

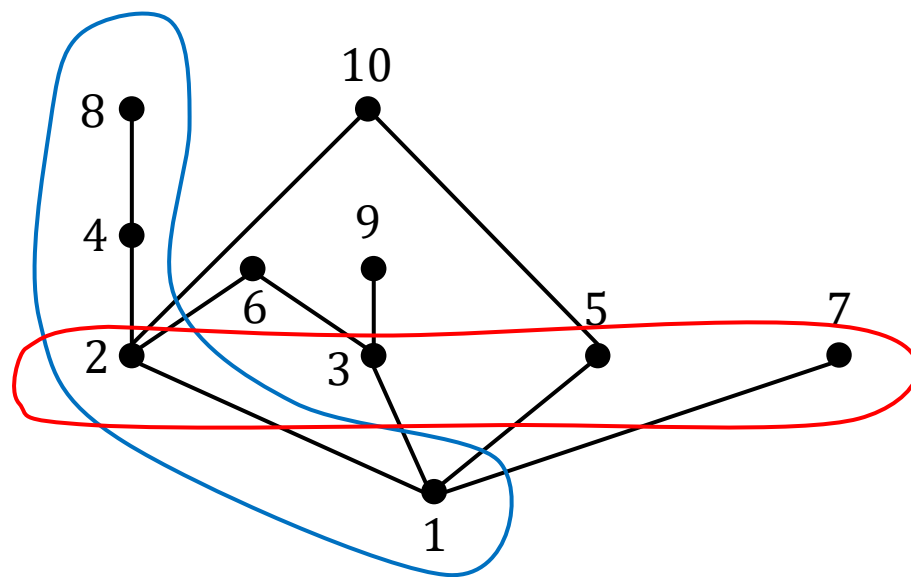
或者“宽”或者“高”

链与反链

对有限偏序集 (S, \leq) ,
 $A \subseteq S$, A 被称为

例: $(\{1, 2, \dots, 10\}, |)$

- **链(Chain)**: 如果对任意 $x, y \in A$, $x \leq y$ 或 $y \leq x$ 。
- **反链(Antichain)**: 如果对任意 $x \neq y \in A$, $x \not\leq y$ 。反链也称为**独立集(Independent set)**。



链与反链

对有限偏序集 (S, \leq) ,
 $x, y \in S$, 称 x, y

例: $(\{1, 2, \dots, 10\}, |)$

- 可比较(Comparable):

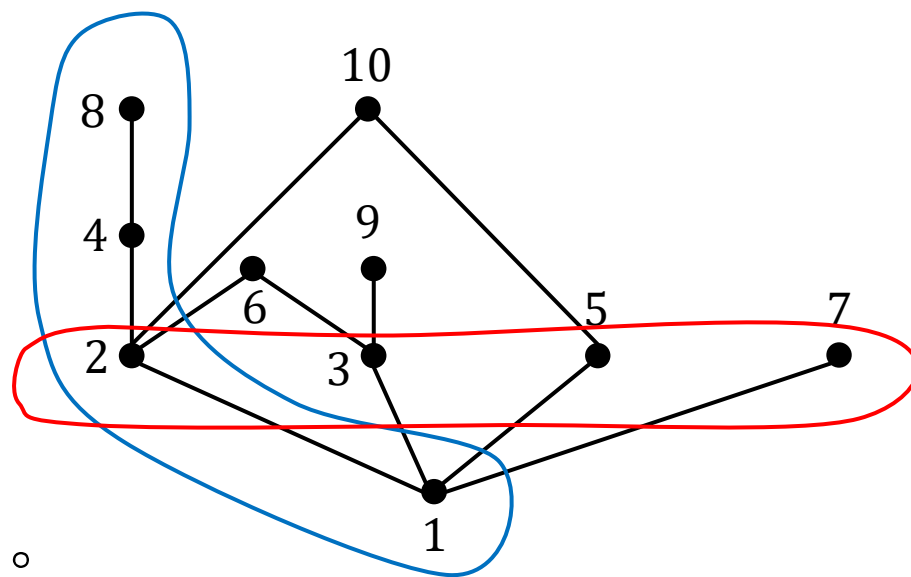
若 $x \leq y$ 或 $y \leq x$ 。

- 不可比较

(Incomparable):

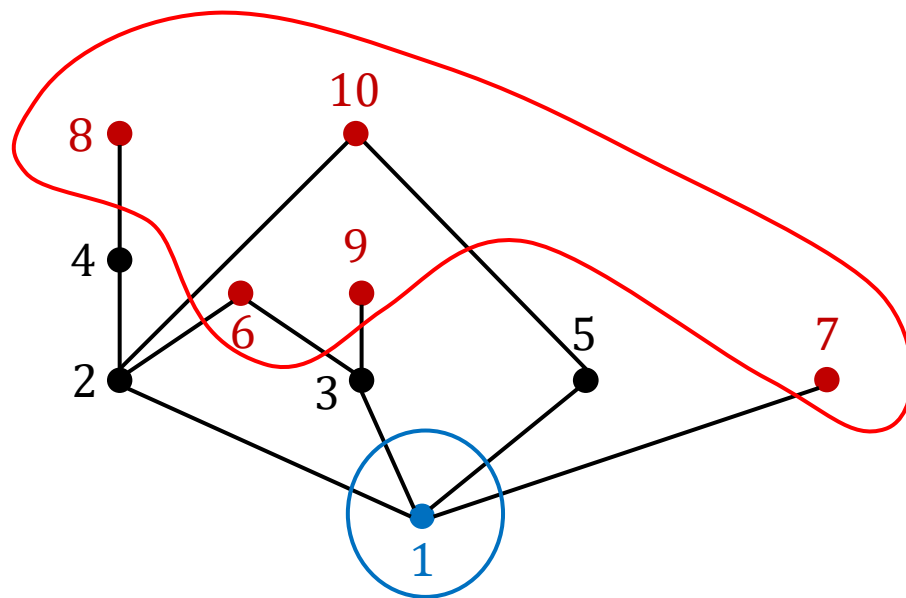
若 $x \not\leq y$ 且 $y \not\leq x$ 。

- 链: 可比较元素的集合。
- 反链: 不可比较元素的集合。



注意：极大元、极小元的集合组成反链。

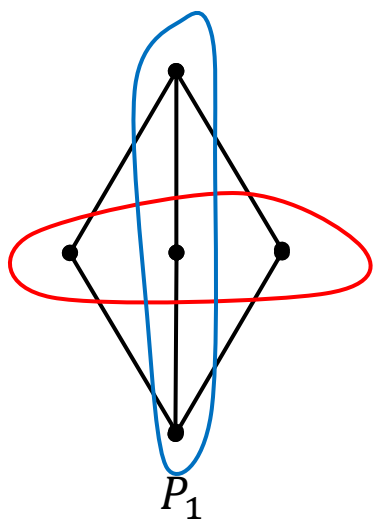
- 例：
 $(\{1, 2, \dots, 10\}, |)$



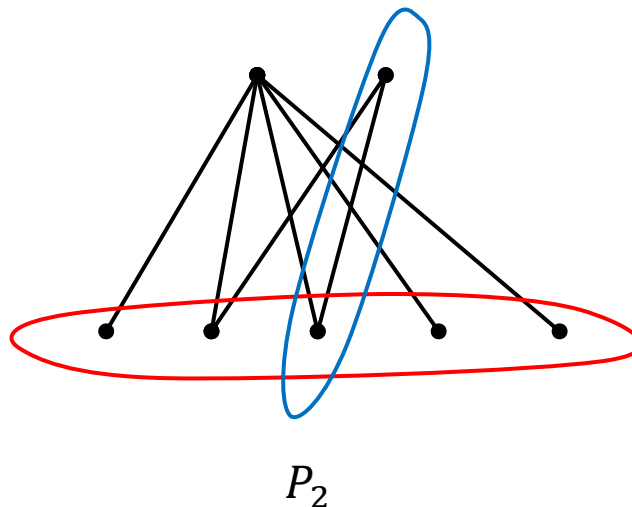
最大独立集和最长链

给定有限偏序集 $P = (S, \leq)$

- $\alpha(P) = \max\{|A|: A \text{ 是 } P \text{ 上的反链 (独立集)}\}$
- $\omega(P) = \max\{|A|: A \text{ 是 } P \text{ 上的链}\}$



$$\alpha(P_1) = 3$$
$$\omega(P_1) = 3$$



$$\alpha(P_2) = 5$$
$$\omega(P_2) = 2$$

最长链长度 = 最小反链划分数

- **定理：** 给定有限偏序集 $P = (S, \leq)$ ，将 S 划分成若干不相交的反链集，取最小划分数 t ，即

$$t = \min \left\{ k \left| \begin{array}{l} S = A_1 \cup \cdots \cup A_k, \\ 1 \leq i \leq k, A_i \text{ 是反链}, \\ \text{任意 } 1 \leq i \neq j \leq k, A_i \cap A_j = \emptyset. \end{array} \right. \right\}$$

则 $t = \omega(P)$.

最长链长度 = 最小反链划分数

- **定理：** 给定有限偏序集 $P = (S, \leq)$ ，将 S 划分成若干不相交的反链集，取最小划分数 t ，即

$$t = \min \left\{ k \left| \begin{array}{l} S = A_1 \cup \cdots \cup A_k, \\ 1 \leq i \leq k, A_i \text{ 是反链}, \\ \text{任意 } 1 \leq i \neq j \leq k, A_i \cap A_j = \emptyset. \end{array} \right. \right\}$$

则 $t = \omega(P)$.

证明：

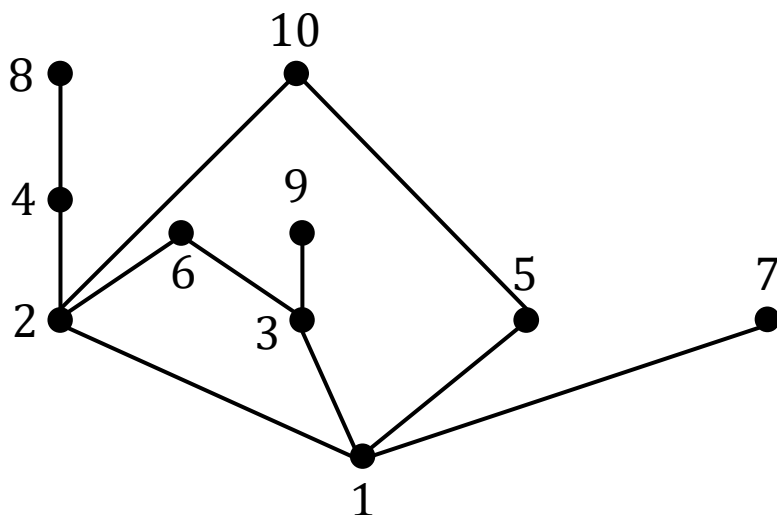
最长链长度 = 最小反链划分数

- 定理：** 给定有限偏序集 $P = (S, \leq)$ ，将 S 划分成若干不相交的反链集，取最小划分数 t ，即

$$t = \min \left\{ k \left| \begin{array}{l} S = A_1 \cup \dots \cup A_k, \\ 1 \leq i \leq k, A_i \text{ 是反链,} \\ \text{任意 } 1 \leq i \neq j \leq k, A_i \cap A_j = \emptyset. \end{array} \right. \right\}$$

则 $t = \omega(P)$.

例：



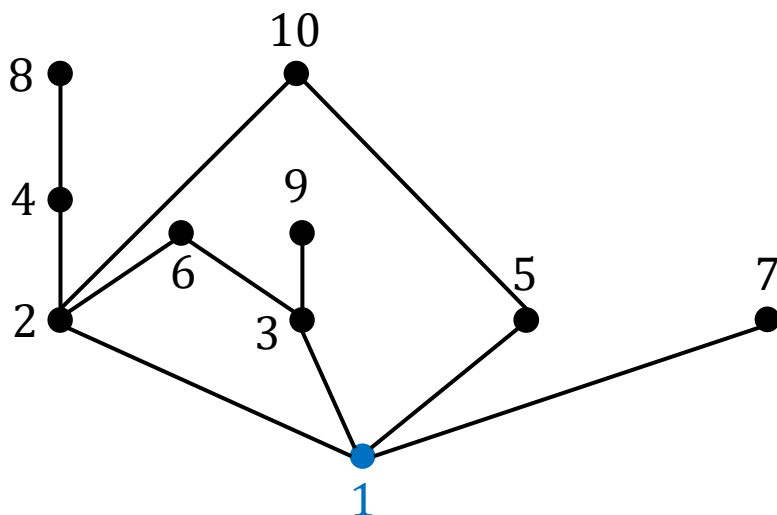
最长链长度 = 最小反链划分数

- 定理：** 给定有限偏序集 $P = (S, \leq)$ ，将 S 划分成若干不相交的反链集，取最小划分数 t ，即

$$t = \min \left\{ k \left| \begin{array}{l} S = A_1 \cup \dots \cup A_k, \\ 1 \leq i \leq k, A_i \text{ 是反链,} \\ \text{任意 } 1 \leq i \neq j \leq k, A_i \cap A_j = \emptyset. \end{array} \right. \right\}$$

则 $t = \omega(P)$.

例：



$$A_1 = \{1\}$$

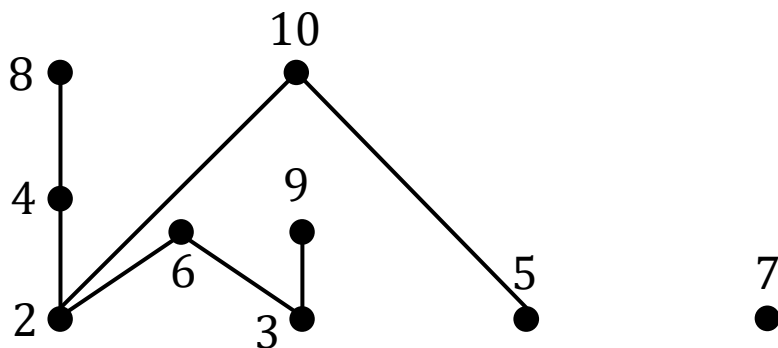
最长链长度 = 最小反链划分数

- 定理：** 给定有限偏序集 $P = (S, \leq)$ ，将 S 划分成若干不相交的反链集，取最小划分数 t ，即

$$t = \min \left\{ k \left| \begin{array}{l} S = A_1 \cup \dots \cup A_k, \\ 1 \leq i \leq k, A_i \text{ 是反链}, \\ \text{任意 } 1 \leq i \neq j \leq k, A_i \cap A_j = \emptyset. \end{array} \right. \right\}$$

则 $t = \omega(P)$.

例：



$$A_1 = \{1\}$$

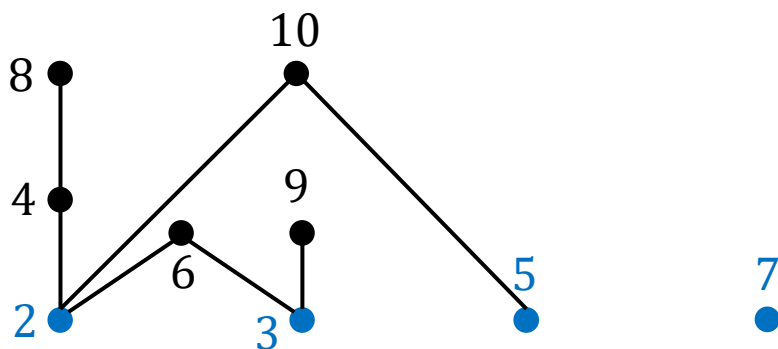
最长链长度 = 最小反链划分数

- 定理：** 给定有限偏序集 $P = (S, \leq)$ ，将 S 划分成若干不相交的反链集，取最小划分数 t ，即

$$t = \min \left\{ k \left| \begin{array}{l} S = A_1 \cup \dots \cup A_k, \\ 1 \leq i \leq k, A_i \text{ 是反链,} \\ \text{任意 } 1 \leq i \neq j \leq k, A_i \cap A_j = \emptyset. \end{array} \right. \right\}$$

则 $t = \omega(P)$.

例：



$$A_2 = \{2, 3, 5, 7\}$$

$$A_1 = \{1\}$$

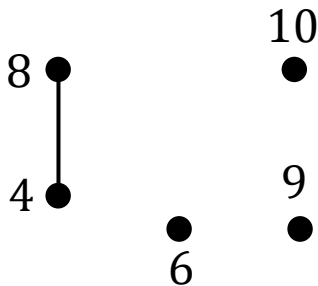
最长链长度 = 最小反链划分数

- 定理：** 给定有限偏序集 $P = (S, \leq)$ ，将 S 划分成若干不相交的反链集，取最小划分数 t ，即

$$t = \min \left\{ k \left| \begin{array}{l} S = A_1 \cup \dots \cup A_k, \\ 1 \leq i \leq k, A_i \text{ 是反链}, \\ \text{任意 } 1 \leq i \neq j \leq k, A_i \cap A_j = \emptyset. \end{array} \right. \right\}$$

则 $t = \omega(P)$.

例：



$$A_2 = \{2, 3, 5, 7\}$$

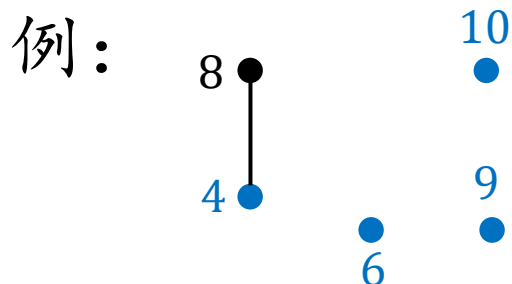
$$A_1 = \{1\}$$

最长链长度 = 最小反链划分数

- **定理：** 给定有限偏序集 $P = (S, \leq)$ ，将 S 划分成若干不相交的反链集，取最小划分数 t ，即

$$t = \min \left\{ k \left| \begin{array}{l} S = A_1 \cup \dots \cup A_k, \\ 1 \leq i \leq k, A_i \text{ 是反链}, \\ \text{任意 } 1 \leq i \neq j \leq k, A_i \cap A_j = \emptyset. \end{array} \right. \right\}$$

则 $t = \omega(P)$.



$$A_3 = \{4, 6, 9, 10\}$$

$$A_2 = \{2, 3, 5, 7\}$$

$$A_1 = \{1\}$$

最长链长度 = 最小反链划分数

- **定理：** 给定有限偏序集 $P = (S, \leq)$ ，将 S 划分成若干不相交的反链集，取最小划分数 t ，即

$$t = \min \left\{ k \left| \begin{array}{l} S = A_1 \cup \dots \cup A_k, \\ 1 \leq i \leq k, A_i \text{ 是反链}, \\ \text{任意 } 1 \leq i \neq j \leq k, A_i \cap A_j = \emptyset. \end{array} \right. \right\}$$

则 $t = \omega(P)$.

例： 8 ●

$$A_3 = \{4, 6, 9, 10\}$$

$$A_2 = \{2, 3, 5, 7\}$$

$$A_1 = \{1\}$$

最长链长度 = 最小反链划分数

- **定理：** 给定有限偏序集 $P = (S, \leq)$ ，将 S 划分成若干不相交的反链集，取最小划分数 t ，即

$$t = \min \left\{ k \left| \begin{array}{l} S = A_1 \cup \dots \cup A_k, \\ 1 \leq i \leq k, A_i \text{ 是反链,} \\ \text{任意 } 1 \leq i \neq j \leq k, A_i \cap A_j = \emptyset. \end{array} \right. \right\}$$

则 $t = \omega(P)$.

例： 8 ●

$$A_4 = \{8\}$$

$$A_3 = \{4, 6, 9, 10\}$$

$$A_2 = \{2, 3, 5, 7\}$$

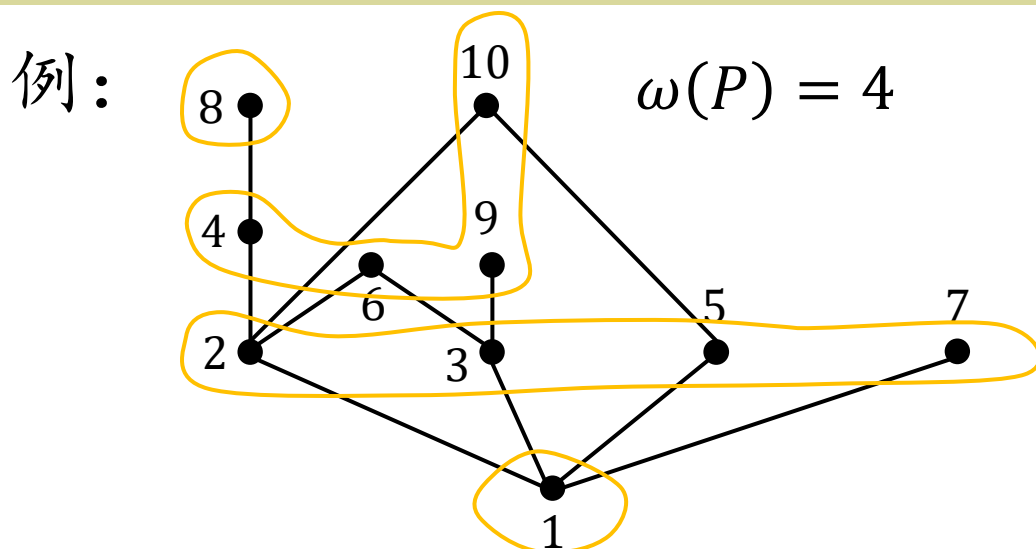
$$A_1 = \{1\}$$

最长链长度 = 最小反链划分数

- 定理：** 给定有限偏序集 $P = (S, \leq)$ ，将 S 划分成若干不相交的反链集，取最小划分数 t ，即

$$t = \min \left\{ k \left| \begin{array}{l} S = A_1 \cup \dots \cup A_k, \\ 1 \leq i \leq k, A_i \text{ 是反链}, \\ \text{任意 } 1 \leq i \neq j \leq k, A_i \cap A_j = \emptyset. \end{array} \right. \right\}$$

则 $t = \omega(P)$.



$$A_4 = \{8\}$$

$$A_3 = \{4, 6, 9, 10\}$$

$$A_2 = \{2, 3, 5, 7\}$$

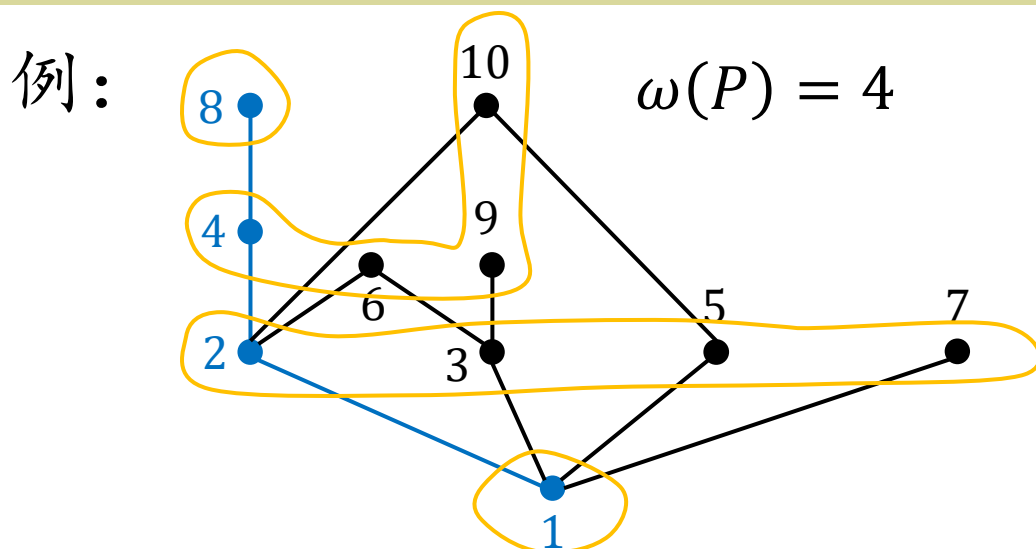
$$A_1 = \{1\}$$

最长链长度 = 最小反链划分数

- 定理：** 给定有限偏序集 $P = (S, \leq)$ ，将 S 划分成若干不相交的反链集，取最小划分数 t ，即

$$t = \min \left\{ k \left| \begin{array}{l} S = A_1 \cup \dots \cup A_k, \\ 1 \leq i \leq k, A_i \text{ 是反链}, \\ \text{任意 } 1 \leq i \neq j \leq k, A_i \cap A_j = \emptyset. \end{array} \right. \right\}$$

则 $t = \omega(P)$.



$$A_4 = \{8\}$$

$$A_3 = \{4, 6, 9, 10\}$$

$$A_2 = \{2, 3, 5, 7\}$$

$$A_1 = \{1\}$$

最长链长度 = 最小反链划分数

- **定理：** 给定有限偏序集 $P = (S, \leq)$ ，将 S 划分成若干不相交的反链集，取最小划分数 t ，即

$$t = \min \left\{ k \left| \begin{array}{l} S = A_1 \cup \dots \cup A_k, \\ 1 \leq i \leq k, A_i \text{ 是反链,} \\ \text{任意 } 1 \leq i \neq j \leq k, A_i \cap A_j = \emptyset. \end{array} \right. \right\}$$

则 $t = \omega(P)$.

证明： $\omega(P) \leq t$

$S = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_t$ ，其中 $\{A_1, \dots, A_t\}$ 为不相交的反链划分，

$C \subseteq S$ 是 P 中任意一条链，有 $|C \cap A_i| \leq 1$.

$$\begin{aligned} |C| &= |C \cap S| = |C \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_t)| \\ &= |(C \cap A_1) \cup \dots \cup (C \cap A_t)| \\ &\leq t \end{aligned}$$

最长链长度 = 最小反链划分数

- **定理：** 给定有限偏序集 $P = (S, \leq)$ ，将 S 划分成若干不相交的反链集，取最小划分数 t ，即

$$t = \min \left\{ k \left| \begin{array}{l} S = A_1 \cup \cdots \cup A_k, \\ 1 \leq i \leq k, A_i \text{ 是反链,} \\ \text{任意 } 1 \leq i \neq j \leq k, A_i \cap A_j = \emptyset. \end{array} \right. \right\}$$

则 $t = \omega(P)$.

证明： $\omega(P) \geq t$

$A_1 = S$ 的极小元集合，

$A_{i+1} = S \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_i)$ 的极小元集合。

每一个 A_i 都是一个反链（独立集）。

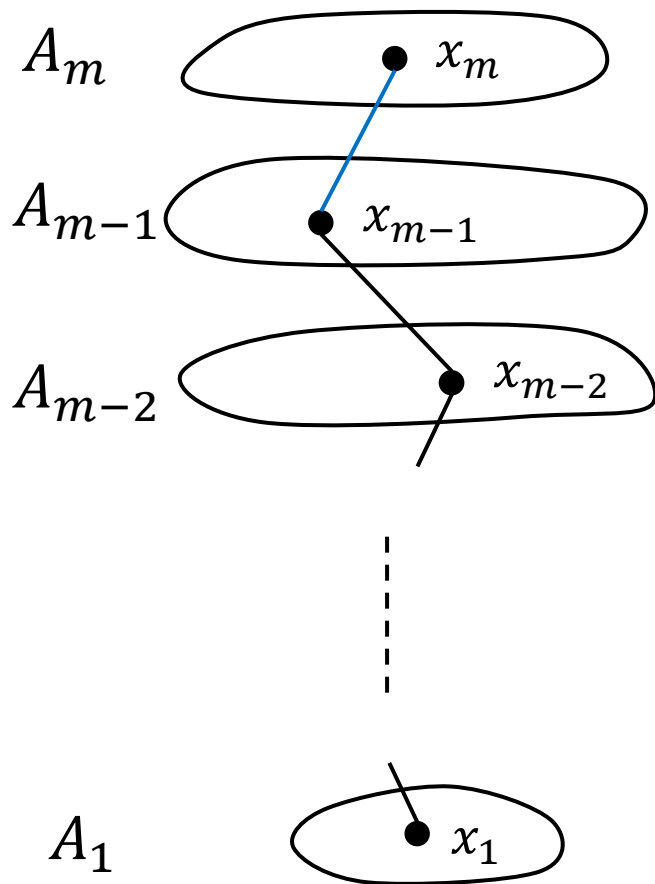
有限步后 $A_1 \cup \cdots \cup A_m = S$ 。

由 t 的最小性， $m \geq t$ 。 只需证明， $\omega(P) \geq m$ 。

证明: $\omega(P) \geq m$

思路: 找长度为 m 的链。

有限偏序集 $P = (S, \leq)$, A_1, A_2, \dots, A_m .
 $A_1 = S$ 的极小元集合,
 $A_{i+1} = S \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_i)$ 的极小元集合。



任取 $x_m \in A_m$

问: x_m 不属于 A_{m-1} 的原因是什么?

答: x_m 不是 $S \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{m-2})$ 的极小元。

故: 存在 $x_{m-1} \in A_{m-1}$, $x_{m-1} < x_m$.

问: x_{m-1} 不属于 A_{m-2} 的原因是什么?

$$x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} < x_m.$$

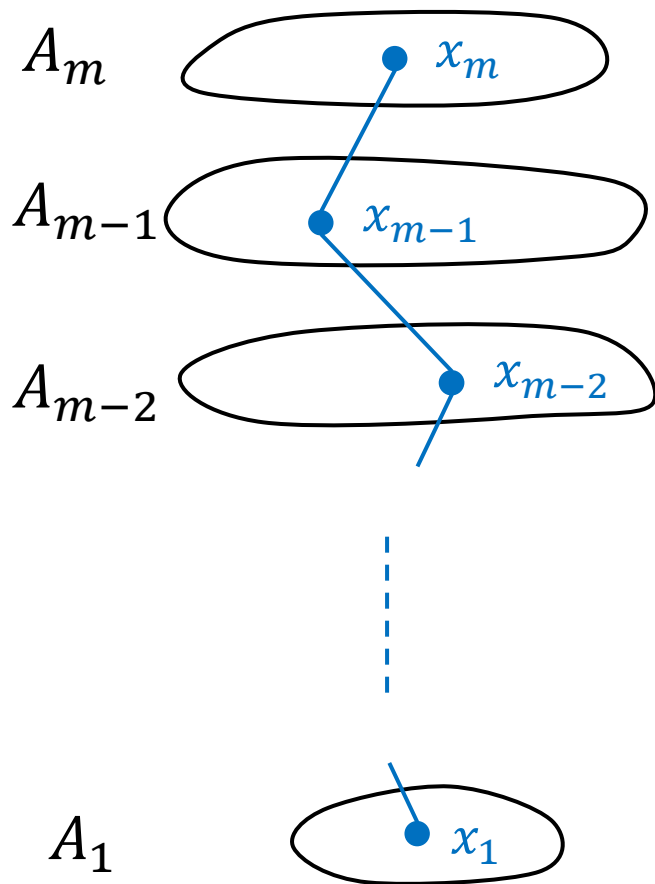
证明: $\omega(P) \geq m$

思路：找长度为 m 的链。

有限偏序集 $P = (S, \leq)$, A_1, A_2, \dots, A_m .

$A_1 = S$ 的极小元集合,

$A_{i+1} = S \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_i)$ 的极小元集合。



任取 $x_m \in A_m$

问: x_m 不属于 A_{m-1} 的原因是什么?

答: x_m 不是 $S \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{m-2})$ 的极小元。

故：存在 $x_{m-1} \in A_{m-1}$, $x_{m-1} < x_m$.

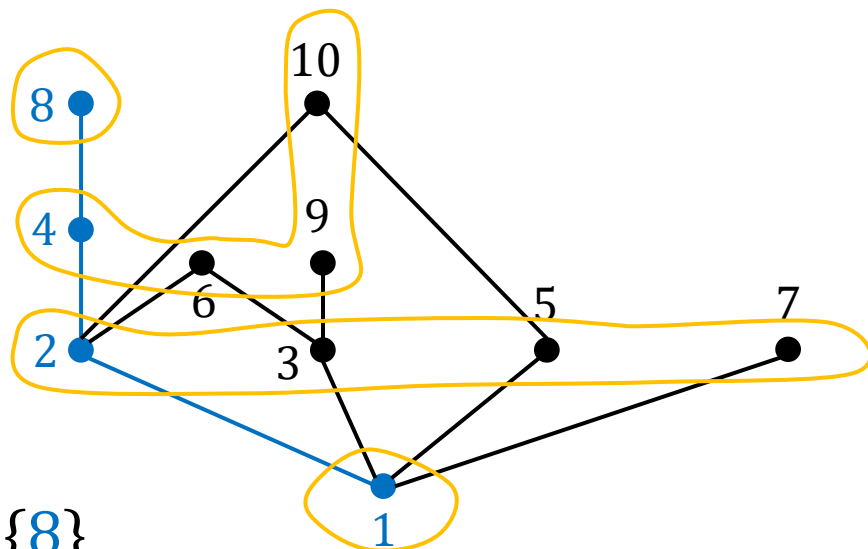
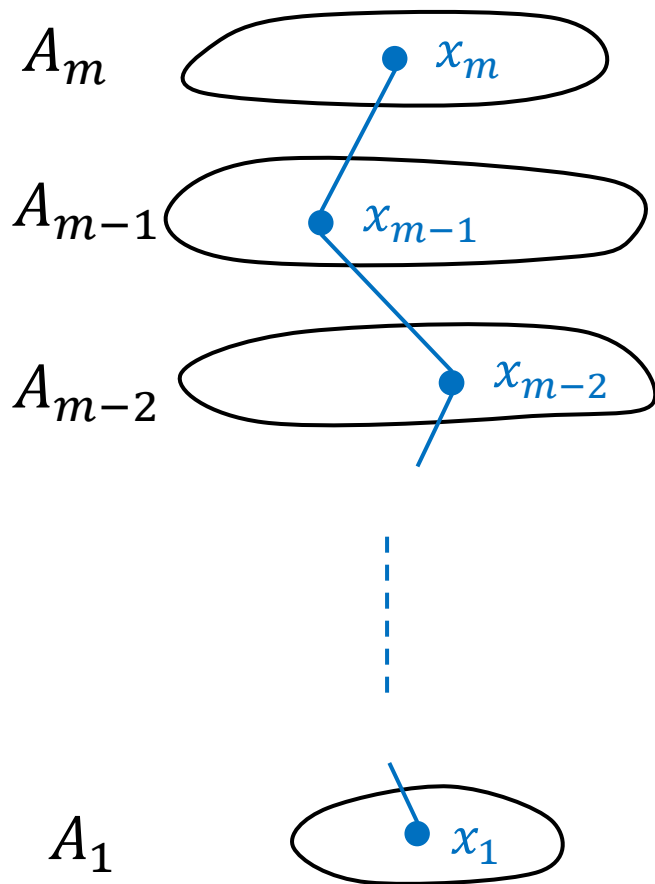
问: x_{m-1} 不属于 A_{m-2} 的原因是什么?

$$x_1 \prec x_2 \prec \cdots \prec x_{m-1} \prec x_m.$$

证明: $\omega(P) \geq m$

思路: 找长度为 m 的链。

有限偏序集 $P = (S, \leq)$, A_1, A_2, \dots, A_m .
 $A_1 = S$ 的极小元集合,
 $A_{i+1} = S \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_i)$ 的极小元集合。



$$A_4 = \{8\}$$

$$A_3 = \{4, 6, 9, 10\}$$

$$A_2 = \{2, 3, 5, 7\}$$

$$A_1 = \{1\}$$

$$\omega(P) = 4$$

- **定理：** 给定有限偏序集 $P = (S, \leq)$,
 $\max\{|C|: C \text{ 是 } P \text{ 上的链}\} = \min\{|\Pi|: \Pi \text{ 是 } S \text{ 的反链划分}\}.$
- **推论：** 给定有限偏序集 $P = (S, \leq)$
 $\alpha(P) \cdot \omega(P) \geq |S|.$

证明：

$$P = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_t$$

$$t = \omega(P)$$

$$|A_i| \leq \alpha(P)$$

$$|S| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_t| \leq \alpha(P) \cdot \omega(P)$$

- **定理：** 给定有限偏序集 $P = (S, \leq)$,
 $\max\{|C|: C \text{ 是 } P \text{ 上的链}\} = \min\{|\Pi|: \Pi \text{ 是 } S \text{ 的反链划分}\}.$
- **推论：** 给定有限偏序集 $P = (S, \leq)$
 $\alpha(P) \cdot \omega(P) \geq |S|.$

对任意有限偏序集 $P = (S, \leq)$, $\alpha(P)$ 或 $\omega(P)$ 之一至少为 $\sqrt{|S|}$ 。

直观：任意有限偏序集或者“宽”，或者“高”。

定理的应用

- Erdős-Szekeres引理:

任意含有 $n^2 + 1$ 个元素的实数序列
 (x_1, \dots, x_{n^2+1}) 中都含有一个长度为 $n + 1$
的单调子序列。

定理的应用

- Erdős-Szekeres引理:

任意含有 $n^2 + 1$ 个元素的实数序列
 (x_1, \dots, x_{n^2+1}) 中都含有一个长度为 $n + 1$
的单调子序列。

例: $n = 3$, $(1, 2, 10, 4, 3, 5, 1, 6, 5, 8)$

定理的应用

- Erdős-Szekeres引理:

任意含有 $n^2 + 1$ 个元素的实数序列
 (x_1, \dots, x_{n^2+1}) 中都含有一个长度为 $n + 1$
的单调子序列。

例: $n = 3$, (1, 2, 10, 4, 3, 5, 1, 6, 5, 8)

定理的应用

- Erdős-Szekeres引理:

任意含有 $n^2 + 1$ 个元素的实数序列
 (x_1, \dots, x_{n^2+1}) 中都含有一个长度为 $n + 1$
的单调子序列。

证明: 对 (x_1, \dots, x_{n^2+1}) , 设 $I = \{1, 2, \dots, n^2 + 1\}$

在集合 I 上定义关系 \leq : $i \leq j$ 当且仅当 $(i \leq j) \wedge (x_i \leq x_j)$

(I, \leq) 是偏序集。

- $\omega(I, \leq) > n$: 非递减子序列 $x_{i_1} \leq x_{i_2} \leq \dots \leq x_{i_m}$.

- $\alpha(I, \leq) > n$: 独立集 $\{i_1, i_2, \dots, i_m\}$, 设 $i_1 < i_2 < \dots < i_m$

$x_{i_1} > x_{i_2} > \dots > x_{i_m}$, 非递增子序列。

总结

- 链、反链（独立集）
- 最大独立集、最长链
- 最长链长度 = 最小反链划分数
- Erdős-Szekeres引理

- **Mirsky's theorem定理:** 给定有限偏序集 $P = (S, \leq)$,
 $\max\{|C|: C \text{ 是 } P \text{ 上的链}\} = \min\{|\Pi|: \Pi \text{ 是 } S \text{ 的反链划分}\}.$
- **Dilworth定理:** 给定有限偏序集 $P = (S, \leq)$,
 $\max\{|A|: A \text{ 是 } P \text{ 上的反链}\} = \min\{|\beta|: \beta \text{ 是 } S \text{ 的链划分}\}.$

- <https://www.math.cmu.edu/~af1p/>
- <https://www.math.cmu.edu/~af1p/Teaching/Combinatorics/Slides/Posets.pdf>