Analysis 1

David Zollikofer

1. Einführung

Ordnungsvollständigkeit Unterscheidet $\mathbb{R}$ von $\mathbb{Q}$. Für A, B nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit

$$\forall a \in A \wedge \forall b \in B \implies a \leq b$$

Dann gibt es $c \in \mathbb{R}$ mit $\forall a \in A : a \leq c$ und $\forall b \in B : c \leq b$

Archimedisches Prinzip Korollar von Ordnungsvollständigkeit. Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ und $y \in \mathbb{R}$, dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $y \leq nx$

Wichtige Ungleichungen

Bernoulli Ungleichung Wenn $x \in \mathbb{R}$ mit $x > -1$ sowie $n \in \mathbb{Z}$ mit $n > 0$, dann gilt:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Beweis: per Induktion

Cauchy Schwarz $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $|\langle x, y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||$.

Youngsche Ungleichung $\forall \epsilon > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $2|xy| \leq \epsilon x^2 + \frac{1}{\epsilon} y^2$. Beweis per Expansion von $\left(\sqrt{\epsilon}|x| - \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}|y|\right)^2 \geq 0$

In Integralform: Wenn f stetig strikt monoton wachsend:

$$ab \leq \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy$$

Wenn wir $f(x) = x^{p-1}$, so gilt $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ mit $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.

Hölder Ungleichung Seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, dann gilt für alle stetigen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq ||f||_p ||g||_q$$

Wobei

$$||f||_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

Supremum & Infimum

Existenz des Supremums Sei $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$. Sei A nach oben beschränkt, dann gibt es eine kleinste obere Schranke von A, $c = \sup A$, genannt Supremum von A. Um dies zu Beweisen nutzt man die Ordnungsvollständigkeit und definiert B als die Menge der oberen Schranken.

Beispiel (Sup & Inf finden) Sei $M = \{\frac{|x|}{1+|x|} : x \in \mathbb{R}\}$.
INFINUM: Weil alle Elemente positiv sind ist von unten durch 0 beschränkt. Falls $x = 0$, folgt $\frac{|0|}{|0|+1} = 0$ womit $\min M = \inf M = 0$.
SUPREMUM: Für alle x gilt $|x| + 1 > |x|$ somit $\frac{|x|}{|x|+1} < 1$. Somit gilt sicher $\sup M \leq 1$.
Nach Archimedes: $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 : 1/n \leq \epsilon \, \forall n \geq n_0$

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \geq \frac{1}{1+\epsilon} = 1 - \frac{\epsilon}{1+\epsilon}$$

Wir erreichen 1 sicher nie da sonst $1 = 0$, aber wir können beliebig nahe kommen. Somit $\sup M = 1$ aber $\neg\exists \max M$

Komplexe Zahlen

	Basic	Polar	Exponential
	$z = x + iy$	$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$	$z = re^{i\theta}$
Conversions:	$x = r\cos\theta$		$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
	$y = r\sin\theta$		$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

DIVISION: Es gilt $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{||z||^2}$ wenn $z \neq 0$
POLARFORM Wenn

$$z_1 = r_1(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1))$$
$$z_2 = r_2(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2))$$

dann gilt:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$$

Zudem folgt durch Induktion:

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

Grenzwerte

Wir sagen dass f an der Stelle a den Grenzwert $L \in \mathbb{R}$ hat, geschrieben $\lim_{x\to a} f(x) = L$ falls $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ sodass für alle $|x - a| < \delta$ gilt $|f(x) - L| < \epsilon$

Grenzwert mittels Definition

TODO: noch zwei Beispiele hinzufügen und mit Hausaufgaben abgleichen

Sandwich Theorem Aus $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ und $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$ folgt $\lim_{x\to a} f(x)$

Grenzwert mittels Dominanz Grundsätzlich gelten die folgenden Dominanzen:
Für $x \to +\infty$:

$$\ldots < \log(\log(x)) < \log(x) < x^\alpha < e^x < \alpha^x < x! < x^x$$

Sowie für $x \to 0^+$

$$\ldots < \log(\log(x)) < \log(x) < \left(\frac{1}{x}\right)^\alpha$$

Wurzeltrick

TODO: Beispiel - Serie 13 oder 14 hat eins

Fundamentallimes Oft kann man einen dieser Limits verwenden:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\sin(x)}{x} = 1$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^n} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$$
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1 \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$$

Variablenwechsel für Grenzwert Seien f, g Funktionen wobei f stetig in y_0 und g stetig in x_0 mit $y_0 = \lim_{x\to x_0} g(x)$ ist. Dann gilt:

$$\lim_{(x\to x_0)} f(g(x)) = \lim_{(y\to y_0)} f(y)$$

Beispiel (Variablenwechsel): $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2\sin\left(\frac{\log(x)}{x^2}\right)}{\log(x)}$. Wir setzten $y = \frac{\log(x)}{x^2}$. Wenn $x \to \infty$ dann geht $y \to 0$. Somit haben wir nun $\lim_{y\to 0}\frac{2\sin(y)}{y} = 2$

Bernoulli - de l'Hospital Wenn wir zwei differenzierbare Funktionen f, g haben mit $g'(a) \neq 0$ dann gilt falls:

- entweder $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$
- oder $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$

dann gilt:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- **Typ 1: $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$**
  Beispiele:
  - $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2x}} = \sqrt{\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(x)}{2x}} = \sqrt{\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{2}} = 0$, wobei wir die Stetigkeit nutzten.
  - $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{-\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$
  - $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi\cos(x))}{x\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)\pi\cos(\pi\cos(x))}{x\cos(x)+\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\pi\cos(\pi\cos(x))}{\frac{x}{\sin(x)}\cos(x)+1} = \lim_{x\to 0} \frac{-\pi\cos(\pi\cos(x))}{1+1} = \frac{-\pi\cos(\pi)}{2} = \frac{\pi}{2}$
- **Typ 2:** $0\cdot\infty$ Wenn wir einen Grenzwert wie $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$ haben dann können wir den umformen in:

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

  Beispiele:
  - $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^2}{x} = 0$
  - $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \left(\tan(x) - \frac{1}{\cos(x)}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} - \frac{1}{\cos(x)}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin(x)-1}{\cos(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos(x)}{-\sin(x)} = \frac{\cos(\frac{\pi}{2})}{-\sin(\frac{\pi}{2})} = \frac{0}{-1} = 0$
  - $\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt[x]{e} - 1\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{-x^2}e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{-x^2}} = \lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 0$
- **Typ 3:** $f(x)^{g(x)}$ Wenn wir Grenzwerte des Types $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ haben, dann schreiben wir es wie folgt:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{\ln(f(x))\cdot g(x)} = e^{\lim_{x\to a}\ln(f(x))\cdot g(x)}$$

  Beispiele:
  - $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin(x)} = e^{\lim_{x\to 0^+}\sin(x)\ln(x)}$. Nun schauen wir den Exponenten an: $\lim_{x\to 0^+} \sin(x)\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{\sin(x)}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos(x)}{\sin^2(x)}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2(x)}{-x\cos(x)} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{\sin(x)}{\cos(c)} = 1\cdot 0 = 0$. Wir haben somit $e^0 = 1$.
  - $\lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{1}{\sin^2(x)}} = e^{\left(\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sqrt{x^2+1})}{\sin^2(x)}\right)}$. Nun schauen wir den Exponenten an: $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sqrt{x^2+1})}{\sin^2(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x^2+1)}{2\sin^2(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x^2+1)}{2\sin^2(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x}{4\sin(x)\cos(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{\sin(x)}\cdot\frac{1}{(x^2+1)\cos(x)} = \frac{1}{2}$. Somit haben wir somit $e^{\frac{1}{2}}$.

Taylor (als letzte Hoffung)

Wenn das alles nicht funktioniert kann man versuchen die Taylorentwicklung einzusetzten.

Beispiel (Taylor): Wir wollen $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^2(\exp(x)-1)}$ ausrechnen: Wir setzten ein:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots - x}{x^2(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots - 1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots}{x^2(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \frac{x^4}{7!} + \ldots}{1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ldots} \\
&= -\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Folgen

Definition Konvergenz Folge a_n is konvergent, falls $\exists l \in \mathbb{R}$ so dass $\forall\epsilon > 0$ die Menge $\{n \in \mathbb{N}^+ : a_n \notin (l-\epsilon, l+\epsilon)\}$ endlich ist.
Äquivalent: $\forall\epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ so dass $\forall n \geq N$ gilt $|a_n - l| < \epsilon$.

Beispiel (Konvergenz mit Definition): Beweise dass $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+4}{2n^2+1} = \frac{3}{2}$. Sei $\epsilon > 0$. Dann muss gelten $|a_n - a| < \epsilon$. Somit $\left|\frac{3n^2+4}{2n^2+1} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{6n^2+8-6n^2-3}{4n^2+2}\right| = \frac{5}{4n^2+2} < \epsilon$. Gibt $4n^2 + 2 > \frac{5}{\epsilon}$, äquiv zu $n > \sqrt{\frac{5}{4\epsilon} - \frac{1}{2}}$. Wir definieren $N = \lfloor\sqrt{\frac{5}{4\epsilon} - \frac{1}{2}}\rfloor$. Nun gilt $\forall n \geq N : |a_n - a| < \epsilon$.

Rechnen mit Grenzwerten $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ konvergent mit GW a, b. Dann gilt:

- $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$
- $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- Falls $b_n, b \neq 0$, so gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$
- Falls $a_n \leq b_n\ \forall n \in \mathbb{N}$, so gilt $a \leq b$

Beispiel (Rechnen mit Grenzwerten):

- $\lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{1}{n}+n^2)^3}{1+n^6} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^6}{n^6}\frac{(\frac{1}{n^3}+1)^3}{\frac{1}{n^6}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{1}{n^3}+1)^3}{\frac{1}{n^6}+1} = 1$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) \overset{\text{Wurzeltrick}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+1}} = 1$

Satz von Weierstrass Wenn a_n nach oben (nach unten) konvergent ist und monoton wachsend (fallend), dann ist a_n konvergent.

Beispiel (Induktive Folge mit Weierstrass): Beachte $a_0 = 0$, $a_{n+1} = \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + 1$. MONOTONIE: Anstatt $a_{n+1} > a_n$ zeigen wir $a_{n+1} - a_n > 0$:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2}{4} + 1 - a_n = \frac{a_n^2 - 4a_n + 4}{4} = \frac{(2-a_n)^2}{4} \geq 0$$

BESCHRÄNKTHEIT: (≤ 2) per Induktion. Für $n = 0$, $a_0 = 0 \leq 2$✓. Schritt: $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{4} + 1 \overset{\text{I.H.}}{\leq} \frac{2^2}{4} + 1 = 2$✓. Nach Weierstrass konvergent. mit $a = \frac{a^2}{4} + 1 \implies a = 2$ als GW.

Sandwich Theorem Seien $b_n \leq a_n \leq c_n$. Falls b_n und c_n konvergent sind mit $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, so ist a_n auch konv. mit $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

Beweis (Sandwich Theorem): Da b_n, c_n konvergent mit GW L:

$$\forall\epsilon > 0\exists N_1 : \forall n \geq N_1 : L - \epsilon < b_n + \epsilon$$

Analog $\exists N_2$, setze $N = \max\{N_1, N_2\}$, dann gilt $\forall\epsilon > 0\exists N$:

$$L - \epsilon < b_n \leq a_n \leq c_n < L + \epsilon \implies L - \epsilon < a_n < L + \epsilon$$

Beispiel (Sandwich) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+\cos(n)}{n^2-1}$. Wenn es absolut konv. dann auch absolut. Sicher gilt somit : $0 \leq \left|\frac{n+\cos(n)}{n^2-1}\right|$ Nun schätzen wir nach oben ab: $\left|\frac{n+\cos(n)}{n^2-1}\right| \leq \frac{n+1}{n^2-1} = \frac{n+1}{(n+1)(n-1)} = \frac{1}{n-1}$. Es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-1} = 0$, somit gilt $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+\cos(n)}{n^2-1}\right| = 0$. (da Sandwich)

Cauchy Kriterium Die Folge $(a_n)_n$ ist genau dann konvergent, falls $\forall\epsilon > 0\ \exists N \geq 1$ so dass $|a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall n, m \geq N$

TODO: Beweis von Cauchy

Beispiel (Cauchy Kriterium) Sei $a_n = \frac{n-1}{2n}$ eine Folge. Wir versuchen Konvergenz mittels Cauchy zu zeigen:
$|a_n - a_m| = |\frac{n-1}{2n} - \frac{m-1}{2m}| = |\frac{nm-m-nm+n}{2nm}| = |\frac{n-m}{2nm}| = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2m} \overset{m\geq n}{\leq} \frac{1}{2n} < \epsilon$. Für alle $n \geq N = \lceil\frac{1}{2\epsilon}\rceil$ haben wir $|a_n - a_m| < \epsilon$. Nach Cauchy ist a_n somit konvergent.

Satz von Bolzano Weierstrass Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

2. Reihen

Konvergenz mit Definition Eine Reihe konvergiert wenn der Grenzwert der Partialsummen existiert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} S_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Beispiel (Konvergenz mit Definition)

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Es gilt somit $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \dots - \frac{1}{n+1}$ Somit $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. Es gilt $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$, somit ist die Reihe konvergent mit Grenzwert 1.
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ Zuerst nutzen wir den Wurzeltrick: $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Wir bemerken $S_n = 1 - 0 + \sqrt{2} - 1 \dots + \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n+1}$. Da aber $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} = \infty$ divergiert die Reihe.

Geometrische Reihen Für geometrische Reihen gilt:

$$\sum_{k=0}^{n-1} ar^k = a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} s &= a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} \\ rs &= ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots + ar^n \\ s - rs &= a - ar^n \\ s(1-r) &= a(1-r^n) \end{aligned}$$

Konvergenz mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (Nullfolge)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 \text{ konvergiert} \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_0 \text{ divergiert}$$

Beweis (Nullfolge) Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent ist, dann ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Es gilt $a_N = S_N - S_{N-1}$. Somit $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$

Majorantenkriterium Fall $a_n \geq b_n \forall n \geq n_0$ für ein n_0. Dann gilt $\sum_n a_n$ konvergiert $\implies \sum_n b_n$ konvergiert.

Minorantenkriterium Fall $a_n \geq b_n \forall n \geq n_0$ für ein n_0. Dann gilt $\sum_n b_n$ divergiert $\implies \sum_n a_n$ divergiert.

Quotientenkriterium Sei $a_n \neq 0$, dann gilt:

- $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| > 1 \implies \sum_n a_n$ divergiert.
- $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1 \implies \sum_n a_n$ konvergiert.
- $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 1 \implies$ Kriterium versagt.

Beweis (Quotientenkriterium) Angenommen $c_n = \sup\{\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} : k \geq n\}$. Dann wenn beschränkt: $\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} c_n$. Angenommen wir haben q so dass $\lim_{n\to\infty} c_n < q < 1$. Sei $N \geq 1$ so dass $c_N \leq q < 1$ woraus $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq q \implies |a_{k+1}| \leq q|a_k|$. Für $j \geq 1$ folgt: $|a_{N+j}| \leq q|a_{N+j-1}| \leq \dots \leq q^j|a_N| = q^{N+j}\frac{|a_N|}{q^N}$. Somit gilt: $|a_n| \leq q^n \frac{|a_N|}{q^N}$ und wir haben eine Majorante.

Beispiel (Quotientenkriterium)

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n!}$. $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1} n!}{4^n (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n+1} = 0 < 1$. Konvergent ✓
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!!}$. $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!!} \frac{(2n)!!}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \frac{(2n)!!}{(2n+2)(2n)!!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{e}{2} > 1$. Somit divergent.

Wurzelkriterium

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \implies \sum_n a_n$ divergiert
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \implies \sum_n a_n$ konvergiert
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \implies$ Kriterium versagt

Beispiel (Wurzelkriterium)

- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{1/n} - 1\right)^n$. Es gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} (n^{1/n} - 1) = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\log n} - 1 = e^0 - 1 = 0$ Somit konvergent.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n-5}$. Es gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{1-\frac{5}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$. Somit konvergent.

Beweis (Wurzelkriterium) Sei $c = \sup\{\sqrt[k]{|a_k|}\}$ und $< q < 1$ mit $\lim_{n\to\infty} c_n = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < q < 1$. Dann $\exists N \geq 1$ mit $c_N = \sup\{\sqrt[k]{|a_k|} : k \geq N\} \leq q$ was uns $|a_n| \leq q^n$ gibt. Somit ist eine geometrische Reihe eine Majorante.

Integralkriterium (Mc. Laurin) Wenn $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ sowohl $a_n \geq 0$ und $a_{n+1} \leq a_n$ (monot. fall.), dann gilt:

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n \text{ konv.} \iff \int_p^{\infty} a(x)dx \text{ konv.}$$

Leibnitzkriterium Eine Reihe $\sum_n (-1)^n a_n$ konvergiert falls $a_n \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und a_n monoton fallend ist.

Beispiel (Leibnitz): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n)}{\cos(n\pi)} \frac{\log(n)}{n^2}$. Wir stellen fest dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n)}{\cos(n\pi)} \frac{\log(n)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log(n)}{n^2}$. Zudem gilt $\frac{\log(n)}{n^2} \geq 0$, sowie $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{n^2} = 0$. Zudem ist $\frac{\log(n)}{n^2}$ monot. fallend für $n \geq 2$, da:

$$\frac{d}{dx}\frac{\log(x)}{x^2} = -2\frac{\log(x)}{x^3} + \frac{1}{x} = \frac{1 - 2\log(x)}{x^3} \leq 0 \; \forall x \geq \sqrt{e} = 1.6..$$

Absolute Konvergenz Eine Reihe $\sum_n a_n$ ist absolut konvergent falls $\sum_n |a_n|$ konvergiert.

Beispiel (Absolute Konvergenz) Ang. $\sum_n a_n$ konvergiert absolut. Betrachte $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{1+a_n} - 1)$ und bemerke dass es auch abs. konv.

$$\left|\sqrt{1+a_n} - 1\right| = \left|(\sqrt{1+a_n} - 1)\frac{\sqrt{1+a_n}+1}{\sqrt{1+a_n}+1}\right| = \left|\frac{a_n}{\sqrt{1+a_n}+1}\right| \leq |a_n|$$

Absolut Konvergente Reihe ist auch konvergent Eine absolut konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist auch konvergent und es gilt $\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq |\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$

Beweis von absolut Konvergente Reihe ist auch konvergent: Da $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert, gilt nach Cauchy: $\forall \epsilon > 0 \exists N \geq 1$ mit $\sum_{k=1}^{m} |a_k| < \epsilon$. Daraus folgt: $\left|\sum_{k=1}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{m} |a_k| < \epsilon$, daraus folgt die Konvergenz. Die Ungleichung folgt per Limes der endlichen Reihen.

Summenregel für Reihen Wenn $\sum_n a_n$ und $\sum_n b_n$ zwei konvergente Reihen sind, dann gilt $\sum_n (a_n \pm b_n) = \sum_n a_n \pm \sum b_n$.
Beweis: Direkt aus $\lim_{n\to\infty} S_n \pm \lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} (S_n \pm T_n) = S \pm T$

Beipiel (Summenregel) Wir berechnen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)} - \frac{4}{2^n}$ Die erste Konvergiert nach 3 *(Beispiel bei Konv. mit Def.)*. Die zweite ist eine geometrische Reihe mit $q = \frac{1}{2}$ da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2^n} = 4\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - 1\right) = 4\left(\frac{1}{1-1/2} - 1\right) = 4$ Somit gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)} - \frac{4}{2^n} = 3 - 4 = -1$

Umordnung einer Reihe Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a'_n$ ist eine Umordnung von $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$, falls $\phi : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ bijektiv existiert, so dass $a' = a_{\phi(n)}$.
Wenn eine Reihe absolut konvergiert, dann konvergiert jede Umordnung der Reihe und hat denselben Grenzwert.
Zum Beispiel $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ kann man umordnen.

Cauchy Produkt

1. Falls $\sum_n a_n$ und $\sum_n b_n$ absolut konvergierten, konvergiert ihre Cauchy Produkt und es gilt: $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j}b_j\right) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right) * \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_i\right)$
2. Wenn $\exists B \geq 0$, so dass $\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m}|a_{ij}| \leq B \quad \forall m \geq 0$, dann konvergieren $S_i = \sum_{j=0}^{m} a_{ij}\ \forall i$, sowie $U_j 0 \sum_{i=0}^{m} a_{ij}\ \forall j$. Zudem gilt: $\sum_{i=0}^{\infty} S_i = \sum_{j=0}^{\infty} U_j$. Jede lineare Anordnung der Doppelreihe konv. auf den gleichen Grenzwert.

TODO: Skript Übung 2.60 Cauchy Produkt divergiert.

Potenzreihe / Konvergenzradius Potenzreihe hat Form $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Die Menge aller x für welche $f(x)$ konvergiert nennt man Konvergenzbereich. Der Konvergenzradius (dessen Grenze) ist definiert: $\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ oder eben $\rho = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$. Falls $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 0$ so sagen wir ist $\rho = +\infty$.

Beispiel (Konvergenzradius)

- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. Wir rechnen $\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| == \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$. Die Reihe konvergiert für alle x.
- $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$. Wir Rechnen $\rho = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{a}{n})^n} = \frac{1}{e^a} = e^{-a}$. Die Reihe konvergiert für alle $|x| < e^{-a}$.

3. Funktionenfolgen

Punktweise und Gleichmässige Konvergenz (Rezept) Zuerst berechnen wir den punktweisen Grenzwert der definiert ist als: Die Funktionenfolge $(f_n)_n$ konvergiert punktweise gegen eine Funktion $F : D \to \mathbb{R}$, falls für alle $x \in D$: $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$

In Praxis interessiert man sich für
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{für fixes } x \in D$$

Nun prüft man f_n auf gleichmässige Konvergenz. Die Folge $f_n : D \to \mathbb{R}$ konvergiert gleichmässig in D gegen $f : D \to \mathbb{R}$ falls gilt $\forall\epsilon > 0\ \exists N \geq 1$, so dass
$$\forall n \geq N, \forall x \in D: \ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

In Praxis:

1. Berechne
$$\sup_{x\in D}|f_n(x) - f(x)|$$
Es ist of nützlich die Ableitung von $|f_n(x) - f(x)|$ zu bilden und diese gleich Null zu setzen.
2. Bilde nun den Limes:
$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in D}|f_n(x) - f(x)|\right)$$
Falls der Limes 0 ist haben wir gleichmässige Konvergenz.

Indirekte Methoden:

- f unstetig, keine gleichmässige Konvergenz
- f stetig, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) < \forall x \in D$, D kompakt $\implies$ gleichmässige Konvergenz. (Satz von Dini, nicht Skript)

Beispiel (Punktweise Konvergenz) Sei $D : [0,1]$ und $f_n = x^n$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad ,0 \leq x < 1$. Für $x = 1$ gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(1) = 1$. Somit konvergiert f_n punktweise gegen $f(x) = \begin{cases} 0, 0 \leq x < 1 \\ 1, x = 1\end{cases}$ Leider ist f nicht stetig in 1.

Beispiel (Gleichmässige Konvergenz)
Konvergiert $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ gleichmässig auf $[0,1]$?
Pkt-Konv: $f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n^2x^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x}{n}}{\frac{1}{n^2}+x^2} = 0$
Glm-Konv: Wir berechnen zuerst $\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]}|\frac{nx}{1+n^2x^2}|$. Wir leiten den Term nach x ab und setzen zu 0. Das Maximum leigt bei $x = \frac{1}{n}$. Dies setzen wir ein: $\sup_{x\in[0,1]}\left|\frac{n\frac{1}{n}}{1+n^2\frac{1}{n^2}}\right| = \frac{1}{2}$. Somit nicht glm konv auf $[0,1]$. Beachte aber dass es auf $[1,\infty)$ glm. Konv. ist da das Max dann bei $\frac{1}{1}$ angenommen wird und dann $\sup_{x\in[1,\infty)}\left|\frac{n}{1+n^2}\right|$ mit $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{1+n^2}\right| = 0$

Beispiel (Punktweise aber nicht Gleichmässig) Wir haben
$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x + 1, 0 \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 1, \frac{1}{n} < x\end{cases}$$
Punktmässig: Für $x = 0$: $n^2 \cdot 0 + 1 = 1$, sonstige x haben wir $f(x) = 1$
Gleichmässig: Für $x = \frac{1}{n}$ gilt $f(\frac{1}{n}) = n^2 \cdot \frac{1}{n} + 1 = n + 1$, somit folgt $\forall n > 0 \quad \sup_{x\in[0,1]}|f_n(x) - f(x)| \geq |(n+1) - 1| = n$ no glm konv.

Stetig Funktionenfolge gleichmässige Konvergenz Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ unf $f_n : D \to R$ eine Funktionenfolge bestehend aus stetigen Funktionen die gleichmässig gegen f konvergieren. Dann ist f in D stetig.

Beweis (Stetig Funktionenfolge gleichmässige Konvergenz) Da f_n gleichmässig Konvergent existieren Konst. $|f(x) - f_N(x)| < \epsilon\ \forall x \in D$. Da f_N stetig in x_0 folgt:
$$|x - x_0| < \delta \implies |f_N(x) - f_N(x_0)| < \epsilon$$
Daraus folgt:
$|f(x)-f(x_0)| = |f(x)-f_N(x_0)+f_N(x)-f_N(x_0)+f_N(x_0)-f(x_0)| < 3\epsilon$

4. Stetigkeit

Definition (Stetigkeit)

- Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ *ist in x_0 stetig*, falls $\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0$, so dass für alle x die Implikation
$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$
- Daraus leitet sich ab: Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$, f ist genau dann in x_0 stetig, falls für **jede** Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ in D die Implikation gilt:
$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$$

Beispiel (Stetigkeit)

- Trick: schätze $|f(x) - f(x_0)|$ durch $C|x - x_0|$ ab.
- Stetigkeit von $\sqrt{x}$ auf $[0,\infty)$. Sei $\epsilon > 0$ mit $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. d.h. $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \epsilon$. Zudem ist bekannt, dass $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{x-y}$ wenn $x > y$. Somit gilt: $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| \leq \sqrt{x - x_0} < \epsilon$. Wir wählen $|x - y|\epsilon^2 = \delta \implies \delta = \epsilon^2$. Dann ist $\sqrt{x}$ stetig.

Rechenregeln für Stetige Funktionen Falls $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig, dann sind folgende auch stetig:
$$f + g \quad f - g \quad fg \quad \frac{f}{g} \text{ falls } g \neq 0$$
Das Maximum und die Zusammensetzung zweier stetigen Funktionen ist auch stetig.

Zwischenwertsatz (Bolzano) Sei $I \in \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a, b \in I$. Dann gilt: Für alle c zwischen $f(a)$ und $f(b)$ existiert ein z zwischen a und b so dass $f(z) = c$.

Beispiel (Zwischenwertsatz)

- Sei $f : [a,b] \to [a,b]$ stetig. Zeige f hat Fixpunkt. Wir def. die stetige Fkt. $h(x) = f(x) - x$. Es gilt $h(a) = f(a) - a \geq 0$ da $f(a) \in [a,b]$. Analog $h(b) = f(b) - b \leq 0$. Somit exisitert x_0 mit $h(x_0) = 0$ resp. $f(x_0) = x_0$.
- Hat $e^{2x} - \log(1+x) = 2$ eine Lösung in $[0,1]$?. Wir def. $h(x) = e^{2x} - \log(1+x) - 2$. Bemerke $h(x)$ ist stetig. Es gilt $h(0) = 1 - 0 - 2 = -1$, sowie $h(1) = e^2 - \log(2) - 2 \geq 0$. Somit existiert $x_0 \in [0,1]$ mit $h(x_0) = 0$. Somit exisiter Lösung in $[0,1]$.

Beipiel (Jedes Polynom ungerades Grades hat Nullstelle) Sei $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ mit $a_n \neq 0$ sowie n ungerade. Dann hat $P(x)$ mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{R}$.
Beweis Wir definieren $\frac{P(x)}{x} = 1 + a_{n-1}x^{-1} + \cdots + a_0 x^{-n} = Q(x)$. Wir bemerken dass $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^j = 0$ für $1 \leq j \leq n$. Analog: $\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n}\right)^j = 0$. Somit gibt es ein $N \in \mathbb{N}, N \geq 1$ für welches $\frac{1}{2} \leq Q(N) \leq \frac{3}{2}$ sowie $\frac{1}{2} \leq Q(-N) \leq \frac{3}{2}$ (Wegen dem 1 in Q). Daraus folgt: $P(N) = N^n Q(n) > 0$ sowie $P(-N) = (-N)^N Q(-N) < 0$. Nach Anwendung des Zwischenwertsatzes auf $P : [-N, N] \to \mathbb{R}$ haben wir ein $z \in [-N, N]$ mit $P(z) = 0$.

Min-Max Satz

- Jede auf einem kompakten Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ $(a \leq b)$ definierte stetige Funktion ist dort beschränkt und nimmt dort ein Maximum und ein Minimum an. Insbesondere ist f beschränkt.
- Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall I, dann gitb es $u, v \in I$ mit
$$f(u) \leq f(x) \leq f(v) \quad \forall x \in I$$

Kompaktheit Wir nennen ein Intervall $I \subseteq R$ kompakt, wenn es die Form $[a,b], a \leq b$ hat.

Stetigkeit der Verknüpfung Wenn f, g auf passenden Intervallen stetig, dann $(f \circ g)$ das auch. Sei $x_0 \in [a,b]$ beliebig und $(x_n)_n$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, dann gilt $\lim_{n\to\infty}(f \circ g)(x_n) = (f \circ g)(x_0)$ was die Folgenstetigkeit zeigen würde.

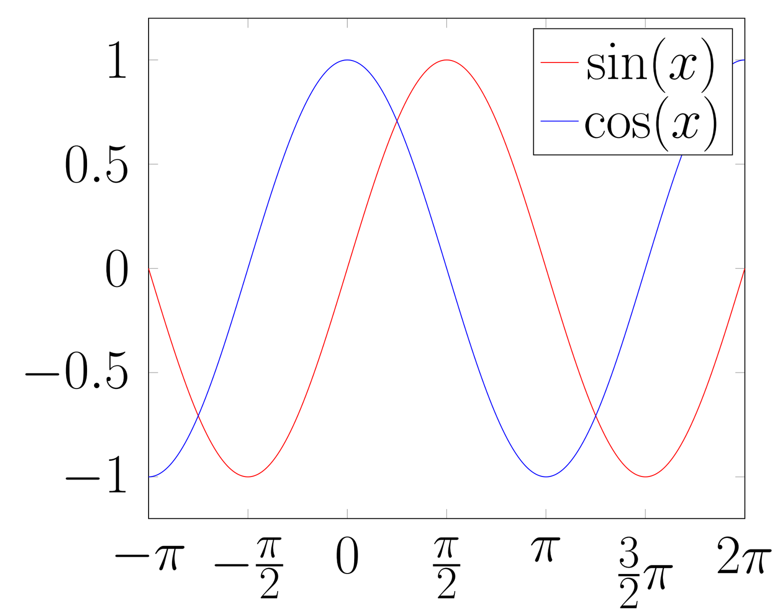
Beweis (Stetigkeit der Verknüpfung) $\lim_{n\to\infty}(f \circ g)(x_n) = \lim_{n\to\infty}(f(g(x_n)) = f(\lim_{n\to\infty} g(x_n)) = f(g(\lim_{n\to\infty} x_n)) = (f \circ g)(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(g(\lim_{n\to\infty} x_n)) = (f \circ g)(x_0)$

Stetigkeit der Umkehrabbildung Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein intervall und $f : I \to R$ stetig, streng monoton. Dann ist $J = f(I) \subseteq \mathbb{R}$ ein intervall und $f^{-1} : J \to I$ stetig und bijektiv

5. Exponentialfunktion & Sinus & Kosinus

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$
$$\sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots$$
$$\cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots$$

Dabei gilt:
$$\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z) \qquad \cos(z)^2 + \sin(z)^2 = 1$$
$$\cos(z) = \cos(-z) \qquad \sin(-z) = -\sin(z)$$
$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$
$$\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$$
$$\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$$
$$\sin(x) - \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$
$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$$



Einige Trigonometrische Ungleichungen

Zeige $\sin(x)$ **monton auf** $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ Es gilt bekanntlich $\sin(x) - \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq 0$ wenn $-\frac{\pi}{2} \leq y < x \leq \frac{\pi}{2}$ womit auch $\frac{x-y}{2} \in (0, \frac{\pi}{2}]$ und $\frac{x+y}{2} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Zeige $\sin(x) < x$ **für** $x \geq 0$ Wenn $x = 0$ dann folgt sofort $\sin(0) = 0$. Für $x \geq 1$ folgt auch $\sin(x) \leq 1 \leq x$. Es bleibt $x \in (0,1)$. Per Mittelwertsatz gibt es nun ein $c \in (0,x)$ für welches $\cos(x) = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0}$. Daraus folgt $\frac{\sin(x)}{x} \leq 1$ was $\sin(x) \leq x$ impliziert.

Hyperbolische Funktionen

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Dies gibt die folgenden Zusammenhänge:
$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$
$$\cosh(x) + \sinh(x) = e^x$$
$$\cosh(x) - \sinh(x) = e^{-x}$$

Wertetabelle

$\sin(\theta)$	$\cos(\theta)$	$\tan(\theta)$
$\sin(0) = 0$	$\cos(0) = 1$	$\tan(0) = 0$
$\sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$\tan(\frac{\pi}{12}) = 2 - \sqrt{3}$
$\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$	$\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$
$\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$	$\tan(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$
$\sin(\frac{5\pi}{12}) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$\cos(\frac{5\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\tan(\frac{5\pi}{12}) = 2 + \sqrt{3}$
$\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$	$\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$	$\tan(\frac{\pi}{2}) = \infty$
$\sin(\frac{7\pi}{12}) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$\cos(\frac{7\pi}{12}) = -\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\tan(\frac{7\pi}{12}) = -2 - \sqrt{3}$
$\sin(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$	$\tan(\frac{2\pi}{3}) = -\sqrt{3}$
$\sin(\frac{3\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cos(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\tan(\frac{3\pi}{4}) = -1$
$\sin(\frac{5\pi}{6}) = \frac{1}{2}$	$\cos(\frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan(\frac{5\pi}{6}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\sin(\frac{11\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\cos(\frac{11\pi}{12}) = -\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$\tan(\frac{11\pi}{12}) = \sqrt{3} - 2$
$\sin(\pi) = 0$	$\cos(\pi) = -1$	$\tan(\pi) = 0$
$\sin(\frac{13\pi}{12}) = -\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\cos(\frac{13\pi}{12}) = -\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$\tan(\frac{13\pi}{12}) = 2 - \sqrt{3}$
$\sin(\frac{7\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$	$\cos(\frac{7\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan(\frac{7\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$\sin(\frac{5\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cos(\frac{5\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\tan(\frac{5\pi}{4}) = 1$
$\sin(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$	$\tan(\frac{4\pi}{3}) = \sqrt{3}$
$\sin(\frac{17\pi}{12}) = -\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$\cos(\frac{17\pi}{12}) = -\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\tan(\frac{17\pi}{12}) = 2 + \sqrt{3}$
$\sin(\frac{3\pi}{2}) = -1$	$\cos(\frac{3\pi}{2}) = 0$	$\tan(\frac{3\pi}{2}) = \infty$
$\sin(\frac{19\pi}{12}) = -\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$\cos(\frac{19\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\tan(\frac{19\pi}{12}) = -2 - \sqrt{3}$
$\sin(\frac{5\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos(\frac{5\pi}{3}) = \frac{1}{2}$	$\tan(\frac{5\pi}{3}) = -\sqrt{3}$
$\sin(\frac{7\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cos(\frac{7\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\tan(\frac{7\pi}{4}) = -1$
$\sin(\frac{11\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$	$\cos(\frac{11\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan(\frac{11\pi}{6}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\sin(\frac{23\pi}{12}) = -\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\cos(\frac{23\pi}{12}) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$\tan(\frac{23\pi}{12}) = \sqrt{3} - 2$
$\sin(2\pi) = 0$	$\cos(2\pi) = 1$	$\tan(2\pi) = 0$

6. Ableitung

Häufungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ ist ein Häufungspunkt der Menge D falls $\forall \delta > 0$: $(]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus x_0) \cap D \neq \emptyset$

Beispiel (Häufungspunkt) Sei $D = 0 \cup]1, 2[$, dann ist die Menge der Häufungspunkte von D, $D' = [1, 2]$.

Ableitung Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ und x_0 ein Häufungspunkt von D. f ist in x_0 differenzierbar, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Ist dies der Fall, wird der Grenzwert mit $f'(x_0)$ bezeichnet.
Alternativ nutzt man auch $x = x_0 + h$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Weierstrass (Äquivalente Definitionen) Sei $f : D \to \mathbb{R}$, x_0 ein Häufungspunkt von D, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist in x_0 differenzierbar.
2. Es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ und $r : D \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$ mit:
   (a) $f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$
   (b) $r(x_0) = 0$ mit r stetig in x_0
   Falls dies zutrifft ist $c = f'(x_0)$ eindeutig bestimmt.

Wir können die zweite Aussage leicht abändern:
$f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann in x_0 differenzierbar, falls es eine Funktion $\phi : D \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$ gibt die stetig in x_0 ist und so dass

$$f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x - x_0) \quad \forall x \in D$$

: Dann gilt $\phi(x_0) = f'(x_0)$. Dies folgt direkt aus (2) indem man $\phi(x) := f'(x_0) + r(x)$ setzt.

(Beispiel) Per Definition Ableiten

- $f(x) = x^2$:
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = x + x_0$$
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{(x \to x_0)} x + x_0 = 2x_0$$

- $f(x) = \exp(x)$:
$$\frac{\exp(x_0 + h) - \exp(x_0)}{h} = \frac{\exp(x_0)\exp(h) - \exp(x_0)}{h} = \exp(x_0)\frac{\exp(h) - 1}{h}$$
Nun schätzen wir $\frac{\exp(h)-1}{h}$ ab: Es gilt $\exp(h) = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!}$, somit gilt $\frac{\exp(h)-1}{h} = 1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!}$ Somit gilt dann $\lim_{h \to 0} \frac{\exp(h)-1}{h} = 1$. Dies impliziert: $\exp'(x_0) = \ldots = \exp(x_0) \lim_{h \to 0} \frac{\exp(h)-1}{h} = \exp(x_0) \cdot 1$

- $\sin(x)$: Nutze $\sin(x_0 + h) = \sin(x_0)\cos(h) + \cos(x_0)\sin(h)$ sowie Entwicklung vom $\cos$

Satz von Rolle Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf (a, b) differenzierbar. Falls $f(a) = f(b)$, dann gibt es $\xi \in [a, b]$ mit $f'(\xi) = 0$

Beweis (Satz von Rolle) Aus dem Min-Max Satz folgt $\exists u, v \in [a, b]$ mit $f(u) \leq f(x) \leq f(v)$ $\forall x \in [a, b]$. Falls einer der beiden in (a, b) liegt nennen wir es ξ. Sonst gilt $f(a) = f(b)$ und dann $\xi = a$.

Satz von Lagrange Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit (a, b) differenzierbar. Dann gibt es $\xi \in (a, b)$ mit

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

Dieser Satz ist auch bekannt als Mittelwertsatz. Die Aussage ist äquivalent zu:

$$\exists x \in (a, b) : \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Beispiele (Lagrange)

- *Zeige* $|\sin(a) - \sin(b)| \leq |b - a|$: Es folgt direkt dass $\exists c$: $\frac{\sin(b) - \sin(a)}{b - a} = \cos(c)$. Es folgt: $\cos(c)(b - a) = \sin(b) - \sin(a)$. Da aber $\cos(c) \leq 1$ folgt: $|b - a| \geq |\sin(b) - \sin(a)|$.
- *Beweise: falls $f'(x) = 0$ $\forall x$, dann ist $f(x)$ auf $[a, b]$ konstant:* Aus Lagrange folgt dass für $x_1, x_2 \in (a, b)$ beliebig: $0 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ dies impliziert $f(x_1) = f(x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$.

Ableitung der Umkehrfunktion Sei $f : D \to E$ eine bijektive Funktion, $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt. Sei f in x_0 differenzierbar und $f'(x_0) \neq 0$, dann ist y_0 ein Häufungspunkt von E, $f^{-1}(y_0)$ differenzierbar und es gilt

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Beispiel (Ableitung der Umkehrfunktion) 1 + 1 = 2

Satz von Cauchy Ein technischer Satz der für den Beweis von l'Hopital sowie Taylorapprox. gebraucht wird. Mit $g(x) = x$ hat man den Satz von Lagrange.
Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar. Dann gibt es $\xi \in (a, b)$ mit:

$$g'(\xi)(f(b) - f(a)) = f'(\xi)(g(b) - g(a))$$

Falls zudem $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a, b)$ folgt:

$$g(a) \neq g(b)$$

sowie:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Konvexität

Konvex $f : I \to \mathbb{R}$ ist konvex (auf I) falls für alle $x \leq y$ $x, y \in I$ und $\lambda \in [0, 1]$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Zudem gilt für $x_0 < x < x_1$ in I:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

Man beweist dies indem man $x = (1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1$ wählt und somit $\lambda = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$

Taylorapproximation

Taylorapproximation Sei $f \in C^m([a, b])$ auf (a, b) $m + 1$ mal differenzierbar. Dann exisitert $\epsilon \in (a, b)$ mit

$$\begin{aligned} f(x) =& f(a) + f'(a)(x - a) + \ldots + \frac{1}{m!} f^{(m)}(a)(x - a)^m \\ &+ \frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\xi)(x - a)^{m+1} \end{aligned}$$

Beziehungsweise:
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) (n+1) mal differenzierbar. Für jedes $a < x \leq b$ gibt es $\xi \in (a, x)$ mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$$

Oder Alternativ $|R_N f(x; a)| \leq \sup_{a < \xi < x} |f^{(n+1)}(\xi)| \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$

Beispiel (Taylorapproximation)

- *Finde $P_3^0(x)$ von $f(x) = \sin(x)e^x$* Wir berechnen zuerst die Ableitungen:
$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x)e^x & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= e^x(\sin(x) + \cos(x)) & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= 2e^x \cos(x) & f''(0) &= 2 \\ f'''(x) &= 2e^x(\cos(x) - \sin(x)) & f'''(0) &= 2 \\ f''''(x) &= -4e^x \sin(x) \end{aligned}$$
Dies gibt uns:
$$\begin{aligned} P_3^0(x) &= f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(x)}{2!}x^2 + \frac{f'''(x)}{3!}x^3 \\ &= 0 + 1 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x^2 + 2\frac{1}{3!}x^3 \\ &= x + x^2 + \frac{x^3}{3} \end{aligned}$$

Nun wollen wir den Fehler abschätzen:

$$|R_3^0(x)| = \left|\frac{-4e^c\sin(c)}{4!}x^4\right| = \frac{e^c|\sin(c)|}{3!}x^4 \leq \frac{e^c}{3!}x^4 \quad \text{da}$$

- yet another example

TODO: Definitionsraum von x und c ?????

TODO: add examples for taylor approximation

Wichtige Taylorapproximationen um $x = 0$

- $\boxed{\frac{1}{1-x}}$ Für alle $x \in (1, 0)$ gilt:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

- $\boxed{e^x}$ Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

- $\boxed{\cos(x)}$ Für alle $x \in R$ gilt:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

- $\boxed{\sin(x)}$ Für alle $x \in R$ gilt:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{(n-1)} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

- $\boxed{\ln(1+x)}$ Für alle $x \in (-1, 1]$ gilt:

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{(n+1)} \frac{x^n}{n}$$

- $\boxed{\arctan(x)}$ Für alle $x \in [-1, 1]$ gilt:

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

- $\boxed{(1+x)^\alpha}$ Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

Integration (Theorie)

Partition Eine Partition von $I = [a, b]$ ist eine endliche Teilmenge $P \subsetneq [a, b]$ mit $\{a, b\} \subseteq P$. Insbesondere gilt: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.
Wir definieren $\delta = x_i - x_{i-1}$ als die Länge des Teilintervalls $[x_{i-1}, x_i]$

Obersumme & Untersumme
Untersumme: wobei $f_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i}$

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f_i \delta_i$$

Obersumme: wobei $F_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i}$

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} F_i \delta_i$$

Zudem definieren wir:

$$s(f) = \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} s(f, P)$$
$$S(f) = \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} S(f, P)$$

Riemann Integrierbarkeit Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann integrierbar falls $s(f) = S(f)$. In diesem fall bezeichnen wir den gemeinsamen Wert von $s(f)$ und $S(f)$ mit

$$\int_a^b f(x)dx$$

Dazu gibt es Satz 5.4: Eine beschränkte Funktion ist genau dann Riemann integrierbar, falls

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists P \in \mathcal{P}(I) \text{ mit } S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$$

Beweis: Angenommen $\forall \epsilon > 0 \, \exists P_1, P_2$ mit $S(f, P_2) - S(f, P_1) < \epsilon$. Für $P = P_1 \cup P_2$ folgt: $S(f, P_2) \geq S(f, P) \geq s(f, P) \geq s(f, P_1)$ woraus $S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$ folgt. Die Umkehrung ist klar.

TODO: satz 5.4

TODO: manuell integrieren

Gleichmässige Stetigkeit Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ ist auf D gleichmässig falls $\forall \epsilon \, \exists \delta \, \forall x, y \in D$:

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Stetig auf kompakten Intervall $\implies$ gleichmässig stetig / (Heine) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig in dem kompakten Intervall $[a, b]$. Dann ist f in $[a, b]$ gleichmässig stetig.

TODO: glm stetigkeit beweise hinzufügen

Integrierbarkeit

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist f integrierbar.
  Beweis: f beschränkt nach MinMax Satz. Wenn $\delta(P) < \delta$, dann gilt wegen der Stetigkeit $F_i - f_i \leq \epsilon$. Nun via def: $S(f, P) - s(f, P) = \ldots \leq (b - a)\epsilon$
- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton, dann ist f integrierbar.
  Beiweis: Sei f monoton steigend mit $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ und insbesondere sei f beschränkt. Sei $0 \leq (f(b) - f(a))\frac{b-a}{n} < \epsilon$. Partition mit $x_i = a + \frac{b-a}{n} \cdot i$. Bemerke es gilt $F_i = f_{i+1}$. Somit: $S(f, P) - s(f, P) = \sum_{i=1}^{n}((F_i - f_i)\frac{b-a}{n}) = (f(b) - f(a))(\frac{b-a}{n}) < \epsilon$.

Ungleichungen und Mittelwertsatz

Ungleichungen Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $f(x) \leq g(x) \, \forall x \in [a, b]$ so gilt $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.
Beweis Wir zeigen äquivalent dazu $\int_a^b g(x) - f(x)dx \geq 0$. Für jede Partition gilt sicherlich $S(g - f, P) \geq s(g - f, P) \geq 0$, somit folgt $\int_a^b g(x) - f(x)dx \geq 0$

Korollar (Absolutbetrag) Für $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, integrierbar gilt $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.
Beweis: Sicherlich gilt $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, nun wenden wir den obigen Satz darauf an.

TODO: CAUCHY SCHWARZ BEWIES -> verstehen mit ABC formel

Cauchy, Schwarz, Bunjakovsky

TODO: MWS Integral

Mittelwertsatz (Cauchy)

Fundamentalsatz

Stammfunktion Die Funktion $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ist in $[a,b]$ stetig und differenzierbar mit $F' = f$ wenn $a < b$ und $f : [a,b] \to R$ stetig ist.
Beweis: Aus additivität folgt: $\int_a^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^x f(t)dt = \int_a^x f(t)dt$. Also $F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)dt$. Per Mittelwertsatz sehen wir nun, dass es ein $\xi \in [x, x_0]$ gibt mit $\int_{x_0}^x f(t)dt = f(\xi)(x - x_0)$. Für $x \neq x_0$ folgt somit $\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(\xi)$. Wegen der Stetigkeit von f folgt: $\lim_{(x\to x_0)} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$. □

Fundamentalsatz der Differentialrechnung Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es eine Stammfunktion F von f, die bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist und es gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Beweis: Existenz folgt aus Stammfunktionssatz. Seien F_1, F_2 Stammfkt., dann gilt $F_1' - F_2' = 0$. Somit ist $F_1 - F_2 = C$ mit $F(x) = C + \int_a^x f(t)dt$. Es folgt auch $F(a) = \int_a^a f(t)dt + C$ und somit $F(a) = C$. Es folgt daraus $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$ □

Integrale Ausrechnen

TODO: ADD EXAMPLES TO EVERY VARIANT

Elementare Integrale

Siehe Tabelle

Direkte Integrale

Diese sind vom Typ $\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x))$.

Partielle Integration

Partielle Integration

$$\int f' \cdot g dx = f \cdot g - \int f \cdot g' \, dx$$

Beispiele:

Integrale rationaler Funktionen

Partielle Integration

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$$

Wenn nun $\deg(p) \geq \deg(q)$ dann machen wir eine Polynomdivision $p : q$, sonst mache eine Parzialbruchzerlegung

Substitutionsregel

Substitutionsregel Ist f stetig und g erfüllt:

$$y = g(x) \iff x = g^{-1}(y)$$

Dann gilt:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$$

Als Merksatz gilt $dy = g'(x)dx$ respektive $dx = \frac{1}{t}dt$

Integrale der Form $\int F(e^x, \sinh(x), \cosh(x))dx$

Substituiere mit $e^x = t$, ($dx = \frac{1}{t}dt$)

Integrale der Form $\int F(\log(x))dx$

Substituiere mit $\log(x) = t$, ($dx = e^t dt$)

Integrale der Form $\int F(\sqrt[a]{Ax + B})dx$

Substituiere mit $t = \sqrt[a]{Ax + B}$

Integrale die $\sin, \cos, \tan$ in geraden Potenzen enthalten

Substituiere mit $\tan(x) = t$, ($dx = \frac{1}{1+t^2}dt$). Es gilt zudem:

$$\sin^2(x) = \frac{t^2}{1+t^2} \qquad \cos^2(x) = \frac{1}{1+t^2}$$

Integrale die $\sin, \cos, \tan$ in ungeraden Potenzen enthalten

Substituiere mit $\tan(\frac{x}{2}) = t$, ($dx = \frac{2}{1+t^2}dt$). Es gilt zudem:

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Integrale mit $\sqrt{Ax^2 + Bx + C}$ im Nenner

Mithilfe quadratischer Ergänzung auf einen der folgenden Fälle zurückführen:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(x) + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \operatorname{arcosh}(x) + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \operatorname{arcsinh}(x) + C$$

Integrale mit $\sqrt{Ax^2 + Bx + C}$ im Zähler

Mithilfe quadratischer Ergänzung auf einen der folgenden Fälle zurückführen, dann substituieren

$$\int \sqrt{1-x^2}dx \quad \text{subsitution: } x = \sin(t) \Leftarrow dx = \cos(t)dt$$
$$\int \sqrt{x^2-1}dx \quad \text{subsitution: } x = \cosh(t) \Leftarrow dx = \sinh(t)dt$$
$$\int \sqrt{1+x^2}dx \quad \text{subsitution: } x = \sinh(t) \Leftarrow dx = \cosh(t)dt$$

Uneigentliche Integrale

Es gibt zwei Arten von uneigentlichen Integralen, man interessiert sic dafür ob die Integrale konvergieren oder nicht. Für beide Arten braucht man die gleichen Techniken:

Typ 1: $f(x)$ auf $[a, \infty)$ stetig. Dann setzt man $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)dx$ falls der Grenzwert existiert.

Typ 2: $f(x)$ auf $(a, b]$ stetig. Dann setzt man $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$ falls der Grenzwert existiert.

TODO: EXAMPLES

Definition + direkte Berechung

Setze die Definition ein (replace ∞ with R) und berechne dann das Integral. Lasse nun R nach ∞ laufen.

Vergleichskriterium

Seien f, g auf dem Integrationsgebiet stetig mit $0 \leq f(x) \leq g(x)$ für alle x. Dann gilt:

1. Ist $\int_a^\infty g(x)dx$ konvergent, so auch $\int_a^\infty f(x)dx$
2. Ist $\int_a^\infty f(x)dx$ divergent, so auch $\int_a^\infty g(x)dx$

Oft braucht man $\int_1^{infty} \frac{1}{x^p}dx$ als Vergleichsmittel welches für $p > 1$ konvergiert, für $p \leq 1$ ist es divergent.

Absolute Konvergenz

$$\int_a^\infty |f(x)| \, dx < \infty \implies \int_a^\infty f(x)dx < \infty$$

Das ist nützlich bei trigonometrischen Teilen.

Mc. Laurin Konvergenzkriterium

Sei $f : [1, \infty) \to [0, \infty)$ monoton fallend.

$$\sum_{n=1}^\infty f(n) \text{ konv.} \iff \int_1^\infty f(x)dx \text{ konv.}$$

Euler-Mc-Laurin Summation & Bernoullizahlen

Gamma Funktion

Die Gamma Funktion ist definiert als $\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$.
Sie erfüllt:

- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \; \forall s > 0$
- Γ ist logarithmisch konvex: $\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \Gamma(x)^\lambda \Gamma(y)^{1-\lambda}$

Wir zeigen nun die zweite Eigenschaft mittels partieller Integration:

$$\int_0^b x^n e^{-x}dx = -b^n e^{-b} + n\int_0^b x^{n-1}e^{-x}$$

Da $\lim_{b\to\infty} -b^n e^{-b} = 0$ folgt: $\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = n\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}$

7. Sonstiges

Binomialsatz $\forall x, y \in \mathbb{C}, n \geq 1$ gilt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

ABC / Mitternachtsformel

Gegeben: $ax^2 + bx + c = 0$

Lösung: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Ableitungsregeln

Funktion	Ableitung	Bemerkung / Regel
x	1	
x^2	$2x$	
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$n \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-\frac{1}{x^2}$	
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	
e^x	e^x	
a^x	$\ln(a) \cdot a^x$	
$x^x = e^{x\log(x)}$	$x^x \cdot (\log(x) + 1)$	Kettenregel $e^{x\log(x)}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	
$\sin(x)$	$\cos(x)$	
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	
$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	
$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$	- $\frac{1}{\sin^2(x)}$	
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan : (-\infty,\infty) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$\text{arccot}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\text{arccot} : (-\infty,\infty) \to (0,\pi)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	
$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)}$	
$\text{arsinh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\forall x \in R$
$\text{arcos}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\forall x \in (1,\infty)$
$\text{artanh}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\forall x \in (-1,1)$
$g(x) \cdot h(x)$	$g(x) \cdot h'(x) + g'(x) \cdot h(x)$	Produktregel
$(g(x))^n$	$n \cdot (g(x))^{n-1} \cdot g'(x)$	Potenzregel
$\frac{g(x)}{h(x)}$	$\frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{(h(x))^2}$	Quotientenregel
$h(g(x))$	$h'(g(x)) \cdot g'(x)$	Kettenregel