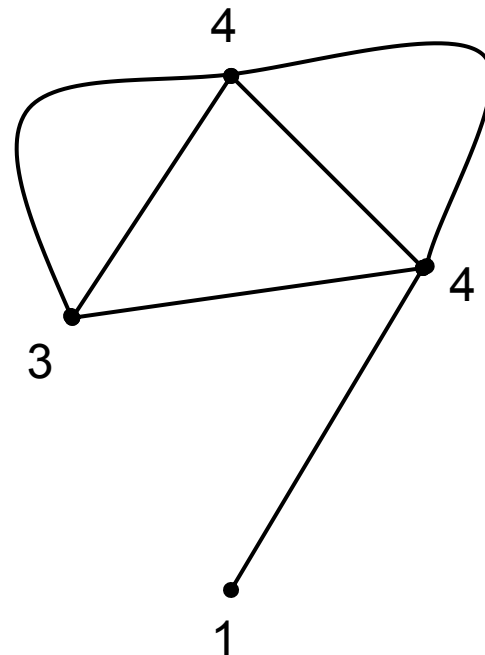


Applications of Handshake lemma

longhuan@sjtu.edu.cn

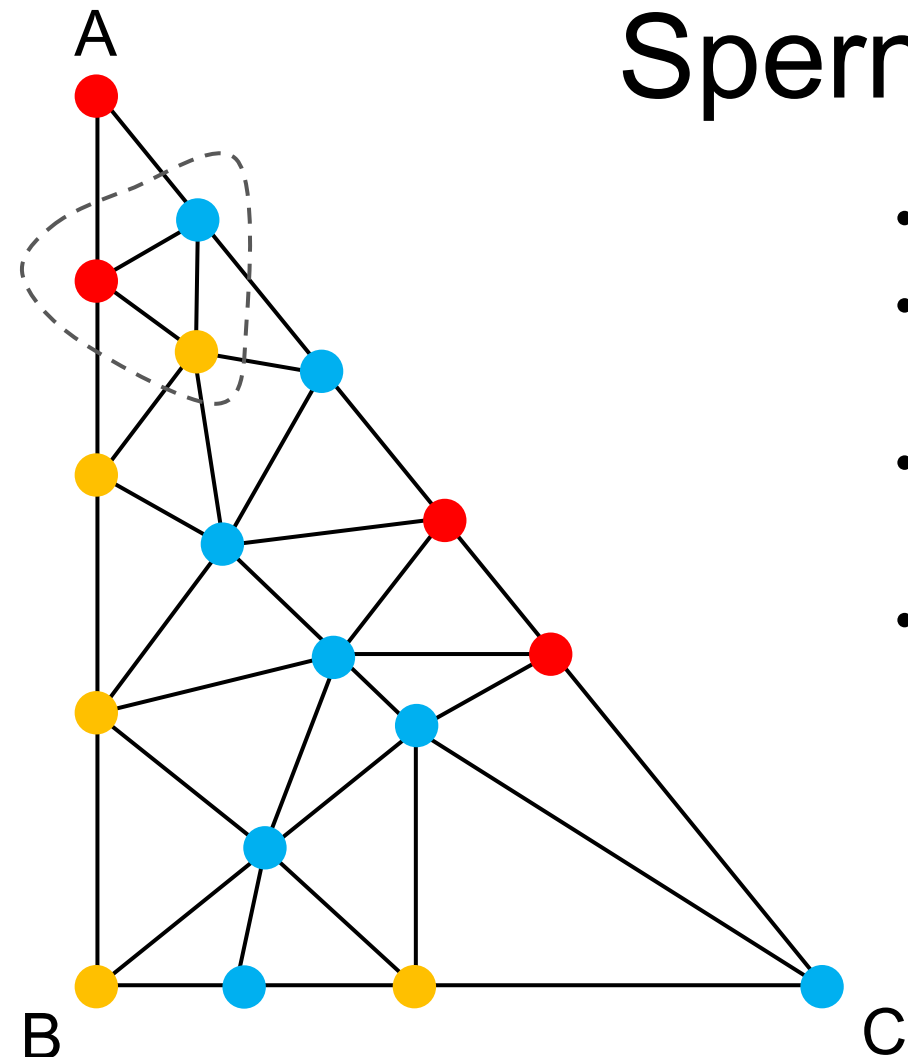
握手定理（回顾）

- **握手定理：** 给定无向图 $G = (V, E)$, 有 $\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|$
- **推论：** 无向图中，度数为奇数的点一定是有偶数多个。



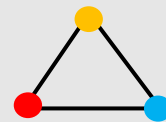
$$1 + 3 + 4 + 4 = 12 = 2 \times 6$$

Sperner 引理



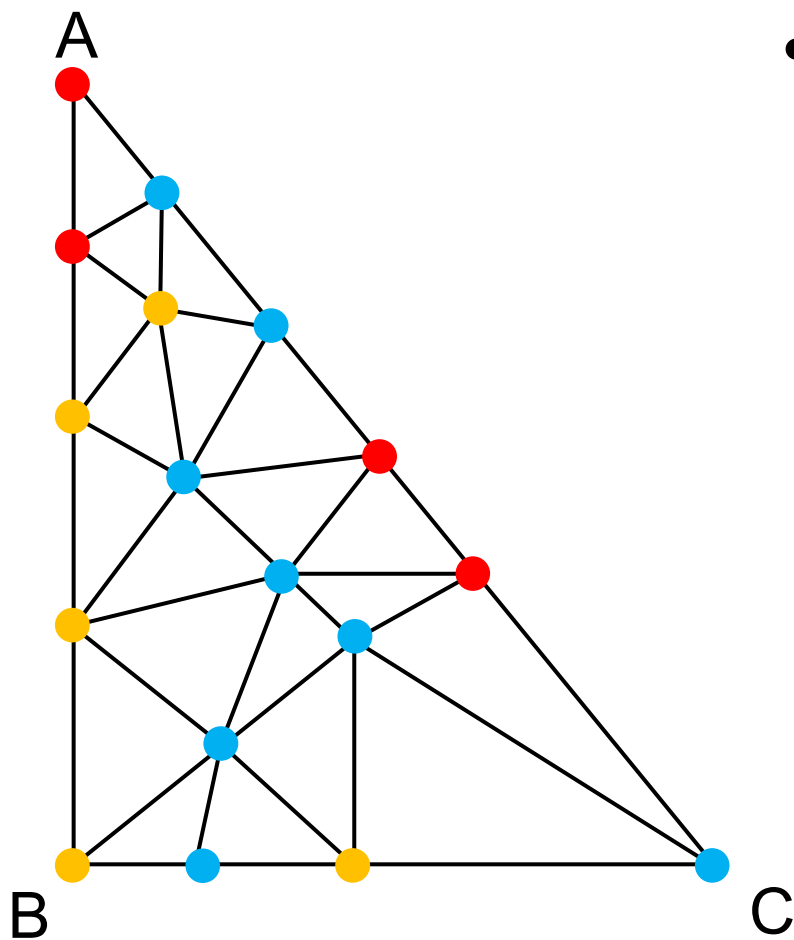
- 已知平面上的一个三角形**ABC**。
- 任意划分成若干小的不重叠三角形。
- 用●、●、●依次对**A**、**B**、**C**三个顶点着色。
- 对其余顶点着色：
 - **BC**边上的点用●色或●色
 - **AB**边上的点用●色或●色
 - **AC**边上的点用●色或●色
 - 其它内部顶点：任意着色

Sperner 引理 (平面):必然存在一个三个顶点不同色的三角形

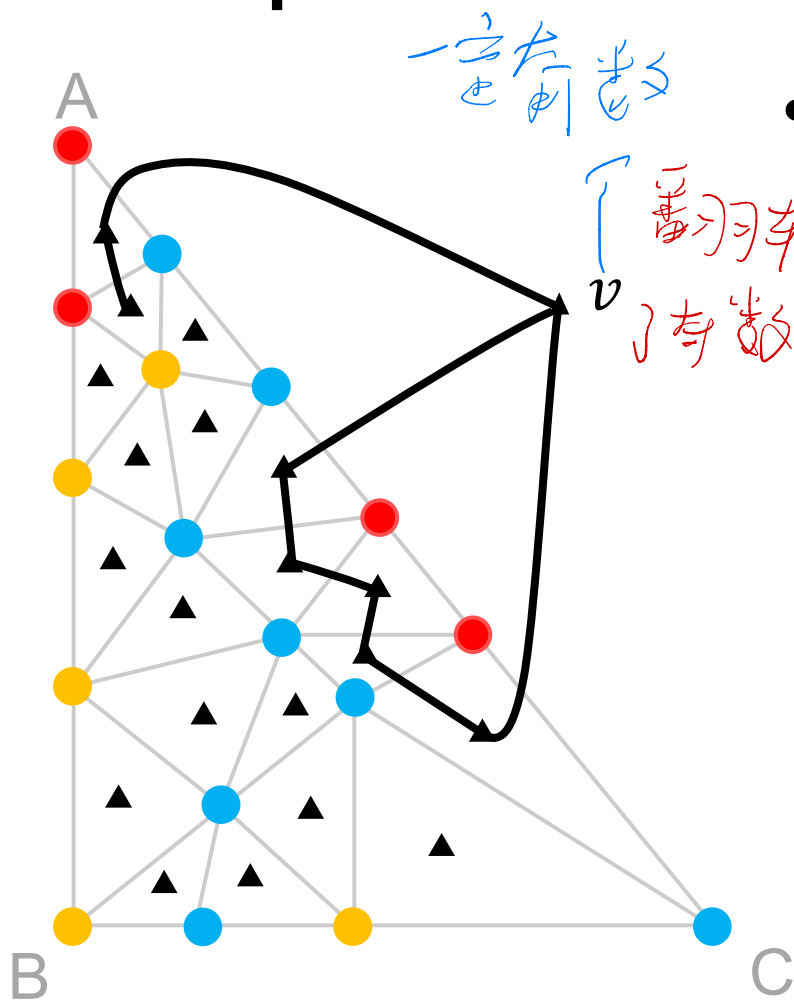


Sperner's lemma的证明

- 构造图 $G = (V, E)$



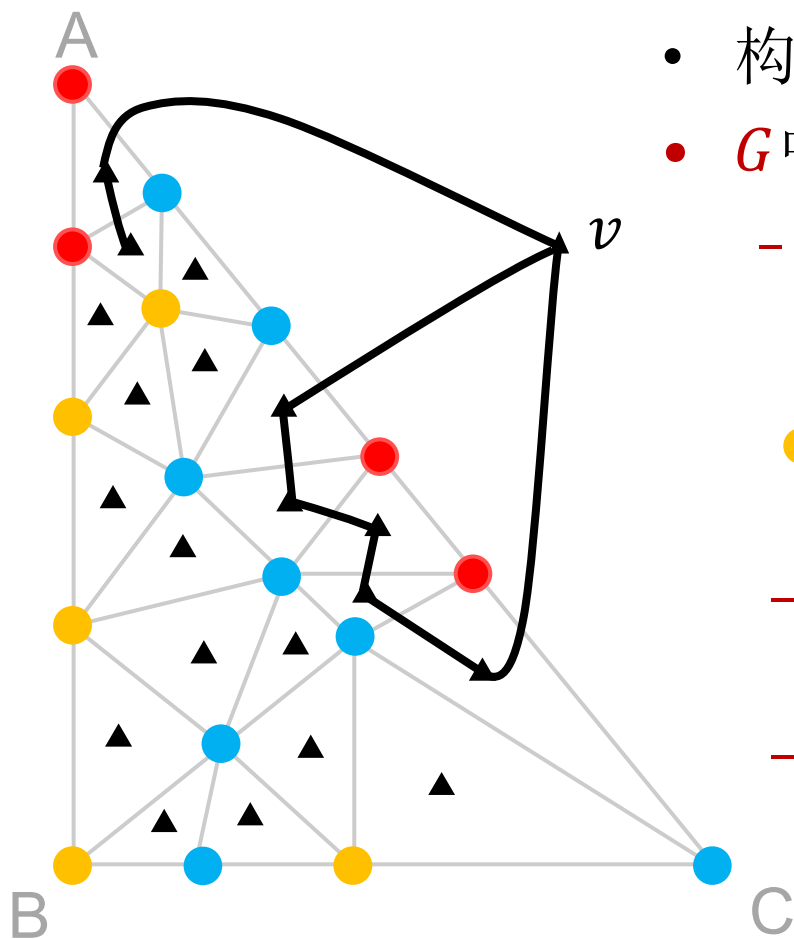
Sperner's lemma的证明

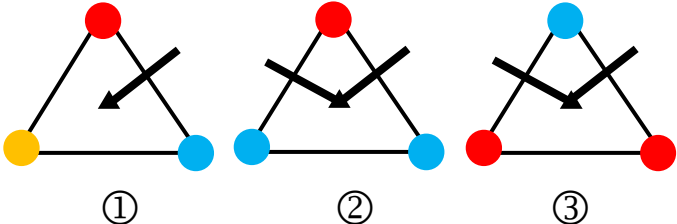


- 构造图 $G = (V, E)$

- V : 每个闭合的连续平面（小三角形）抽象为一个点，外面的开放平面也抽象为一个点，用 \blacktriangle 表示，取名为 v 。
- E : 两个 \blacktriangle 之间有一条边当且仅当原对应平面相邻且邻边顶点着色为 \bullet 和 \bullet 。

Sperner's lemma的证明



- 构造图 $G = (V, E)$
- G 中顶点的度数:
 - V 在 ABC 内 (非 v) 度数非 0 的情况:
① ② ③
 - V 在 ABC 内 (非 v) 的点在其余情况下度数均为 0。
 - V 在 ABC 外的点 (点 v) 的度数: 就是 AC 边上的颜色改变次数, 易证其必为 **奇数**。
 - 根据 **握手定理**, G 中必还有度数为奇的点, 即情况 ① 必发生。

引理的一般形式

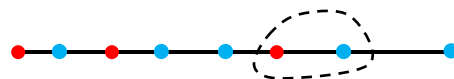
- **Sperner's lemma (Sperner, 1928):** 对任意 n 维单形体(n -simplex)进行分割并用 $n + 1$ 种颜色去着色, 则任何合适的单形体分割着色方案下, 都必有一个包含所有不同颜色的单元。

- 例:

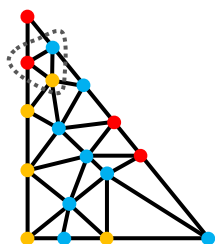
- $n = 0$



- $n = 1$



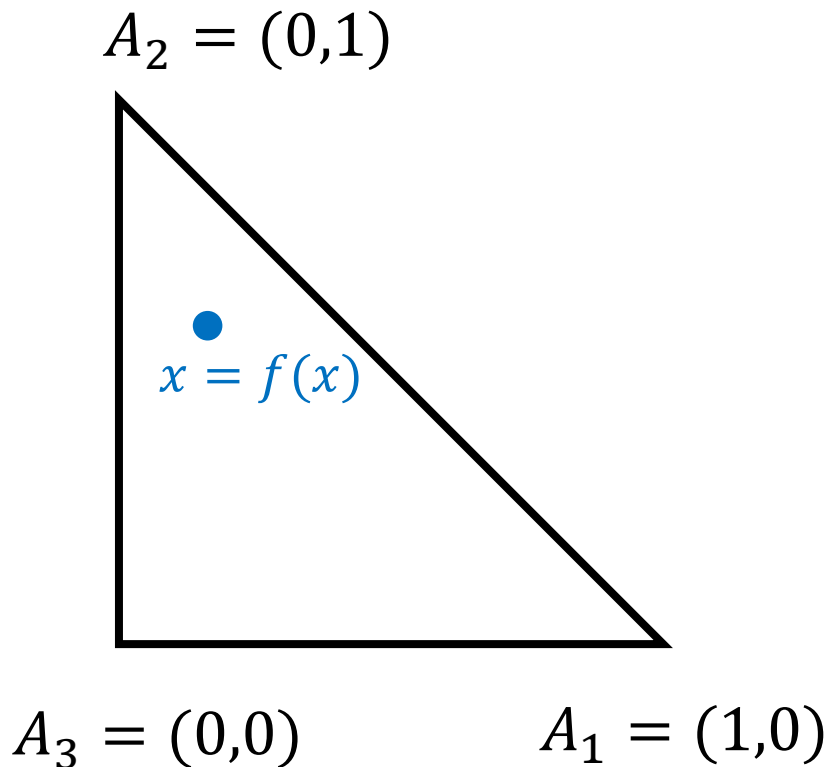
- $n = 2$



- $n = 3$ 四面体

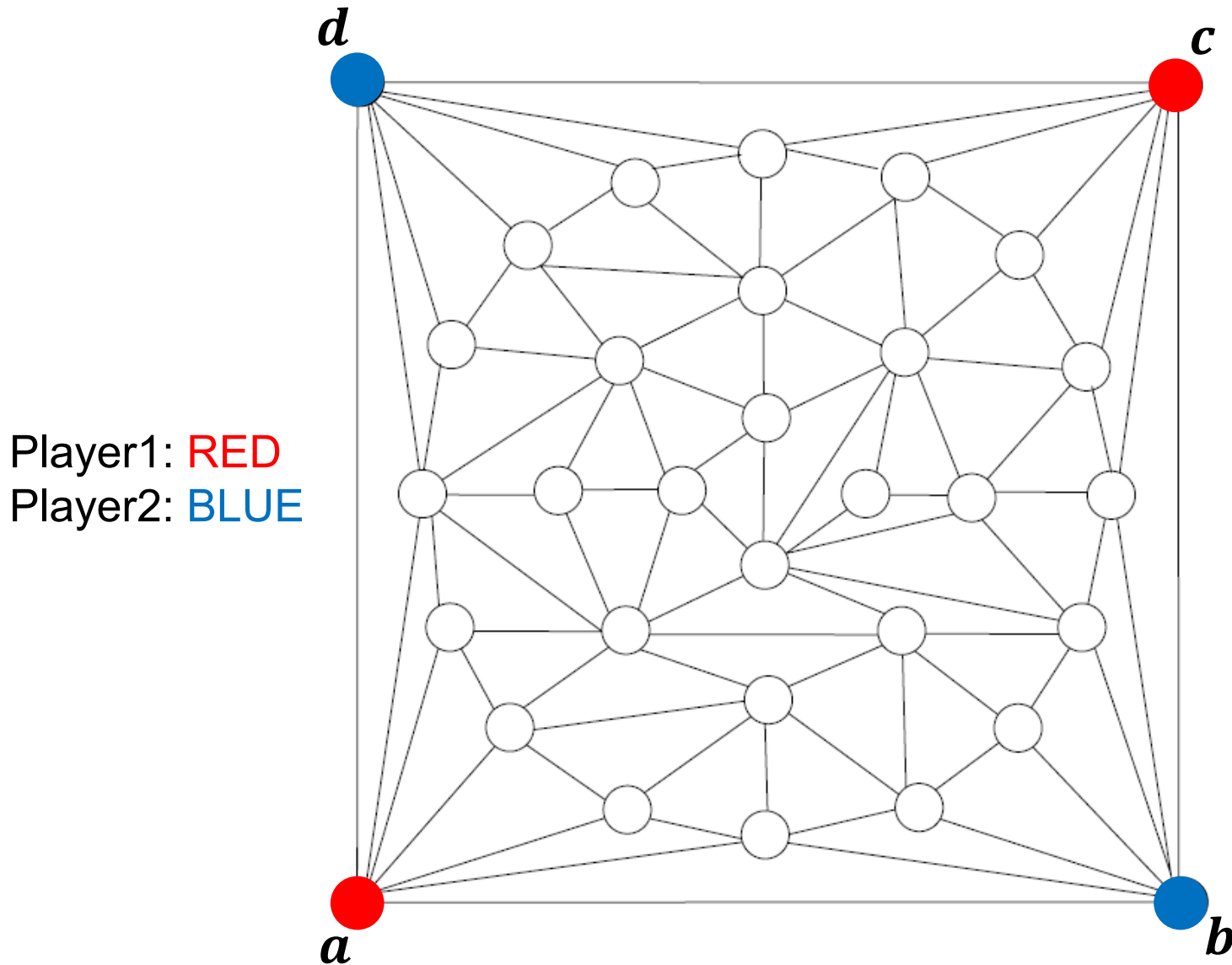
-

Application(1) – Fix point

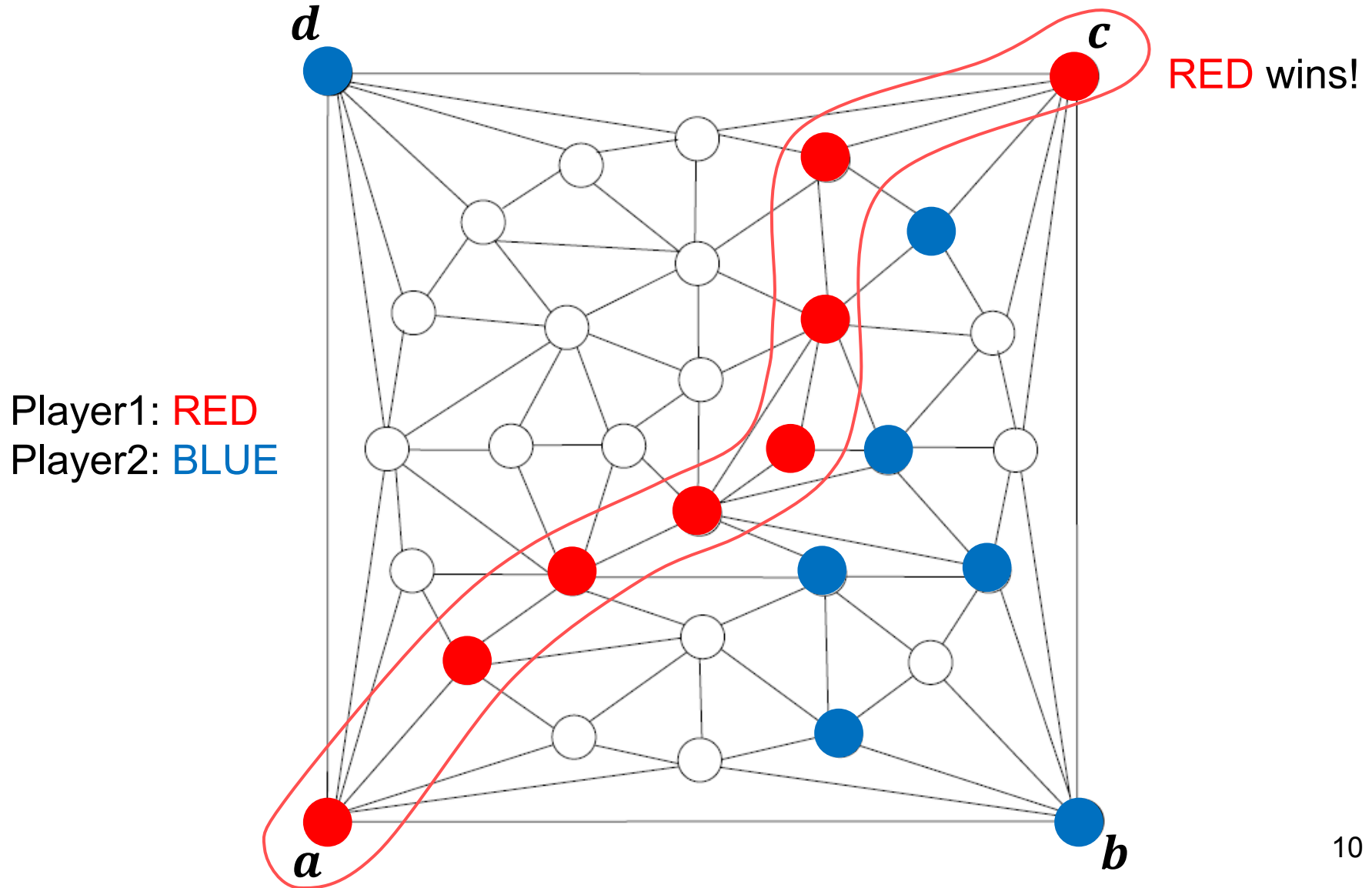


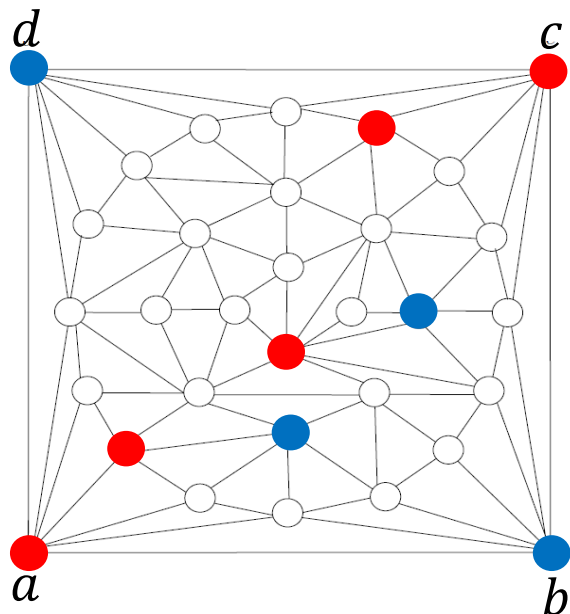
- Δ is a triangle in the plane.
- $f: \Delta \rightarrow \Delta$ is **continuous**:
 $\forall a \in \Delta, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$
 $(b \in \Delta \wedge \text{dist}(a, b) \leq \delta$
 $\rightarrow \text{dist}(f(a), f(b)) \leq \epsilon.)$
- **Planar Brouwer's fixed point theorem**: Every continuous function $f: \Delta \rightarrow \Delta$ has a **fixed point**.

Application(2) – HEX game



Proposition: To any given type (outer face is a square, all inner faces are triangles), there must be a winner.



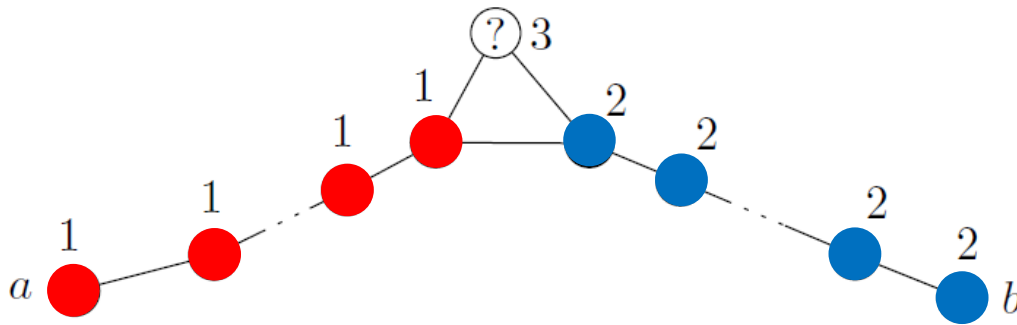


- R = the set of vertices marked red.
- B = the set of vertices marked blue.

Labelling vertex v :

- 1: if the vertex belongs to R and there is an **all-red** path from a to v .
- 2: if the vertex belongs to B and there is an **all-blue** path from b to v .
- 3: otherwise.

Observation: If the **proposition** fails, then both c and d must be labelled by 3.

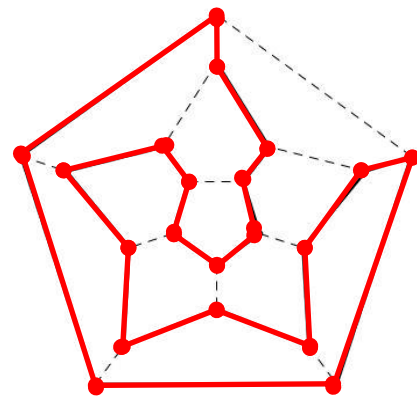
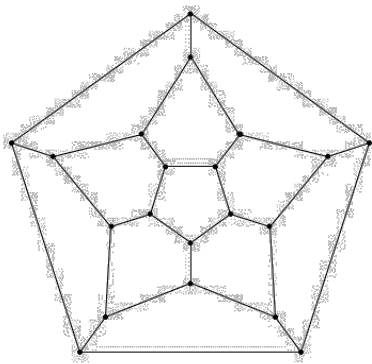
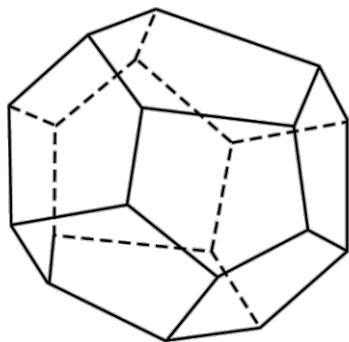


Observation: If the proposition fails, then both c and d must be labelled by 3.

- A triangle contains three different labels $\{1, 2, 3\}$ will lead to contradiction.
- If both c and d have label 3, then there must be such an triangle.
- Either c is labeled 1 or d is labeled 2.
- Either RED wins or BLUE wins.

哈密顿回路

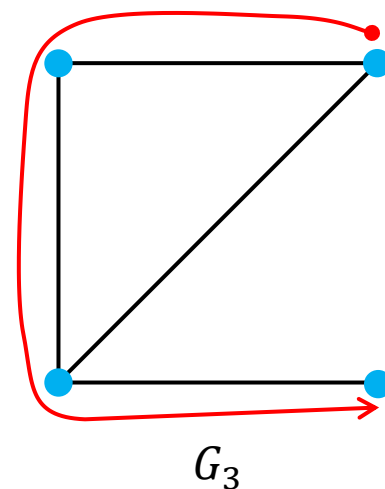
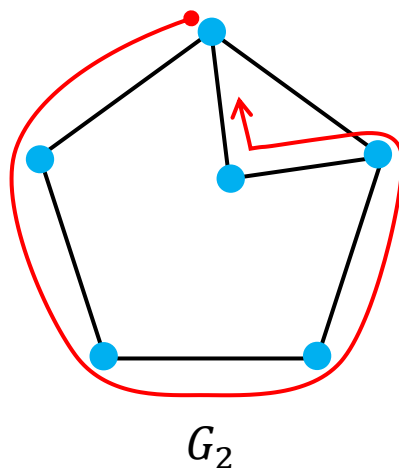
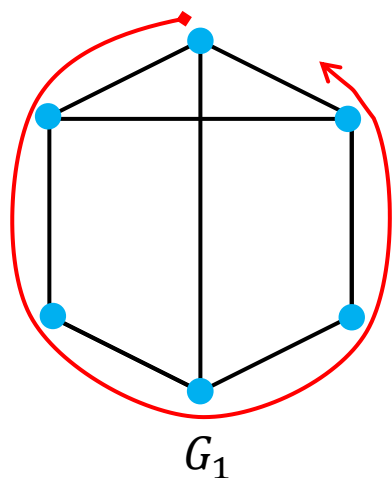
- 19世纪英国数学家哈密顿(Sir William Hamilton) 提出的问题：正凸12面体，把20个顶点比作世界上20个城市，30条棱表示这些城市间的交通路线。问题：能否周游世界，即从某个城市出发，经过每城一次且只一次最后返回出发地。



哈密顿图

- **哈密顿回路**(*Hamiltonian cycle*): 如果一个**环**经过图上所有点正好一次, 则此环被称为哈密顿环。
- **哈密顿图**(*Hamiltonian graph*): 含有哈密顿**环**的图, 被称为哈密顿图。
- **哈密顿路径**(*Hamiltonian path*): 如果一条**路径**经过图上所有点正好一次, 则此路径被称为哈密顿路径。
- 仅考虑简单图 (无环、无重边) 。

• 例:

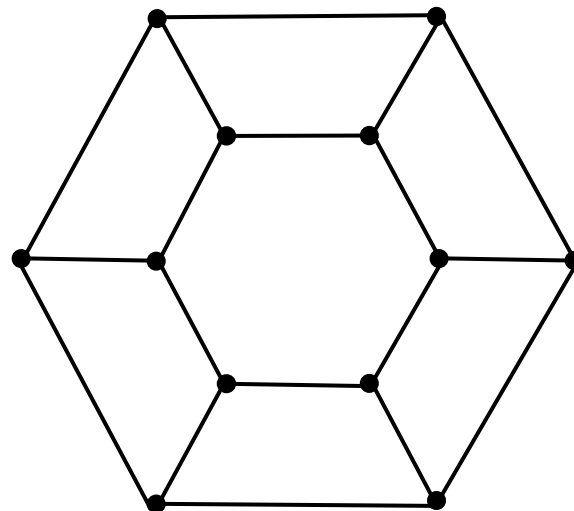
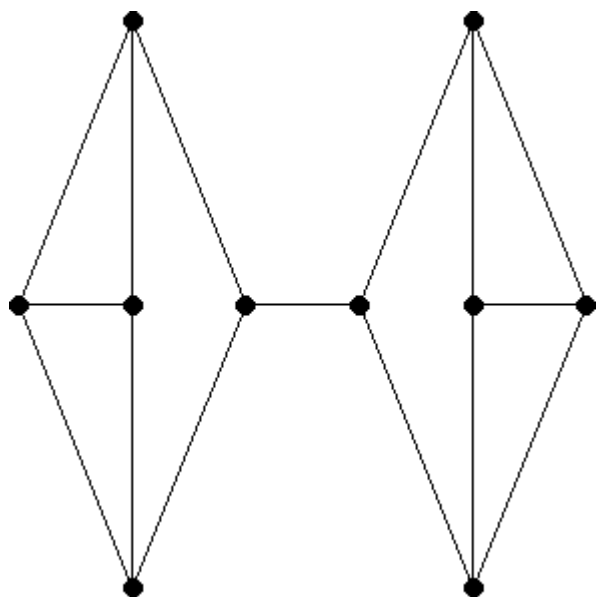


- G_1, G_2, G_3 都含有哈密顿路径
- 仅 G_1, G_2 含哈密顿回路, 是哈密顿图

哈密顿回路 \rightarrow 哈密顿路径, 反之不成立。

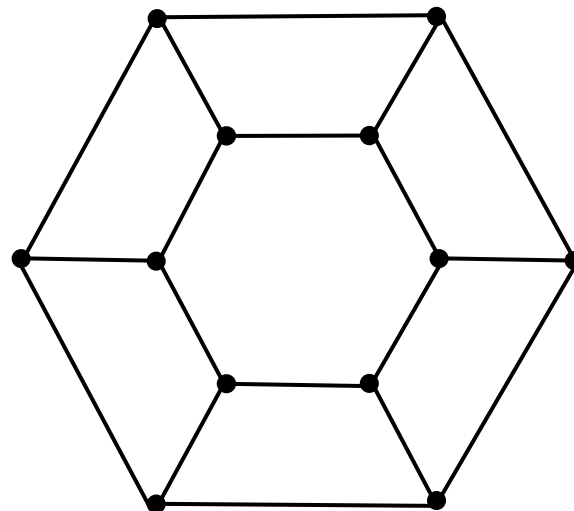
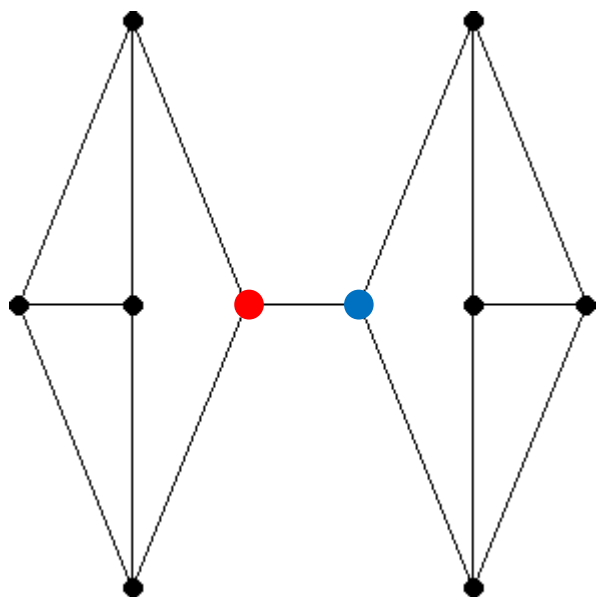
握手定理与哈密顿图

- 定理(Smith): 对3-正则图, 包含图上任意边 e 的哈密顿回路必有偶数条。



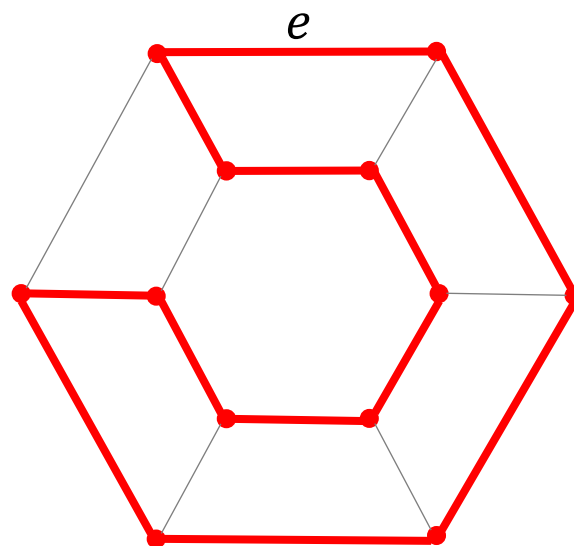
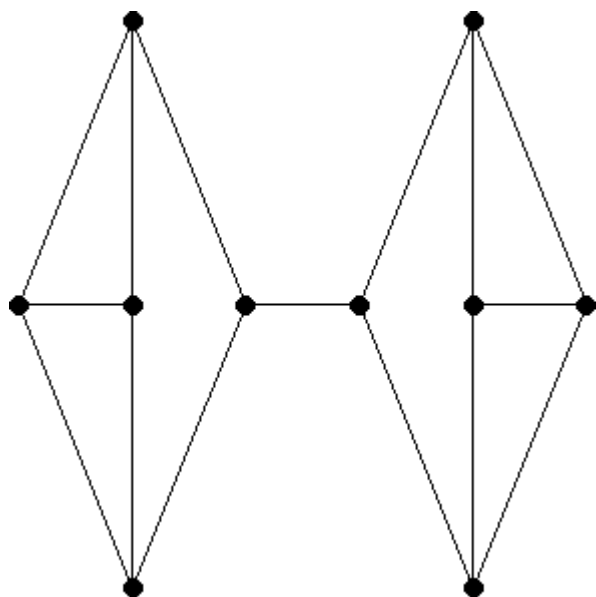
握手定理与哈密顿图

- 定理(Smith): 对3-正则图, 包含图上任意边 e 的哈密顿回路必有偶数条。



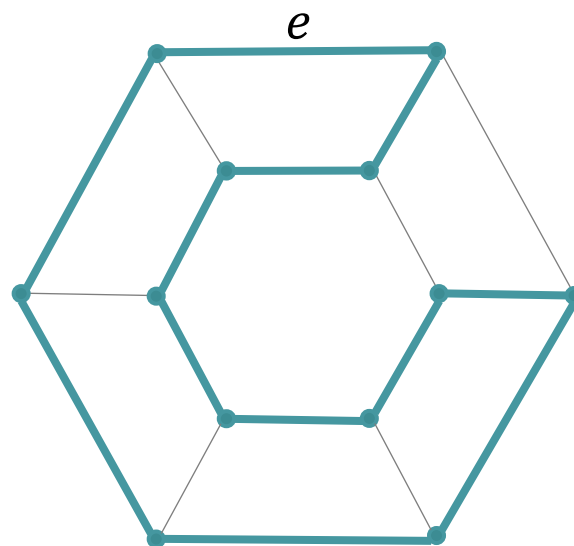
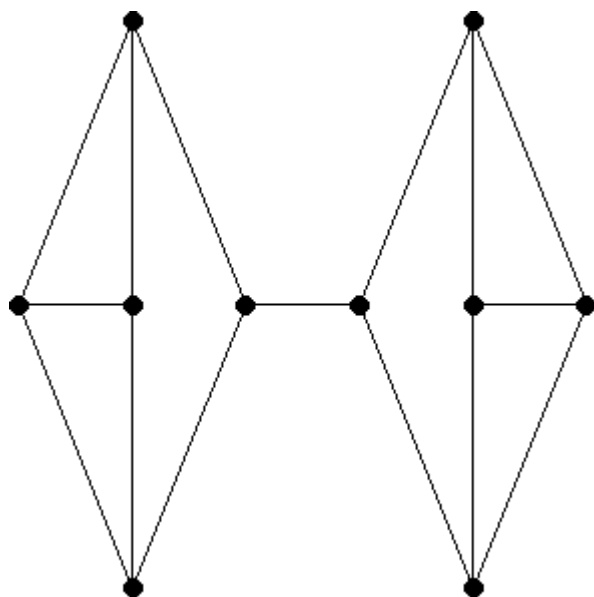
握手定理与哈密顿图

- 定理(Smith): 对3-正则图, 包含图上任意边 e 的哈密顿回路必有偶数条。



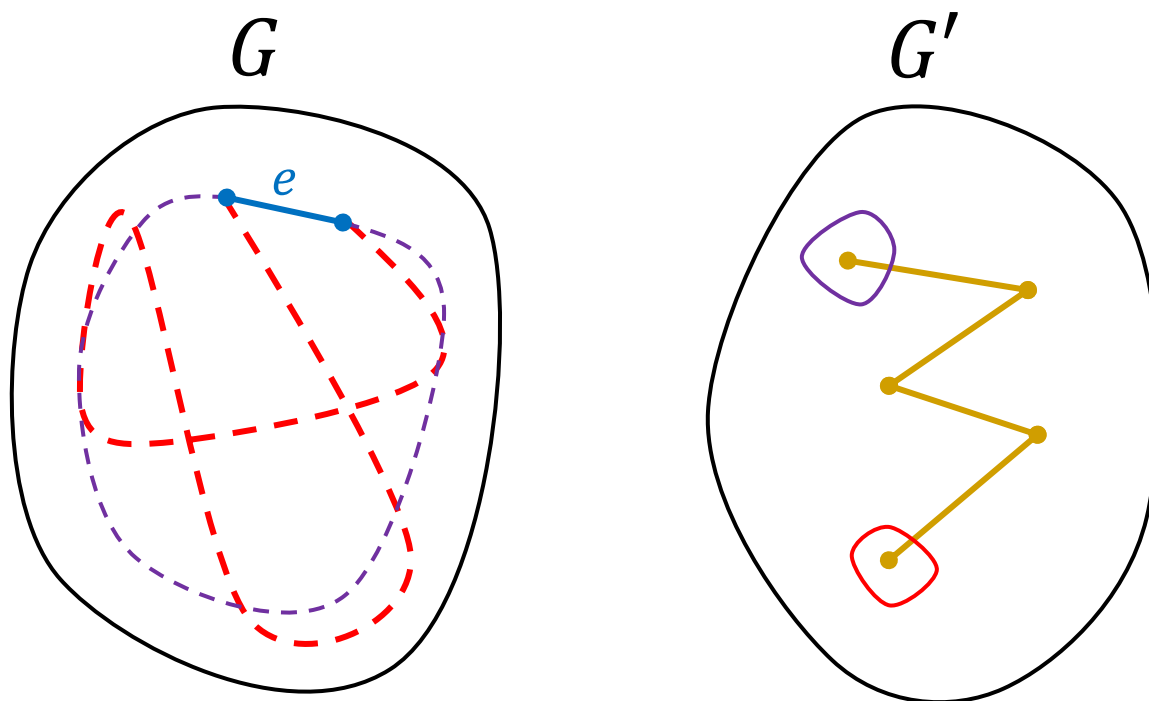
握手定理与哈密顿图

- 定理(Smith): 对3-正则图, 包含图上任意边 e 的哈密顿回路必有偶数条。



握手定理与哈密顿图

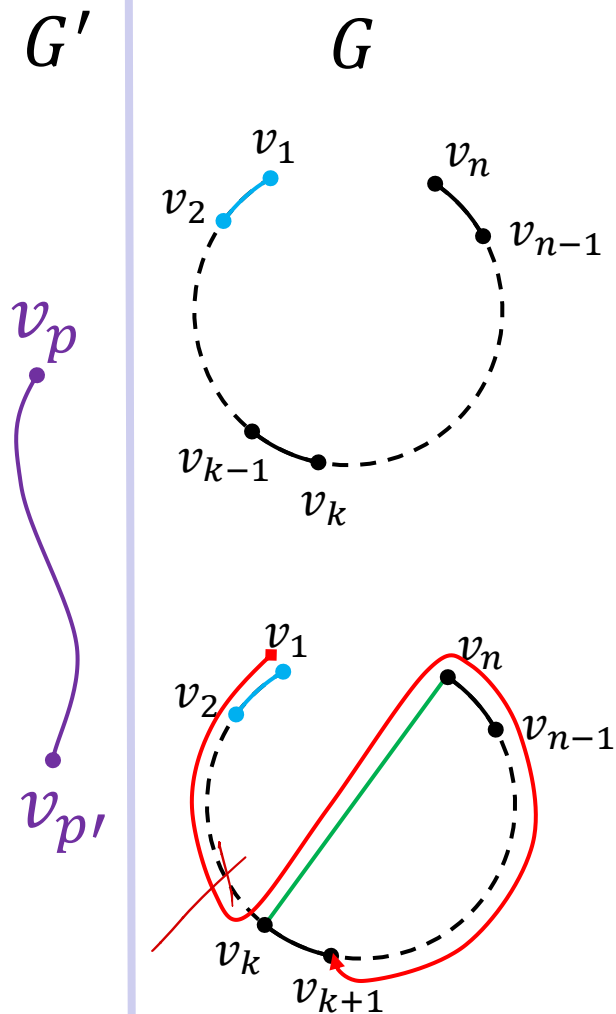
- 定理(Smith): 对3-正则图, 包含图上任意边 e 的哈密顿回路必有偶数条。
- 证明: (Thomason 1978)



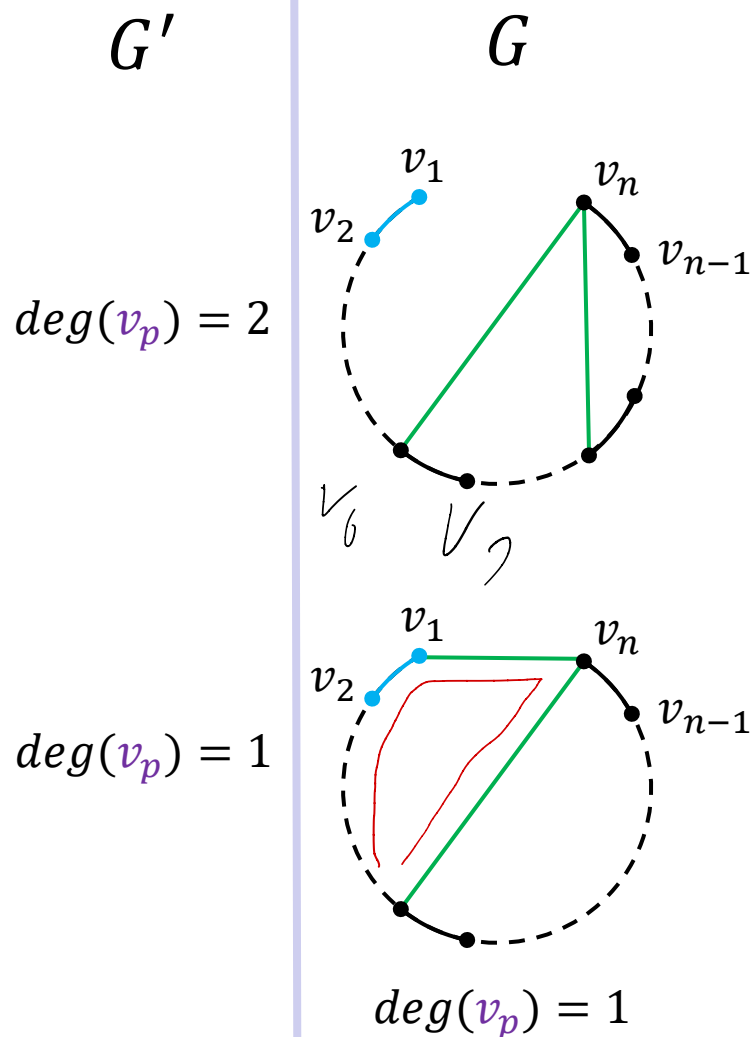
握手定理与哈密顿图

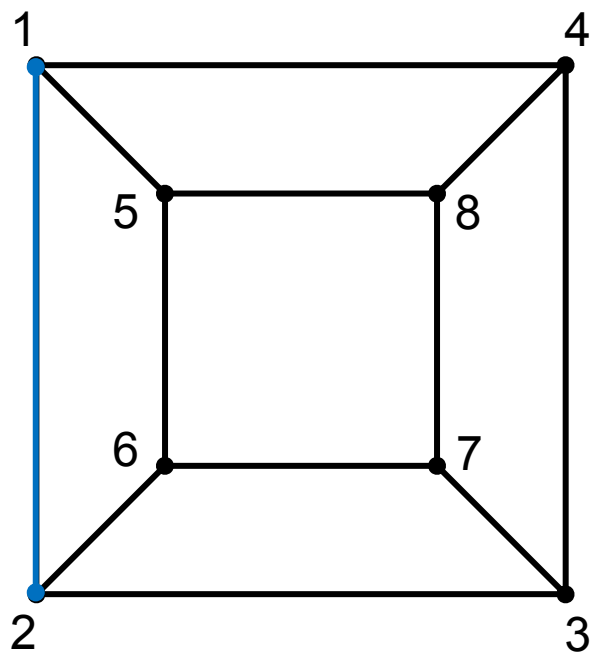
- 定理(Smith): 对3-正则图, 包含图上任意边 e 的哈密顿回路必有偶数条。
- 证明: (Thomason 1978)
 - 图 G 是3-正则图, $e = \{v_1, v_2\}$ 是一条固定的边, 不失一般性, 假设原图中有含有 e 的哈密顿回路。
 - 构造图 $G' = (V', E')$
 - V' 中的每一点, 代表一条从 v_1 开始, 以 e 为第一条边的哈密顿路径 (由前提假设知 V' 非空)
 - 构造 E' :

- 构造 E'
 - $v_p \in V'$ 代表哈密顿路径 P ;
 - v_n 在 G 中度数为3, 故必存在 $1 < k < n - 1$ 满足 $\{v_k, v_n\} \in E(G)$;
 - $P' = v_1 v_2 \dots v_k v_n v_{n-1} \dots v_{k+1}$ 是哈密顿路径。 $v_{p'} \in V'$;
 - $\{v_p, v_{p'}\} \in E'$ 。



- E' 中任意 v_p 的度数至多为2:
- $\deg(v_p) = 1$ 当且仅当原始用到的哈密顿路径实际上是图 G 中一个哈密顿回路。
- 根据握手定理，度数为奇数的点必有偶数个，故必存在另一点 $\deg(v_q) = 1$ 。
- v_q 对应图 G 中的另一条哈密顿回路，得证。

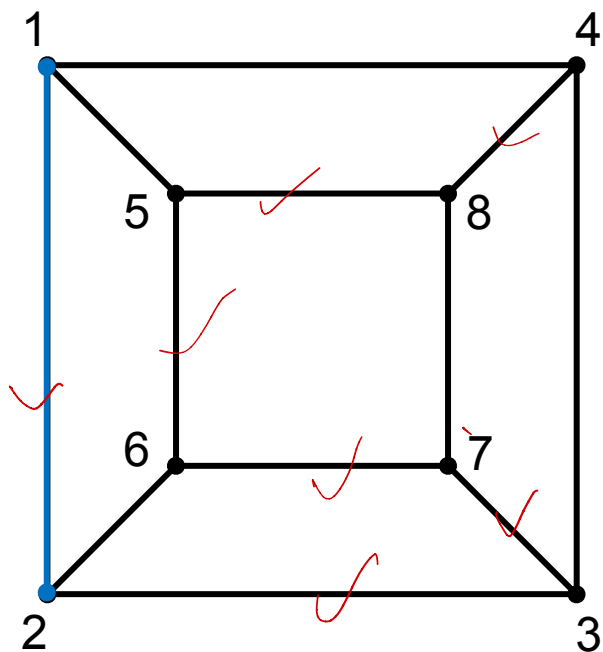




① 12348765(1)

② 12348567

③ 12348765



① 12348765(1)

② 12348567

~~③ 12348765~~

③ 12376584(1)