Analysis 2

David Zollikofer

1. Einführung

Wichtige Ungleichungen

Bernoulli Ungleichung Wenn $x \in \mathbb{R}$ mit $x > -1$ sowie $n \in \mathbb{Z}$ mit $n > 0$, dann gilt:
$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Beweis: per Induktion

Cauchy Schwarz $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $|\langle x, y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||$.

Komplexe Zahlen $\varphi = \arg(z)$

$$\boxed{z = x + iy \qquad z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \qquad z = re^{i\varphi}}$$

$$\boxed{x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi \quad r = \sqrt{x^2+y^2} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)}$$

DIVISION: Es gilt $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{||z||^2}$ wenn $z \neq 0$

POLARFORM Wenn
$$z_1 = r_1(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1))$$
$$z_2 = r_2(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2))$$

dann gilt:
$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right)$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right)$$

Zudem folgt durch Induktion:
$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

Komplexe Nullstellen: Die n-te Wurzel von x berechnen wir (es gibt n davon):
$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\varphi_0}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$$
$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi_0}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi_0}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right)$$

Grenzwerte & Folgen

Wir sagen dass f an der Stelle a den Grenzwert $L \in \mathbb{R}$ hat, geschrieben $\lim_{x\to a} f(x) = L$ falls $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ sodass für alle $|x-a| < \delta$ gilt $|f(x) - L| < \epsilon$

Wurzeltrick
$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x} - x\right) \cdot \frac{-\sqrt{x^2+x} - x}{-\sqrt{x^2+x} - x}$$

Fundamentallimes Oft kann man einen dieser Limits verwenden:
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^n} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$$
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1 \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$$

Definition Konvergenz Folge a_n is konvergent, falls $\exists l \in \mathbb{R}$ so dass $\forall \epsilon > 0$ die Menge $\{n \in \mathbb{N}^+ : a_n \notin (l-\epsilon, l+\epsilon)\}$ endlich ist.
Äquivalent: $\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ so dass $\forall n \geq N$ gilt $|a_n - l| < \epsilon$.

Stetigkeit

Definition (Stetigkeit)

- Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ *ist in x_0 stetig*, falls $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$, so dass für alle x die Implikation
$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$
- Daraus leitet sich ab: Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$, f ist genau dann in x_0 stetig, falls für **jede** Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ in D die Implikation gilt:
$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$$

Zwischenwertsatz (Bolzano) Sei $I \in \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a, b \in I$. Dann gilt: Für alle c zwischen $f(a)$ und $f(b)$ exisitert ein z zwischen a und b so dass $f(z) = c$.

Kompaktheit Wir nennen ein Intervall $I \subseteq R$ kompakt, wenn es die Form $[a, b], a \leq b$ hat.

Exponentialfunktion & Sinus & Kosinus

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$
$$\sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots$$
$$\cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots$$

$$\begin{aligned}
\exp(iz) &= \cos(z) + i\sin(z)\\
\cos(z)^2 + \sin(z)^2 &= 1\\
\cos(z) &= \cos(-z)\\
\sin(-z) &= -\sin(z)\\
\sin(z) &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\\
\cos(z) &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\\
\sin(z+w) &= \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)\\
\cos(z+w) &= \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)\\
\sin(x) - \sin(y) &= 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\\
\cos(x) - \cos(y) &= -2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\\
\sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x)\\
\cos(2x) &= 1 - 2\sin^2(x)
\end{aligned}$$

Zudem: $\sin(\arccos(t)) = \sqrt{1-t^2}$ sowie $\cos(\arcsin(t)) = \sqrt{1-t^2}$

Einige Trigonometrische Ungleichungen

Zeige $\sin(x)$ **monton auf** $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ Es gilt bekanntlich $\sin(x) - \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq 0$ wenn $-\frac{\pi}{2} \leq y < x \leq \frac{\pi}{2}$ womit auch $\frac{x-y}{2} \in (0, \frac{\pi}{2}]$ und $\frac{x+y}{2} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Zeige $\sin(x) < x$ **für** $x \geq 0$ Wenn $x = 0$ dann folgt sofort $\sin(0) = 0$. Für $x \geq 1$ folgt auch $\sin(x) \leq 1 \leq x$. Es bleibt $x \in (0, 1)$. Per Mittelwertsatz gibt es nun ein $c \in (0, x)$ für welches $\cos(c) = \frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0}$. Daraus folgt $\frac{\sin(x)}{x} \leq 1$ was $\sin(x) \leq x$ impliziert.

Wertetabelle

Value φ	$\sin(\varphi)$	$\cos(\varphi)$	$\tan(\varphi)$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$2-\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$2+\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞
$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$-2-\sqrt{3}$
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$-\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$\sqrt{3}-2$
π	0	-1	0
$\frac{13\pi}{12}$	$-\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$-\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$2-\sqrt{3}$
$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{17\pi}{12}$	$-\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	- $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$2+\sqrt{3}$
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	∞
$\frac{19\pi}{12}$	$-\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$-2-\sqrt{3}$
$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1
$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{23\pi}{12}$	$-\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$\sqrt{3}-2$
2π	0	1	0

Hyperbolische Funktionen

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Dies gibt die folgenden Zusammenhänge:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$
$$\cosh(x) + \sinh(x) = e^x$$
$$\cosh(x) - \sinh(x) = e^{-x}$$

Sowie die Reihendarstellungen:

$$\sinh(z) = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\cosh(z) = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Zudem gilt für $x \in (-1,1)$: $\operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

2. Ableitung

Ableitung Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ und x_0 ein Häufungspunkt von D. f ist in x_0 differenzierbar, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Ist dies der Fall, wird der Grenzwert mit $f'(x_0)$ bezeichnet.
Alternativ nutzt man auch $x = x_0 + h$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Weierstrass (Äquivalente Definitionen) Sei $f : D \to \mathbb{R}$, x_0 ein Häufungspunkt von D, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist in x_0 differenzierbar.
2. Es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ und $r : D \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$ mit:
   (a) $f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$
   (b) $r(x_0) = 0$ mit r stetig in x_0
   Falls dies zutrifft ist $c = f'(x_0)$ eindeutig bestimmt.

(Beispiel) Per Definition Ableiten

- $f(x) = x^2$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = x + x_0$$
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{(x \to x_0)} x + x_0 = 2x_0$$

Satz von Rolle Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf (a,b) differenzierbar. Falls $f(a) = f(b)$, dann gibt es $\xi \in [a,b]$ mit $f'(\xi) = 0$

Beweis (Satz von Rolle) Aus dem Min-Max Satz folgt $\exists u, v \in [a,b]$ mit $f(u) \leq f(x) \leq f(v)\ \forall x \in [a,b]$. Falls einer der beiden in (a,b) liegt nennen wir es ξ. Sonst gilt $f(a) = f(b)$ und dann $\xi = a$.

Satz von Lagrange / Mittelwertsatz Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit (a,b) differenzierbar. Dann gibt es $\xi \in (a,b)$ mit

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

Dieser Satz ist auch bekannt als Mittelwertsatz. Die Aussage ist äquivalent zu:

$$\exists x \in (a,b): \quad f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Beispiele (Lagrange)

- *Zeige* $|\sin(a) - \sin(b)| \leq |b - a|$: Es folgt direkt dass $\exists c$: $\frac{\sin(b) - \sin(a)}{b - a} = \cos(c)$. Es folgt: $\cos(c)(b - a) = \sin(b) - \sin(a)$. Da aber $\cos(c) \leq 1$ folgt: $|b - a| \geq |\sin(b) - \sin(a)|$.
- *Beweise: falls $f'(x) = 0\ \forall x$, dann ist $f(x)$ auf $[a,b]$ konstant:* Aus Lagrange folgt dass für $x_1, x_2 \in (a,b)$ beliebig: $0 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ dies impliziert $f(x_1) = f(x_2)\ \forall x_1, x_2 \in (a,b)$.

Konvexität

Konvex $f : I \to \mathbb{R}$ ist konvex (auf I) falls für alle $x \leq y$ $x, y \in I$ und $\lambda \in [0,1]$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$$

Zudem gilt für $x_0 < x < x_1$ in I:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

Man beweist dies indem man $x = (1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1$ wählt und somit $\lambda = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$

Taylorapproximation

Taylorapproximation Sei $f \in C^m([a,b])$ auf (a,b) $m+1$ mal differenzierbar. Dann exisitert $\xi \in (a,b)$ mit

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \ldots + \frac{1}{m!} f^{(m)}(a)(x - a)^m + \frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\xi)(x - a)^{m+1}$$

Beziehungsweise:
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a,b) (n+1) mal differenzierbar. Für jedes $a < x \leq b$ gibt es $\xi \in (a,x)$ mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$$

Oder Alternativ $|R_N f(x;a)| \leq \sup_{a < \xi < x} |f^{(n+1)}(\xi)| \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$

Wichtige Taylorapproximationen um $x = 0$

- $\boxed{\frac{1}{1-x}}$ Für alle $x \in (1,0)$ gilt:
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$
- $\boxed{e^x}$ Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$
- $\boxed{\cos(x)}$ Für alle $x \in R$ gilt:
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
- $\boxed{\sin(x)}$ Für alle $x \in R$ gilt:
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n-1)} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$
- $\boxed{\ln(1+x)}$ Für alle $x \in (-1, 1]$ gilt:
$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n+1)} \frac{x^n}{n}$$
- $\boxed{\arctan(x)}$ Für alle $x \in [-1, 1]$ gilt:
$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$
- $\boxed{(1+x)^\alpha}$ Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$
- $\boxed{\sinh(x)}$ Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:
$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^7) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{1+2k}}{(1+2k)!}$$
- $\boxed{\cosh(x)}$ Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:
$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + \mathcal{O}(x^7) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Fundamentalsatz

Stammfunktion Die Funktion $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ist in $[a,b]$ stetig und differenzierbar mit $F' = f$ wenn $a < b$ und $f : [a,b] \to R$ stetig ist.
Beweis: Aus additivität folgt: $\int_a^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^x f(t)dt = \int_a^x f(t)dt$. Also $F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)dt$. Per Mittelwertsatz sehen wir nun, dass es ein $\xi \in [x, x_0]$ gibt mit $\int_{x_0}^x f(t)dt = f(\xi)(x - x_0)$. Für $x \neq x_0$ folgt somit $\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(\xi)$. Wegen der Stetigkeit von f folgt: $\lim_{(x\to x_0)} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$. □

Fundamentalsatz der Differentialrechnung Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es eine Stammfunktion F von f, die bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist und es gilt:
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$
Beweis: Existenz folgt aus Stammfunktionssatz. Seien F_1, F_2 Stammfkt., dann gilt $F_1' - F_2' = 0$. Somit ist $F_1 - F_2 = C$ mit $F(x) = C + \int_a^x f(t)dt$. Es folgt auch $F(a) = \int_a^a f(t)dt + C$ und somit $F(a) = C$. Es folgt daraus $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$ □

Ableitung des Integrals

Mit der Kettenregel folgt aus dem Fundamentalsatz:
$$\frac{d}{dx}\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt\right) = f(v)\frac{dv}{dx} - f(u)\frac{du}{dx}$$

Integrale Ausrechnen

Integrationskonstante C nicht vergessen!

Direkte Integrale

Diese sind vom Typ $\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x))$.

Partielle Integration

Partielle Integration
$$\int f' \cdot g \, dx = f \cdot g - \int f \cdot g' \, dx$$

Integrale rationaler Funktionen

Partielle Integration
$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$$
Wenn nun $\deg(p) \geq \deg(q)$ dann machen wir eine Polynomdivision $p : q$, sonst mache eine Parzialbruchzerlegung

Substitutionsregel

Substitutionsregel Ist f stetig und g erfüllt:
$$y = g(x) \iff x = g^{-1}(y)$$
Dann gilt:
$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$$
Als Merksatz gilt $dy = g'(x)dx$ respektive $dx = \frac{1}{t}dt$

Integrale der Form $\int F(e^x, \sinh(x), \cosh(x))dx$

Substituiere mit $e^x = t$, $(dx = \frac{1}{t}dt)$
Beispiel:
$$\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx = \int \frac{t^2}{t+1}\frac{1}{t}dt = \int \frac{t+1-1}{t+1}dt$$
$$\int \frac{1}{\cosh(x)}dx = \int \frac{1}{\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})}dx = \int \frac{2}{t+\frac{1}{t}}\frac{1}{t}dt = \frac{2}{t^2+1}dt$$

Integrale der Form $\int F(\log(x))dx$

Substituiere mit $\log(x) = t$, $(dx = e^t dt)$
Beispiel:
$$\int (\log(x))^2 dx = \int t^2 e^t dt = t^2 e^t - \int 2te^t dt = x(\log(x))^2 - 2x\log(x) + 2x + C$$

Integrale der Form $\int F(\sqrt[\alpha]{Ax+B})dx$

Substituiere mit $t = \sqrt[\alpha]{Ax+B}$
Beispiel:
$$\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \int \frac{1}{t\sqrt{1-t^2}}2tdt = \int \frac{2}{\sqrt{1-t^2}}$$

Integrale die $\sin, \cos, \tan$ **in geraden Potenzen enthalten**

Substituiere mit $\tan(x) = t$, $(dx = \frac{1}{1+t^2}dt)$. Es gilt zudem:
$$\sin^2(x) = \frac{t^2}{1+t^2} \qquad \cos^2(x) = \frac{1}{1+t^2}$$

Integrale die $\sin, \cos, \tan$ **in ungeraden Potenzen enthalten**

Substituiere mit $\tan(\frac{x}{2}) = t$, ($dx = \frac{2}{1+t^2}dt$). Es gilt zudem:

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Integrale mit $\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ **im Nenner**

Mithilfe quadratischer Ergänzung auf einen der folgenden Fälle zurückführen:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(x) + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \operatorname{arcosh}(x) + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \operatorname{arcsinh}(x) + C$$

Integrale mit $\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ **im Zähler**

Mithilfe quadratischer Ergänzung auf einen der folgenden Fälle zurückführen, dann substituieren

$$\int \sqrt{1-x^2}dx \quad \text{subsitution: } x = \sin(t) \Leftarrow dx = \cos(t)dt$$
$$\int \sqrt{x^2-1}dx \quad \text{subsitution: } x = \cosh(t) \Leftarrow dx = \sinh(t)dt$$
$$\int \sqrt{1+x^2}dx \quad \text{subsitution: } x = \sinh(t) \Leftarrow dx = \cosh(t)dt$$

Rationale Funktionen (Partialbruchzerlegung)

Wenn wir $\frac{P(x)}{Q(x)}$ integrieren wollen und $\deg(P(x)) \geq \deg(Q(x))$, dann führen wir eine Polynomdivision durch:

$$\begin{aligned}
&(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x-1) = x^2 - x - 6\\
&\underline{-(x^3 - x^2)}\\
&\quad -x^2 - 5x\\
&\quad \underline{-(-x^2 + x)}\\
&\qquad -6x + 6\\
&\qquad \underline{-(-6x + 6)}\\
&\qquad\qquad 0
\end{aligned}$$

Andernfalls machen wir eine Partialbruchzerlegung:

$$\frac{t+2}{t^2(t^2+2)} = \frac{A}{t^2} + \frac{B}{t} + \frac{Ct+D}{t^2+2}$$
$$\frac{t}{t^3+t^2-t-1} = \frac{A}{(t+1)} + \frac{B}{(t+1)^2} + \frac{C}{t-1} \quad \text{first polyDiv}$$
$$\frac{t^4+1}{(t^2+1)^2} = 1 + \frac{-2t}{(t^2+1)^2} = 1 + \ldots + \frac{At+B}{t^2+1} + \frac{Ct+D}{(t^2+1)^2}$$

Funktion	Ableitung	Bemerkung / Regel
x	1	
x^2	$2x$	
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$n \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-\frac{1}{x^2}$	
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	
$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$\frac{x^{\frac{1}{n}-1}}{n}$	$\int x^{1/n}dx = \frac{nx^{1/n+1}}{n+1} + C$
e^x	e^x	
a^x	$\ln(a) \cdot a^x$	
$x^x = e^{x\log(x)}$	$x^x \cdot (\log(x) + 1)$	Kettenregel $e^{x\log(x)}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	
$x\ln(x) - x$	$\ln(x)$	
$\sin(x)$	$\cos(x)$	
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	
$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$ $1 + \tan^2(x)$	$=$
$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$	
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan : (-\infty,\infty) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$\operatorname{arccot}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arccot} : (-\infty,\infty) \to (0,\pi)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	
$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)}$	
$\operatorname{arsinh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\forall x \in R$
$\operatorname{arcosh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\forall x \in (1,\infty)$
$\operatorname{artanh}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\forall x \in (-1,1)$
$g(x) \cdot h(x)$	$g(x) \cdot h'(x) + g'(x) \cdot h(x)$	Produktregel
$(g(x))^n$	$n \cdot (g(x))^{n-1} \cdot g'(x)$	Potenzregel
$\frac{g(x)}{h(x)}$	$\frac{g'(x)\cdot h(x) - g(x)\cdot h'(x)}{(h(x))^2}$	Quotientenregel
$h(g(x))$	$h'(g(x)) \cdot g'(x)$	Kettenregel

Differentialgleichungen

Differenzialgleichungen erster Ordnung

Trennung der Variablen Wenn wir eine ODE der Form $y' = h(x)g(y) + b(x)$ haben so lösen wir das homogene Problem $y' = h(x)g(y)$ mittels Trennung der Variablen.
Sei nun somit $y' = \frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y)$ so schreiben wir es als

$$\frac{dy}{g(y)} = h(x)dx$$
$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x)dx$$

um, was wir dann nach y auflösen können.

Variation der Konstanten (1te Ord.) Wenn wir eine ODE der Form $y' = h(x)y + b(x)$ haben, so gilt dass $y(x) = y_{hom} + y_{part}$

- **Schritt 1:** Löse homogenes Problem mittels Trennung der Variablen
- **Schritt 2:** Die Integrationskonstante C aus Schritt 1 fassen wir als eine von x abhängige Funktion $C(x)$ auf.
- **Schritt 3:** Die enstandene Funktion $y_p(x)$, die homogene Lösung mit $C(x)$ anstatt C setzte als Ansatz in die Differentialgleichung ein und löse nach $C(x)$ ein. Dies gibt die partikuläre Lösung.
- **Schritt 4:** Setzte $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.

Beispiel $(\sin(x))y' = (\cos(x))y = e^x$. Zuerst homogen:

$$(\sin(x))y' = (\cos(x))y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)}y. \text{ check nicht } f = 0$$
$$\frac{dy}{y} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}dx \Rightarrow \log|y| = -\log|\sin(x)| + C$$
$$y_{hom} = \frac{C}{\sin(x)}$$

Nun partikul. $y_p = \frac{C(x)}{\sin(x)}$

$$\sin(x)\left(\frac{C'}{\sin(x)} - \frac{C\cos(x)}{\sin^2(x)}\right) + \cos(x)\frac{C}{\sin(x)} = e^x$$
$$C' = e^x \Rightarrow C(x) = e^x \Rightarrow y_p = \frac{e^x}{\sin(x)}$$

Dies gibt $y(x) = \frac{C}{\sin(x)} + \frac{e^x}{\sin(x)}$

Variation der Konstanten (2te Ord.) Wir haben eine ODE der Form $y'' + a_1y' + a_0y = g(x)$:

- **Schritt 1:** Löse homogenes Problem mittels Euleransatz
- **Schritt 2:** Suche nun eine Lösung der Form $y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$ wobei y_1 und y_2 aus dem Euler Ansatz kommen und das System $\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = g(x) \end{cases}$ erfüllt sein muss. Dafür darf Determinante des Systems nicht verschwinden. Sonst keine eindeutige Lösung.
- **Schritt 3:** Nun finden wir C_1 und C_2 durch $\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)} \begin{pmatrix} -y_2(x)g(x) \\ y_1(x)g(x) \end{pmatrix}$
- **Schritt 4:** Finde $C_1 = \int C_1' dx$ sowie C_2. Dann baue $y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$.
- **Schritt 5:** Setzte $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.

Lineare DGL n-ter Ordnung

Wir lösen das homogene Problem vor dem inhomogenen!

Homogene Lineare DGL n-ter Ordnung
Wenn wir eine Gleichung der Form

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = 0$$

dann nehmen wir den Euler-Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ und finden λ mit

$$a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_0 = 0$$

Nun finden wir die Nullstellen λ des charakteristischen Polynoms. Wir bauen uns nun eine Basis aus $e^{\lambda_i x}$ Wenn eine Nullstelle m mal Vorkommt nehmen wir

$$e^{\lambda x}, e^{\lambda x}, \ldots, x^{m-1}e^{\lambda x}$$

Das gibt uns ein Fundamentalsystem. Die Allgemeine Lösung ist eine Linearkombination der Basis (basierend auf den Anfangswerten).

Wenn die NS $\lambda = \beta + i\gamma$ nicht reell ist, so ist (bei rellen DGL) auch $\beta - i\gamma$ auch eine NS. Wir konnen dann $e^{x(\beta+i\gamma)}$, $e^{x(\beta-i\gamma)}$ auswechseln durch $f_1 = e^{x\beta}\cos(\gamma x)$ sowie $f_2 = e^{x\beta}\sin(\gamma x)$ austauschen. Erinnere dass $e^{\lambda}x$
Beispiel $y'' - 4y' + 13y = xe^x$ Mit dem Euler Ansatz kriegen wir $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$. Dies gibt $y_{hom} = Ae^{(2+3i)x} + Ae^{(2-3i)x}$ wir nutzen aber $y_{hom} = e^{2x}(C\sin(3x) + D\cos(3x))$. Nun wollen wir $e^x(ax+b)$ als Ansatz für y_p nehmen. Dann setzte ein und finde Konstanten a, b mit Koeff.vergleich. Dann setzte $y = y_{hom} + y_p$. Also $y = e^{2x}(C\sin(3x) + D\cos(3x)) + \left(\frac{x}{10} + \frac{1}{50}\right)$.

Direkter Ansatz nichthomogene DLG n-ter Ordnung Für DLGs der Form

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = b(x)$$

mit dem Euler Ansatz lösen wir das homogene Problem. Die partikuläre Lösung finden wir mit der Idee, dass $y_p(x)$ die slebe Form wie $b(x)$ hat.

Dabei gilt:

- Verschiedene Ansätze können kombiniert werden. So wählt man für $b(x) = 5x + \sin(x)2^{3x}$ als Ansatz $Ax + B + (C + \sin(x) + D\cos(x))e^{3x}$
- Wenn ein Teil der zu wählenden Funktion für $y_p(x)$ bereits in $y_h(x)$ drin ist, so Multipliziere den Ansatz mit x. So wählt man für $y_h(x) = Ax + B$ anstelle des Ansatzes $y_p(x) = Ax + B$ den Ansatz $y_p(x) = x(Ax + b)$

Variabelwechsel

Nutze eine Substitution und brauche dann die Methode des direkten Ansatzes:

- $\boxed{y' = h\left(\frac{y}{x}\right)}$, setzte $z(x) = \frac{y(x)}{x}$ respektive $y(x) = xz(x)$, dann wird $y' = z + xz'$.
- $\boxed{y' = h(ax + by + c)}$, setzte $z(x) = ax + by(x) + c$, respektive $y = \frac{z - ax - c}{b}$, dann wird $y' = \frac{z' - a}{b}$.
- $\boxed{y' = h\left(\frac{ax + by + c}{dx + ey + f}\right)}$, Wir wollen $x, y(x)$ ersetzten, dafür lösen wir das Gleichungssystem $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ dx + ey + f \end{cases}$, wir wollen eine Eindeutige Lösung (x_0, y_0), desshalb fordern wir $\det\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \neq 0$, dann setzten wir $z = y - y_0$ sowie $t = x - x_0$, damit wird: $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(z+y_0)}{d(t+x_0)} = \frac{dz}{dt} = z'$.
- $\boxed{y' = \frac{y}{x}h(xy)}$, setzte $z(x) = xy(x)$, respektive $y = \frac{z(x)}{x}$ dann wird $y' = \frac{xz' - z}{x^2}$.

Continuity in $\mathbb{R}^n$

Convergence of sequence in $\mathbb{R}^n$ Let $(x_n)_n$ be a sequence in $\mathbb{R}^n$. We say that a sequence converges to y if for all $\epsilon > 0$, there exists $N \geq 1$ such that for all $n \geq N$ we have $\|x_n - y\| \leq \epsilon$

Continuity in $\mathbb{R}^n$

- Let $x_0 \in X$, we say that f is continuous at x_0 if for all $\epsilon > 0$, there exists $\delta > 0$ such that if $x \in X$ satisfies $\|x - x_0\| < \delta$ then $\|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon$.
- The function $f : X \to \mathbb{R}^m$ is continuous at x_0 if and only if, for every sequence $(x_n)_n$ in X such that $x_k \to x_0$ as $k \to \infty$ the sequence $(f(x_k))_k$ converges to $f(x_0)$

Topology of $\mathbb{R}^n$

Bounded, Closed & Compact

- A subset $X \subseteq \mathbb{R}^n$ is bounded if the set is contained in a ball of finite radius. (Altern. if $\exists$ lower and upper bounds not in set).
- A subset $X \subseteq\in \mathbb{R}^n$ is closed if for every sequence $(x_k)_k$ in X that converges to some $y \in \mathbb{R}^n$, we have $y \in X$.
- A subset $X \subseteq \mathbb{R}^n$ is compact if it is bounded and closed.

Examples:

- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 2019\}$ is bounded but not closed since boundary not included.
- $\{(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3 | a^2 + b^2 + c^2 < 2019\}$ is compact since finite.
- $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 | x \in (0,1], f(x) = \sin\frac{1}{x}\}$ not closed since $(0,0)$ not contained but $(\frac{1}{2k\pi}, 0)$ is $\forall k$.
- $\{(\cos\varphi, \sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 | \varphi \in \mathbb{Q}\}$ is not closed since $(1,1)$ can be approximated but never reached.
- $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^+ z^2 \leq 2\}$ closed and bounded, hence compact.

Differentiability in $\mathbb{R}^n$

It turns out that the existence of partial derivatives is not enough to show differentiability of a function. An example is the function $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{if } (x,y) = (0,0) \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{else} \end{cases}$. Using the polar coordinate trick one can see that the function is not continuous, however both partial derivatives give $\partial_x f(0,0) = \partial_y f(0,0) = 0$, nevertheless, there exists no differential of f at $(0,0)$ since it is not continuous there.

Differentiable in $\mathbb{R}^n$

- Let $X \subseteq \mathbb{R}^n$ be open and $f : X \to \mathbb{R}^n$ be a function. Let u be a linear map $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ and $x_0 \in X$. We say f is *differentiable* at x_0 with differential u if
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{1}{\|x - x_0\|}(f(x) - f(x_0) - u(x - x_0)) = 0$$
$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - A(x)h\|}{\|h\|} = 0.$$
where the limit is in $\mathbb{R}^n$. We then denote $df(x_0) = u$ If f is differentiable at every $x_0 \in X$, then we say that f is differentiable on X.
- Let $X \subseteq \mathbb{R}^n$ open, $f : X \to \mathbb{R}^m$ a function on X: If:
  - f has all partial derivatives on X
  - and if all the partial derivatives are continuous on X

  then f is differentiable on X, then the Jabobi matrix of f at x_0 is $df(x_0)$ with respect to the canonical basis of $\mathbb{R}^n$

Examples

Example (Total Differentiability) Let $f(0,0) = 0$ and $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ for $(x,y) \neq (0,0)$. Show that $f \in C^1$. We first show that f is continuous at $(0,0)$, for this we use the polar coordinates trick:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \lim_{r \to 0} \frac{r^4 \sin^2(\varphi)\cos^2(\varphi)}{\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)} = 0$$

As a second step we show differentiability at $(0,0)$: We will use two methods:

Via partial derivatives:
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy^2}{x^2+y^2} - \frac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x^2y}{x^2+y^2} - \frac{2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

We now calculate $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}$ and $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}$ using the polar coordinates trick and get the same result as below.

Direct Method: We calculate the Jacobi Matrix at $(0,0)$ and plug it into the definition of differentability:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0h^2}{h^2+0} - 0}{h} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2 0}{0+h^2} - 0}{h} = 0$$
Hence we have $J_f(0,0) = [0,0]$. Now we calculate:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) - J_f(0,0)\begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix}\right)}{\left\|\begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix}\right\|}$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} - 0 - [0,0]\begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^4 \sin^2(\varphi)\cos^2(\varphi)}{r^3} = 0$$
Since this fulfills the definition f is differentiable in all of $\mathbb{R}^2$.

Rules for differentiation in $\mathbb{R}^n$

Directional Derivative Let $f : X \subseteq \mathbb{R}^n$, the directional derivative w in direction v at x_0 is defined by the derivative of $g(t) = f(x_0 + t \cdot v)$ at $t = 0$.
We have
$$D_u f(a) = \frac{d}{dt}(f(a+tu))_{|t=0}$$
$$D_u f(a) = df(a) \cdot u$$
Ideally $||u|| = 1$

Examples: We would like to find $D_u f((0,1))$ in direction $\frac{1}{\sqrt{17}}(-1,4)$ of the function $f(x,y) = e^{-x}\log(y)$:

- USING THE DEFINITION: We find $f(a+tu) = e^{\frac{t}{\sqrt{17}}} \log\left(1 + \frac{4t}{\sqrt{17}}\right)$ By diff: $D_u f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{e^{\frac{t}{\sqrt{17}}}}{\sqrt{17}} \log\left(1 + \frac{4t}{\sqrt{17}}\right) + \frac{4e^{\frac{t}{\sqrt{17}}}}{\sqrt{17}(1+\frac{4t}{\sqrt{17}})} = \frac{\log(1)+4}{\sqrt{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$
- USING THE TOTAL DERIVATIVE: We known $D_u f(a) = df(a) \cdot u$, we get $df(x,y) = (-e^{-x}\log(y), \frac{e^{-x}}{y})$ hence $df(0,1) = (0,1)$. By multiplication we get $\frac{1}{\sqrt{17}}(-1,4) \cdot (0,1) = \frac{4}{\sqrt{17}}$.

Gradient Vector If $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ then we define $\nabla f(x_0)$:
$$\nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(x_1) \\ \dots \\ \partial_{x_n} f(x_0) \end{pmatrix}$$

Jacobi Matrix If $f(x) = (f_1(x), \dots f_m(x))$ then we define
$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Chain Rule We have
$$d(g \circ f)(x) = d(g(f(x)) = dg(f(x)) \cdot df(x)$$
$$J_{g \circ f}(x) = J_g(f(x)) \cdot J_f(x)$$
The order of the matrices is IMPORTANT.

Example

- Let $f(x,y,z) \mapsto (xy, y+z)$ and $g(x,y) \mapsto (e^x, xy)$. We have $dg(x,y) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$ as well as $df(x) = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. From dg we can find $dg(f) = \begin{pmatrix} e^{xy} & 0 \\ y+z & xy \end{pmatrix}$ This gives us for $d(g(f(x))) = dg(f(x)) \cdot df(x)$:
$$\begin{pmatrix} e^{xy} & 0 \\ y+z & xy \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} & 0 \\ y^2+yz & 2xy+zx & xy \end{pmatrix}$$
- Let $f(x,y) \mapsto (e^x + \sin(xy), x + y^2x)$ and $g = f \circ f \circ f$. Find $dg(0,0)$: We have first notice that:
$$f(0,0) = (e^0 + \sin(0 \cdot 0) \;\; 0 + 0^2 \cdot 0) = (1 \;\; 0)$$
$$f(f(0,0)) = f(1,0) = (e^1 + \sin(1 \cdot 0) \;\; 1 + 0^2 \cdot 1) = (e \;\; 1)$$

  Now we can use these results:
$$df(x,y) = \begin{pmatrix} e^x + y\cos(xy) & x\cos(xy) \\ 1 + y^2 & 2xy \end{pmatrix}$$
$$df(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$df(f(0,0)) = df(1,0) = \begin{pmatrix} e & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$df(f(f(0,0))) = df(e,1) = \begin{pmatrix} e^e + \cos(e) & e\cos(e) \\ 2 & 2e \end{pmatrix}$$

  We can now insert these results: (calculating matrix product omitted)
$$dg(0,0) = df(f(f(0,0))) \cdot df(f(0,0)) \cdot df(0,0)$$
$$= df(e,1) \cdot df(1,0) \cdot df(0,0)$$

Tangential Plane via Definition Wir wollen die Tangentialebene am Punkt (x_0, y_0) der Fläche $f(x,y)$ finden.

- Definiere $F(x,y) = (x, y, f(x,y))$ und berechne
$$dF(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial F_3}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial F_3}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix}$$
- Nun berechnen wir den Normalenvektor $n = u \times v$
$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$
  Nun berechnen wir d mit $p = (x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ mit $d = p \cdot n$
- Zum Schluss fassen wir die Gleichung zu $ax + by + cz = d$ zusammen.

Tangential Plane via Taylor Approximation Wir approximieren f im Punkt (x_0, y_0) durch ein Taylorpolynom ersten Grades:
$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

Example: Determine a constant $c \in \mathbb{R}$ such that the vector $(c,0,1)^T$ is perpendicular to the surface of $\mathcal{G}(f)$ at the point $(\frac{\pi}{2}, 0, 1) \in \mathcal{G}(f)$ with $f(x,y) = \sin(x) - y^3 + y^2$. We see that
$$dF(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix}$$
with v and u basis vectors of the tangential plane. Since we are looking for perpend. to surface we get $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
hence $c = 0$.

Hessian For the twice differentiable function $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, the Hessian is defined as:
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix}$$

Satz von Schwarz Ist f zweimal stetig partiell Ableitbar so gilt $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Minimum / Maxinmum finden:
- **Schritt 1:** Berechne Gradient und setzte null. $\nabla \cdot f = df = 0$, diese Punkte nennen wir critical points.
- **Schritt 2:** Berechne $\text{Hess}(x_0)$:
  - $\text{Hess}(x_0)$ pos. def. dann x_0 lokales Minimum
  - $\text{Hess}(x_0)$ neg. def. dann x_0 lokales Maximum
  - $\text{Hess}(x_0)$ indef. dann x_0 Sattelpunkt

Definitheit Dabei sind $A_1, \ldots, A_n$ die Hauptminoren der Matrix.
- **Positiv Definit** Alle Eigenwerte strikt grösser als 0, $A_1 > 0, A_2 > 0, A_3 > 0, \ldots$
- **Negativ Definit** Alle Eigenwerte strikt kleiner als 0, $A_1 < 0, A_2 > 0, A_3 < 0, \ldots$

Dabei ist
$$A_1 = \det\begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix} \qquad A_2 = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Change of Variable

Assume we have $h(u,v) \mapsto (u+v, u-v)$ and $g(u,v) = f(u+v, u-v)$. We would like to find $\partial_{v^2} g$. First we find ∂_v. We note that $Dg = Df(h(u,v)) \cdot Dh(u,v)$ by the chain rule. Hence we get $\partial_v = \frac{\partial h_1}{\partial v}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial v}\frac{\partial}{\partial y}$.

This gives us $\partial_v g = \partial_x f - \partial_y f$ (f & g are same func. in diff var)

Now we apply $\partial_{v^2} = \partial_v(\partial_v g) = \partial_v(\partial x f - \partial_y f)\, \partial_x(\partial x f - \partial_y f) - \partial_y(\partial x f - \partial_y f) = \partial_{x^2} f + \partial_{y^2} - 2\partial_{xy} f$

Taylor Approximation in $\mathbb{R}^n$

Taylor Approximation in $\mathbb{R}^n$ Let $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ and $f : X \to \mathbb{R} \in C^k$ on X, and fix $x_0 \in X$. The k-th order Taylor polynomial in n variables of degree $\leq k$ is given by
$$T_k f(y; x_0) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) y_i + \ldots$$
$$+ \sum_{m_1 + \ldots + m_n = k} \frac{1}{m_1! \cdots m_n!} \frac{\partial^k f}{\partial_{x_1}^{m_1} \cdots \partial_{x_n}^{m_n}}(x_0) y_1^{m_1} \cdots y_n^{m_n}$$
This simplifies to
$$T_k f(y; x_0) = \sum_{|m| \leq k} \frac{1}{m!} \partial_x^m f(x_0) y^m$$
Where we have used multi index notation with $|m| = m_1 + \ldots + m_n$ and $y^m = y_1^{m_1} \cdots y_n^{m_n}$

Alternatively also directly:
$$T_2 f(\vec{x}, \vec{a}) = f(\vec{a}) + Df(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a}) + \frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{a})^T Hf(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a})$$

We have: (using the convention $\Delta x = x - x_0$ and $\Delta y = y - y_0$)
$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(\Delta x)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(\Delta y)^2\right)$$
$$+ \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial^3 x}(\Delta x)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial^2 x \partial y}(\Delta x)^2 \Delta y + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial^2 y}\Delta x (\Delta y)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial^3 y}(\Delta y)^3\right)$$

If possible use 1-dimensional Taylor series as starting point!

Gerechnetes Beispiel $f(x,y,z) = e^{x,y,z}$. Wir wollen zweite Ordnung in $(0,0,0)$
$$T_2 f(x, (0,0,0)) = f(0,0,0) + x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) + y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0) + z\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)$$
$$+ \frac{1}{2}\left(x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0) + z^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(0)\right.$$
$$\left. + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}0 + 2yz\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}0 + 2xz\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}0\right) + \ldots$$

Use 1-Dimensional Taylor Approximation
- **Find the fourth order Taylor approximation of** $f(x,y) = \cos(x) \cdot \frac{1}{1-y^2}$ **at** $(0,0)$**:** Recall that
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$$
$$\frac{1}{1-y^2} = 1 - y^2 + y^4 + \ldots$$

Hence we have:

$$f(x,y) = \cos(x) \cdot \frac{1}{1-y^2} = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\right) \cdot \left(1 - y^2 + y^4\right)$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2} - y^2 + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + y^4 + \dots$$

- **Find the Taylor series of** $f(x,y) = \cos(xy)$ **at** $(0,0)$: Recall that:
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$
We now replace x by xy and get
$$f(xy) = \cos(xy) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n} y^{2n}}{(2n)!}$$

Wegintegrale

Wegintegral Sei $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve. Der Ausdruck

$$\int_\gamma f \cdot ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

heisst das Wegintegral von f entlang γ. Da dies alles Vektoren sind ist die Multiplikation das Skalarprodukt.
Es gilt $\gamma \in C^1_{pw}$ wobei pw = piece wise.

Parametrisieren von Wegen / Kurven

- **Parabel** $y = x^2$, ganz einfach als $\gamma(t) \mapsto (t, t^2)$
- **Ellipse mit** $(x-3)^2 + 4y^2 = 4$, schreibe als $a^2 + b^2 = r^2$ mit $a = r\cos(t)$ und $b = r\sin(t)$. In unserem Fall ist $a = x - 3$, $b = 2y$ sowie $r = 2$. Dies gibt die Parametrisierung $\gamma(t) \mapsto (3 + 2\cos(t), \sin(t))$

Länge einer Kurve Sei γ eine reguläre Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ mit $t \mapsto \gamma(t)$, dann ist die Länge von γ gegeben durch $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$. Der Betrag ist dabei die euklidische Norm.

Rezept für Wegintegrale Gegeben ein Vektorfeld $f \in C^1$ und eine Kurve $\gamma \in C^1_{pw}$, gesucht $\int_\gamma f \cdot ds$.

- **Schritt 1:** Parametrisiere γ, d.h. finde Abbildung $\gamma(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^n, t \mapsto \gamma(t)$
- **Schritt 2:** Berechne $\gamma'(t) = \frac{d}{dt}\gamma(t)$, jede Komponente einzeln ableiten.
- **Schritt 3:** Berechne Wegintegral durch $\int_\gamma f \cdot ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$

Potenzialfeld Ein Vektorfeld $v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heisst Potenzialfeld, falls eine stetig differenzierbare Abbildung $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ existiert so dass $v = \nabla\varphi$. Wir nennen φ das Potential von v. Dabei ist wichtig:

- Das Potential ist nicht eindeutig: $\varphi = \overline{\varphi} + C$
- Sehr viele Vektorfelder lassen sich nicht als Gradienten eines skalaren Feldes schreiben.

Existenz eines Potentialfeldes Ist $v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Potentialfeld (d.h. $\exists\varphi : \nabla\varphi = v$), so gelten die Integrabilitätsbedingungen $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$ für $i \neq j$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Wenn Ω sternförmig (star shaped) ist, so gilt auch die Umkehrung. d.h. wenn die Integrabilitätsbedinungen erfüllt sind so gibt es ein Potential.
Folgende Aussagen sind äquivalent:

- v ist konservativ
- v ist ein Potentialfeld (d.h. $\exists\varphi : \nabla\varphi = v$)
- Für alle geschlossenen Kurven γ gilt $\int_\gamma v \cdot ds = 0$
- Das Integral $\int_\gamma v \cdot ds$ ist unabhängig vom Weg.
- v erfüllt die Integrabilitätsbedingungen $\nabla \times v = 0$ in $\mathbb{R}^3$

Mehrdimensionale Integrale

Negligible subset A subset $B \subset \mathbb{R}^n$ is called negligible if $\exists k \in \mathbb{N}$ and paremeterized m_i sets $f_i : X_i \to \mathbb{R}^n$ such that $X \subset f_1(x_1) \cup \dots \cup f_k(X_k)$. A parameterized m-set in $\mathbb{R}^n \approx$ m-dimensional subset of R^n.

Examples:

- $\{(i,j,k) \in \mathbb{R}^3 | i,j,k \in \mathbb{Z}, i^2 + j^2 + k^2 < 2019\}$ is negligible since we can just build finitely many constant maps from $[0,1]$ to these finitely many distinct points.
- $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 1, x, y \in [0,1]\}$ is also negligible since we just need the map $(x,y) \to (x, y, 1-x-y)$ from $[0,1] \to \mathbb{R}^3$

Satz von Fubini Sei $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ ein Quader und $f : Q \to \mathbb{R}$ mit $f \in C^0(Q)$ gegeben, so gilt:

$$\int_Q f(x) d\mu(x) = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \dots \int_{a_n}^{b_n} dx_n f(x_1, \dots x_n)$$

wobei wir die Integrationsreihenfolge Vertauschen dürfen.

Normalenbereich Die beschränkte Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heisst y Normalenbereich, falls sich Ω wie folgt darstellen lässt:

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

wobei f, g stetig sind.
Selbstverständlich können wir über den Normalenbereich integriere und es gilt:

$$\int_\Omega F d\mu = \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} dy F(x,y)$$

dabei werte immer das innere Integral zuerst aus.

Beispiele

- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq 0, x - y + 1 \geq 0, x + 2y - 4 \leq 0\}$ Wir bemerken dass $x \leq 4 - 2y$ und $x \geq y - 1$, wir suchen eine obere Schranke für y, dafür muss $4 - 2y = y - 1$ gelten. Demnach integrieren wir $\int_0^{\frac{5}{3}} \int_{y-1}^{4-2y} dxdy$
- Wir definieren A_1 und A_2. Die Schnittpunkte sind bei $(\frac{1}{\sqrt{b}}, \sqrt{b})$ sowie $(\frac{1}{\sqrt{a}}, \sqrt{a})$. Demnach ist $\int_A d\mu = \int_0^{\sqrt{a}} \int_{\frac{y}{b}}^{\frac{y}{a}} dxdy + \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \int_{\frac{y}{b}}^{\frac{1}{y}} dxdy$

Substitution

Substitutionsregel

- **1-dimensional:** Sei f Riemann-integrierbar, so gilt für die Substitution $x = g(u)$ mit $dx = g'(u)du$ dass
$$\int_a^b f(x) dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(u)) g'(u) du$$
- **n-dimensional:** Sei f Riemann-integrierbar auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und die Substitution $(x_1, \dots, x_n) = \varphi(u_1, \dots, u_n)$ oder in Komponenten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \varphi(u) = \begin{pmatrix} g_1(u_1, \dots, u_n) \\ \vdots \\ g_n(u_1, \dots, u_n) \end{pmatrix}$ wobei φ ein C^1 Diffeomorphismus ist. Dann gilt
$$\int_\Omega f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$
$$= \int_{\overline{\Omega}} f(g_1(x_1), \dots, g_n(x_n)) |\det(d\varphi)| du_1 \dots du_n$$
mit $\overline{\Omega} = \varphi^{-1}(\Omega)$

Koordinatentransformationen

Polarkoordinaten $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi & 0 \le r &< \infty & dxdy &= rdrd\varphi \\ y &= r\sin\varphi & 0 \le \varphi &< 2\pi \end{aligned}$$

Elliptische Koordinaten $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} x &= ar\cos\varphi & 0 \le r &< \infty & dxdy &= abrdrd\varphi \\ y &= br\sin\varphi & 0 \le \varphi &< 2\pi \end{aligned}$$

Zylinderkoordinaten $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi & 0 \le r &< \infty & dxdydz &= rdrd\varphi dz \\ y &= r\sin\varphi & 0 \le \varphi &< 2\pi \\ z &= z & -\infty < z &< \infty \end{aligned}$$

Kugelkoordinaten $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi & 0 \le r &< \infty & dxdydz &= r^2\sin\theta drd\theta d\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi & 0 \le \theta &< \pi \\ z &= r\cos\theta & 0 \le \varphi &< 2\pi \end{aligned}$$

Masse, Schwerpunkt Sei Ω ein 2-dimensionales Gebiet mit Massendichte $\rho(x,y)$, welche die Massenverteilung auf Ω beschreibt.

- **Masse:** $M(\Omega) = \int_\Omega \rho(x,y)dxdy$
- **Schwerpunkt:**

$$x_s = \frac{1}{M}\int_\Omega x\rho(x,y)dxdy$$
$$y_s = \frac{1}{M}\int_\Omega y\rho(x,y)dxdy$$

Die Masse von Ω ist dann
Das Konzept geht analog für n Dimensionen.

Oberfläche

- **1-dim:** $\int_a^b \sqrt{a + f'(x)^2}dx$
- **2-dim:** $\int_a^b \int_c^d \sqrt{1 + (\partial_x f(x,y))^2 + (\partial_y f(x,y))^2}dxdy$

Rotationskörper Sei $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | a \le z \le b, x^2 + y^2 \le f^2(z)\}$, dann ist $\mathrm{Vol}(R) = \pi\int_a^b dz f^2(z)$

Integralsätze

Satz von Green $\vec{v} = (v_1, v_2)$ ein stetiges Vektorfeld auf $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $C \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränkter Bereich mit Rand $\gamma = \partial C$ in C^1_{pw} der sich nicht selbst schneidet (also called simple closed parameterized curve mit $\gamma(t) \neq \gamma(s)$ für $s \neq t$). Dann gilt:

$$\int_{\gamma=\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_C \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) dxdy$$

Flächen mit dem Satz von Green berechnen Gegeben ein Gebiet $C \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt mit C^1_{pw} Rand ∂C, gesucht Fläche $F(C)$

- **Schritt 1:** Parametrisiere den Rand von C mit einer Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \gamma(t)$. Die Parametrisierung muss in positiver Richtung sein, d.h. das Gebiet links der Kurve sein.
- **Schritt 2:** Berechne γ'
- **Schritt 1:** Wähle ein geeignetes Vektorfeld wie z.B: $\vec{v} = (0,x)$ oder $\vec{v} = (-y/2, x/2)$ oder $\vec{v} = (-y, 0)$ und wende dafür den Satz von Green an: $F(C) = \int_{\gamma=\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s}$

Satz von Gauss-Ostrogradski Sei V ein beschränkter räumlicher Bereich mit Rand $\partial V \in C^1_{pw}$ gegeben. Sei das Vektorfeld $\vec{v}$ auf ganz V definiert und stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\int_{\partial V} \vec{v} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{v}\, d\mu = \int_V \mathrm{div}(f) dxdydz$$

wobei $\vec{n}$ der Normalenvektor entlang ∂V ist, $d\sigma$ das zweidimensionale Integrationselement über die Fläche und $d\mu$ das dreidimensionale Integrationselement über das Volumen.

Intuitive Erklärung: Ändert sich das Vektorfeld im Innern, so muss sich dies beim Einfluss und Ausfluss bemerkbar machen.

Oberflächenintegral

Parametrisierung einer Fläche F ist ein Diffeomorphismus

$$\varphi : b \to \mathbb{R}^3, (u,v) \to \varphi(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$$

sodass $\varphi(B) = F$ gilt. Wir definieren $\varphi_u = \frac{\partial\varphi}{\partial u}$ sowie $\varphi_v = \frac{\partial\varphi}{\partial v}$ und definieren den Normalenvektor $\vec{n}$:

$$\vec{n} = \pm\frac{\varphi_u \times \varphi_v}{|\varphi_u \times \varphi_v|}$$

Oberflächenmass Das Flächenelement bezüglich der Parametrisierung φ ist

$$d\sigma = |\varphi_u \times \varphi_v| dudv = |\det(d\varphi)| dudv$$

Um die Oberfläche zu kriegen berechne $\int d\sigma$

Sonstiges

Binomialsatz $\forall x, y \in \mathbb{C}, n \ge 1$ gilt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

ABC / Mitternachtsformel

Gegeben: $ax^2 + bx + c = 0$

Lösung: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Logarithmus Regeln

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$$
$$\log_b(M^k) = k \cdot \log_b(M)$$

Summenformeln

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$$
$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Gerade & Ungerade Funktion Eine Funktion heisst:

- GERADE wenn $f(-x) = f(x)$
- UNGERADE wenn $f(-x) = -f(x)$

Dabei sind $f(x) = 1$, $f(x) = |x|$, $f(x) = x^2$, $f(x) = \cos(x)$ alles gerade Funktionen.
Im Gegenzug sind $f(x) = sgn(x)$, $f(x) = x$, $f(x) = \tan(x)$, $f(x) = \sin(x)$ ungerade Funktionen.

Injektiv

$$\forall x_1, x_2 \in M : f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$
$$\text{or } x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

Surjektiv

$$\forall y \in N \exists x \in M : y = f(x)$$

Umkehrsatz - Beispiel Zeige dass $x + e^x$ bijektiv von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$ abbildet. Es gilt $f'(x) = 1 + e^x > 0$, somit ist f streng monoton wachsend in $\mathbb{R}$ und Umkehrbar. Weil $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ist f bijektiv von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$

Kreuzprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Wichtige Integrale

- $\int \sin^2 ax\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \sin 2ax + C = \frac{x}{2} - \frac{1}{2a} \sin ax \cos ax + C$
- $\int \sin^n ax\, dx = -\frac{\sin^{n-1} ax \cos ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} ax\, dx \qquad (\text{for } n > 0)$
- $\int x^n \sin ax\, dx = -\frac{x^n}{a} \cos ax + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos ax\, dx$
- $\int \cos^2 ax\, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \sin 2ax + C = \frac{x}{2} + \frac{1}{2a} \sin ax \cos ax + C$
- $\int \cos^n ax\, dx = \frac{\cos^{n-1} ax \sin ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} ax\, dx \qquad (\text{for } n > 0)$
- $\int x^n \cos ax\, dx = \frac{x^n \sin ax}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sin ax\, dx$
- $\int (\sin ax)(\cos ax)\, dx = \frac{1}{2a} \sin^2 ax + C$
- $\int (\sin^n ax)(\cos ax)\, dx = \frac{1}{a(n+1)} \sin^{n+1} ax + C \qquad (\text{for } n \neq -1)$
- $\int (\sin ax)(\cos^n ax)\, dx = -\frac{1}{a(n+1)} \cos^{n+1} ax + C \qquad (\text{for } n \neq -1)$
- $\int (\sin^n ax)(\cos^m ax)\, dx = -\frac{(\sin^{n-1} ax)(\cos^{m+1} ax)}{a(n+m)} + \frac{n-1}{n+m} \int (\sin^{n-2} ax)(\cos^m ax)\, dx \qquad (\text{for } m, n > 0)$
- $\int \sin^2(x) \cos^2(x) dx = \frac{1}{4} \int sin^2(2x) dx = \frac{1}{4} \int \frac{1-\cos(4x)}{2} dx = \frac{x}{8} - \frac{1}{8} \frac{\sin(4x)}{4} + C$

Typische Integrale

- $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x|$
- $\int \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x}$
- $\int \frac{1}{x+a}\, dx = \ln|x+a|$
- $\int \ln(x)\, dx = x(\ln(x) - 1)$
- $\int \ln(ax+b)\, dx = \frac{(ax+b)\ln(ax+b) - ax}{a}$
- $\int \frac{1}{(x+a)^2}\, dx = -\frac{1}{x+a}$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2\sqrt{x}$
- $\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2}}{2} + C$
- $\int \frac{1}{ax+b}\, dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b|$
- $\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2} \ln|1+x^2|$
- $\int (ax+b)^n\, dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a}, (n \neq -1)$
- $\int x(ax+b)^n\, dx = \frac{(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^2} - \frac{b(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^2}$
- $\int \frac{ax+b}{px+q}\, dx = \frac{ax}{p} + \frac{bp-aq}{p^2} \ln|pq+q|$
- $\int \frac{1}{a^2+x^2}\, dx = \frac{1}{a} \arctan(\frac{x}{a})$
- $\int \frac{1}{a^2-x^2}\, dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$
- $\int \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$
- $\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\sin(x)}\right)$
- $\int a^{xb+c}\, dx = \frac{a^{bx+c}}{b \log(a)}$

Trionometrische Funktionen

- $\int \sin(ax)\, dx = -\frac{1}{a}\cos(ax)$
- $\int \cos(ax)\, dx = \frac{1}{a}\sin(ax)$
- $\int \sin(ax)^2\, dx = \frac{x}{2} - \frac{sin(2ax)}{4a}$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = -\cot x$
- $\int x\sin(ax)\, dx = \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos^2(ax)\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a}$
- $\int \frac{1}{\cos^2(x)}\, dx = \tan x$
- $\int \cos(ax)\, dx = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x\sin(ax)}{a}$
- $\int \sin(ax)\cos(ax)\, dx = -\frac{\cos^2(ax)}{2a}$
- $\int \tan(ax)\, dx = -\frac{1}{a}\ln|\cos(ax)|$

Exponentialfunktion

- $\int e^{ax}\, dx = \frac{1}{a}e^{ax}$
- $\int xe^{ax}\, dx = e^{ax} \cdot \left(\frac{ax-1}{a^2}\right)$
- $\int x\ln(x)\, dx = \frac{1}{2}x^2(\ln(x) - \frac{1}{2})$
- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{a}x^2}\, dx = \sqrt{a\pi}$

Vektoranalysis

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f),$$
$$\Delta f = \nabla \cdot (\nabla f) = (\nabla \cdot \nabla) f = \nabla^2 f.$$
$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot f$$