1. 解：比 X 次数最小为 7，

$6\times7=42$，$50-42=8$

设 y_i 为第 i 个括号中选的数的次数，易知 $y_i\geq7$

则 $y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6=50$

令 $m_i=y_i-7\geq0$

则有 $\sum_{i=1}^{6}(m_i+7)=50$

$m_1+m_2+m_3+m_4+m_5+m_6=8$

非负解个数为 $\binom{8+6-1}{6-1}=1287$

即系数为 1287

(2) $\frac{(2+x)^{\frac{3}{2}}}{1-x} = \frac{[-(1-x)+3]^{\frac{3}{2}}}{1-x}$

设 $y=1-x$ 则原式 $= \frac{(3-y)^{\frac{3}{2}}}{y}$

$$= \frac{(-y)^0 \cdot (3)^{\frac{3}{2}} \cdot \binom{\frac{3}{2}}{0} + (-y)^1 \cdot (3)^{\frac{1}{2}} \binom{\frac{3}{2}}{1} + \cdots}{y}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-y)^{k-1} \cdot (3)^{\frac{3}{2}-k} \cdot \binom{\frac{3}{2}}{k} \cdot (-1)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (x-1)^{k-1} (3)^{\frac{3}{2}-k} \binom{\frac{3}{2}}{k} \cdot (-1)$$

求系数：

系数 $= \sum_{k=4}^{10} (3)^{\frac{3}{2}k} \binom{\frac{3}{2}}{k} \cdot (-1) \cdot \binom{k-1}{3} (-1)^{k-4}$

(3) $(2+3x)^5 \sqrt{1-x}$

$= \left[(2+3x)^5 \cdot\right] \left[\sum_{k=0}^{\infty} 1^{\frac{1}{2}-k} \cdot (-x)^k \cdot \binom{\frac{1}{2}}{k} \right]$

$= \sum_{j=0}^{5} 2^j \cdot (3x)^{5-j} \cdot \binom{5}{j} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k \binom{\frac{1}{2}}{k}$

$\therefore x^5$ 系数为

$2^0 \cdot 3^5 \cdot \binom{5}{0} \cdot (-1)^0 \cdot \binom{\frac{1}{2}}{0}$

$+ 2^1 \cdot 3^4 \binom{5}{1} \cdot (-1)^1 \cdot \binom{\frac{1}{2}}{1}$

二、、、

$$= \sum_{k=0}^{5} 2^{k} \cdot 3^{5-k} \cdot \binom{5}{k} \cdot (-1)^{k} \binom{\frac{1}{2}}{k}$$

2.解：(1)：0, 0, 0, 0, -6, 6, -6, 6, -6 ⋯

分析：0, 0, 0, 0 为乘以 x^4，

而 -6, 6, -6, 6 为 -1, 1, -1, 1 乘以 6

-1, 1, -1, 1 ⋯ 的生成函数为

$-1 + x - x^2 + x^3 \cdots$

$$= \frac{(-1)\cdot(1-(-x)^n)}{1-(-x)} = \frac{-1}{1+x}$$

$\therefore$ -6, 6, -6, 6 为 $\frac{-6}{1+x}$

$\therefore\ a(x)=\dfrac{-6x^4}{1+x}$

(2) 分析: $1,0,1,0\cdots$ 为

$1,1,1$ 插入一个零

而 $1,1,1$ 生成函数为 $\dfrac{1}{1-x}$

$\therefore\ a(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$

(3) $1,2,1,4,1,8$ 为

$1,0,1,0,1,0$ 与 $0,2,0,4,0,8$ 之和

而 $0,2,0,4,0,8$ 为 $2,0,4,0,8$ 右移

对于 $1,0,1,0,1,0$, $a_1(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$

对于 $2,4,8$ 为 $\dfrac{2}{1-2x}$

$\therefore$ 2, 0, 4, 0, 8 为 $\frac{2}{1-2x^2}$

$\therefore$ 0, 2, 0, 4, 0, 8 为 $\frac{2x}{1-2x^2}$

$\therefore a(x) = \frac{1}{1-x^2} + \frac{2x}{1-2x^2}$

3: 解: $(1+x+x^2+\cdots)(x^3+x^6+\cdots)$

$(x^3+x^6+\cdots)$

易知, $i \le 5$ 时, $a_i = 0$

当 $i > 5$ 时,

原式 $= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{x^3}{1-x^3} \cdot \frac{x^3}{1-x^3}$

$$(1-x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} (-x)^k$$

$$(1-x^3)^{-2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-2}{k} (-x^3)^k$$

$$\therefore \text{原式} = x^6 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} (-x)^k \right)$$

$$\cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} \binom{-2}{i} (-x^3)^i \right)$$

$$= x^6 \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} \cdot (-1)^k \cdot x^k \right)$$

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} \binom{-2}{j} (-1)^j \, x^{3j} \right)$$

$\therefore$ x^n 的系数为

$$\binom{-1}{n-6}(-1)^{n-6}\binom{-2}{0}(-1)^{0}$$

$$+\binom{-1}{n-9}(-1)^{n-9}\cdot\binom{-2}{1}\cdot(-1)^{1}$$

$$+\binom{-1}{n-12}(-1)^{n-12}\cdot\binom{-2}{2}(-1)^{2}$$

$$+\cdots$$

4：解：

$$a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

$$a'(x) = a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)x^3 + \cdots$$

$$a'(x) - a(x) = a_0 x + (a_0 + a_1)x^2 + (a_0 + a_1 + a_2)x^3$$

$$= x\left(a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + \cdots\right)$$

$= x\,a'(x)$

$\therefore\ a'(x)(1-x) = a(x)$

$\therefore\ a'(x) = \dfrac{a(x)}{1-x}$