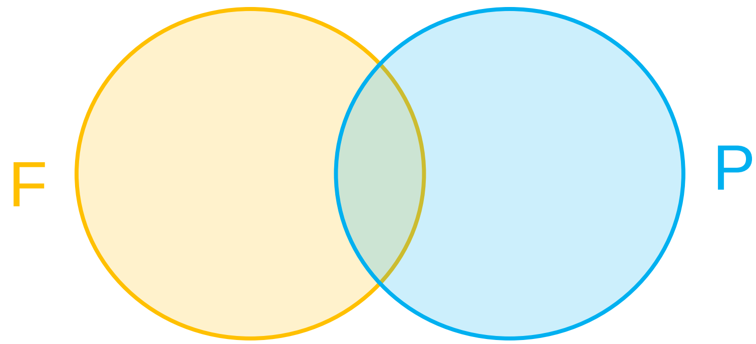
容斥原理

longhuan@sjtu.edu.cn

"One of the most useful principles of enumeration in discrete probability and combinatorial theory is the celebrated *principle of inclusion–exclusion*. When skillfully applied, this principle has yielded the solution to many a combinatorial problem."

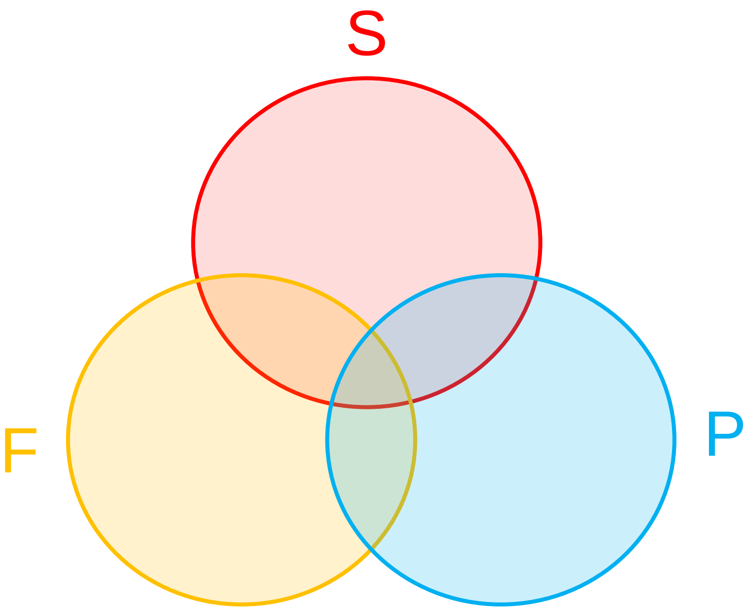
Gian-Carlo Rota (April 27, 1932 – April 18, 1999) was an Italian-born American mathematician and philosopher.

- **问题：** 上海交大计算机某班本学期一共有二门选修课（形式化方法F，概率学P），所有学生都选了至少一门选修课。已知有25个学生选了形式化方法，有28个学生选了概率学。有7个学生选了形式化方法和概率。
  问：此班上一共有多少名学生？



$$
\begin{aligned}
|F \cup P| &= |\mathrm{F}| + |P| - |F \cap P| \\
&= 25 + 28 - 7 \\
&= 46
\end{aligned}
$$

- **问题：** 上海交大计算机某班本学期一共有三门选修课（信息安全S，形式化方法F，概率学P），所有学生都选了至少一门选修课。已知有30个学生选了信息安全，有25个学生选了形式化方法，有28个学生选了概率学。有5个学生选了信息安全和形式化方法，有7个学生选了形式化方法和概率，有9个学生选了信息安全和概率。特别地有5个精力特别充沛的学生同时选了这三门选修课。问：此班上一共有多少名学生？



$$|S \cup F \cup P|$$
$$= |S| + |F| + |P| - |S \cap F| - |S \cap P| - |F \cap P| + |S \cap F \cap P|$$
$$= 30 + 25 + 28 - 5 - 9 - 7 + 5 = 67.$$

容斥原理

- **容斥定理(*Inclusion-exclusion principle*)**：
  对任意有限集合$A_1, A_2, \ldots, A_n$，有

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{I \in \binom{\{1,2,\ldots,n\}}{k}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$$

$$= \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$$

$$|S \cup F \cup P| = |\mathrm{S}| + |\mathrm{F}| + |P| - |S \cap F| - |S \cap P| - |F \cap P| + |S \cap F \cap P|$$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{I \in \binom{\{1,2,\ldots,n\}}{k}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$$

- 证明：（数学归纳法）
  - $n = 2$ 时定理成立。
  - 假设对任意 $n-1$ 定理成立。
  - 继续证明规模为 n 时定理成立，此时：

$$\begin{aligned}
\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| &= \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cup A_n\right| \\
&= \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right| + |A_n| - \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cap A_n\right| \\
&= \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right| + |A_n| - \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n)\right| \\
&= \cdots
\end{aligned}$$

应用一：错排公式

- **错排**：n 个有序的元素应有$n!$ 种不同的排列。如若一个排列式的所有的元素都不在原来的位置上，则称这个排列为***错排***。
- **问题**：任给一个n，求出$1,2,\ldots,n$的错排个数$D(n)$共有多少个？

解：用S_n 表示所有 $\{1,2,\ldots,n\}$上的排列。则 $|S_n| = n!$ 。
对$i = 1,2,\ldots,n$ 定义$A_i = \{\pi \in S_n: \pi(i) = i\}$。
则 $D(n) = n! - |A_1 \cup \cdots \cup A_n|$

$D(n) = n! - |A_1 \cup \cdots \cup A_n|$ $A_i = \{\pi \in S_n\colon \pi(i) = i\}$

- $|A_i| = (n-1)!$
- $i < j$, $\left|A_i \cap A_j\right| = (n-2)!$
- $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$, $|A_{i1} \cap A_{i2} \cap \cdots \cap A_{ik}| = (n-k)!$
- 根据*容斥原理*: $|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}(n-k)! = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{n!}{k!}$
- 故$D(n) = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!}\right)$

$$\lim_{n\to\infty} D(n) = {}^{n!}/_{e}$$

应用二：欧拉函数φ

- **欧拉函数φ：** 给定自然数n，欧拉函数$\varphi(n)$定义为不超过n且与n互素的自然数的个数 $\varphi(n) = |\{m \in \{1,2,\dots,n\}: \gcd(n,m) = 1\}|$.
- **问题：** 求欧拉函数。
- **例：**
  - $\varphi(3) = 2$　　(1,2)
  - $\varphi(8) = 4$　　(1,3,5,7)
  - $\varphi(12) = 4$　　(1,5,7,11)

应用二：欧拉函数φ

- **欧拉函数φ：** 给定自然数n，欧拉函数$\varphi(n)$定义为不超过n且与n互素的自然数的个数 $\varphi(n) = |\{m \in \{1,2,\ldots,n\}: \gcd(n,m) = 1\}|$.
- **问题：** 求欧拉函数。
- **解：** 根据整数分解定理，n可被唯一地分解成$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$。其中 $\alpha_i > 1$且p_i为素数，$p_1 < p_2 < \cdots < p_r$.
  - 如果$1 \le m < n$且m与n不互素，则必存在某个 $1 \le i \le r$ 有 $p_i|m$.
  - $1 \le i \le r$ 令 $A_i = \{m \in \{1,2,\ldots,n\}: p_i|m\}$
  - 则 $\varphi(n) = n - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_r|$

$$\varphi(n) = n - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_r|$$

$1 \le i \le r$ $A_i = \{m \in \{1,2,\ldots,n\}\colon p_i | m\}$

- $|A_i| = \dfrac{n}{p_i}$
- $i < j$ $\left|A_i \cap A_j\right| = \dfrac{n}{p_i p_j}$
- $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$,

$$|A_{i1} \cap A_{i2} \cap \cdots \cap A_{ik}| = \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{ik}}$$

- 根据*容斥原理*并整理化简后，

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right).$$

- 欧拉函数在信息安全领域有重要应用，是是第一个公钥密码方案RSA的基础。