Analysis 1

David Zollikofer

1. Einführung

Ordnungsvollständigkeit Unterscheidet $\mathbb{R}$ von $\mathbb{Q}$. Für A, B nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit

$$\forall a \in A \wedge \forall b \in B \implies a \leq b$$

Dann gibt es $c \in \mathbb{R}$ mit $\forall a \in A : a \leq c$ und $\forall b \in B : c \leq b$

Archimedisches Prinzip Korollar von Ordnungsvollständigkeit. Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ und $y \in \mathbb{R}$, dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $y \leq nx$

Wichtige Ungleichungen

Bernoulli Ungleichung Wenn $x \in \mathbb{R}$ mit $x > -1$ sowie $n \in \mathbb{Z}$ mit $n > 0$, dann gilt:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Beweis: per Induktion

Cauchy Schwarz $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $|\langle x, y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||$.

Youngsche Ungleichung $\forall \epsilon > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $2|xy| \leq \epsilon x^2 + \frac{1}{\epsilon} y^2$. Beweis per Expansion von $\left(\sqrt{\epsilon}|x| - \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}|y|\right)^2 \geq 0$

In Integralform: Wenn f stetig strikt monoton wachsend:

$$ab \leq \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy$$

Wenn wir $f(x) = x^{p-1}$, so gilt $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ mit $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.

Hölder Ungleichung Seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, dann gilt für alle stetigen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq ||f||_p ||g||_q$$

Wobei

$$||f||_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

Supremum & Infimum

Existenz des Supremums Sei $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$. Sei A nach oben beschränkt, dann gibt es eine kleinste obere Schranke von A, $c = \sup A$, genannt Supremum von A. Um dies zu Beweisen nutzt man die Ordnungsvollständigkeit und definiert B als die Menge der oberen Schranken.

Beispiel (Sup & Inf finden) Sei $M = \{\frac{|x|}{1+|x|} : x \in \mathbb{R}\}$.
INFINUM: Weil alle Elemente positiv sind ist von unten durch 0 beschränkt. Falls $x = 0$, folgt $\frac{|0|}{|0|+1} = 0$ womit $\min M = \inf M = 0$.
SUPREMUM: Für alle x gilt $|x| + 1 > |x|$ somit $\frac{|x|}{|x|+1} < 1$. Somit gilt sicher $\sup M \leq 1$.
Nach Archimedes: $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 : 1/n \leq \epsilon \, \forall n \geq n_0$

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \geq \frac{1}{1+\epsilon} = 1 - \frac{\epsilon}{1+\epsilon}$$

Wir erreichen 1 sicher nie da sonst $1 = 0$, aber wir können beliebig nahe kommen. Somit $\sup M = 1$ aber $\neg\exists \max M$

Komplexe Zahlen $\varphi = \arg(z)$

	Basic	Polar	Exponential
	$z = x + iy$	$z = r(cos\theta + isin\theta)$	$z = re^{i\theta}$
Conversions:	$x = rcos\theta$ $y = rsin\theta$	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\theta = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$	

DIVISION: Es gilt $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{||z||^2}$ wenn $z \neq 0$
POLARFORM Wenn

$$z_1 = r_1(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1))$$
$$z_2 = r_2(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2))$$

dann gilt:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right)$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right)$$

Zudem folgt durch Induktion:

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

Komplexe Nullstellen: Die n-te Wurzel von x berechnen wir (es gibt n davon):

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\phi_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\phi_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\phi_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)$$

Grenzwerte

Wir sagen dass f an der Stelle a den Grenzwert $L \in \mathbb{R}$ hat, geschrieben $\lim_{x\to a} f(x) = L$ falls $\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0$ sodass für alle $|x - a| < \delta$ gilt $|f(x) - L| < \epsilon$

Grenzwert mittels Definition

Beispiel (GW per Def) Zeige $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$. Wir setzten $|a_n - a| = \left|\frac{n^2}{n^2+1} - 1\right| \leq \epsilon$. Daraus folgt $n > \sqrt{\frac{1}{\epsilon} - 1}$. Wir wählen $N = ceil(\sqrt{\frac{1}{\epsilon} - 1})$. Dann gilt $\forall n > N$, dass $|a_n - a| < \epsilon$

Sandwich Theorem Aus $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ und $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$ folgt $\lim_{x\to a} f(x)$

Grenzwert mittels Dominanz Grundsätzlich gelten die folgenden Dominanzen:
Für $x \to +\infty$:

$$\ldots < \log(\log(x)) < \log(x) < x^\alpha < e^x < \alpha^x < x! < x^x$$

Sowie für $x \to 0^+$

$$\ldots < \log(\log(x)) < \log(x) < \left(\frac{1}{x}\right)^\alpha$$

Wurzeltrick

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x} - x\right) &= \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x} - x\right) \cdot \frac{-\sqrt{x^2+x} - x}{-\sqrt{x^2+x} - x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-\sqrt{x^2+x}^2 + x^2}{-\sqrt{x^2+x} - x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2+x} + x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Fundamentallimes Oft kann man einen dieser Limits verwenden:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\sin(x)}{x} = 1$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^n} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$$
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1 \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$$

Variablenwechsel für Grenzwert Seien f, g Funktionen wobei f stetig in y_0 und g stetig in x_0 mit $y_0 = \lim_{x\to x_0} g(x)$ ist. Dann gilt:

$$\lim_{(x\to x_0)} f(g(x)) = \lim_{(y\to y_0)} f(y)$$

Beispiel (Variablenwechsel): $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2\sin\left(\frac{\log(x)}{x^2}\right)}{\log(x)}$. Wir setzten $y = \frac{\log(x)}{x^2}$. Wenn $x\to\infty$ dann geht $y\to 0$. Somit haben wir nun $\lim_{y\to 0}\frac{2\sin(y)}{y} = 2$

Bernoulli - de l'Hospital Wenn wir zwei differenzierbare Funktionen f, g haben mit $g'(a) \neq 0$ dann gilt falls:

- entweder $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$
- oder $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$

dann gilt:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- **Typ 1:** $\frac{0}{0}$ **oder** $\frac{\infty}{\infty}$

  Beispiele:

  - $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2x}} = \sqrt{\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos(x)}{2x}} = \sqrt{\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)}{2}} = 0$, wobei wir die Stetigkeit nutzten.
  - $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{e^{-\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$
  - $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi\cos(x))}{x\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)\pi\cos(\pi\cos(x))}{x\cos(x)+\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\pi\cos(\pi\cos(x))}{\frac{x}{\sin(x)}\cos(x)+1} = \lim_{x\to 0}\frac{-\pi\cos(\pi\cos(x))}{1+1} = \frac{-\pi\cos(\pi)}{2} = \frac{\pi}{2}$

- **Typ 2:** $0\cdot\infty$ Wenn wir einen Grenzwert wie $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$ haben dann können wir den umformen in:

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$
$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

  Beispiele:

  - $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^2}{x} = 0$
  - $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\tan(x) - \frac{1}{\cos(x)}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} - \frac{1}{\cos(x)}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\sin(x)-1}{\cos(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\cos(x)}{-\sin(x)} = \frac{\cos(\frac{\pi}{2})}{-\sin(\frac{\pi}{2})} = \frac{0}{-1} = 0$
  - $\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt[x]{e} - 1\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{-x^2}e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{-x^2}} = \lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 0$

- **Typ 3:** $f(x)^{g(x)}$ Wenn wir Grenzwerte des Types $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ haben, dann schreiben wir es wie folgt:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{\ln(f(x))\cdot g(x)} = e^{\lim_{x\to a}\ln(f(x))\cdot g(x)}$$

  Beispiele:

  - $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin(x)} = e^{\lim_{x\to 0^+}\sin(x)\ln(x)}$. Nun schauen wir den Exponenten an: $\lim_{x\to 0^+}\sin(x)\ln(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{\sin(x)}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos(x)}{\sin^2(x)}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2(x)}{-x\cos(x)} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{\sin(x)}{\cos(c)} = 1\cdot 0 = 0$. Wir haben somit $e^0 = 1$.
  - $\lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{1}{\sin^2(x)}} = e^{\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sqrt{x^2+1})}{\sin^2(x)}\right)}$. Nun schauen wir den Exponenten an: $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sqrt{x^2+1})}{\sin^2(x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x^2+1)}{2\sin^2(x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x^2+1)}{2\sin^2(x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x}{4\sin(x)\cos(x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{\sin(x)}\cdot\frac{1}{(x^2+1)\cos(x)} = \frac{1}{2}$. Somit haben wir somit $e^{\frac{1}{2}}$.

Taylor (als letzte Hoffung)

Wenn das alles nicht funktioniert kann man versuchen die Taylorentwicklung einzusetzten.

Beispiel (Taylor): Wir wollen $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x^2(\exp(x)-1)}$ ausrechnen: Wir setzten ein:

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots - x}{x^2(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots - 1)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots}{x^2(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \frac{x^4}{7!} + \ldots}{1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ldots}$$
$$= -\frac{1}{6}$$

Kann auch sinnvoll sein Audruck wie $\sqrt{x} = t$ zu subsituieren und dann neuer Limes.

Folgen

Definition Konvergenz Folge a_n is konvergent, falls $\exists l \in \mathbb{R}$ so dass $\forall\epsilon > 0$ die Menge $\{n \in \mathbb{N}^+ : a_n \notin (l-\epsilon, l+\epsilon)\}$ endlich ist.
Äquivalent: $\forall\epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ so dass $\forall n \geq N$ gilt $|a_n - l| < \epsilon$.

Beispiel (Konvergenz mit Definition): Beweise dass $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+4}{2n^2+1} = \frac{3}{2}$. Sei $\epsilon > 0$. Dann muss gelten $|a_n - a| < \epsilon$. Somit $\left|\frac{3n^2+4}{2n^2+1} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{6n^2+8-6n^2-3}{4n^2+2}\right| = \frac{5}{4n^2+2} < \epsilon$. Gibt $4n^2+2 > \frac{5}{\epsilon}$, äquiv zu $n > \sqrt{\frac{5}{4\epsilon} - \frac{1}{2}}$. Wir definieren $N = \lfloor\sqrt{\frac{5}{4\epsilon} - \frac{1}{2}}\rfloor$. Nun gilt $\forall n \geq N : |a_n - a| < \epsilon$.

Rechnen mit Grenzwerten $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ konvergent mit GW a, b. Dann gilt:

- $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- Falls $b_n, b \neq 0$, so gilt $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$
- Falls $a_n \leq b_n\ \forall n \in \mathbb{N}$, so gilt $a \leq b$

Beispiel (Rechnen mit Grenzwerten):

- $\lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{1}{n}+n^2)^3}{1+n^6} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^6}{n^6}\frac{(\frac{1}{n^3}+1)^3}{\frac{1}{n^6}+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{1}{n^3}+1)^3}{\frac{1}{n^6}+1} = 1$
- $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) \overset{\text{Wurzeltrick}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+1}} = 1$

Satz von Weierstrass Wenn a_n nach oben (nach unten) konvergent ist und monoton wachsend (fallend), dann ist a_n konvergent.

Beispiel (Induktive Folge mit Weierstrass): Beachte $a_0 = 0$, $a_{n+1} = \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + 1$. MONOTONIE: Anstatt $a_{n+1} > a_n$ zeigen wir $a_{n+1} - a_n > 0$:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2}{4} + 1 - a_n = \frac{a_n^2 - 4a_n + 4}{4} = \frac{(2-a_n)^2}{4} \geq 0$$

BESCHRÄNKTHEIT: (≤ 2) per Induktion. Für $n = 0$, $a_0 = 0 \leq 2$✓.
Schritt: $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{4} + 1 \overset{\text{I.H.}}{\leq} \frac{2^2}{4} + 1 = 2$✓. Nach Weierstrass konvergent. mit $a = \frac{a^2}{4} + 1 \implies a = 2$ als GW.

Sandwich Theorem Seien $b_n \leq a_n \leq c_n$. Falls b_n und c_n konvergent sind mit $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, so ist a_n auch konv. mit $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

Beweis (Sandwich Theorem): Da b_n, c_n konvergent mit GW L:

$$\forall\epsilon > 0\exists N_1 : \forall n \geq N_1 : L - \epsilon < b_n + \epsilon$$

Analog $\exists N_2$, setze $N = \max\{N_1, N_2\}$, dann gilt $\forall \epsilon > 0 \exists N$:

$$L - \epsilon < b_n \le a_n \le c_n < L + \epsilon \implies L - \epsilon < a_n < L + \epsilon$$

Beispiel (Sandwich) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+\cos(n)}{n^2-1}$. Wenn es absolut konv. dann auch absolut. Sicher gilt somit : $0 \le \left|\frac{n+\cos(n)}{n^2-1}\right|$ Nun schätzen wir nach oben ab: $\left|\frac{n+\cos(n)}{n^2-1}\right| \le \frac{n+1}{n^2-1} = \frac{n+1}{(n+1)(n-1)} = \frac{1}{n-1}$. Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n-1} = 0$, somit gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{n+\cos(n)}{n^2-1}\right| = 0$. (da Sandwich)

Cauchy Kriterium Die Folge $(a_n)_n$ ist genau dann konvergent, falls $\forall \epsilon > 0\ \exists N \ge 1$ so dass $|a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall n, m \ge N$

Beweis (Cauchy Kriterium) Seien $|a_n - a| < \epsilon$ sowie $|a_m - a| < \epsilon$, mit $n, m \ge N$ wie in der Def. Es folgt:

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) + (a - a_m)| < |a_n - a| + |a_m - a| < 2\epsilon$$

Beispiel (Cauchy Kriterium) Sei $a_n = \frac{n-1}{2n}$ eine Folge. Wir versuchen Konvergenz mittels Cauchy zu zeigen:

$|a_n - a_m| = |\frac{n-1}{2n} - \frac{m-1}{2m}| = |\frac{nm-m-nm+n}{2nm}| = |\frac{n-m}{2nm}| = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2m} \overset{m\ge n}{\le} \frac{1}{2n} < \epsilon$. Für alle $n \ge N = \lceil \frac{1}{2\epsilon} \rceil$ haben wir $|a_n - a_m| < \epsilon$. Nach Cauchy ist a_n somit konvergent.

Satz von Bolzano Weierstrass Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

2. Reihen

Konvergenz mit Definition Eine Reihe konvergiert wenn der Grenzwert der Partialsummen existiert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} S_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Beispiel (Konvergenz mit Definition)

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Es gilt somit $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \ldots - \frac{1}{n+1}$ Somit $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$, somit ist die Reihe konvergent mit Grenzwert 1.
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ Zuerst nutzen wir den Wurzeltrick: $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Wir bemerken $S_n = 1 - 0 + \sqrt{2} - 1 \ldots + \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n+1}$. Da aber $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1} = \infty$ divergiert die Reihe.

Geometrische Reihen Für geometrische Reihen gilt:

$$\sum_{k=0}^{n-1} ar^k = a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} s &= a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} \\ rs &= ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^n \\ s - rs &= a - ar^n \\ s(1-r) &= a(1-r^n) \end{aligned}$$

Konvergenz mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (Nullfolge)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 \text{ konvergiert} \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \ne 0 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_0 \text{ divergiert}$$

Beweis (Nullfolge) Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent ist, dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Es gilt $a_N = S_N - S_{N-1}$. Somit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$

Majorantenkriterium Fall $a_n \ge b_n \forall n \ge n_0$ für ein n_0. Dann gilt $\sum_n a_n$ konvergiert $\implies \sum_n b_n$ konvergiert.

Minorantenkriterium Fall $a_n \ge b_n \forall n \ge n_0$ für ein n_0. Dann gilt $\sum_n b_n$ divergiert $\implies \sum_n a_n$ divergiert.

Quotientenkriterium Sei $a_n \ne 0$, dann gilt:

- $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| > 1 \implies \sum_n a_n$ divergiert.
- $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1 \implies \sum_n a_n$ konvergiert.
- $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 1 \implies$ Kriterium versagt.

Beweis (Quotientenkriterium) Angenommen $c_n = \sup\{\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} : k \ge n\}$. Dann wenn beschränkt: $\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$. Angenommen wir haben q so dass $\lim\limits_{n\to\infty} c_n < q < 1$. Sei $N \ge 1$ so dass $c_N \le q < 1$ woraus $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \le q \implies |a_{k+1}| \le q|a_k|$. Für $j \ge 1$ folgt: $|a_{N+j}| \le q|a_{N+j-1}| \le \ldots \le q^j|a_N| = q^{N+j}\frac{|a_N|}{q^N}$. Somit gilt: $|a_n| \le q^n \frac{|a_N|}{q^N}$ und wir haben eine Majorante.

Beispiel (Quotientenkriterium)

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n!}$. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4^{n+1} n!}{4^n (n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{n+1} = 0 < 1$. Konvergent ✓
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!!}$. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!!} \frac{(2n)!!}{n^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \frac{(2n)!!}{(2n+2)(2n)!!} =$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{e}{2} > 1$. Somit divergent.

Wurzelkriterium

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \implies \sum_n a_n$ divergiert
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \implies \sum_n a_n$ konvergiert
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \implies$ Kriterium versagt

Beispiel (Wurzelkriterium)

- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{1/n} - 1\right)^n$. Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} (n^{1/n} - 1) = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\log n} - 1 = e^0 - 1 = 0$ Somit konvergent.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n-5}$. Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{1-\frac{5}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$. Somit konvergent.

Beweis (Wurzelkriterium) Sei $c = \sup\{\sqrt[k]{|a_k|}\}$ und $< q < 1$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < q < 1$. Dann $\exists N \ge 1$ mit $c_N = \sup\{\sqrt[k]{|a_k|} : k \ge N\} \le q$ was uns $|a_n| \le q^n$ gibt. Somit ist eine geometrische Reihe eine Majorante.

Integralkriterium (Mc. Laurin) Wenn $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ sowohl $a_n \ge 0$ und $a_{n+1} \le a_n$ (monot. fall.), dann gilt:

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n \text{ konv.} \iff \int_p^{\infty} a(x)dx \text{ konv.}$$

Beispiele (Integralkriterium)

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$. Es gilt $\frac{d}{dx}\frac{1}{x^2+1} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \le 1$, somit können wir das Integralkriterium anwenden. Es gilt $\int \frac{1}{1+x^2}dx = [\arctan(x)]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}$. Somit konv. die Reihe.
- $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$. Es gilt $\frac{d}{dx}xe^{-x} = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x) \le 0$, da $x \ge 1$ gilt. Es gilt $\int_1^{\text{inf}} xe^{-x}dx = \frac{2}{e} < \infty$. Somit konv. die Reihe.

Cauchy-Kondensationstest (nicht in VL!) Sei $a_n \ge 0$ und monoton fallend, dann:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \iff \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2n} \text{ konvergiert}$$

Beispiel (CauchyKondens): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ konv wenn $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n}$ konv., da $\frac{1}{n} \ge 0$ und monot. fallend.

Grenzwert mittels Riemann Summe (nicht in VL!) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx$$

Beispiele (GW mit R.Summe)

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2+n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

Leibnitzkriterium Eine Reihe $\sum_n (-1)^n a_n$ konvergiert falls $a_n \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und a_n monoton fallend ist.

Beispiel (Leibnitz): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n)\log(n)}{\cos(n\pi)} \frac{}{n^2}$. Wir stellen fest dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n)}{\cos(n\pi)} \frac{\log(n)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log(n)}{n^2}$. Zudem gilt $\frac{\log(n)}{n^2} \geq 0$, sowie $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{n^2} = 0$. Zudem ist $\frac{\log(n)}{n^2}$ monot. fallend für $n \geq 2$, da:

$$\frac{d}{dx}\frac{\log(x)}{x^2} = -2\frac{\log(x)}{x^3} + \frac{1}{x} = \frac{1-2\log(x)}{x^3} \leq 0 \; \forall x \geq \sqrt{e} = 1.6..$$

Absolute Konvergenz Eine Reihe $\sum_n a_n$ ist absolut konvergent falls $\sum_n |a_n|$ konvergiert.

Beispiel (Absolute Konvergenz) Ang. $\sum_n a_n$ konvergiert absolut. Betrachte $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{1+a_n} - 1)$ und bemerke dass es auch abs. konv.

$$\left|\sqrt{1+a_n} - 1\right| = \left|(\sqrt{1+a_n} - 1)\frac{\sqrt{1+a_n}+1}{\sqrt{1+a_n}+1}\right| = \left|\frac{a_n}{\sqrt{1+a_n}+1}\right| \leq |a_n|$$

Absolut Konvergente Reihe ist auch konvergent Eine absolut konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist auch konvergent und es gilt $\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\right|$

Beweis von absolut Konvergente Reihe ist auch konvergent: Da $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert, gilt nach Cauchy: $\forall \epsilon > 0 \exists N \geq 1$ mit $\sum_{k=1}^{m} |a_k| < \epsilon$. Daraus folgt: $\left|\sum_{k=1}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{m} |a_k| < \epsilon$, daraus folgt die Konvergenz. Die Ungleichung folgt per Limes der endlichen Reihen.

Summenregel für Reihen Wenn $\sum_n a_n$ und $\sum_n b_n$ zwei konvergente Reihen sind, dann gilt $\sum_n (a_n \pm b_n) = \sum_n a_n \pm \sum b_n$. *Beweis: Direkt aus* $\lim_{n\to\infty} S_n \pm \lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} (S_n \pm T_n) = S \pm T$

Beipiel (Summenregel) Wir berechnen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)} - \frac{4}{2^n}$ Die erste Konvergiert nach 3 *(Beispiel bei Konv. mit Def.)*. Die zweite ist eine geometrische Reihe mit $q = \frac{1}{2}$ da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2^n} = 4\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - 1\right) = 4\left(\frac{1}{1-1/2} - 1\right) = 4$ Somit gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)} - \frac{4}{2^n} = 3 - 4 = -1$

Umordnung einer Reihe Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a'_n$ ist eine Umordnung von $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$, falls $\phi : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ bijektiv existiert, so dass $a' = a_{\phi(n)}$.
Wenn eine Reihe absolut konvergiert, dann konvergiert jede Umordnung der Reihe und hat denselben Grenzwert.
Zum Beispiel $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ kann man umordnen.

Cauchy Produkt

1. Falls $\sum_n a_n$ und $\sum_n b_n$ absolut konvergierten, konvergiert ihre Cauchy Produkt und es gilt: $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j\right) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right) * \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_i\right)$
2. Wenn $\exists B \geq 0$, so dass $\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} |a_{ij}| \leq B \quad \forall m \geq 0$, dann konvergieren $S_i = \sum_{j=0}^{m} a_{ij} \; \forall i$, sowie $U_j 0 \sum_{i=0}^{m} a_{ij} \; \forall j$. Zudem gilt: $\sum_{i=0}^{\infty} S_i = \sum_{j=0}^{\infty} U_j$. Jede lineare Anordnung der Doppelreihe konv. auf den gleichen Grenzwert.

Zeige immer auch was auf dem Konvergenzradius $\pm\rho$ passiert.

Potenzreihe / Konvergenzradius Potenzreihe hat Form $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Die Menge aller x für welche $f(x)$ konvergiert nennt man Konvergenzbereich. Der Konvergenzradius (dessen Grenze) ist definiert: $\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ oder eben $\rho = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$. Falls $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ so sagen wir ist $\rho = +\infty$.

Beispiel (Konvergenzradius)

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Wir rechnen $\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| == \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$. Die Reihe konvergiert für alle x.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$. Wir Rechnen $\rho = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} (1+\frac{a}{n})^n} = \frac{1}{e^a} = e^{-a}$. Die Reihe konvergiert für alle $|x| < e^{-a}$.

3. Funktionenfolgen

Punktweise und Gleichmässige Konvergenz (Rezept) Zuerst berechnen wir den punktweisen Grenzwert der definiert ist als: Die Funktionenfolge $(f_n)_n$ konvergiert punktweise gegen eine Funktion $F : D \to \mathbb{R}$, falls für alle $x \in D$: $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$

In Praxis interessiert man sich für

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{für fixes } x \in D$$

Nun prüft man f_n auf gleichmässige Konvergenz. Die Folge $f_n : D \to \mathbb{R}$ konvergiert gleichmässig in D gegen $f : D \to \mathbb{R}$ falls gilt $\forall \epsilon > 0 \; \exists N \geq 1$, so dass

$$\forall n \geq N, \forall x \in D : \; |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

In Praxis:

1. Berechne
$$\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)|$$
Es ist of nützlich die Ableitung von $|f_n(x) - f(x)|$ zu bilden und diese gleich Null zu setzen.
2. Bilde nun den Limes:
$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)|\right)$$
Falls der Limes 0 ist haben wir gleichmässige Konvergenz.

Indirekte Methoden:

- f unstetig, keine gleichmässige Konvergenz
- f stetig, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) < \forall x \in D$, D kompakt $\implies$ gleichmässige Konvergenz. (Satz von Dini, nicht Skript)

Beispiel (Punktweise Konvergenz) Sei $D : [0,1]$ und $f_n = x^n$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad ,0 \leq x < 1$. Für $x = 1$ gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(1) = 1$. Somit konvergiert f_n punktweise gegen $f(x) = \begin{cases} 0, 0 \leq x < 1 \\ 1, x = 1 \end{cases}$ Leider ist f nicht stetig in 1.

Beispiel (Gleichmässige Konvergenz)
Konvergiert $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ gleichmässig auf $[0,1]$?
Pkt-Konv: $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x}{n}}{\frac{1}{n^2}+x^2} = 0$
Glm-Konv: Wir berechnen zuerst $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{nx}{1+n^2x^2}\right|$. Wir leiten den Term nach x ab und setzen zu 0. Das Maximum leigt bei $x = \frac{1}{n}$. Dies setzen wir ein: $\sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{n\frac{1}{n}}{1+n^2\frac{1}{n^2}}\right| = \frac{1}{2}$. Somit nicht glm konv auf $[0,1]$. Beachte aber dass es auf $[1,\infty)$ glm. Konv. ist da das Max dann bei $\frac{1}{1}$ an-

genommen wird und dann $\sup_{x\in[1,\infty)}\left|\frac{n}{1+n^2}\right|$ mit $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{1+n^2}\right| = 0$

Beispiel (Punktweise aber nicht Gleichmässig) Wir haben

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x+1, 0 \le x \le \frac{2}{n} \\ 1, \frac{1}{n} < x \end{cases}$$

Punktmässig: Für $x = 0$: $n^2 \cdot 0 + 1 = 1$, sonstige x haben wir $f(x) = 1$

Gleichmässig: Für $x = \frac{1}{n}$ gilt $f(\frac{1}{n}) = n^2 \cdot \frac{1}{n} + 1 = n+1$, somit folgt $\forall n > 0 \quad \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \ge |(n+1) - 1| = n$ no glm konv.

Stetig Funktionenfolge gleichmässige Konvergenz Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ unf $f_n : D \to R$ eine Funktionenfolge bestehend aus stetigen Funktionen die gleichmässig gegen f konvergieren. Dann ist f in D stetig.

Beweis (Stetig Funktionenfolge gleichmässige Konvergenz) Da f_n gleichmässig Konvergent existieren Konst. $|f(x) - f_N(x)| < \epsilon \; \forall x \in D$. Da f_N stetig in x_0 folgt:

$$|x - x_0| < \delta \implies |f_N(x) - f_N(x_0)| < \epsilon$$

Daraus folgt:
$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_N(x_0) + f_N(x) - f_N(x_0) + f_N(x_0) - f(x_0)| < 3\epsilon$

4. Stetigkeit

Definition (Stetigkeit)

- Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ *ist in x_0 stetig*, falls $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0$, so dass für alle x die Implikation
$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$
- Daraus leitet sich ab: Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$, f ist genau dann in x_0 stetig, falls für **jede** Folge $(a_n)_{n\ge1}$ in D die Implikation gilt:
$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$$

Beispiel (Stetigkeit)

- Trick: schätze $|f(x) - f(x_0)|$ durch $C|x - x_0|$ ab.
- Stetigkeit von $\sqrt{x}$ auf $[0,\infty)$. Sei $\epsilon > 0$ mit $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. d.h. $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \epsilon$. Zudem ist bekannt, dass $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \le \sqrt{x-y}$ wenn $x > y$. Somit gilt: $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| \le \sqrt{x - x_0} < \epsilon$. Wir wählen $|x - y|\epsilon^2 = \delta \implies \delta = \epsilon^2$. Dann ist $\sqrt{x}$ stetig.

Rechenregeln für Stetige Funktionen Falls $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig, dann sind folgende auch stetig:

$$f+g \quad f-g \quad fg \quad \frac{f}{g} \text{ falls } g \neq 0$$

Das Maximum und die Zusammensetzung zweier stetigen Funktionen ist auch stetig.

Zwischenwertsatz (Bolzano)

Sei $I \in \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a, b \in I$. Dann gilt: Für alle c zwischen $f(a)$ und $f(b)$ exisitert ein z zwischen a und b so dass $f(z) = c$.

Beispiel (Zwischenwertsatz)

- Sei $f : [a,b] \to [a,b]$ stetig. Zeige f hat Fixpunkt. Wir def. die stetige Fkt. $h(x) = f(x) - x$. Es gilt $h(a) = f(a) - a \ge 0$ da $f(a) \in [a,b]$. Analog $h(b) = f(b) - b \le 0$. Somit exisitert x_0 mit $h(x_0) = 0$ resp. $f(x_0) = x_0$.
- Hat $e^{2x} - \log(1+x) = 2$ eine Lösung in $[0,1]$?. Wir def. $h(x) = e^{2x} - \log(1+x) - 2$. Bemerke $h(x)$ ist stetig. Es gilt $h(0) = 1 - 0 - 2 = -1$, sowie $h(1) = e^2 - \log(2) - 2 \ge 0$. Somit existiert $x_0 \in [0,1]$ mit $h(x_0) = 0$. Somit exisiter Lösung in $[0,1]$.

Beipiel (Jedes Polynom ungerades Grades hat Nullstelle) Sei $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ mit $a_n \neq 0$ sowie n ungerade. Dann hat $P(x)$ mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{R}$.

Beweis Wir definieren $\frac{P(x)}{x} = 1 + a_{n-1}x^{-1} + \cdots + a_0x^{-n} = Q(x)$. Wir bemerken dass $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^j = 0$ für $1 \le j \le n$. Analog: $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)^j = 0$. Somit gibt es ein $N \in \mathbb{N}, N \ge 1$ für welches $\frac{1}{2} \le Q(N) \le \frac{3}{2}$ sowie $\frac{1}{2} \le Q(-N) \le \frac{3}{2}$ (Wegen dem 1 in Q). Daraus folgt: $P(N) = N^nQ(n) > 0$ sowie $P(-N) = (-N)^NQ(-N) < 0$. Nach Anwendung des Zwischenwertsatzes auf $P : [-N, N] \to \mathbb{R}$ haben wir ein $z \in [-N, N]$ mit $P(z) = 0$.

Min-Max Satz

- Jede auf einem kompakten Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ $(a \le b)$ definierte stetige Funktion ist dort beschränkt und nimmt dort ein Maximum und ein Minimum an. Insbesondere ist f beschränkt.
- Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall I, dann gitb es $u, v \in I$ mit
$$f(u) \le f(x) \le f(v) \quad \forall x \in I$$

Kompaktheit Wir nennen ein Intervall $I \subseteq R$ kompakt, wenn es die Form $[a,b], a \le b$ hat.

Stetigkeit der Verknüpfung Wenn f, g auf passenden Intervallen stetig, dann $(f \circ g)$ das auch. Sei $x_0 \in [a,b]$ beliebig und $(x_n)_n$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, dann gilt $\lim_{n\to\infty}(f \circ g)(x_n) = (f \circ g)(x_0)$ was die Folgenstetigkeit zeigen würde.

Beweis (Stetigkeit der Verknüpfung) $\lim_{n\to\infty}(f \circ g)(x_n) = \lim_{n\to\infty}(f(g(x_n)) = f(\lim_{n\to\infty} g(x_n)) = f(g(\lim_{n\to\infty} x_n)) = (f \circ g)(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(g(\lim_{n\to\infty} x_n)) = (f \circ g)(x_0)$

Stetigkeit der Umkehrabbildung Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein intervall und $f : I \to R$ stetig, streng monoton. Dann ist $J = f(I) \subseteq \mathbb{R}$ ein intervall und $f^{-1} : J \to I$ stetig und bijektiv

Exponentialfunktion & Sinus & Kosinus

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

$$\sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots$$

$$\cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots$$

Dabei gilt:

$$\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z) \qquad \cos(z)^2 + \sin(z)^2 = 1$$

$$\cos(z) = \cos(-z) \qquad \sin(-z) = -\sin(z)$$

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

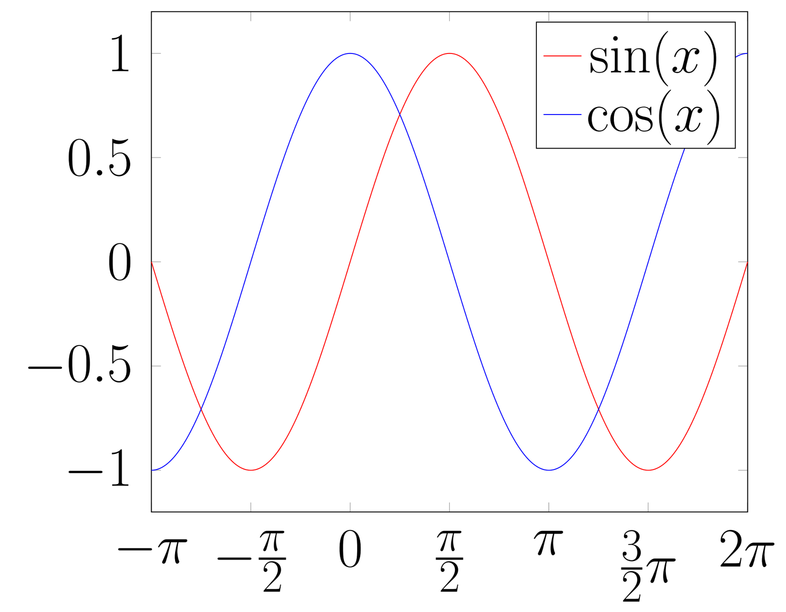
$$\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$$

$$\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$$

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \qquad \cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$$



Einige Trigonometrische Ungleichungen

Zeige $\sin(x)$ **monton auf** $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ Es gilt bekanntlich $\sin(x) - \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq 0$ wenn $-\frac{\pi}{2} \leq y < x \leq \frac{\pi}{2}$ womit auch $\frac{x-y}{2} \in (0, \frac{\pi}{2}]$ und $\frac{x+y}{2} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Zeige $\sin(x) < x$ **für** $x \geq 0$ Wenn $x = 0$ dann folgt sofort $\sin(0) = 0$. Für $x \geq 1$ folgt auch $\sin(x) \leq 1 \leq x$. Es bleibt $x \in (0,1)$. Per Mittelwertsatz gibt es nun ein $c \in (0,x)$ für welches $\cos(x) = \frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0}$. Daraus folgt $\frac{\sin(x)}{x} \leq 1$ was $\sin(x) \leq x$ impliziert.

Wertetabelle

$\sin(\theta)$	$\cos(\theta)$	$\tan(\theta)$
$\sin(0) = 0$	$\cos(0) = 1$	$\tan(0) = 0$
$\sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$\tan(\frac{\pi}{12}) = 2 - \sqrt{3}$
$\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$	$\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$
$\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$	$\tan(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$
$\sin(\frac{5\pi}{12}) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$\cos(\frac{5\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\tan(\frac{5\pi}{12}) = 2 + \sqrt{3}$
$\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$	$\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$	$\tan(\frac{\pi}{2}) = \infty$
$\sin(\frac{7\pi}{12}) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$\cos(\frac{7\pi}{12}) = -\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\tan(\frac{7\pi}{12}) = -2 - \sqrt{3}$
$\sin(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$	$\tan(\frac{2\pi}{3}) = -\sqrt{3}$
$\sin(\frac{3\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cos(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\tan(\frac{3\pi}{4}) = -1$
$\sin(\frac{5\pi}{6}) = \frac{1}{2}$	$\cos(\frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan(\frac{5\pi}{6}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\sin(\frac{11\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\cos(\frac{11\pi}{12}) = -\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$\tan(\frac{11\pi}{12}) = \sqrt{3} - 2$
$\sin(\pi) = 0$	$\cos(\pi) = -1$	$\tan(\pi) = 0$
$\sin(\frac{13\pi}{12}) = -\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\cos(\frac{13\pi}{12}) = -\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$\tan(\frac{13\pi}{12}) = 2 - \sqrt{3}$
$\sin(\frac{7\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$	$\cos(\frac{7\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan(\frac{7\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$\sin(\frac{5\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cos(\frac{5\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\tan(\frac{5\pi}{4}) = 1$
$\sin(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$	$\tan(\frac{4\pi}{3}) = \sqrt{3}$
$\sin(\frac{17\pi}{12}) = -\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$\cos(\frac{17\pi}{12}) = -\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\tan(\frac{17\pi}{12}) = 2 + \sqrt{3}$
$\sin(\frac{3\pi}{2}) = -1$	$\cos(\frac{3\pi}{2}) = 0$	$\tan(\frac{3\pi}{2}) = \infty$
$\sin(\frac{19\pi}{12}) = -\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$\cos(\frac{19\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\tan(\frac{19\pi}{12}) = -2 - \sqrt{3}$
$\sin(\frac{5\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos(\frac{5\pi}{3}) = \frac{1}{2}$	$\tan(\frac{5\pi}{3}) = -\sqrt{3}$
$\sin(\frac{7\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cos(\frac{7\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\tan(\frac{7\pi}{4}) = -1$
$\sin(\frac{11\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$	$\cos(\frac{11\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan(\frac{11\pi}{6}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\sin(\frac{23\pi}{12}) = -\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\cos(\frac{23\pi}{12}) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$\tan(\frac{23\pi}{12}) = \sqrt{3} - 2$
$\sin(2\pi) = 0$	$\cos(2\pi) = 1$	$\tan(2\pi) = 0$

Hyperbolische Funktionen

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Dies gibt die folgenden Zusammenhänge:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

$$\cosh(x) + \sinh(x) = e^x$$

$$\cosh(x) - \sinh(x) = e^{-x}$$

Sowie die Reihendarstellungen:

$$\sinh(z) = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cosh(z) = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

5. Ableitung

Häufungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ ist ein Häufungspunkt der Menge D falls $\forall \delta > 0$: $(]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus x_0) \cap D \neq \emptyset$

Beispiel (Häufungspunkt) Sei $D = 0 \cup]1, 2[$, dann ist die Menge der Häufungspunkte von D, $D' = [1, 2]$.

Ableitung Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ und x_0 ein Häufungspunkt von D. f ist in x_0 differenzierbar, falls der Grenzwert

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Ist dies der Fall, wird der Grenzwert mit $f'(x_0)$ bezeichnet.
Alternativ nutzt man auch $x = x_0 + h$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Weierstrass (Äquivalente Definitionen) Sei $f : D \to \mathbb{R}$, x_0 ein Häufungspunkt von D, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist in x_0 differenzierbar.
2. Es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ und $r : D \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$ mit:
   (a) $f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$
   (b) $r(x_0) = 0$ mit r stetig in x_0
   Falls dies zutrifft ist $c = f'(x_0)$ eindeutig bestimmt.

Wir können die zweite Aussage leicht abändern:
$f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann in x_0 differenzierbar, falls es eine Funktion $\phi : D \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$ gibt die stetig in x_0 ist und so dass

$$f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x - x_0) \quad \forall x \in D$$

: Dann gilt $\phi(x_0) = f'(x_0)$. Dies folgt direkt aus (2) indem man $\phi(x) := f'(x_0) + r(x)$ setzt.

(Beispiel) Per Definition Ableiten

- $f(x) = x^2$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = x + x_0$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{(x\to x_0)} x + x_0 = 2x_0$$

- $f(x)=\exp(x)$: $\frac{\exp(x_0+h)-\exp(x_0)}{h} = \frac{\exp(x_0)\exp(h)-\exp(x_0)}{h} = \exp(x_0)\frac{\exp(h)-1}{h}$

  Nun schätzen wir $\frac{\exp(h)-1}{h}$ ab: Es gilt $\exp(h) = 1+h+\frac{h^2}{2!}+\frac{h^3}{3!}$, somit gilt $\frac{\exp(h)-1}{h} = 1+\frac{h}{2!}+\frac{h^2}{3!}$ Somit gilt dann $\lim_{h\to 0}\frac{\exp(h)-1}{h} = 1$. Dies impliziert: $\exp'(x_0) = \ldots = \exp(x_0)\lim_{h\to 0}\frac{\exp(h)-1}{h} = \exp(x_0)\cdot 1$

- $\sin(x)$: Nutze $\sin(x_0+h) = \sin(x_0)\cos(h)+\cos(x_0)\sin(h)$ sowie Entwicklung vom $\cos$

Satz von Rolle Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig auf (a,b) differenzierbar. Falls $f(a)=f(b)$, dann gibt es $\xi\in[a,b]$ mit $f'(\xi)=0$

Beweis (Satz von Rolle) Aus dem Min-Max Satz folgt $\exists u,v\in[a,b]$ mit $f(u)\le f(x)\le f(v)\ \forall x\in[a,b]$. Falls einer der beiden in (a,b) liegt nennen wir es ξ. Sonst gilt $f(a)=f(b)$ und dann $\xi=a$.

Satz von Lagrange Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig mit (a,b) differenzierbar. Dann gibt es $\xi\in(a,b)$ mit
$$f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a)$$

Dieser Satz ist auch bekannt als Mittelwertsatz. Die Aussage ist äquivalent zu:
$$\exists x\in(a,b):\quad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Beispiele (Lagrange)

- *Zeige* $|\sin(a)-\sin(b)|\le|b-a|$: Es folgt direkt dass $\exists c$: $\frac{\sin(b)-\sin(a)}{b-a} = \cos(c)$. Es folgt: $\cos(c)(b-a) = \sin(b)-\sin(a)$. Da aber $\cos(c)\le 1$ folgt: $|b-a|\ge|\sin(b)-\sin(a)|$.

- *Beweise: falls $f'(x)=0\ \forall x$, dann ist $f(x)$ auf $[a,b]$ konstant:* Aus Lagrange folgt dass für $x_1,x_2\in(a,b)$ beliebig: $0=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ dies impliziert $f(x_1)=f(x_2)\ \forall x_1,x_2\in(a,b)$.

Ableitung der Umkehrfunktion Sei $f:D\to E$ eine bijektive Funktion, $x_0\in D$ ein Häufungspunkt. Sei f in x_0 differenzierbar und $f'(x_0)\neq 0$, dann ist y_0 ein Häufungspunkt von E, $f^{-1}(y_0)$ differenzierbar und es gilt
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Beispiel (Ableitung der Umkehrfunktion) Sei $f^{-1}(y)=\ln(y)$. Dann gilt $f(x)=e^x$, es folgt $f'(x)=e^x$ woraus $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ sowie $(f^{-1})'(y)=\frac{1}{y}$ folgt.

Satz von Cauchy Ein technischer Satz der für den Beweis von l'Hopital sowie Taylorapprox. gebraucht wird. Mit $g(x)=x$ hat man den Satz von Lagrange.
Seien $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und in (a,b) differenzierbar. Dann gibt es $\xi\in(a,b)$ mit:
$$g'(\xi)(f(b)-f(a)) = f'(\xi)(g(b)-g(a))$$

Falls zudem $g'(x)\neq 0\ \forall x\in(a,b)$ folgt:
$$g(a)\neq g(b)$$

sowie:
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Konvexität

Konvex $f: I\to\mathbb{R}$ ist konvex (auf I) falls für alle $x\le y$ $x,y\in I$ und $\lambda\in[0,1]$
$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

Zudem gilt für $x_0<x<x_1$ in I:
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$$

Man beweist dies indem man $x=(1-\lambda)x_0+\lambda x_1$ wählt und somit $\lambda=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$

Taylorapproximation

Taylorapproximation Sei $f\in C^m([a,b])$ auf (a,b) $m+1$ mal differenzierbar. Dann exisitert $\epsilon\in(a,b)$ mit
$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\ldots+\frac{1}{m!}f^{(m)}(a)(x-a)^m + \frac{1}{(m+1)!}f^{(m+1)}(\xi)(x-a)^{m+1}$$

Beziehungsweise:
Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und in (a,b) (n+1) mal differenzierbar. Für jedes $a<x\le b$ gibt es $\xi\in(a,x)$ mit
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Oder Alternativ $|R_N f(x;a)|\le\sup_{a<\xi<x}|f^{(n+1)}(\xi)|\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$

Beispiel (Taylorapproximation)

- *Finde $P_3^0(x)$ von $f(x)=\sin(x)e^x$* Wir berechnen zuerst die Ableitungen:
$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x)e^x & f(0)&=0\\ f'(x) &= e^x(\sin(x)+\cos(x)) & f'(0)&=1\\ f''(x) &= 2e^x\cos(x) & f''(0)&=2\\ f'''(x) &= 2e^x(\cos(x)-\sin(x)) & f'''(0)&=2\\ f''''(x) &= -4e^x\sin(x) \end{aligned}$$
Dies gibt uns:
$$\begin{aligned} P_3^0(x) &= f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{f''(x)}{2!}x^2+\frac{f'''(x)}{3!}x^3\\ &= 0+1\cdot x+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot x^2+2\frac{1}{3!}x^3\\ &= x+x^2+\frac{x^3}{3} \end{aligned}$$
Nun wollen wir den Fehler abschätzen auf $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$:
$$\begin{aligned} |R_3^0(x)| &= \left|\frac{-4e^c\sin(c)}{4!}x^4\right|\\ &= \frac{e^c|\sin(c)|}{3!}x^4\le\frac{e^c}{3!}x^4 \end{aligned}$$
Da nun $c\in(0,x)$ und $x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ folgt: $\frac{e^c}{3!}x^4\le\frac{e^{1/2}}{6}x^4$

- **Taylorreihe von $\frac{x^2}{2+x}$** Wir wissen dass $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ ist. Somit folgt:
$$\begin{aligned} \frac{x^2}{2+x} &= x^2\frac{1}{2+x} = \frac{x^2}{2}\frac{1}{1-(-\frac{x}{2})}\\ &= \frac{x^2}{2}\left(1-\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2+\ldots\right)\\ &= \frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{8}+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+2}}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

Wichtige Taylorapproximationen um $x=0$

- $\boxed{\frac{1}{1-x}}$ Für alle $x\in(1,0)$ gilt:
$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

- $\boxed{e^x}$ Für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt:
$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

- $\boxed{\cos(x)}$ Für alle $x\in R$ gilt:
$$\cos(x) = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

- $\boxed{\sin(x)}$ Für alle $x \in R$ gilt:
$$\begin{aligned}\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{(n-1)}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\end{aligned}$$
- $\boxed{\ln(1+x)}$ Für alle $x \in (-1,1]$ gilt:
$$\begin{aligned}\ln(x+1) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{(n+1)}\frac{x^n}{n}\end{aligned}$$
- $\boxed{\arctan(x)}$ Für alle $x \in [-1,1]$ gilt:
$$\begin{aligned}\arctan(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\end{aligned}$$
- $\boxed{(1+x)^\alpha}$ Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:
$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k} x^k\end{aligned}$$

Integration (Theorie)

Partition Eine Partition von $I = [a,b]$ ist eine endliche Teilmenge $P \subsetneq [a,b]$ mit $\{a,b\} \subseteq P$. Insbesondere gilt: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.
Wir definieren $\delta = x_i - x_{i-1}$ als die Länge des Teilintervalls $[x_{i-1}, x_i]$

Obersumme & Untersumme
Untersumme: wobei $f_i = \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i}$
$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f_i \delta_i$$
Obersumme: wobei $F_i = \sup_{x_{i-1} \le x \le x_i}$
$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} F_i \delta_i$$
Zudem definieren wir:
$$s(f) = \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} s(f,P)$$
$$S(f) = \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} S(f,P)$$

Riemann Integrierbarkeit Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann integrierbar falls $s(f) = S(f)$. In diesem fall bezeichnen wir den gemeinsamen Wert von $s(f)$ und $S(f)$ mit
$$\int_a^b f(x)dx$$
Dazu gibt es Satz 5.4: Eine beschränkte Funktion ist genau dann Riemann integrierbar, falls
$$\forall \epsilon > 0 \, \exists P \in \mathcal{P}(I) \text{ mit } S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$$
Beweis: Angenommen $\forall \epsilon > 0 \, \exists P_1, P_2$ mit $S(f,P_2) - S(f,P_1) < \epsilon$. Für $P = P_1 \cup P_2$ folgt: $S(f,P_2) \ge S(f,P) \ge s(f,P) \ge s(f,P_1)$ woraus $S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$ folgt. Die Umkehrung ist klar.

Gleichmässige Stetigkeit Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ ist auf D gleichmässig falls $\forall \epsilon \, \exists \delta \, \forall x,y \in D$:
$$|x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Stetig auf kompakten Intervall $\implies$ gleichmässig stetig / (Heine) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig in dem kompakten Intervall $[a,b]$. Dann ist f in $[a,b]$ gleichmässig stetig.

Beispiel (Gleichmässige Stetigkeit) Zeige $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ ist gleichmässig stetig: Wir benutzen dass $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \le \sqrt{x-y}$. Nun setzen wir $\sqrt{x-y} < \epsilon$, so folgt dass wenn $|x-y| < \epsilon^2 =: \delta$, dass $f(x)$ gleichmässig stetig ist.

Integrierbarkeit
- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist f integrierbar.
Beweis: f beschränkt nach MinMax Satz. Wenn $\delta(P) < \delta$, dann gilt wegen der Stetigkeit $F_i - f_i \le \epsilon$. Nun via def: $S(f,P) - s(f,P) = \ldots \le (b-a)\epsilon$
- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton, dann ist f integrierbar.
Beiweis: Sei f monoton steigend mit $f(a) \le f(x) \le f(b)$ und insbesondere sei f beschränkt. Sei $0 \le (f(b) - f(a))\frac{b-a}{n} < \epsilon$. Partition mit $x_i = a + \frac{b-a}{n} \cdot i$. Bemerke es gilt $F_i = f_{i+1}$. Somit: $S(f,P) - s(f,P) = \sum_{i=1}^{n}((F_i - f_i)\frac{b-a}{n}) = (f(b) - f(a))(\frac{b-a}{n}) < \epsilon$.

Ungleichungen und Mittelwertsatz

Ungleichungen Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $f(x) \le g(x) \, \forall x \in [a,b]$ so gilt $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.
Beweis Wir zeigen äquivalent dazu $\int_a^b g(x) - f(x)dx \ge 0$. Für jede Partition gilt sicherlich $S(g-f,P) \ge s(g-f,P) \ge 0$, somit folgt $\int_a^b g(x) - f(x)dx \ge 0$

Korollar (Absolutbetrag) Für $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, integrierbar gilt $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.
Beweis: Sicherlich gilt $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$, nun wenden wir den obigen Satz darauf an.

Cauchy, Schwarz, Bunjakovsky Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar. Dann gilt:
$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$$

Mittelwertsatz (Cauchy) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es $\xi \in [a,b]$ mit:
$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

Zweiter MWS (Cauchy) Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ wobei f stetig und g beschränkt integrierbar mit $g(x) \ge 0 \, \forall x \in [a,b]$. Dann gibt es $\xi \in [a,b]$ mit
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

Fundamentalsatz

Stammfunktion Die Funktion $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ist in $[a,b]$ stetig und differenzierbar mit $F' = f$ wenn $a < b$ und $f : [a,b] \to R$ stetig ist.
Beweis: Aus additivität folgt: $\int_a^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^x f(t)dt = \int_a^x f(t)dt$. Also $F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)dt$. Per Mittelwertsatz sehen wir nun, dass es ein $\xi \in [x, x_0]$ gibt mit $\int_{x_0}^x f(t)dt = f(\xi)(x - x_0)$. Für $x \ne x_0$ folgt somit $\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(\xi)$. Wegen der Stetigkeit von f folgt: $\lim_{(x \to x_0)} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$. $\square$

Fundamentalsatz der Differentialrechnung Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es eine Stammfunktion F von f, die bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist und es gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Beweis: Existenz folgt aus Stammfunktionssatz. Seien F_1, F_2 Stammfkt., dann gilt $F_1' - F_2' = 0$. Somit ist $F_1 - F_2 = C$ mit $F(x) = C + \int_a^x f(t)dt$. Es folgt auch $F(a) = \int_a^a f(t)dt + C$ und somit $F(a) = C$. Es folgt daraus $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$ □

Integrale Ausrechnen

Integrationskonstante C nicht vergessen!

Elementare Integrale

Siehe Tabelle

Direkte Integrale

Diese sind vom Typ $\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x))$.

Partielle Integration

Partielle Integration

$$\int f' \cdot g \, dx = f \cdot g - \int f \cdot g' \, dx$$

Beispiele:

Integrale rationaler Funktionen

Partielle Integration

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$$

Wenn nun $\deg(p) \geq \deg(q)$ dann machen wir eine Polynomdivision $p : q$, sonst mache eine Parzialbruchzerlegung

Substitutionsregel

Substitutionsregel Ist f stetig und g erfüllt:

$$y = g(x) \iff x = g^{-1}(y)$$

Dann gilt:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$$

Als Merksatz gilt $dy = g'(x)dx$ respektive $dx = \frac{1}{t}dt$

Integrale der Form $\int F(e^x, \sinh(x), \cosh(x))dx$

Substituiere mit $e^x = t$, ($dx = \frac{1}{t}dt$)

Beispiel:

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x + 1}dx = \int \frac{t^2}{t+1}\frac{1}{t}dt = \int \frac{t+1-1}{t+1}dt$$

$$\int \frac{1}{\cosh(x)}dx = \int \frac{1}{\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})}dx = \int \frac{2}{t + \frac{1}{t}}\frac{1}{t}dt = \frac{2}{t^2+1}dt$$

Integrale der Form $\int F(\log(x))dx$

Substituiere mit $\log(x) = t$, ($dx = e^t dt$)

Beispiel:

$$\int (\log(x))^2 dx = \int t^2 e^t dt = t^2 e^t - \int 2te^t dt$$
$$= x(\log(x))^2 - 2x\log(x) + 2x + C$$

Integrale der Form $\int F(\sqrt[\alpha]{Ax+B})dx$

Substituiere mit $t = \sqrt[\alpha]{Ax+B}$

Beispiel:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \int \frac{1}{t\sqrt{1-t^2}}2tdt = \int \frac{2}{\sqrt{1-t^2}}$$

Integrale die $\sin, \cos, \tan$ in geraden Potenzen enthalten

Substituiere mit $\tan(x) = t$, ($dx = \frac{1}{1+t^2}dt$). Es gilt zudem:

$$\sin^2(x) = \frac{t^2}{1+t^2} \qquad \cos^2(x) = \frac{1}{1+t^2}$$

Beispiel:

$$\int \frac{1}{\sin^2(x)+1}dx = \int \frac{1}{\frac{t^2}{1+t^2}+1}\frac{1}{t^2+1}dt = \int \frac{1}{1+2t^2}dt$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{2}}{1+(\sqrt{2}t)^2}dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}t)$$

Integrale die $\sin, \cos, \tan$ in ungeraden Potenzen enthalten

Substituiere mit $\tan(\frac{x}{2}) = t$, ($dx = \frac{2}{1+t^2}dt$). Es gilt zudem:

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Beispiel:

$$\int \frac{1}{\cos(x)}dx = \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{2}{1-t^2}dt$$

Quadratisch Ergänzen

Quadratisch ergänzen Für den Ausdruck $\sqrt{ax^2+bx+x}$ definieren wie $\beta = -\frac{b}{2a}$. Es gibt nun zwei Optionen (mit dem Ziel $x = \alpha u + \beta$):

- Falls $b^2 - 4ac > 0$. So setze $\alpha = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Dies gibt uns dann:
$$ax^2 + bx + c = \left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right)\left(u^2 - 1\right)$$
- Falls $b^2 - 4ac < 0$. So setze $\alpha = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$. Dies gibt uns dann:
$$ax^2 + bx + c = \left(\frac{4ac-b^2}{4a}\right)\left(u^2 + 1\right)$$

Falls dies in einem Integral ist kann man nun mit $u = \sinh(t)$, $du = \cosh(t)dt$ ersetzen.

Ekelhafte Zahlen

- $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx$ lösen wir mit $x = a \cdot u$, $dx = a\, du$, dies gibt uns:
$$\int \frac{1}{a^2+x^2} = \int \frac{1}{a^2(1+u^2)}a\, du = \frac{1}{a}\arctan(u) = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$$
- $\int \sqrt{r^2-x^2}dx$ lösen wir mit $x = r\sin\phi$, $dx = r\cos\phi\, d\phi$:
$$\int \sqrt{r^2-x^2}dx = \int \sqrt{r^2(1-\sin^2\phi)}r\cos\phi\, d\phi = r^2 \int \cos^2(\phi)\, d\phi$$

Wir können nun die Winkelverdopplungsregel anwenden.

Integrale mit $\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ im Nenner

Mithilfe quadratischer Ergänzung auf einen der folgenden Fälle zurückführen:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \operatorname{arcsin}(x) + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \operatorname{arcosh}(x) + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \operatorname{arcsinh}(x) + C$$

Integrale mit $\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ im Zähler

Mithilfe quadratischer Ergänzung auf einen der folgenden Fälle zurückführen, dann substituieren

$$\int \sqrt{1-x^2}dx \quad \text{subsitution: } x = \sin(t) \Leftarrow dx = \cos(t)dt$$
$$\int \sqrt{x^2-1}dx \quad \text{subsitution: } x = \cosh(t) \Leftarrow dx = \sinh(t)dt$$
$$\int \sqrt{1+x^2}dx \quad \text{subsitution: } x = \sinh(t) \Leftarrow dx = \cosh(t)dt$$

Rationale Funktionen (Partialbruchzerlegung)

Wenn wir $\frac{P(x)}{Q(x)}$ integrieren wollen und $\deg(P(x)) \geq \deg(Q(x))$, dann führen wir eine Polynomdivision durch:

$$\begin{array}{l} (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1) = x^2 - x - 6 \\ -(x^3 - x^2) \\ \quad -x^2 - 5x \\ \quad -(-x^2 + x) \\ \qquad -6x + 6 \\ \qquad -(-6x + 6) \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Andernfalls machen wir eine Partialbruchzerlegung:

$$\frac{t+2}{t^2(t^2+2)} = \frac{A}{t^2} + \frac{B}{t} + \frac{Ct+D}{t^2+2}$$

$$\frac{t}{t^3+t^2-t-1} = \frac{A}{(t+1)} + \frac{B}{(t+1)^2} + \frac{C}{t-1} \quad \text{first polyDiv}$$

$$\frac{t^4+1}{(t^2+1)^2} = 1 + \frac{-2t}{(t^2+1)^2} = 1 + \ldots + \frac{At+B}{t^2+1} + \frac{Ct+D}{(t^2+1)^2}$$

Uneigentliche Integrale

Es gibt zwei Arten von uneigentlichen Integralen, man interessiert sich dafür ob die Integrale konvergieren oder nicht. Für beide Arten braucht man die gleichen Techniken:

Typ 1: $f(x)$ auf $[a, \infty)$ stetig. Dann setzt man $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)dx$ falls der Grenzwert existiert.

Typ 2: $f(x)$ auf $(a, b]$ stetig. Dann setzt man $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$ falls der Grenzwert existiert.

Definition + direkte Berechung

Setze die Definition ein (replace ∞ with R) und berechne dann das Integral. Lasse nun R nach ∞ laufen.

Vergleichskriterium

Seien f, g auf dem Integrationsgebiet stetig mit $0 \leq f(x) \leq g(x)$ für alle x. Dann gilt:

1. Ist $\int_a^\infty g(x)dx$ konvergent, so auch $\int_a^\infty f(x)dx$
2. Ist $\int_a^\infty f(x)dx$ divergent, so auch $\int_a^\infty g(x)dx$

Oft braucht man $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ als Vergleichsmittel welches für $p > 1$ konvergiert, für $p \leq 1$ ist es divergent.

Beispiel (Vergleich)

- $\int_1^\infty \frac{1+e^x}{x}dx$, von unten durch $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ abschätzen, dann divergent.
- $\int_1^\infty \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) dx$, beachte dass wenn $x \geq 0$, $\sin(x) \leq x$ gilt. Somit haben wir Majorante $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ und konvergent.

Absolute Konvergenz

$$\int_a^\infty |f(x)|\, dx < \infty \implies \int_a^\infty f(x)dx < \infty$$

Das ist nützlich bei trigonometrischen Teilen.

Beispiel (Absolute Konvergenz)

- $\int_1^\infty \frac{\cos^2(x)}{x^2}dx$. Es gilt $\left|\frac{\cos^2(x)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$, somit konvergent.
- $\int_0^\infty x\sin(4x)e^{-2x}dx$. Es gilt $|x\sin(4x)e^{-2x}| \leq xe^{-2x}$ wenn $x \geq 0$, per partieller Integration konvergiert das zweite. Somit konvergent.

Mc. Laurin Konvergenzkriterium

Sei $f : [1, \infty) \to [0, \infty)$ monoton fallend.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konv.} \iff \int_1^\infty f(x)dx \text{ konv.}$$

Euler-Mc-Laurin Summation & Bernoullizahlen

Bernoulli Zahlen Rekursiv definiert als $\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} B_i = 0$. Die ersten Bernoulli Zahlen sind:

$$\frac{1}{1}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{0}{1}, \frac{-1}{30}, \frac{0}{1}, \frac{1}{42}, \frac{0}{1}, \frac{-1}{30}, \frac{0}{1}, \frac{5}{66}, \frac{0}{1}, \frac{-691}{2730}, \frac{0}{1}, \frac{7}{6}, \frac{0}{1}, \frac{-3617}{510}, \frac{0}{1}, \frac{43867}{798},$$
$$\frac{0}{1}, \frac{-174611}{330}, \frac{0}{1}, \frac{854513}{138}, \frac{0}{1}, \frac{-236364091}{2730}, \frac{0}{1}, \frac{8553103}{6}, \frac{0}{1}, \frac{-23749461029}{870}, \frac{0}{1}, \ldots$$

Satz 5.44. *Sei $f : [0, n] \longrightarrow \mathbb{R}$ k-mal stetig differenzierbar, $k \geq 1$. Dann gilt:*

1. *Für $k = 1$:*

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \int_0^n f(x)\, dx + \frac{1}{2}(f(n) - f(0)) + \int_0^n \widetilde{B}_1(x) f'(x)\, dx$$

2. *Für $k \geq 2$:*

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \int_0^n f(x)\, dx + \frac{1}{2}(f(n) - f(0)) + \sum_{j=2}^{k} \frac{(-1)^j B_j}{j!} \left(f^{(j-1)}(n) - f^{(j-1)}(0)\right) + \widetilde{R}_k$$

wobei

$$\widetilde{R}_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^n \widetilde{B}_k(x) f^{(k)}(x)\, dx.$$

Wobei die Bernoulli Polynome wie folgt definiert sind:

$$B_k(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} B_i x^{k-i}$$

bzw. $B_k(x) = k!P_k(x)$ mit $P_k' = P_{k-1}$ sowie $\int_0^1 P_k(x)dx = 0$.
Zudem gilt:

$$1^l + 2^l + \ldots + n^l = \frac{1}{l+1} \sum_{j=0}^{l} (-1)^j B_j \binom{l+1}{j} n^{l+1-j}$$

Gamma Funktion

Die Gamma Funktion ist definiert als $\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$.
Sie erfüllt:

- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)\ \forall s > 0$
- Γ ist logarithmisch konvex: $\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \Gamma(x)^\lambda \Gamma(y)^{1-\lambda}$

Wir zeigen nun die zweite Eigenschaft mittels partieller Integration:

$$\int_0^b x^n e^{-x} dx = -b^n e^{-b} + n \int_0^b x^{n-1} e^{-x}$$

Da $\lim_{b\to\infty} -b^n e^{-b} = 0$ folgt: $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}$

Sonstiges

Binomialsatz $\forall x, y \in \mathbb{C}, n \geq 1$ gilt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

ABC / Mitternachtsformel

Gegeben: $ax^2 + bx + c = 0$

Lösung: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Summenformeln

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Injektiv

$$\forall x_1, x_2 \in M : f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$
$$\text{or } x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

Surjektiv

$$\forall y \in N \exists x \in M : y = f(x)$$

Ableitungsregeln

Funktion	Ableitung	Bemerkung / Regel
x	1	
x^2	$2x$	
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$n \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-\frac{1}{x^2}$	
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	
e^x	e^x	
a^x	$\ln(a) \cdot a^x$	
$x^x = e^{x \log(x)}$	$x^x \cdot (\log(x) + 1)$	Kettenregel $e^{x \log(x)}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	
$x \ln(x) - x$	$\ln(x)$	
$\sin(x)$	$\cos(x)$	
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	
$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	
$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$	- $\frac{1}{\sin^2(x)}$	
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan : (-\infty, \infty) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$\operatorname{arccot}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arccot} : (-\infty, \infty) \to (0, \pi)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	
$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)}$	
$\operatorname{arsinh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\forall x \in R$
$\operatorname{arcos}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\forall x \in (1, \infty)$
$\operatorname{artanh}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\forall x \in (-1, 1)$
$g(x) \cdot h(x)$	$g(x) \cdot h'(x) + g'(x) \cdot h(x)$	Produktregel
$(g(x))^n$	$n \cdot (g(x))^{n-1} \cdot g'(x)$	Potenzregel
$\frac{g(x)}{h(x)}$	$\frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{(h(x))^2}$	Quotientenregel
$h(g(x))$	$h'(g(x)) \cdot g'(x)$	Kettenregel