dos branques diferents de R^{-1} en U , com no hi ha solucions de $R^m(z) = z$ a U , notem que

$$g_n = \frac{R^n - f_1}{R^n - f_2} \cdot \frac{z - f_2}{z - f_1}$$

omet els valors 0, 1, ∞ a U . Pel Teorema de Montel, la família $\{g_n\}_n$ és normal i per tant ho és $\{R^n\}_n$, fet que és una contradicció. Per tant els punts periòdics són densos en $\mathcal{J}(R)$. Pel lema anterior, el nombre de cicles atractors i neutrals és finit, i com $\mathcal{J}(R)$ és perfecte, obtenim que els cicles repulsors són densos. \square

3.5 Teorema de distorsió de Koebe

Abans de començar a estudiar el mètode de Newton, enunciem uns resultats auxiliars que necessitarem per demostrar que les conques d'atracció del mètode de Newton són no acotades.

Definició 3.47. *Un anell obert doblement connectat, és a dir, tal que el seu grup fonamental és isomòrfic a \mathbb{Z} .*

Exemple 3.48. Una corona circular és l'espai que queda entre dos discs concèntrics amb centre z_0 de radi r i R , és a dir, anomenant \mathbb{A} la corona,

$$\mathbb{A} := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}.$$

Anomenarem \mathbb{A}_r la corona centrada a l'origen amb radi R fixat igual a 1.

Definició 3.49. Donat una corona \mathbb{A} , existeix una única aplicació holomorfa i injectiva ϕ , llevat de rotació, tal que $\phi(\mathbb{A}) = \mathbb{A}_r$. Aquest nombre r es preserva per a aplicacions d'aquest tipus i permet definir el mòdul de \mathbb{A} com

$$\text{mod}(\mathbb{A}) = \text{mod}(\mathbb{A}_r) := -\frac{\log r}{2\pi}.$$

Enunciarem ara un resultat sense demostració, aquesta la podem trobar en [13].

Teorema 3.50 (de distorsió de Koebe). *Siguin U, V dos discs topològics tals que $U \subset V \subset \mathbb{C}$ i $\phi : V \rightarrow \mathbb{C}$ una aplicació holomorfa i injectiva. Considerem la corona $\mathbb{A} = V \setminus U$ i anomenem m el seu mòdul. Aleshores existeix una constant $C = C(m)$ tal que per qualsevol $x, y, z \in U$,*

$$\frac{1}{C}|\phi'(x)| \leq \frac{|\phi(y) - \phi(z)|}{|y - z|} \leq C|\phi'(x)|.$$

Teorema 3.51. *Siguin U, V dos discs topològics tals que $\overline{U} \subset V \subset \mathbb{C}$, $a \in U$, $\phi : V \rightarrow \mathbb{C}$ una aplicació holomorfa i injectiva i anomenem m al mòdul de la corona $\mathbb{A} = V \setminus U$. Aleshores existeix una constant $k = k(m, a)$ tal que*

$$D(\phi(a), \frac{1}{2k} \text{diam}(\phi(U))) \subset \phi(U),$$

on $\text{diam}(\phi(U))$ és el diàmetre de $\phi(U)$, és a dir, $\text{diam}(\phi(U)) = \sup \{|z - w| : z, w \in \phi(U)\}$. A més, anomenant

$$R = \max_{z \in \partial U} |\phi(z) - \phi(a)| \quad \text{i} \quad r = \min_{z \in \partial U} |\phi(z) - \phi(a)|,$$

tenim $1 \leq \frac{R}{r} \leq k$.

Demostració. Aplicant el Teorema de distorsió de Koebe als oberts U, V , amb $x = y = a$ i $z \in U$ qualsevol, $z \neq a$, obtenim que existeix una constant C tal que

$$\frac{1}{C}|\phi'(a)| \leq \frac{|\phi(z) - \phi(a)|}{|z - a|} \leq C|\phi'(a)|.$$

Multiplicant per $|z - a|$ obtenim que

$$\frac{1}{C}|\phi'(a)||z - a| \leq |\phi(z) - \phi(a)| \leq C|\phi'(a)||z - a|.$$

Considerem ara $z \in \partial U$, aleshores,

$$R \leq C|\phi'(a)| \max_{z \in \partial U} |z - a| \quad \text{i} \quad r \geq \frac{1}{C}|\phi'(a)| \min_{z \in \partial U} |z - a|.$$

Per tant,

$$1 \leq \frac{R}{r} \leq \frac{C|\phi'(a)|\max_{z \in \partial U}|z - a|}{\frac{1}{C}|\phi'(a)|\min_{z \in \partial U}|z - a|} = \frac{C^2\max_{z \in \partial U}|z - a|}{\min_{z \in \partial U}|z - a|} := k.$$

Així, com $2R \geq \text{diam}(\phi(U))$ tenim

$$r \geq \frac{R}{k} \geq \frac{\text{diam}(\phi(U))}{2k},$$

amb el que $D(\phi(a), \frac{1}{2k} \text{diam}(\phi(U))) \subset \phi(U)$.

□

4 El mètode de Newton

Donada f una funció holomorfa en el pla complex, podem considerar el mètode de Newton de f per a trobar solucions de l'equació $f(z) = 0$. El mètode ve donat per l'aplicació

$$N_f(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}.$$

En aquest treball ens centrarem en el cas en que f és un polinomi p de grau $d \geq 2$. Donada una condició inicial, $z_0 \in \mathbb{C}$, podem considerar el sistema dinàmic discret generat per l'aplicació de Newton,

$$z_{n+1} = z_n - \frac{p(z_n)}{p'(z_n)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

amb l'objectiu d'estudiar el comportament asimptòtic de $\{z_n\}_n$ per cadascuna de les condicions inicials $z_0 \in \mathbb{C}$. Aquest mètode és segurament el més conegut “root finding algorithm” ja que per un gran nombre de condicions inicials, la successió $\{z_n\}_n$ convergeix a una de les arrels del polinomi. És per aquesta connexió amb el càlcul de zeros del polinomi, que el mètode de Newton té un interès especial dins els sistemes dinàmics.

L'algoritme és senzill. Primer, escollim una condició inicial $z_0 \in \mathbb{C}$ i aleshores considerem iteracions successives de N_p . Parem el procés quan $|z_n - z_{n-1}| < \epsilon$ per un $\epsilon > 0$ donat, és a dir, quan trobem un punt fix o una òrbita periòdica. És fàcil de comprovar i ho farem en detall més endavant, que tota arrel, α , d'un polinomi p , és un punt fix de N_p i a més el punt fix és atractor o fins i tot superatractor si l'arrel és simple. Com ja hem vist en el capítol anterior, en un entorn prou petit del punt fix α , totes les successions $\{w_n\}_n$ que resulten de fer iteracions del mètode amb $|w_0 - \alpha| < \epsilon$, $\epsilon > 0$ petit, satisfan $\{w_n\}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha$. L'objectiu és estudiar el comportament global de N_p per poder precisar en quins casos tindrem convergència a les arrels de p i en quins casos tindrem altres comportaments asimptòtics, no desitjats numèricament.

Concretament, en aquest capítol veurem propietats del mètode de Newton, així com, estudiarem la velocitat de convergència del mètode i donarem resultats locals i globals d'aquest. Per a l'elaboració d'aquest capítol s'ha utilitzat essencialment [3] i [5]. En l'última secció del capítol, ens endinsarem en el problema de les condicions inicials, és a dir, discutirem quines condicions inicials calen escollir per tal de trobar totes les arrels d'un polinomi mitjançant el mètode de Newton. En tot el capítol, si no es diu el contrari, p serà un polinomi de grau $d \geq 2$ i N_p serà l'aplicació de Newton associada a p , és a dir,

$$N_p(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)}.$$

4.1 Propietats bàsiques del mètode de Newton

Lema 4.1. N_p és una aplicació racional.

Demostració. Per veure que N_p és una aplicació racional, notem que

$$N_p(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)} = \frac{zp'(z) - p(z)}{p'(z)}. \quad (4.1)$$

Així, definint els polinomis $P(z) := zp'(z) - p(z)$ i $Q(z) := p'(z)$, obtenim que $N_p(z) = P(z)/Q(z)$. \square

Lema 4.2. N_p és de grau d si tots els zeros de p són simples.

Demostració. Usant l'observació 3.3, veurem que ∞ té d antiimatges i haurem acabat. De l'expressió de l'aplicació de Newton donada en (4.1), podem veure-ho fàcilment. En efecte, com el polinomi p és de grau d , el polinomi p' és de grau $d - 1$. Pel Teorema Fonamental de l'Àlgebra, un polinomi de grau $d - 1$ té $d - 1$ arrels contades amb multiplicitat, així, siguin $\alpha_1, \dots, \alpha_{d-1}$ aquestes arrels, donat que $N_p(\infty) = \infty$ (veure Proposició 4.12), tenim que $N_p^{-1}(\infty) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{d-1}, \infty\}$ amb el que ∞ té exactament d antiimatges. \square

Els punts fixos de l'aplicació de Newton jugaran un paper molt important en l'estudi de la dinàmica global. Veiem que tota arrel del polinomi és punt fix de l'aplicació de Newton.

Lema 4.3. Sigui $\alpha \in \mathbb{C}$, α és una arrel del polinomi, si i només si, α és punt fix de N_p .

Demostració. En efecte, si α és una arrel del polinomi d'ordre $m \geq 1$, existeix una funció g holomorfa de manera que

$$p(z) = (z - \alpha)^m g(z)$$

amb $g(\alpha) \neq 0$. Notem que,

$$N_p(z) = z - \frac{(z - \alpha)^m g(z)}{(z - \alpha)^m g'(z) + m(z - \alpha)^{m-1} g(z)} = z - \frac{(z - \alpha)g(z)}{(z - \alpha)g'(z) + mg(z)}.$$

Per tant, $N_p(\alpha) = \alpha$ i α és un punt fix de N_p , tal i com volíem veure. Per veure el recíproc, suposem que $N_p(\alpha) = \alpha$, és a dir, $p(\alpha)/p'(\alpha) = 0$, aleshores $p(\alpha) = 0$ sempre que $p'(\alpha) \neq 0$. Si $p'(\alpha) = 0$, aleshores α és una arrel de p d'ordre $m \geq 2$ i en qualsevol cas, $p(\alpha) = 0$, tal i com volíem veure. \square

Proposició 4.4. Sigui α una arrel del polinomi p , aleshores α correspon a un punt fix atractor de N_p . A més a més, si el zero del polinomi és simple, es tracta d'un punt fix superatractor.

Demostració. Si α és un zero del polinomi d'ordre $m \geq 1$, existeix una funció g holomorfa de manera que

$$p(z) = (z - \alpha)^m g(z)$$

amb $g(\alpha) \neq 0$. Notem que,

$$N_p(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)} = z - \frac{(z - \alpha)g(z)}{(z - \alpha)g'(z) + mg(z)}.$$

Així, derivant l'expressió, obtenim que,

$$N'_p(z) = 1 - \frac{[g(z) + (z - \alpha)g'(z)][(z - \alpha)g'(z) + mg(z)] - (z - \alpha)g(z)h(z)}{[(z - \alpha)g'(z) + mg(z)]^2},$$

on $h(z) := g'(z) + (z - \alpha)g''(z) + mg'(z)$, amb el que

$$N'_p(\alpha) = 1 - \frac{mg(\alpha)^2}{m^2g(\alpha)^2} = 1 - \frac{1}{m} = \frac{m-1}{m}.$$

Per tant, $0 \leq N'_p(\alpha) < 1$, així, α és un punt fix atractor i a més a més, si $m = 1$, el punt fix és superatractor. \square

Notem doncs, que tots els punts fixos complexos de N_p són atractors, així, en un entorn d'aquests, la dinàmica és ben coneguda. Concretament, de la Definició 3.9 tenim:

Proposició 4.5. *Segui $z_0 \in \mathbb{C}$ un punt fix de N_p , aleshores, existeix un obert $U \subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in U$, tal que $\forall z \in U$*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} N_p^n(z) = z_0.$$

Corol·lari 4.6. *Segui z_0 una arrel simple del polinomi p . Aleshores el mètode de Newton aplicat a p és localment conjugat a $z \mapsto z^k$ amb $k \geq 2$. Si l'arrel no és simple, anomenant m l'ordre de l'arrel, l'algoritme és localment conjugat a $z \mapsto \frac{m-1}{m}z$.*

Demostració. És immediat a partir de la Proposició 4.4 i dels Teoremes 3.17 i 3.19 \square

Per tant, observem que el mètode de Newton és menys eficient en el cas en que l'arrel del polinomi no sigui simple. Ara bé, si l'arrel és simple l'algoritme convergeix molt ràpid. De fet, passarem a formalitzar la noció de velocitat de convergència i veurem que la convergència és quadràtica, és a dir, que guanyem dos decimals correctes a cada iteració.

4.2 Velocitat de convergència

Definició 4.7. *Segui $\{z_n\}_n \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ una successió amb límit α . Direm que la successió té ordre de convergència q si existeix una constant $C > 0$ tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z_{n+1} - \alpha|}{|z_n - \alpha|^q} = C.$$

Per veure que el mètode de Newton aplicat a un polinomi p és de convergència quadràtica, ens calen dos resultats previs.

Proposició 4.8. *Segui $\alpha \in \mathbb{C}$ i $\epsilon > 0$ i considerem $f : D(\alpha, \epsilon) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Suposem que existeix $K > 0$ tal que*

$$|f(z) - \alpha| \leq K|z - \alpha|^q$$

si $|z - \alpha| < \epsilon$. Aleshores,

- 1) Si $q = 1$ i $K < 1$, f dóna lloc a un mètode d'ordre almenys 1 i $z_{n+1} = f(z_n)$ convergeix per a $|z_0 - \alpha| < \epsilon$. A més tenim l'estimació

$$|z_n - \alpha| \leq K^n |z_0 - \alpha|.$$

- 2) Si $q > 1$, f dóna lloc a un mètode d'ordre almenys q i $z_{n+1} = f(z_n)$ convergeix per a $|z_0 - \alpha| < \min(K^{-1/(q-1)}, \epsilon)$. A més tenim l'estimació

$$|z_n - \alpha| \leq K^{-1/(q-1)} (K^{1/(q-1)} |z_0 - \alpha|)^{q^n}.$$

Demostració. Provem 1). Donat $z \in D(\alpha, \epsilon)$ tenim

$$|f(z) - \alpha| \leq K|z - \alpha| \leq |z - \alpha|,$$

amb el que $f(z) \in D(\alpha, \epsilon)$. Per tant, si $z_0 \in D(\alpha, \epsilon)$ i definim $z_{n+1} = f(z_n)$, tenim $\{z_n\}_n \subseteq D(\alpha, \epsilon)$ i

$$|z_n - \alpha| \leq K|z_{n-1} - \alpha| \leq K^2|z_{n-2} - \alpha| \leq \dots \leq K^n|z_0 - \alpha| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

ja que $K < 1$, d'on $z_n \rightarrow \alpha$ amb ordre almenys 1 (per la primera desigualtat).

Provem 2). Notem que $z \in D(\alpha, K^{-1/(q-1)})$ és equivalent a que $|z - \alpha|^{q-1} < K^{-1}$ amb el que

$$|f(z) - \alpha| \leq K|z - \alpha|^q = (K|z - \alpha|^{q-1})|z - \alpha| < |z - \alpha|,$$

d'on si z_0 satisfà $|z_0 - \alpha| < \min(K^{-1/(q-1)}, \epsilon)$ i $z_{n+1} = f(z_n)$, llavors $|z_n - \alpha| < \min(K^{-1/(q-1)}, \epsilon) \forall n$. A més,

$$\begin{aligned} |z_n - \alpha| &\leq K|z_{n-1} - \alpha|^q \leq K(K|z_{n-2} - \alpha|^q)^q = K^{1+q}|z_{n-2} - \alpha|^{q^2} \leq K^{1+q+q^2}|z_{n-3} - \alpha|^{q^3} \\ &\leq \dots \leq K^{1+q+\dots+q^{n-1}}|z_0 - \alpha|^{q^n} = K^{\frac{q^n-1}{q-1}}|z_0 - \alpha|^{q^n} = K^{\frac{-1}{q-1}}(K^{\frac{1}{q-1}}|z_0 - \alpha|)^{q^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

d'on $z_n \rightarrow \alpha$ amb ordre almenys q (per la primera desigualtat). \square

Proposició 4.9. *Segui $f : D(0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ amb $r \in [0, \infty]$ holomorfa i $\alpha \in D(0, r)$ tal que $f(\alpha) = \alpha$,*

- 1) *Suposem que*

$$f'(\alpha) = f''(\alpha) = \dots = f^{(n-1)}(\alpha) = 0.$$

amb $|f'(\alpha)| < 1$ si $n = 1$. Aleshores, la funció d'iteració f dóna lloc a un mètode iteratiu d'ordre almenys n per trobar α .

- 2) *Si $f^{(n)}(\alpha) \neq 0$ (i $|f^{(n)}(\alpha)| < 1$ per $n = 1$), l'ordre del mètode iteratiu donat per f és exactament n .*

Demostració. Provem 1). Per Taylor,

$$\begin{aligned} f(z) &= f(\alpha) + f'(\alpha)(z - \alpha) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(z - \alpha)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z - \alpha)^n + \mathcal{O}(|z - \alpha|^{n+1}) \\ &= \alpha + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z - \alpha)^n + \mathcal{O}(|z - \alpha|^{n+1}). \end{aligned}$$

on $\mathcal{O}(|z - \alpha|^{n+1}) \xrightarrow{z \rightarrow \alpha} 0$.

Aleshores, si $n = 1$, escollim K tal que $|f'(\alpha)| < K < 1$ de manera que, per continuïtat de f' , existeix $\epsilon > 0$ tal que $|f'(\zeta)| \leq K \forall \zeta \in D(\alpha, \epsilon)$. Així, $|f(z) - \alpha| \leq K|z - \alpha|$ per

$z \in D(\alpha, \epsilon)$. Si $n > 1$, prenem $K = \left| \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} \right|$ i de la mateixa manera, per continuïtat de $f^{(n)}$, $|f(z) - \alpha| \leq K|z - \alpha|^n$ per $z \in D(\alpha, \epsilon)$. Així doncs, per la proposició anterior, obtenim que f dóna lloc a un mètode d'ordre almenys n .

Provem 2). Per veure que l'ordre és exactament n en el cas $|f^{(n)}(\alpha)| \neq 0$, sigui z_0 qualsevol tal que $z_{m+1} = f(z_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \alpha$. Aleshores,

$$\frac{|z_{m+1} - \alpha|}{|z_m - \alpha|^n} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{|f^{(n)}(\alpha)|}{n!} := C > 0.$$

□

Corol·lari 4.10. *Si p un polinomi de grau $d \geq 2$ i sigui α un arrel simple de p amb $p''(\alpha) \neq 0$. Aleshores el mètode de Newton associat a p és de convergència quadràtica.*

Demostració. Recordem que l'aplicació de Newton associada a p ve donada per

$$N_p(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)}.$$

A més,

$$N'_p(z) = \frac{p(z)p''(z)}{(p'(z))^2}.$$

d'on $N'_p(\alpha) = 0$ i per tant, per la proposició anterior, el mètode de Newton és almenys quadràtic. Per comprovar que és quadràtic, utilitzant la proposició anterior, cal veure que $N''_p(\alpha) \neq 0$. Notem que

$$N''_p(z) = \frac{(p'(z)p''(z) + p(z)p'''(z))(p'(z))^2 - 2(p(z)p''(z)p'(z)p''(z))}{(p'(z))^4}.$$

d'on $N''_p(\alpha) = p''(\alpha)/p'(\alpha) \neq 0$, amb el que podem concloure per la proposició anterior que el mètode és de convergència quadràtica. □

Observacions 4.11. Observem els següents fets respecte la convergència del mètode de Newton.

- El cas en que la convergència és quadràtica, es tradueix en un guany d'almenys dos decimals més correctes en cada iteració. Per tant la convergència és molt ràpida en aquests casos.
- Canviant les hipòtesis del corol·lari anterior, concretament, canviant $p''(\alpha) \neq 0$ per $p''(\alpha) = 0$, llavors la convergència del mètode de Newton és almenys cúbica.
- Si α és una arrel doble de p i $p''(\alpha) \neq 0$ en un entorn de α , tenim convergència lineal.

4.3 Punt de l'infinit i punts crítics

Proposició 4.12. *El punt de l'infinit és un punt fix repulsor de N_p .*

Demostració. Veiem primer que el punt de l'infinit és punt fix. Considerem un entorn del punt de l'infinit i un entorn del 0 que anomenarem U i V respectivament. Considerem l'aplicació $\phi : U \rightarrow V$ tal que $\phi(z) = 1/z$. D'aquesta manera, anomenant $p(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_dz^d$, el sistema dinàmic generat per N_p és equivalent al sistema dinàmic generat per $\widetilde{N}_p(z) = \phi(N_p(\phi^{-1}(z))) = \frac{1}{N_p(1/z)}$. Notem que

$$\widetilde{N}_p(z) = \frac{zp'(1/z)}{p'(1/z) - zp(1/z)},$$

on

$$p(1/z) = \frac{\sum_{k=0}^d a_k z^{d-k}}{z^d},$$

i

$$p'(1/z) = \frac{\sum_{k=0}^d k a_k z^{d-k+1}}{z^d},$$

amb el que

$$\widetilde{N}_p(z) = \frac{\sum_{k=0}^d k a_k z^{d-k+2}}{\sum_{k=0}^d k a_k z^{d-k+1} - \sum_{k=0}^d a_k z^{d-k+1}} = \frac{\sum_{k=0}^d k a_k z^{d-k+1}}{\sum_{k=0}^d (k-1) a_k z^{d-k}}.$$

Notem doncs que $\widetilde{N}_p(0) = \frac{0}{(d-1)a_d} = 0$ i per tant, via conjugació, obtenim que $N_p(\infty) = \infty$. Passem a veure que el punt fix és repulsor. Per això, derivarem l'expressió de $\widetilde{N}_p(z)$ i estudiarem $\widetilde{N}'_p(0)$. Derivant, obtenim

$$\widetilde{N}'_p(z) = \frac{p(1/z)p''(1/z)}{(p'(1/z) - zp(1/z))^2},$$

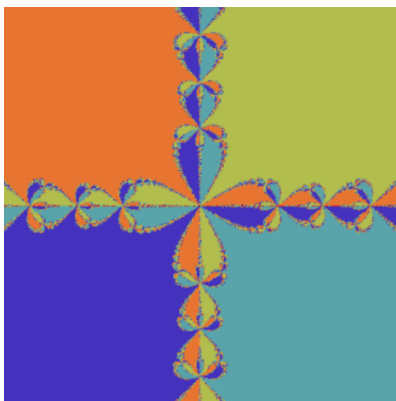
on

$$p''(1/z) = \frac{\sum_{k=0}^d k(k-1) a_k z^{d-k+2}}{z^d},$$

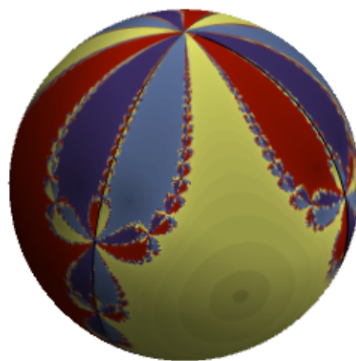
amb el que

$$\begin{aligned} \widetilde{N}'_p(z) &= \frac{(\sum_{k=0}^d a_k z^{d-k})(\sum_{k=0}^d k(k-1) a_k z^{d-k+2})}{(\sum_{k=0}^d k a_k z^{d-k+1} - \sum_{k=0}^d a_k z^{d-k+1})^2} = \frac{(\sum_{k=0}^d a_k z^{d-k})(\sum_{k=0}^d k(k-1) a_k z^{d-k+2})}{(z \sum_{k=0}^d (k-1) a_k z^{d-k})^2} \\ &= \frac{(\sum_{k=0}^d a_k z^{d-k})(\sum_{k=0}^d k(k-1) a_k z^{d-k})}{(\sum_{k=0}^d (k-1) a_k z^{d-k})^2}, \end{aligned}$$

així que $\widetilde{N}'_p(0) = \frac{d}{d-1} > 1$ i per tant, via conjugació, $N'_p(\infty) > 1$, que conclou la demostració. \square



(a) $p(z) = z^4 + 1$.



(b) Projectió estereogràfica de (a) a l'esfera de Riemann.

Figura 3: Conques d'atracció de les arrels del polinomi $p(z)$ pel mètode de Newton. Veiem clarament en (b) que el punt de l'infinit és punt fix repulsor.

Teorema 4.13. *Sigui p un polinomi de grau $d \geq 2$ amb totes les seves arrels simples, aleshores N_p , té exactament $d + 1$ punts fixos a $\hat{\mathbb{C}}$.*

Demostració. Acabem de veure que ∞ és un punt fix de N_p . A més, pel Lema 4.3 tenim que els punts fixos complexos de N_p són exactament els zeros del polinomi p . Donat que p és de grau d i totes les seves arrels són simples, pel Teorema Fonamental de l'Àlgebra, p té d arrels complexes diferents. Així, tenim exactament $d + 1$ punts fixos. \square

Corol·lari 4.14. *El punt de l'infinit és l'únic punt fix repulsor de N_p .*

Observació 4.15. Donat que el punt de l'infinit és un punt fix repulsor notem que les òrbites que evitin els pols de N_p , tenen més possibilitats de convergir ràpidament a una arrel. A més, de l'expressió de N_p donada en (4.1), notem els pols de N_p són precisament els punts crítics del polinomi p . No obstant, ens podríem preguntar si a més de les conques d'atracció dels punts fixos, és a dir, de les arrels de p , podem tenir altres comportaments estables. Vegem un exemple.

Exemple 4.16. En la Figura 4 mostrem un exemple d'una òrbita 2-periòdica del mètode de Newton. El polinomi en qüestió és $p(z) = z^3 - 2z^2 + 2$. L'aplicació de Newton associada al polinomi p és $N_p(z) = \frac{2z^3 - 2}{3z^2 - 2}$. Notem que $\{0, 1\}$ és una òrbita 2-periòdica de N_p , doncs $N_p(0) = 1$ i $N_p(1) = 0$. A més, $N'_p(z) = \frac{6z^2(3z^2 - 2) - (2z^3 - 2)6z}{(3z^2 - 2)^2}$ amb el que $N'_p(0) = 0$ i l'òrbita periòdica és atractora, veieu Secció 3.2. Així, podem trobar oberts de \mathbb{C} amb comportament estable que no convergeixen a l'arrel.

Tanquem aquesta secció amb un teorema que mostra la relació entre els punts crítics d'un polinomi i les seves arrels, així com, on podem trobar els punts crítics de l'aplicació de Newton associada al polinomi. Abans però, necessitem definir un nou concepte.

Definició 4.17. *Donat un conjunt de k punts, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, definim l'envolupant convexa de X com el conjunt $C(X)$, donat per:*

$$C(X) = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i \mid x_i \in X, \alpha_i \in \mathbb{R}, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1 \right\}.$$

Es pot entendre com la intersecció de tots els conjunts convexos que contenen X .

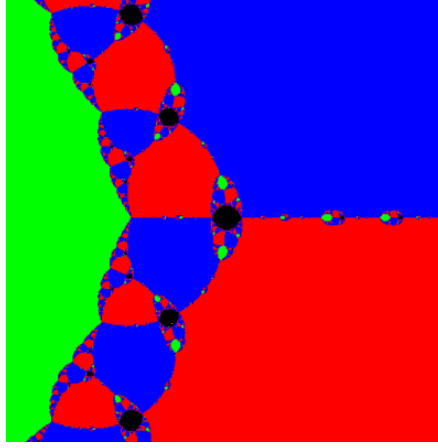


Figura 4: Conques d'atracció de les arrels del polinomi $p(z) = z^3 - 2z + 2$ pel mètode de Newton en $[-2, 2] \times [-2, 2]$. La regió de color negre correspon a la conca d'atracció d'una òrbita 2-periòdica.

Teorema 4.18. *L'envolupant convexa de les arrels de qualsevol polinomi p , conté tots els seus punts crítics. A més, conté tots els zeros de les derivades d'ordre superior del polinomi. En particular, conté els punts crítics de N_p , l'aplicació de Newton associada al polinomi.*

Demostració. Si demostrem que l'envolupant convexa de les arrels de qualsevol polinomi conté tots els seus punts crítics ja hem acabat, doncs per inducció s'obté el resultat.

Sigui r un punt crític del polinomi tal que no és arrel de $p(z)$, altrament, r pertanyeria a l'envolupant convexa de les arrels de $p(z)$ i ja hauríem acabat. Sigui r_1, \dots, r_n les arrels de $p(z)$, podem escriure, $p(z) = c(z - r_1)(z - r_2) \cdots (z - r_n)$ i prenent logaritmes, ens queda que $\log(p(z)) = \log c + \log(z - r_1) + \cdots + \log(z - r_n)$. Derivant, obtenim que

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \frac{1}{z - r_1} + \cdots + \frac{1}{z - r_n}.$$

Avaluant en $z = r$, com $p'(r) = 0$, obtenim que

$$0 = \frac{1}{r - r_1} + \cdots + \frac{1}{r - r_n}.$$

Multiplicant pel conjugat de cada denominador, obtenim que

$$0 = \frac{\bar{r} - \bar{r}_1}{|r - r_1|^2} + \cdots + \frac{\bar{r} - \bar{r}_n}{|r - r_n|^2}.$$

o equivalentment,

$$\frac{\bar{r}_1}{|r - r_1|^2} + \cdots + \frac{\bar{r}_n}{|r - r_n|^2} = \left(\frac{1}{|r - r_1|^2} + \cdots + \frac{1}{|r - r_n|^2} \right) \bar{r}.$$

i conjugant als dos costats de la igualtat, obtenim

$$\frac{r_1}{|r - r_1|^2} + \cdots + \frac{r_n}{|r - r_n|^2} = \left(\frac{1}{|r - r_1|^2} + \cdots + \frac{1}{|r - r_n|^2} \right) r.$$

Anomenant $R := \frac{1}{|r-r_1|^2} + \dots + \frac{1}{|r-r_n|^2}$, obtenim que

$$\frac{1}{|r-r_1|^2}r_1 + \dots + \frac{1}{|r-r_n|^2}r_n = r.$$

amb el que r pertany a l'envolupant convexa de les arrels del polinomi. \square

4.4 Mètode de Newton per a polinomis de grau dos

El cas més senzill per estudiar la convergència global del mètode de Newton, és el donat per polinomis de grau dos. El resultat que mostrarem és sabut des de 1870 per E.Schröder i A.Cayley.

Teorema 4.19. *Sigui p un polinomi de grau dos amb arrels diferents, α i β . Aleshores N_p és linealment conjugat al polinomi $q(z) = z^2$ en $\hat{\mathbb{C}}$, és a dir, N_p es pot conjuguar per una transformació lineal de $\hat{\mathbb{C}}$ en si mateix (transformació de Möbius) a q . A més, la recta determinada per la bisectriu $L_{\alpha,\beta}$ és la frontera de les conques d'atracció de α i β .*

Demostració. Podem escriure $p(z) = A(z - \alpha)(z - \beta)$ i suposar que $A = 1$. Notem que $N_p(z) = \frac{z^2 - \alpha\beta}{2z - (\alpha + \beta)}$. Anomenant,

$$\phi(z) = \frac{z - \alpha}{z - \beta},$$

tenim que el sistema dinàmic generat per N_p és equivalent al sistema dinàmic generat per $\tilde{N}_p(z) = \phi(N_p(\phi^{-1}(z))) = z^2 = q(z)$. En efecte $\phi(N_p(z)) = (\phi(z))^2$, doncs

$$\phi(N_p(z)) = \phi\left(\frac{z^2 - \alpha\beta}{2z - (\alpha + \beta)}\right) = \frac{z^2 - \alpha\beta - \alpha(2z - (\alpha + \beta))}{z^2 - \alpha\beta - \beta(2z - (\alpha + \beta))} = \left(\frac{z - \alpha}{z - \beta}\right)^2 = (\phi(z))^2.$$

Així, si triem z_0 més a prop de α que de β , és a dir, $|z_0 - \alpha| < |z_0 - \beta|$ tenim $|\phi(z_0)| < 1$, amb el que,

$$q^n(\phi(z_0)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

per tant,

$$N_p^n(z_0) = \phi^{-1}(q^n(\phi(z_0))) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi^{-1}(0) = \alpha.$$

De la mateixa manera, si ara triem z_0 més proper a β que α , és a dir, $|z_0 - \beta| < |z_0 - \alpha|$, obtenim amb un raonament anàleg, que $N_p^n(z_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi^{-1}(\infty) = \beta$.

A més, la recta que determina la frontera de les conques d'atracció de α i β i que a més té un comportament caòtic és la recta que satisfà $|z - \alpha| = |z - \beta|$. \square

Exemple 4.20. Per exemple si $p(z) = z^2 - 1$, tenim $\mathcal{A}(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$, $\mathcal{A}(-1) = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) < 0\}$ i la recta de comportament caòtica és $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$.

4.5 Conques d'atracció de l'aplicació de Newton

En aquesta secció provarem que, donat un polinomi p de grau $d \geq 2$, les conques immediates d'atracció de N_p són no acotades. Farem servir els resultats vistos en la Secció 3.5. No obstant, fixem-nos que és un fet raonable i intuïtiu.

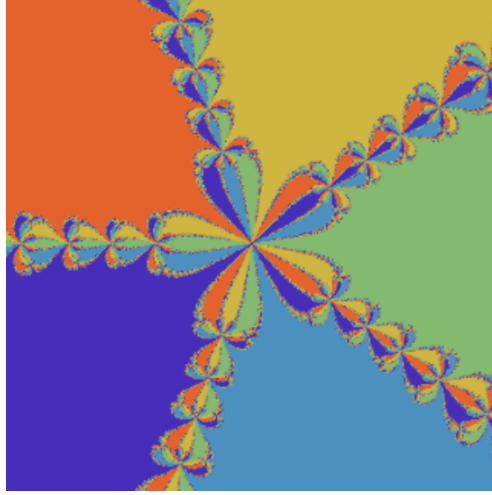


Figura 5: Conques d'atracció de les arrels del polinomi $p(z) = z^5 - 1$ pel mètode de Newton en $[-2, 2] \times [-2, 2]$.

Abans de enunciar el resultat, observem el següent fet, immediat de les seccions anteriors.

Lema 4.21. *El punt de l'infinit és l'únic punt fix de N_p contingut en $\mathcal{J}(N_p)$.*

Teorema 4.22. *Sigui p un polinomi de grau $d \geq 2$, α una arrel de p i N_p l'aplicació de Newton associada a p , aleshores la conca d'atracció immediata de α , $\mathcal{A}^*(\alpha)$, és no acotada.*

Demostració. Suposem que $\mathcal{A}^*(\alpha)$ està acotada. Veurem que existeix un punt fix de N_p contingut en $\partial\mathcal{A}^*(\alpha) \subseteq \partial\mathcal{A}(\alpha) = \mathcal{J}(N_p)$. Això serà una contradicció ja que pel Lema 4.21, l'únic punt fix de l'aplicació de Newton contingut en $\mathcal{J}(N_p)$ és el punt de l'infinit.

Si suposem que $\mathcal{A}^*(\alpha)$ està acotada, el nombre de punts crítics de l'aplicació N_p en $\mathcal{A}^*(\alpha)$ és finit i tots ells són atrets per α . Així, podem triar dos punts diferents $z_0, z_1 \in \mathcal{A}^*(\alpha) \setminus \{\alpha\}$ de manera que $N(z_1) = z_0$ i poden ser units per una corba γ_0 de manera que $\gamma_0 \subset \mathcal{A}^*(\alpha) \setminus \overline{\bigcup_{n \geq 1} N^n(\text{Crit} \cap \mathcal{A}^*(\alpha))}$ on Crit és el conjunt de punts crítics de N_p . Podem doncs, triar dos oberts, U_0, V_0 que poden ser dos discs topològics, de manera que $\overline{U_0} \subset V_0$, $\gamma_0 \subset U_0$ i $V_0 \cap \text{Crit} = \emptyset$. Donat que en U_0 no hi ha punts crítics, existeixen branques ben definides de l'aplicació N_p^{-1} . Anomenem $h_1 : U_0 \rightarrow \mathbb{C}$, la branca local de N_p^{-1} tal que $N_p^{-1}(z_0) = z_1$ que pot ser estesa a tot U_0 . Repetint el procés, podem definir les branques locals de l'aplicació N_p^{-n} i les anomenarem $h_n : U_0 \rightarrow \mathbb{C}$, de manera que $h_1(z_0) = z_1, z_2 := h_1(z_1), h_2(z_0) = z_2, \dots$. Així, prenent les imatges per h de γ_0 i U_0, V_0 , podem definir una corba que uneix $z_n := h_n(z_0)$ amb z_{n+1} , $\gamma_n := h_n(\gamma_0)$, i dos oberts, $U_n := h_n(U_0)$ i $V_n := h_n(V_0)$.

Notem que $\gamma_n \subseteq \mathcal{A}^*(\alpha) \forall n \in \mathbb{N}$. En efecte, per inducció, tenim que $\gamma_0 \subseteq \mathcal{A}^*(\alpha)$ per construcció. Suposem ara que $\gamma_n \subseteq \mathcal{A}^*(\alpha)$ i $\gamma_{n+1} \not\subseteq \mathcal{A}^*(\alpha)$. En aquest cas, existeix un punt de γ_{n+1} en el conjunt de Julia, però $N_p(\gamma_{n+1}) = \gamma_n \subseteq \mathcal{A}^*(\alpha) \subseteq \mathcal{F}(N_p)$. Ara bé, el conjunt de Fatou és invariant, és a dir, $N_p^{-1}(\mathcal{F}(N_p)) = \mathcal{F}(N_p)$ i com el conjunt de Fatou i Julia són disjunts, obtenim una contradicció, amb el que $\gamma_n \subseteq \mathcal{A}^*(\alpha) \forall n \in \mathbb{N}$. Anomenem $\gamma = \bigcup_n \gamma_n$.

Com $\mathcal{A}^*(\alpha)$ és acotat, pel Teorema de Bolzano-Weierstrass, la successió $\{z_n\}$ ha de tenir una subsuccessió convergent, és a dir, ha d'existir n_k tal que $z_{n_k} \rightarrow \zeta$. Considerem ara l'obert U_{n_k} que conté z_{n_k} i z_{n_k+1} . Observem que el diàmetre de U_{n_k} tendeix a 0. Per demostrar això, raonem per contradicció, suposem que no, és a dir, suposem que existeix una subsubsuccessió n_{k_j} i un $\eta > 0$ tal que $\text{diam}(U_{n_{k_j}}) > \eta$ quan $n_{k_j} \rightarrow \infty$. Pel Teorema 3.51, donat que $\overline{U_0} \subset V_0$ i h_n és una aplicació holomorfa i injectiva, existeix una constant $0 < k < 1$ independent de h_n tal que

$$D(z_n, k \text{diam}(U_n)) \subset U_n \forall n \in \mathbb{N}.$$

Per tant, $U_{n_{k_j}}$ conté un disc de radi $k\eta$, $\forall j \in \mathbb{N}$, amb el que, per un j prou gran, existeix $\epsilon > 0$, $\epsilon < k\eta$ tal que

$$D(\zeta, \epsilon) \subset \bigcap_j U_{n_{k_j}} = \bigcap_j h_{n_{k_j}}(U_0).$$

D'aquesta manera, $N_p^{n_{k_j}}(D(\zeta, \epsilon)) \subset U_0$, i com ζ és un punt límit de γ , notem que la família $N_p^{n_{k_j}}$ és normal. Doncs si no ho fos, pel Teorema de Montel (Teorema 3.40), $N_p^{n_{k_j}}$ hauria de recobrir tot el pla excepte com a molt dos punts, en contradicció amb $N_p^{n_{k_j}}(D(\zeta, \epsilon)) \subset U_0$. A més, qualsevol punt límit de γ ha d'estar en la frontera de la conca d'atracció immediata, és a dir, en el conjunt de Julia. Arribem doncs a una contradicció ja que el conjunt de Julia i de Fatou són disjunts. En conclusió, el diàmetre de U_{n_k} tendeix a 0. Per tant, tenim que $|z_{n_{k+1}} - N_p(z_{n_{k+1}})| = |z_{n_{k+1}} - z_{n_k}| \rightarrow 0$, amb el que existeix un punt fix finit en la frontera de la conca d'atracció immediata i per tant en el conjunt de Julia, tal i com volíem veure. \square

4.6 Aplicacions numèriques al càlcul de les arrels per N_p

Un dels problemes més importants que presenta el mètode de Newton i qualsevol algoritme iteratiu per a trobar zeros d'un polinomi, és que hem de partir d'una condició inicial. L'elecció d'aquesta és fonamental per convergir més o menys ràpid a una arrel o fins i tot per no convergir a cap. En aquesta secció presentem un mètode per a escollir condicions inicials adequades de manera que puguem trobar totes les arrels del polinomi amb el mètode de Newton. Va ser desenvolupat per J.Hubbard, D.Schleicher i S.Sutherland al 2001 a [11] publicat a *Inventiones mathematicae*.

Hom podria pensar que aquest tipus d'algoritme no pot existir per qualsevol polinomi, doncs en la Secció 4.3 vam veure un exemple d'un polinomi que posseïa òrbites de període dos atractores, amb el que existeixen oberts del pla amb comportament estable que no convergeixen a l'arrel. No obstant, vam veure que els punts periòdics són densos en el conjunt de Julia i es pot demostrar, sota certes hipòtesis, que el conjunt de Julia té

mesura zero. Abans d'entrar en detalls, mostrem un teorema que ens permetrà suposar que tots els zeros d'un polinomi p estan, per exemple, al disc unitat, ja que mitjançant una transformació afí, podrem transformar les arrels del polinomi sense variar la dinàmica del mètode de Newton.

Proposició 4.23. *Sigui $\phi(z) = \alpha z + \beta$ amb $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$ i sigui $q(z) = p(\phi(z))$, aleshores ϕ és una conjugació entre N_p i N_q .*

Demostració. Notem que $p = q \circ \phi^{-1}$ i donat que $\phi^{-1}(z) = \frac{z}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}$ tenim que $p'(z) = \alpha^{-1}q'(\phi^{-1}(z))$. Així,

$$\begin{aligned}\phi \circ N_q \circ \phi^{-1}(z) &= \phi \left(\phi^{-1}(z) - \frac{q(\phi^{-1}(z))}{q'(\phi^{-1}(z))} \right) = \alpha \left(\phi^{-1}(z) - \frac{q(\phi^{-1}(z))}{q'(\phi^{-1}(z))} \right) + \beta = \\ &= \alpha \left(\frac{z}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} \right) - \frac{q(\phi^{-1}(z))}{\alpha^{-1}q'(\phi^{-1}(z))} + \beta = z - \frac{p(z)}{p'(z)} = N_p(z).\end{aligned}$$

Donat que ϕ és clarament bijectiva i analítica, obtenim el desitjat. \square

Observació 4.24. Donat un polinomi p tal que totes les seves arrels estan contingudes en un disc de radi R , centrat en el 0, escollint $\alpha = R$ i $\beta = 0$, el polinomi $q(z) = p(Rz)$ té les seves arrels en ζ/R on $p(\zeta) = 0$. D'aquesta manera, les arrels del polinomi q estaran contingudes en el disc unitat i per la proposició anterior N_p i N_q tindran dinàmiques equivalents.

Per tant, per la Proposició 4.23, podem suposar que totes les arrels del polinomi estan contingudes en el disc unitat. Amb aquesta observació, podem enunciar el resultat principal de [11]:

Teorema 4.25. *Per cada $d \geq 2$, existeix un conjunt \mathcal{S}_d de $1.11d \log^2 d$ punts de \mathbb{C} com a màxim tal que per cada polinomi p de grau d i per cada una de les seves arrels, existeix un punt $s \in \mathcal{S}_d$ en la conca d'atracció de l'arrel escollida.*

Podem construir explícitament aquest conjunt de condicions inicials de manera que hi hagi almenys una en cada conca d'atracció immediata de cada arrel per qualsevol polinomi p de grau $d \geq 2$. Concretament, aquest conjunt consisteix en $s = \lceil 0.26632 \log d \rceil$ cercles amb $N = \lceil 8.32547d \log d \rceil$ punts en cada un, on $\lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z} \mid x \leq k\}$. El conjunt ve donat per

$$\mathcal{S}_d = \{r_v \exp(iv_j) \mid 1 \leq v \leq s, 0 \leq j \leq N-1\},$$

on

$$r_v = (1 + \sqrt{2}) \left(\frac{d-1}{d} \right)^{\frac{2v-1}{4s}}, \quad v_j = \frac{2\pi j}{N}.$$

Fixem-nos que \mathcal{S}_d és un conjunt format per Ns punts. Notem que el número de cercles que necessitem és prou petit. En efecte, per graus de polinomi $d \leq 42$, el nombre $0.26632 \log d$ és més petit que 1; per $d \leq 1825$, més petit que 2; per $d \leq 78015$, més petit que 3 i per $d \leq 3333550$, més petit que 4. No obstant, aquest conjunt es pot millorar, doncs necessitem que el número de cercles i el número de punts en cada cercle siguin enters, amb el que

arrodonint cap amunt per estar en la zona segura potser no és el més efectiu. Es poden fer certs càlculs per a reduir el nombre de condicions inicials, de manera que per exemple, només calgui un cercle per a polinomis de graus $d \leq 173$ o dos per $174 \leq d \leq 9255$, per més informació, consulteu [11], capítol 9. En qualsevol cas, no serà aquest el nostre objecte d'estudi, sinó entendre el conjunt que hem donat i fer certes comprovacions numèriques.

Observació 4.26. Fixem-nos que el fet que les conques d'atracció immediates dels punts fixos finits siguin no acotades juga un paper fonamental. Aquest fet proporciona la certesa que totes les conques d'atracció han d'intersecar en algun moment el disc de radi r_v centrat en l'origen, sempre i quan tinguem les arrels contingudes en el disc unitat. Ara bé, la dificultat es troba en escollir una quantitat de punts adequada en el disc de radi r_v centrat en l'origen per tal de poder trobar-les totes, doncs podria passar que l'amplada de la conca d'atracció intersecada el disc fos arbitràriament petita, fet que dificultaria l'elecció d'una condició inicial.

Mostrarem ara uns exemples per veure com podem implementar aquest mètode. L'objectiu, és trobar punts $\hat{\zeta}_1, \dots, \hat{\zeta}_d$ de manera que aquests punts aproximïn les d arrels d'un polinomi de grau d donat. L'algoritme és el següent: Donat un polinomi p , anomenem ζ_1, \dots, ζ_d les arrels d'aquest. En el cas que les arrels no estiguin contingudes en el disc unitat, apliquem l'Observació 4.24 i apliquem el mètode a N_q on $q(z) = p(Rz)$. Fixem un nombre natural K de manera que donat un punt $z_0 \in \mathcal{S}_d$, apliquem el mètode de Newton K vegades aturant-lo quan $|z_n - z_{n-1}| < \epsilon$ on $\epsilon > 0$ és un valor fixat i $z_n = N_q^n(z_0)$. Si l'arrel ζ_j aproximada per z_n és diferent de totes les anteriors trobades, posem $\hat{\zeta}_j = z_n$. Notem que les arrels han d'estar contades amb multiplicitat. Si el mètode de Newton ha estat aplicat K vegades i no ha convergit a cap arrel, ens guardem el valor z_K en un conjunt que anomenem \mathcal{S}_d^1 . Si després de realitzar l'algoritme per tots els punts de \mathcal{S}_d , el nombre d'arrels trobades és menor que d , comencem de nou, usant punts de \mathcal{S}_d^1 com valors inicials i guardem els punts que no convergeixen en un conjunt \mathcal{S}_d^2 com abans. Repetim el procés fins a trobar les d arrels.

El problema d'aquest mètode es troba en el cas que el polinomi en qüestió no tingui totes les arrels contingudes en el disc unitat. Com bé dèiem, per l'Observació 4.24, cal trobar un valor de R adequat per re-escalar el polinomi i posar totes les arrels en el disc unitat per aplicar l'algoritme. Per fer-ho, utilitzarem el Teorema de Rouché, enunciat en el Capítol 2. Vegem un parell d'exemples, en tots els casos, fixem $K = 50$.

Exemple 4.27. Anomenem $p(z) = z^5 + 3z^3 + 7$. Notem que $|3z^3 + 7| \leq 31 < 32 = |z^5|$ per $|z| = 2$. Pel Teorema de Rouché, com $f(z) = z^5$ té cinc zeros a l'interior del disc $D(0, 2)$, p també. Per tant el valor de R que hauríem d'escollir en aquest cas per aplicar l'algoritme al polinomi p seria $R = 2$. Apliquem el mètode a $q(z) = p(Rz)$ per tal que totes les arrels estiguin contingudes en el disc unitat. Notem que el polinomi és de grau 5 amb el que tenim $s = 1$ cercles i $N = 67$ punts distribuïts en el cercle de radi $r = 2.28322$. Encara que el mètode necessita 67 condicions inicials, només són necessàries 46 per a trobar totes les arrels.

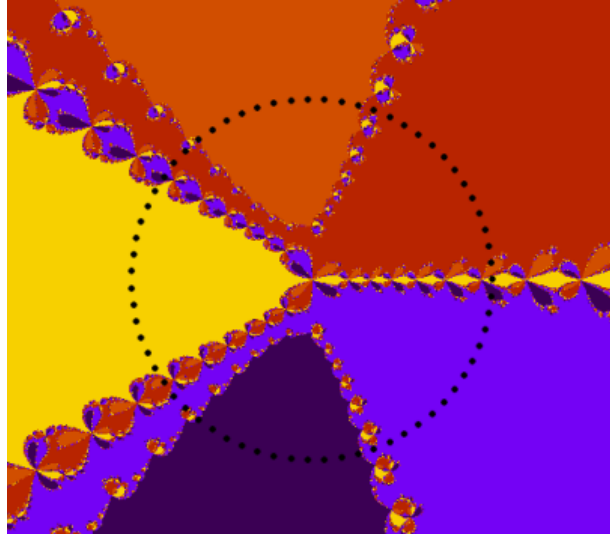


Figura 6: Conques d'atracció de les arrels del polinomi $q(z) = p(Rz)$ pel mètode de Newton en $[-4, 4] \times [-4, 4]$ i condicions inicials (en negre) del mètode descrit.

Exemple 4.28. Sigui ara $p(z) = z^8 + 3z^6 + z^5 + iz + 2$. En aquest cas, raonant com abans, pel Teorema de Rouché, $R = 2$. Apliquem el mètode a $q(z) = p(Rz)$ per tal que les arrels estiguin contingudes en el disc unitat. Notem que el polinomi és de grau 8 amb el que tenim $s = 1$ i $N = 139$ punts distribuïts en el cercle de radi 2.33495. Encara que el mètode necessita 139 condicions inicials, només són necessàries 107 per a trobar totes les arrels.

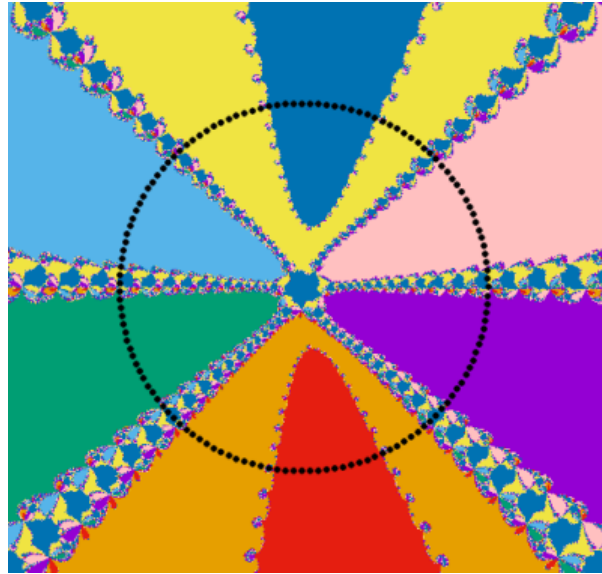


Figura 7: Conques d'atracció de les arrels del polinomi $q(z) = p(Rz)$ pel mètode de Newton en $[-4, 4] \times [-4, 4]$ i condicions inicials (en negre) del mètode descrit.

Observació 4.29. Les condicions inicials són escollides en sentit antihorari començant per $(0, -r)$ on r és el radi del cercle.

5 El mètode de Newton i la funció exponencial

Un cop estudiat el mètode de Newton aplicat a polinomis, ens centrarem ara en el mètode aplicat a una classe de funcions enteres. Concretament, donat un polinomi p de grau $d \geq 2$, examinarem el mètode de Newton aplicat a $F(z) = \exp(z)p(z)$. De la mateixa manera que el capítol anterior, es pot veure que $\alpha \in \mathbb{C}$ és un punt fix de N_F si i només si, $F(\alpha) = 0$, o equivalentment $p(\alpha) = 0$, ja que la exponencial no s'anul·la. A més, notem que és un mètode racional, doncs

$$N_F(z) = z - \frac{\exp(z)p(z)}{\exp(z)p(z) + \exp(z)p'(z)} = z - \frac{p(z)}{p(z) + p'(z)} = \frac{zp(z) + zp'(z) - p(z)}{p(z) + p'(z)}, \quad (5.1)$$

és una funció racional. Essencialment, el mètode aplicat a F té la mateixa funció que el mètode aplicat al polinomi, trobar zeros del polinomi, però la dinàmica d'aquest model produeix resultats inesperats i interessants, força diferents dels que hem estudiat anteriorment.

L'objectiu d'aquesta secció és mostrar i entendre la diferent dinàmica que es crea en el mètode de Newton aplicat a F en comparació amb el mètode de Newton aplicat a polinomis, que es deurà principalment al fet que el punt de l'infinit és en aquest cas un punt fix parabòlic, en comptes d'un punt fix repulsor. El Teorema de Leau-Fatou ens donarà una descripció de la dinàmica local del punt fix. Intentarem també aprofitar-nos de la nova dinàmica per construir un nou algoritme per a trobar totes les arrels d'un polinomi i veure les avantatges o desavantatges d'aquest comparat amb el ja explicat en la Secció 4.6. Principalment, per a l'elaboració d'aquest capítol s'ha utilitzat [10].

5.1 Punts fixos parabòlics i teoria local

Des d'ara en endavant anomenarem $F(z) = \exp(z)p(z)$ i p serà un polinomi $d \geq 2$. Veurem que el punt de l'infinit és un punt fix parabòlic. Abans però, recordarem algunes de les propietats que teníem amb el mètode de Newton aplicat a polinomis i que seguim tenint.

Proposició 5.1. *Les següents afirmacions són certes:*

- 1) *Si α és una arrel de F , aleshores α és un punt fix atractiu de N_F . A més a més, si el zero és simple, es tracta d'un punt fix superatractor.*
- 2) *Si $z_0 \in \mathbb{C}$ és un punt fix de N_F , existeix un obert $U \subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in U$ tal que $\forall z \in U$,*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} N_F^n(z) = z_0.$$

- 3) *Si α és un zero simple de F , i $F''(\alpha) \neq 0$. Aleshores el mètode de Newton N_F té convergència quadràtica per a trobar α .*

Demostració. Provem 1). Primer cal observar que $F(\alpha) = 0 \iff p(\alpha) = 0$. Aleshores, tal i com vam fer a la demostració de la Proposició 4.4, si α és un zero d'ordre $m \geq 1$ de F , existeix una funció holomorfa g de manera que

$$p(z) = (z - \alpha)^m g(z),$$

amb $g(\alpha) \neq 0$. Notem que,

$$N_F(z) = z - \frac{p(z)}{p(z) + p'(z)} = z - \frac{(z - \alpha)g(z)}{(z - \alpha)g(z) + (z - \alpha)g'(z) + mg(z)}.$$

Així, derivant l'expressió, obtenim que,

$$N'_F(z) = 1 - \frac{[g(z) + (z - \alpha)g'(z)][(z - \alpha)g(z) + (z - \alpha)g'(z) + mg(z)] - (z - \alpha)g(z)h(z)}{[(z - \alpha)g(z) + (z - \alpha)g'(z) + mg(z)]^2},$$

on $h(z) = g(z) + (z - \alpha)g'(z) + g'(z) + (z - \alpha)g''(z) + mg'(z)$, amb el que

$$N'_F(\alpha) = 1 - \frac{mg(\alpha)^2}{m^2g(\alpha)^2} = 1 - \frac{1}{m} = \frac{m-1}{m}.$$

Per tant, $0 \leq N'_F(\alpha) < 1$, així, α és un punt fix atractor i a més a més, si $m = 1$, el punt fix és superatractor.

Provem 2). Fixem-nos que si $z_0 \in \mathbb{C}$ és un punt fix de N_F , per 1), el punt fix és atractor, així per la Definició 3.9 obtenim el resultat.

Provem 3). Sigui α un zero simple de F . Notem que

$$N'_F(z) = \frac{F(z)F''(z)}{F'(z)^2},$$

amb el que $N'_F(\alpha) = 0$. A més,

$$N''_F(z) = \frac{(F'(z)F''(z) + F(z)F'''(z))(F'(z))^2 - (F(z)F''(z)2F'(z)F''(z))}{(F'(z))^4},$$

d'on $N''_F(\alpha) = F''(\alpha)/F'(\alpha) \neq 0$. Per la Proposició 4.9 obtenim que el mètode és de convergència quadràtica per a trobar α . \square

Veiem ara com ha canviat la dinàmica del punt de l'infinit.

Proposició 5.2. *El punt de l'infinit és un punt fix parabòlic de N_F .*

Demostració. Veiem primer que el punt de l'infinit és un punt fix per N_F . Recordem que $N_F(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} N_F(z)$. Donat que el numerador té grau $d + 1$ (veure (5.1)) i el denominador té grau d obtenim que $\lim_{z \rightarrow \infty} N_F(z) = \infty$, amb el que $N_F(\infty) = \infty$. Per determinar el tipus, considerem U un entorn del punt de l'infinit i V un entorn del 0 i considerem l'aplicació $\phi : U \rightarrow V$ tal que $\phi(z) = 1/z$. D'aquesta manera, el sistema dinàmic generat per N_F és equivalent al sistema dinàmic generat per $\widetilde{N}_F(z) = \phi(N_F(\phi^{-1}(z))) = \frac{1}{N_F(1/z)}$. Notem que

$$\widetilde{N}_F(z) = \frac{zp(1/z) + zp'(1/z)}{p(1/z) + p'(1/z) - zp(1/z)} = z + \frac{z^2p(1/z)}{p(1/z) + p'(1/z) - zp(1/z)} = z(1 + H(z)), \quad (5.2)$$

on

$$H(z) = \frac{zp(1/z)}{p(1/z) + p'(1/z) - zp(1/z)}.$$

Per tant, $\widetilde{N}'_F(z) = 1 + H(z) + zH'(z)$, amb el que $\widetilde{N}'_F(0) = 1$ ja que $H(0) = 0$. Via conjugació i per la Definició 3.12, com 1 és una arrel de la unitat, podem concloure que el punt de l'infinit és un punt fix parabòlic. \square

Teorema 5.3. *Sigui p un polinomi de grau $d \geq 2$ amb totes les seves arrels simples, aleshores N_F té exactament $d + 1$ punts fixos a $\hat{\mathbb{C}}$.*

Demostració. Sabem que tots els punts fixos complexos de N_F coincideixen amb els zeros de F , és a dir, els zeros de p . Pel Teorema Fonamental de l'Àlgebra, tenim d arrels diferents a \mathbb{C} i com acabem de veure que ∞ és un punt fix de N_F , concloem que N_F té exactament $d + 1$ punts fixos a $\hat{\mathbb{C}}$. \square

Definició 5.4. *Un pètal atractor, \mathcal{P}^+ , per una aplicació holomorfa f en $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ és un obert simplement connex positivament invariant amb $z_0 \in \partial\mathcal{P}^+$, que es redueix cap a z_0 sota iteració de f . Més precisament, \mathcal{P}^+ és un pètal atractor si*

- $f(\overline{\mathcal{P}^+}) \subseteq \mathcal{P}^+ \cup \{z_0\}$,
- $\bigcap_{n \geq 0} f^n(\overline{\mathcal{P}^+}) = \{z_0\}$.

Un pètal repulsor, \mathcal{P}^- , és un pètal atractor per f^{-1} , que existeix localment donat que $f'(z_0) = 1$.

El següent teorema, ens mostra la dinàmica local d'un punt fix parabòlic per una funció holomorfa. La demostració es pot trobar en [12], concretament, és el Teorema 10.7.

Teorema 5.5 (Leau-Fatou). *Sigui $z_0 \in \mathbb{C}$ un punt fix parabòlic d'una funció holomorfa f de multiplicitat $n + 1 \geq 2$, és a dir,*

$$f(z) = \lambda(z - z_0) + c(z - z_0)^{n+1} + \mathcal{O}(z - z_0)^{n+2}, \quad c \neq 0,$$

amb λ una arrel de la unitat. Aleshores, en qualsevol entorn del punt fix, existeixen pètals \mathcal{P}_j , on el subíndex j pertany als enters mòdul $2n$ i \mathcal{P}_j és atractor o repulsor segons si j és parell o senar. Per tant, hi ha exactament n pètals atractors i n pètals repulsors per f que s'alternen entre si.

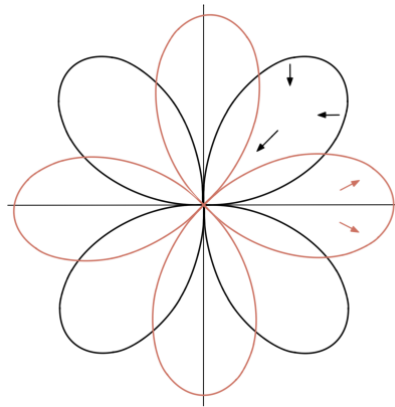


Figura 8: Pètals atractors (en negre) i repulsors (en vermell) per $n = 4$.

Corol·lari 5.6. *L'aplicació N_F té exactament un pètal atractor i un pètal repulsor al punt de l'infinit.*

Demostració. Raonant com en la Proposició 5.2, via conjugació amb l'aplicació $\phi(z) = 1/z$, podem concloure que $\widetilde{N_F}(z) = z(1 + H(z))$ té el mateix nombre de pètals al voltant del zero que N_F al voltant de ∞ . Podem escriure $\widetilde{N_F}(z) = z + zH(z)$, en un entorn del 0 com,

$$\widetilde{N_F}(z) = z + H(0)z + H'(0)z^2 + \mathcal{O}(z^3),$$

De l'expressió de H donada en (5.2) notem que $H(0) = 0$ i $H'(0) = 1$. Aplicant el Teorema de Leau-Fatou, tenim un pètal atractor i un pètal repulsor per $\widetilde{N_F}$ en 0, així, via conjugació, obtenim el resultat. \square

Abans d'estudiar la dinàmica global que genera aquest mètode, notem que podríem haver escollit $F(z) = e^{Q(z)}p(z)$ on Q és un polinomi de grau n i considerar l'aplicació N_F . No obstant, es pot veure que si $\deg(Q) \geq 3$ aleshores les conques d'atracció tenen àrea finita, veure [10], cosa poc interessant des del punt de vista numèric. És per aquest motiu que estudiem directament el cas descrit al principi del capítol, $F(z) = \exp(z)p(z)$.

5.2 Conques d'atracció i comportament asimptòtic

En el capítol anterior, concretament en la Secció 4.5, vam demostrar que les conques d'atracció immediates de les arrels d'un polinomi eren no acotades per N_p , l'aplicació de Newton associada al polinomi p . Veurem ara que aquest resultat segueix sent cert per N_F .

Teorema 5.7. *Sigui p un polinomi de grau $d \geq 2$, $F(z) = \exp(z)p(z)$, α una arrel de F , és a dir, una arrel de p i N_F l'aplicació de Newton associada a F , aleshores la conca d'atracció immediata de α , $\mathcal{A}^*(\alpha)$, és no acotada.*

Demostració. La demostració és idèntica a la que vam fer en el Teorema 4.5, donem les idees principals. Notem que N_F segueix sent una aplicació racional. Recordem que per la demostració del teorema suposàvem que la conca d'atracció immediata d'una arrel era acotada i trobàvem un punt fix de N_p en la frontera de la conca d'atracció, que està continguda en el conjunt de Julia. Això era una contradicció perquè l'únic punt fix de N_p contingut en el conjunt de Julia era el punt de l'infinit. Tot i que ara el punt de l'infinit és parabòlic, per la Proposició 3.39, aquest segueix pertanyent al conjunt de Julia. Donat que pel Teorema 5.3, N_F segueix tenint $d+1$ punts fixos i tenim d punts fixos atractors a \mathbb{C} , notem que el punt de l'infinit ha de ser l'únic punt fix contingut en el conjunt de Julia. Per tant la demostració és exactament la mateixa considerant la funció racional N_F . \square

Passarem ara a mostrar uns exemples del nou comportament que presenta el mètode de Newton aplicat a $F(z) = \exp(z)p(z)$, fixem-nos en la nova dinàmica creada en el punt de l'infinit i descrita localment pel Teorema de Leau-Fatou. Anomenem

$$p(z) = z^3 + z^2 + z + 1,$$

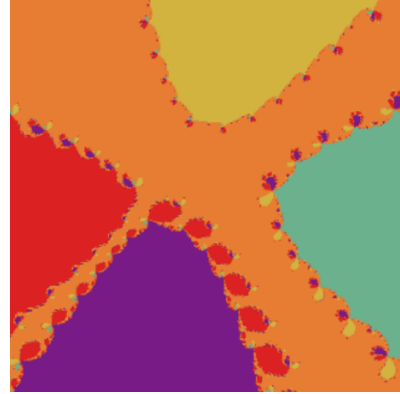
i

$$q(z) = z^5 + (1 - i)z^4 - \left(\frac{1}{2} + i\right)z^3 - \left(1 - \frac{1}{2}i\right)z^2 - \left(\frac{1}{2} - i\right)z + \frac{1}{2}i.$$

Aleshores tenim el següent:

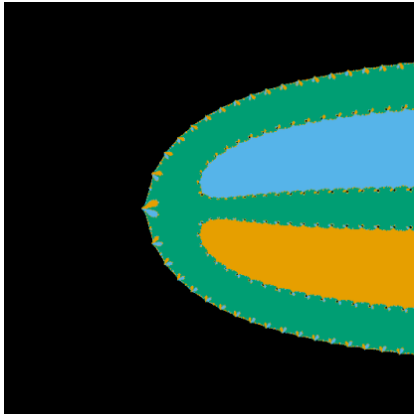


(a) $p(z)$



(b) $q(z)$

Figura 9: Conques d'atracció de les arrels del polinomi $p(z)$ i $q(z)$ pel mètode de Newton en $[-2, 2] \times [-2, 2]$.



(a) $p(z)$

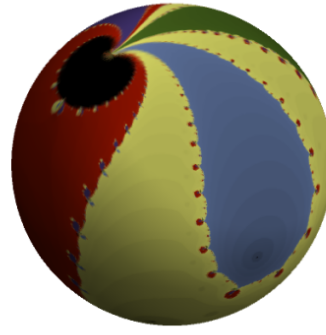


(b) $q(z)$

Figura 10: Conques d'atracció de les arrels de les funcions $F(z) = \exp(z)p(z)$ i $G(z) = \exp(z)q(z)$ pel mètode de Newton en $[-10, 10] \times [-10, 10]$. Els punts que es troben en la regió de color negre són atrets pel punt de l'infinit.



(a) $p(z)$



(b) $q(z)$

Figura 11: Projectió estereogràfica de la Figura 10 a l'esfera de Riemann.

En la Figura 11 es pot veure clarament la nova dinàmica creada pel punt de l'infinit, amb l'aparició d'un pètal atractor i un pètal repulsor.

5.3 Aplicacions numèriques al càlcul de les arrels per N_F

Hem vist que el mètode de Newton aplicat a F preserva la majoria de resultats vistos pel mètode de Newton aplicat a polinomis. Ens preguntem ara què passa en relació a les condicions inicials.

En la Secció 4.6 vam veure un algoritme que soluciona el següent problema: quines condicions inicials cal escollir per a trobar totes les arrels d'un polinomi pel mètode de Newton. Per a polinomis de grau menor que 42, l'algoritme desenvolupat pels matemàtics J.Hubbard, D.Schleicher i S.Sutherland, tracta essencialment de construir un cercle de condicions inicials que contingui el disc unitat, on es troben totes les arrels del polinomi, re-escalant si és necessari. Aquest cercle està format per una quantitat de punts que només depenen del grau del polinomi i satisfan que existeix almenys un punt d'aquest tal que pertany a la conca d'atracció de qualsevol arrel del polinomi. Inspirats per aquest resultat, ens preguntem si el mètode de Newton aplicat a $F(z) = \exp(z)p(z)$ permet construir un conjunt similar a l'anterior i veure si podem treure avantatges.

Una primera idea podria ser escollir exactament el mateix conjunt i veure si gràcies a la nova dinàmica creada pel punt de l'infinit, fan falta menys condicions inicials per a trobar totes les arrels. Recordem que aquest conjunt consistia en $s = \lceil 0.26632 \log d \rceil$ cercles amb $N = \lceil 8.32547 d \log d \rceil$ punts en cada un, on $\lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z} \mid x \leq k\}$. El conjunt venia donat per

$$\mathcal{S}_d = \{r_v \exp(iv_j) \mid 1 \leq v \leq s, 0 \leq j \leq N-1\},$$

on

$$r_v = (1 + \sqrt{2}) \left(\frac{d-1}{d} \right)^{\frac{2v-1}{4s}} \quad v_j = \frac{2\pi j}{N}.$$

Per exemple, escollim el polinomi $p(z) = z^5 + 3z^2 + 7$, ja treballat en l'Exemple 4.27. Vam veure que per tal que totes les arrels del polinomi estiguin contingudes dins el disc unitat cal re-escalar per un factor $R = 2$. Considerem doncs $q(z) = p(Rz)$ de manera que $F(z) = \exp(z)q(z)$ té tots els zeros continguts en el disc unitat, doncs els zeros de F coincideixen amb els zeros de q . Usant el mateix algoritme, de les $N = 67$ condicions inicials que es necessiten només en fan falta 29 per a trobar totes les conques d'atracció, veure Figura 12.

Observació 5.8. Les condicions inicials són escollides en sentit antihorari començant per $(0, -r)$ on r és el radi del cercle on tenim col·locades les condicions inicials.

Veiem clarament una millora en el nombre de condicions necessàries per a trobar totes les arrels en comparació amb el mètode de Newton aplicat al polinomi. En l'Exemple 4.27 vam veure que feien falta 46 condicions inicials en comptes de 29. Tot i que no podem extreure conclusions d'un exemple, fent diverses proves amb diversos polinomis, es pot observar que el número de condicions inicials necessàries per a trobar totes les conques d'atraccions és sempre menor en el mètode de Newton aplicat a F , almenys en

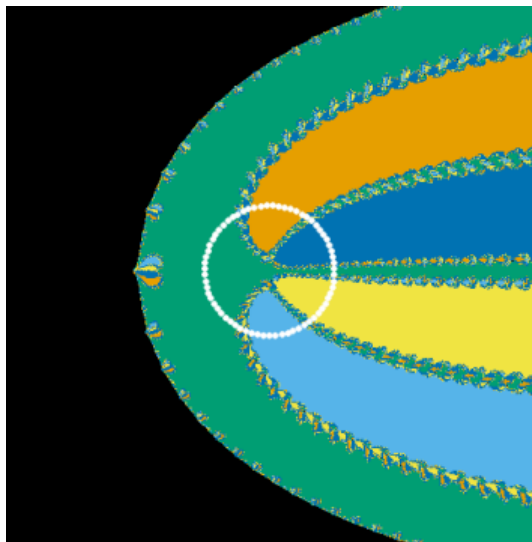


Figura 12: Conques d'atracció de les arrels de la funció $F(z) = \exp(z)q(z)$ on $q(z) = p(Rz)$ i $p(z) = z^5 + 3z^3 + 7$ pel mètode de Newton en $[-10, 10] \times [-10, 10]$ i les condicions inicials en color blanc.

els exemples que l'autor ha provat. Clarament la influència de la dinàmica del punt de l'infinit, juntament amb el comportament asimptòtic de la funció exponencial fa que trobem abans totes les conques d'atracció. De fet, fixem-nos que començant amb la condició inicial $(0, -r)$, un cop arribem a $(0, r)$, ja hem cobert gairebé totes les conques d'atracció. Això ens porta a pensar un nou mètode per escollir condicions inicials. Suposant que tenim totes les arrels del polinomi en el disc unitat, podem construir un conjunt de condicions inicials, \mathcal{T}_d , on d és el grau del polinomi amb el següent aspecte:

$$\mathcal{T}_d = \{a_d + b_d i \mid -L_d \leq b_d \leq L_d\},$$

on a_d és un valor fixat, no molt gran i L_d és tal que si $|b_d| \geq L_d$, l'òrbita de la condició inicial $a_d + b_d i$ tendeix a infinit. Podem triar, per exemple, $a_d = (1 + \sqrt{2}) \left(\frac{d-1}{d}\right)^{\frac{1}{4}}$, tal i com fèiem per triar el radi del cercle de condicions inicials en el mètode explicat en la Secció 4.6. Per escollir L_d , podem fer proves numèriques i trobar un valor de L_d tal que si $|b_d| \geq L_d$, l'òrbita de la condició inicial $a_d + b_d i$ tendeixi a infinit. Aleshores movem b_d en el segment $[-L_d, L_d]$ amb un pas h . Les condicions inicials del conjunt \mathcal{T}_d seran $z_0 = a_d + (-L_d + h)i$ amb $-L_d + h \leq L_d$. En cas de no trobar totes les arrels, fem el pas h més petit.

Per exemple, en el cas que estàvem treballant, $p(z) = z^5 + 3z^3 + 7$. Considerem $F(z) = \exp(z)q(z)$ on $q(z) = p(Rz)$ amb $R = 2$ per tal que tots els zeros estiguin continguts en el disc unitat. S'observa numèricament que si $|b_d| \geq 9 := L_d$, l'òrbita de la condició inicial $z_0 = a_d + b_d i$ tendeix a infinit. Triant $h = \frac{3}{4}$, obtenim un conjunt amb 25 condicions inicials. No obstant només fan falta 17 per a trobar totes les arrels, veure Figura 13.

Observació 5.9. Fixem-nos que pel mètode de Newton aplicat al polinomi, el conjunt de condicions inicials estava format per 67 punts dels quals amb 46 ja trobàvem totes les arrels. Utilitzant el mateix algoritme pel mètode de Newton aplicat a $F(z) = \exp(z)p(z)$ aconseguíem trobar totes les arrels amb només 29 punts. Per últim, amb el nou algoritme

proposat aplicat altra vegada a $F(z) = \exp(z)p(z)$, el nombre total de punts al qual li apliquem el mètode són 25 i amb 17 en tenim prou.

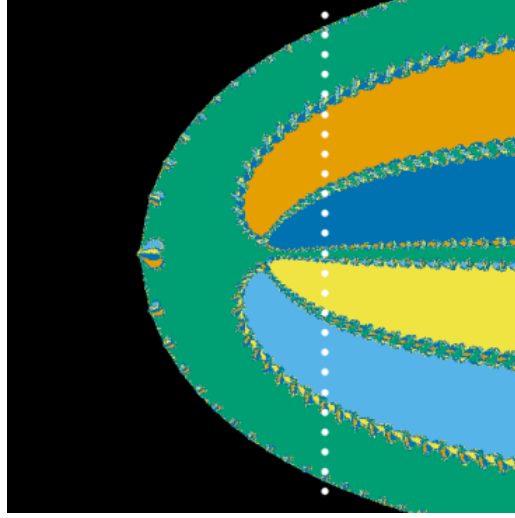


Figura 13: Conques d'atracció de les arrels de la funció $F(z) = \exp(z)q(z)$ on $q(z) = p(Rz)$ i $p(z) = z^5 + 3z^3 + 7$ pel mètode de Newton en $[-10, 10] \times [-10, 10]$ i les condicions inicials del nou algoritme en color blanc.

Sembla que aquest mètode és molt eficient. Veiem un altre exemple que mostra també la millora que ofereix aquest nou algoritme per a trobar totes les arrels.

Exemple 5.10. Sigui ara $p(z) = z^8 + 3z^6 + z^5 + iz + 2$. Com vam veure en l'Exemple 4.28, considerem $F(z) = \exp(z)q(z)$ on $q(z) = p(Rz)$ amb $R = 2$ per tal que tots els zeros estiguin continguts en el disc unitat. S'observa numèricament que $L_d = 14$. Triant $h = 1$, obtenim un conjunt amb 29 condicions inicials. No obstant, per a trobar totes les arrels només són necessàries 18 condicions inicials.

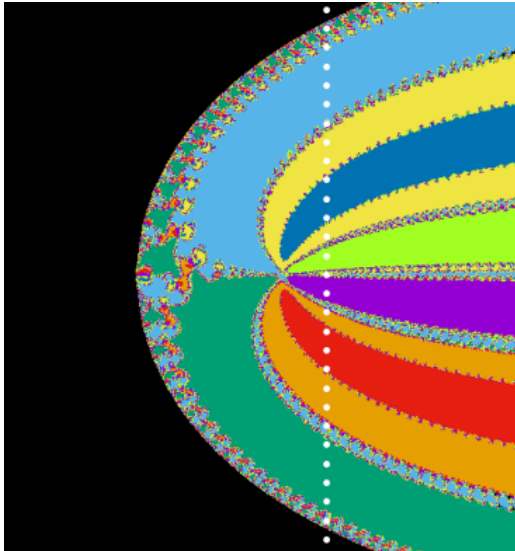


Figura 14: Conques d'atracció de les arrels de la funció $F(z) = \exp(z)q(z)$ on $q(z) = p(Rz)$ i $p(z) = z^8 + 3z^6 + z^5 + iz + 2$ pel mètode de Newton en $[-15, 15] \times [-15, 15]$ i les condicions inicials del nou algoritme en color blanc.

Vist aquest parell d'exemples, hom podria pensar de generalitzar aquest algorisme i intentar demostrar analíticament l'existència d'aquest tipus de recta, una recta que per ella creuïn totes les conques d'atracció, doncs la funció exponencial i el seu comportament asimptòtic fa pensar que sempre haurà d'existir. L'existència d'aquest tipus de recta comportaria, a priori, moltes avantatges numèriques a l'hora de trobar zeros d'un polinomi de grau molt elevat, doncs fixem-nos que la quantitat de condicions inicials necessàries per efectuar aquest nou mètode és substancialment menor comparat amb el proposat en la Secció 4.6. No obstant, més enllà de les evidències numèriques, no hem sigut capaços de trobar una demostració analítica d'aquest fet en general, tot i que en la següent secció, ens centrarem amb polinomis de grau tres per trobar evidències numèriques de l'èxit del nou algorisme.

5.4 Evidències numèriques; la família cúbica

Acabem de veure que el nou mètode proposat sembla funcionar, en el sentit que el nombre de condicions inicials necessàries per a trobar totes les arrels és força menor al mètode proposat en la Secció 4.6. En aquest capítol estudiarem el cas particular de polinomis de grau tres amb totes les arrels diferents en el disc unitat. Això últim sempre ho podem suposar, si no fos així, com hem fet en seccions anteriors, re-escalem i apliquem la Proposició 4.23.

Es pot veure que tot polinomi de grau tres, pot ser conjugat per una aplicació afí a una altre de la forma

$$p_a(z) = z(z-1)(z-a),$$

amb $a \in \mathbb{C}$. Nosaltres ens centrarem en el cas $a \in \overline{D(0,1)} \subset \mathbb{C}$. Crearem un programa que donada una a , efectuarà el mètode explicat en la Secció 4.6 però només amb les condicions inicials en el semicercle començant per $(0, -r)$ i acabant per $(0, r)$ on r serà el radi del cercle on tindrem les condicions inicials. Comprovarem si som capaços de trobar totes les arrels amb aquest mètode restringit al semicercle mencionat de condicions inicials i en cas que no siguem capaços augmentarem el nombre de condicions inicials al semicercle per tal d'intentar trobar totes les arrels. Notem que no tenim el suport analític de que això hagi de funcionar, del Teorema 4.25, sabem que el mètode funciona considerant el cercle complet de condicions inicials pel mètode de Newton aplicat a polinomis, però no a funcions enteres. No obstant, veient la dinàmica que crea el mètode aplicat a F , tot fa pensar que es pugui aconseguir amb només el semicercle mencionat de condicions inicials, malgrat que potser, "el preu que cal pagar", és posar més condicions inicials en el semicercle. En cas que això sigui possible, seran molts els indicis de l'existència de la recta que comentàvem en la secció anterior.

Per donar valors de a en el disc unitat, $0 \neq a \neq 1$, posarem $a = \omega e^{2\pi i \theta}$ amb $0 < \omega \leq 1$, augmentant la variable en 0.05 cada vegada i $0 \leq \theta < 1$ augmentant la variable en 0.005 cada vegada. Això equival a un total de 4000 valors de a diferents continguts en $\overline{D(0,1)}$ als quals li aplicarem el mètode. Recordem que per efectuar el mètode a un polinomi de grau tres, veure Secció 4.6, calen $s = 1$ cercles de radi $r = 1.18149$ i $N = 28$ punts. Notem que en el nostre cas considerarem 14 punts, doncs estem considerant només un semicercle, el que va de $(0, -r)$ a $(0, r)$.

Efectuant el mètode als 4000 valors de a diferents, observem que l'algoritme troba totes les arrels en 3976 casos i en 24 no és capaç de trobar-les. Aquests 24 valors de a són valors de a molt propers al 0 o al 1, de manera que estem molt a prop de que el polinomi al qual li estem apliquem el l'algoritme tingui una arrel doble. Tenint en compte l'error numèric, això fa potser, perdre la convergència quadràtica garantida per arrels simples i necessitar més condicions inicials per a trobar totes les arrels. A més, les conques d'atracció en aquests casos són molt properes, fet que dificulta ser escollida per una de les condicions inicials per a trobar les dos arrels tan pròximes. Així doncs, per aquests valors de a , afegim més condicions inicials, doblem el nombre de punts, enlloc de tenir 14, en passem a tenir 28 en el semicercle. Augmentant d'aquesta manera el nombre de punts, aconseguim que només en 3 valors de a diferents no puguem trobar totes les arrels. Aquests tres valors són: $a = 0.05$, $a = -0.035355 + 0.035355i$, $a = -0.035355 - 0.035355i$. Els ignorem, de moment, ja que són nombres molt propers a 0 i fa que les conques d'atracció de $\mathcal{A}(0)$ i $\mathcal{A}(a)$ estiguin molt properes i dificulti el fet de ser escollides per alguna de les condicions inicials. Per tant, només considerant el semicercle de 28 condicions inicials de $(0, -r)$ a $(0, r)$, som capaços de trobar totes les arrels excepte de tres valors de a .

El nostre objectiu és ara construir una recta de condicions inicials de la forma

$$\mathcal{T}_3 = \{a_3 + b_3i \mid -L_3 \leq b_3 \leq L_3\}.$$

on a_3 és un valor fixat, no molt gran i L_3 és tal que si $|b_3| \geq L_3$, l'òrbita de la condició inicial $a_3 + b_3i$ tendeix a infinit. Escollirem el valor $a_3 = (1 + \sqrt{2})(\frac{2}{3})^{\frac{1}{4}}$ i expandirem les 14 condicions inicials equidistantment sobre la recta $Re(z) = a_3$. El pas entre cada condició inicial serà $h = 1$. D'aquesta manera obtenim que $L_3 = 7$.

Els resultats són els següents. Dels 4000 valors de a possible, el conjunt de condicions inicials \mathcal{T}_3 , és capaç de trobar totes les arrels en 3983 casos i en 17 no ha sigut possible, altra vegada, els casos no possibles, és per la mateixa causa anterior, són valors molt propers a 0 o 1, i l'error numèric fa potser perdre la convergència quadràtica del mètode. També es presenta el mateix problema de les conques d'atracció. Tanmateix, veiem una reducció de casos no possibles comparat amb el mètode del semicercle anterior, això és degut a que les conques d'atracció estan més separades quan arriben a la recta que quan passen pel semicercle i tenen més opció de ser escollides per una condició inicial. No obstant, posant més condicions inicials, per exemple, posant 28, amb un pas de $h = 0.5$, obtenim que en tots els casos excepte en tres, ha sigut possible trobar totes les arrels. Els casos exclosos són $a = 0.95$, $a = 0.049975 + 0.001571i$, $a = 0.049975 - 0.001571i$, valors molt propers a 1 i 0 respectivament.

Observació 5.11. No són necessàries 28 condicions inicials en la majoria de casos. Mirant polinomis amb valors de a concrets, quan més lluny de 0 i 1 millor, podem trobar valors molt més fins. Per exemple, per $a = i$, podem posar $L_3 = 6$ i $h = 1$, amb el que amb 12 condicions inicials en tenim suficient per a trobar totes les arrels.

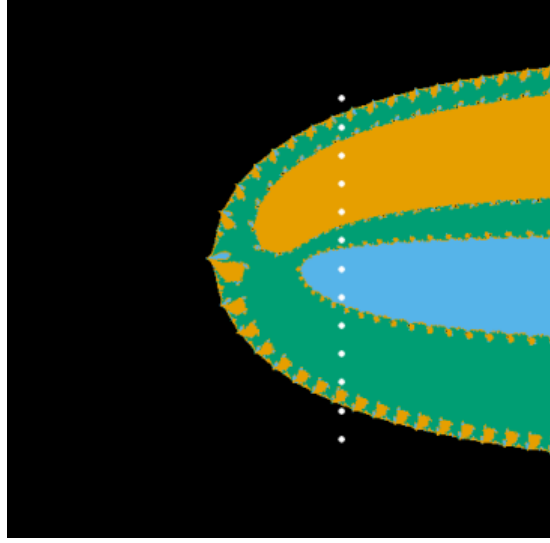


Figura 15: Conques d'atracció de les arrels de la funció $F(z) = \exp(z)p_i(z)$ on $p_i(z) = z(z-1)(z-i)$ pel mètode de Newton en $[-10, 10] \times [-10, 10]$ i les condicions inicials en color blanc.

Tot i no aconseguir una demostració analítica del fet de l'existència d'una recta de condicions inicials capaç de trobar totes les arrels d'un polinomi qualsevol pel mètode de Newton aplicat a F , notem que, almenys per polinomis de grau 3 (o de grau baix) les evidències numèriques són molt elevades. Per polinomis amb arrels simples no molt properes, l'algoritme proposat ha funcionat en tots els casos, doncs en els 17 casos que ha fallat, ha sigut perquè les arrels eren molt properes. De fet una desavantatge que aparentment mostra el nostre algoritme, és quan tenim dos arrels molt properes. En el cas del mètode de Newton aplicat al polinomi, l'algoritme estudiat en la Secció 4.6, proposa un cercle de condicions inicials, cobrint tot el pla complex, ja que les conques d'atracció tenen més espai per accedir a l'infinit que en el mètode de Newton aplicat a F , doncs en aquest, només accedeixen a l'infinit seguint l'eix real positiu. Per acabar aquesta secció podem conjecturar el següent:

Conjectura 5.12. *Segui $a \in \mathbb{C}$ i $p_a(z)$ un polinomi de grau tres amb arrels z_1, z_2 i a contingudes en el disc unitat tal que $|a - z_1| > 0.1$ i $|a - z_2| > 0.1$. Existeix un conjunt de 28 condicions inicials, \mathcal{T}_3 , de manera que per cada una de les arrels del polinomi, existeix un punt $t \in \mathcal{T}_3$ en la conca d'atracció de l'arrel escollida del mètode de Newton aplicat a $F(z) = \exp(z)p_a(z)$. El conjunt \mathcal{T}_3 pot ser descrit de la següent manera:*

$$\mathcal{T}_3 = \{a_3 + b_3 i \mid -L_3 \leq b_3 \leq L_3\},$$

on $a_3 = (1 + \sqrt{2})\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$ i $L_3 = 7$.

6 Conclusions

En aquest treball, hem pogut estudiar un problema que apareixia a finals del segle XIX de la mà dels matemàtics E.Schröder i A.Cayley i que aparentava ser força innocent vista la solució que van proposar per un cas concret. Hem necessitat l'estudi de conceptes relacionats amb la iteració racional, així com, l'estudi de famílies normals de funcions holomorfes o els teoremes de distorsió presentats en el Capítol 3, que no es mostren al llarg del grau i que personalment, m'han servit per conèixer una nova branca de les matemàtiques que desconeixia fins aleshores i que tant de bo pugui continuar estudiant-la.

Un cop introduïts tots els conceptes previs necessaris, hem entrat en el cos del treball, l'estudi del mètode de Newton, el Capítol 4. Allà, hem pogut estudiar diverses propietats del mètode aplicat a polinomis. Hem fet un estudi exhaustiu dels punts fixos de l'aplicació de Newton, que són exactament les arrels del polinomi i hem estudiat també la convergència del mètode, veient que és quadràtica. També hem vist que les conques d'atracció immediates dels punts fixos finits són no acotades, teorema de vital importància per a la Secció 4.6, en la que estudiem un algorisme presentat a [11] per a trobar totes les arrels a través del mètode de Newton.

Per acabar, en el Capítol 5, hem aplicat el mètode de Newton a una classe de funcions enteres, concretament a $F(z) = \exp(z)p(z)$ i hem vist que la finalitat és la mateixa, trobar arrels del polinomi, amb la diferència de la nova dinàmica creada en el punt de l'infinit. Hem vist que es mantenen moltes de les propietats estudiades en el capítol anterior i hem intentat donar un algorisme alternatiu al presentat en [11] per a trobar totes les arrels del polinomi a través del mètode de Newton. Hem estudiat aquest algorisme numèricament per a polinomis de grau tres i sembla que aquest funcionarà sempre i quan les arrels del polinomi no siguin molt properes. Tot i només aplicar l'algorisme a polinomis de grau no molt alt, és aparentment interessant estudiar-lo, doncs podria comportar moltes avantatges numèriques a l'hora de trobar totes les arrels d'un polinomi, degut al baix nombre de condicions inicials que es necessiten en comparació amb el proposat i demostrat analíticament en [11].

L'estudi conté també una part numèrica fonamental. Totes les imatges del treball ajuden a entendre globalment el mètode de Newton, que és justament un dels objectius proposats. També, tot i no haver pogut demostrar analíticament que el nou algorisme proposat per a trobar totes les arrels hagi de funcionar, les evidències numèriques són altes. El projecte deixa obert una pregunta que anima al lector a estudiar-la. Pot el nostre algorisme ser aplicat a qualsevol polinomi de manera eficient?

Referències

- [1] Ahlfors, L. V. (1979). *Complex Analysis*. McGraw-Hill, Inc..
- [2] Alexander, D. S. (1994). *A history of Complex Dynamics*. Springer-Verlag.
- [3] Barański, K., Fagella, N., Jarque, X. and Karpińska, B. (2018). *Connectivity of Julia sets of Newton maps: a unified approach*. Revista Matemática Iberoamericana, 34(3), 1211-1228.
- [4] Beardon, A. F. (1991). *Iteration of Rational Functions: Complex Analytic Dynamical Systems*, (Vol. 132). Springer-Verlag.
- [5] Blanchard, P. (1994). *The Dynamics of Newton's Method*. In Proceedings of Symposia in Applied Mathematics. Providence, RI, USA: American Mathematical Society, (Vol. 49), 139-154.
- [6] Carleson, L. and Gamelin, T. W. (1993). *Complex Dynamics*. Springer-Verlag.
- [7] Cayley, A. (1879). *The Newton-Fourier Imaginary Problem*. American Journal of Mathematics, (Vol. 2), 97.
- [8] Conway, J.B. (1978). *Functions of One Complex Variable I*. Springer-Verlag.
- [9] Fagella, N. and Jarque, X. (2007). *Iteración Compleja y Fractales*. Vicens Vives, Barcelona.
- [10] Haruta, M. (1999). *Newton's Method on the Complex Exponential Function*. Transactions of the American Mathematical Society, 351(6), 2499-2513.
- [11] Hubbard, J., Schleicher, D. and Sutherland, S. (2001). *How to Find all Roots of Complex Polynomials by Newton's Method*. Inventiones mathematicae, 146(1), 1-33.
- [12] Milnor, J. (2006). *Dynamics in One Complex Variable*. (AM-160). Princeton University Press.
- [13] McMullen, C. T. (1994). *Complex Dynamics and Renormalization (No. 135)*. Princeton University Press.
- [14] Schröder, E. (1870). *Über Unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen*. Mathematische Annalen, 2(2), 317-365.
- [15] Schröder, E. (1871). *Ueber iterite Functionen*. Mathematische Annalen, (Vol. 3), 296-322.
- [16] Ypma, T. J. (1995). *Historical development of the Newton-Raphson method*. SIAM review, 37(4), 531-551.