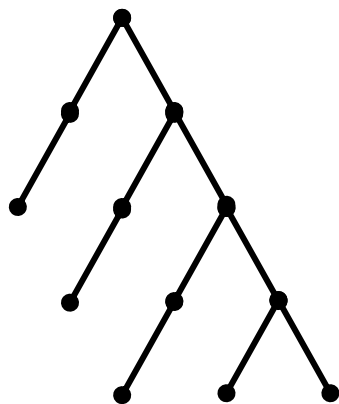


# The number of spanning trees

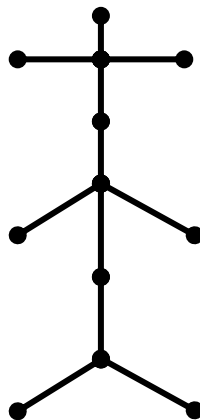
[longhuan@sjtu.edu.cn](mailto:longhuan@sjtu.edu.cn)

# 树的刻画

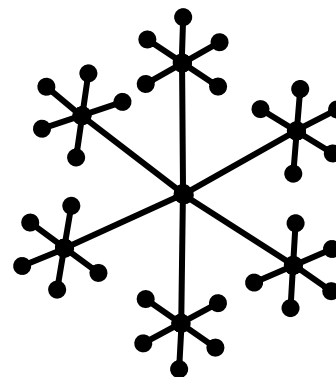
- 树(Tree): 连通无环图。
- 树的例子:



$T_1$

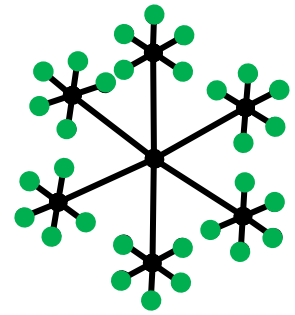


$T_2$

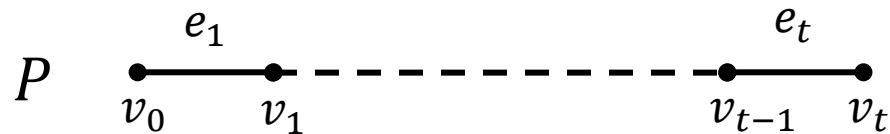


$T_3$

# 叶子(leaf)



- **叶子(leaf)**: 图 $G$ 中度数为1的顶点被称为叶子或终点(end-vertex)。
- **引理**: 对任意树 $T$ , 如果 $|T| \geq 2$ , 则 $T$ 必含有至少两个终点。
- **证明**: 取 $T$ 中的一条极长路径 $P$



$$\deg_T(v_0) = \deg_T(v_t) = 1$$

# 树的基本性质

- 树生长引理(Tree-growing lemma): 对图 $G$ 及图 $G$ 上的叶子结点 $v$ 而言, 如下命题等价
  - I. 图 $G$ 是树。
  - II. 图 $G - v$ 是树。
- 证明:

树生长引理的意义: 在归纳证明中的应用。

# 树的等价刻画

- 对图 $G = (V, E)$ 而言，以下陈述等价
  - I. 图 $G$ 是树。
  - II. 路径唯一：对任意两点 $u, v \in V$ ，存在从 $u$ 到 $v$ 的唯一路径。
  - III. 最小连通图： $G$ 是连通图，且去掉任意一条边后都成为非连通图。
  - IV. 最大无环图： $G$ 不含环，但增加任何一条边所得到的图 $G + e$ （其中 $e \in \binom{V}{2} \setminus E$ ）中含有一个环。
  - V. Euler方程： $G$ 是连通图，且 $|V| = |E| + 1$ 。

# 树的等价刻画

- 对图 $G = (V, E)$ 而言，以下陈述等价
  - I. 图 $G$ 是树。
  - II. 路径唯一：对任意两点 $u, v \in V$ ，存在从 $u$ 到 $v$ 的唯一路径。
  - III. 最小连通图： $G$ 是连通图，且去掉任意一条边后都成为非连通图。
  - IV. 最大无环图： $G$ 不含环，但增加任何一条边所得到的图 $G + e$ （其中 $e \in \binom{V}{2} \setminus E$ ）中含有一个环。
  - V. Euler方程： $G$ 是连通图，且 $|V| = |E| + 1$ 。

# 树的等价刻画

- 对图  $G = (V, E)$  而言，以下陈述等价

I. 图  $G$  是树。

V. Euler方程:  $G$  是连通图, 且  $|V| = |E| + 1$ 。

- 证明: (I.  $\Leftrightarrow$  V.)

还原一个个树上去

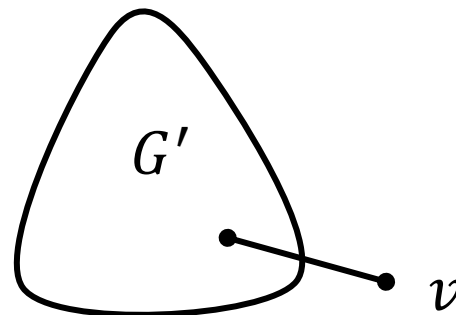
- 充分性: 归纳法 (用树生长引理, 对顶点个数做归纳)。

- 必要性: (归纳法) 考虑连通图  $G$  满足  $|V| = |E| + 1 \geq 2$ 。

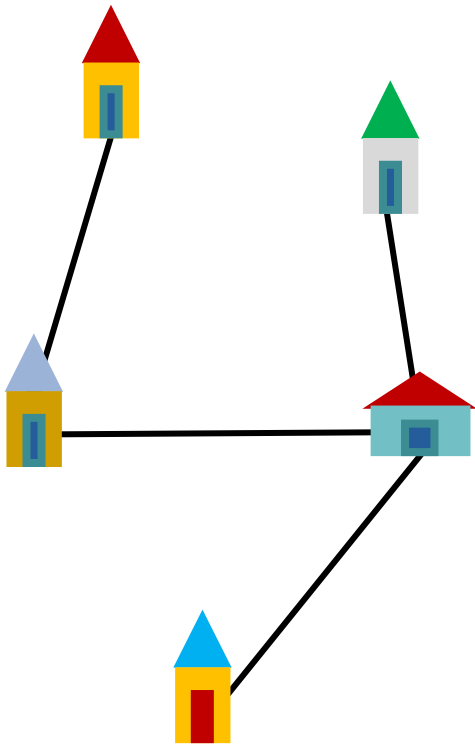
- 由握手定理, 图  $G$  中顶点度数之和为  $2|V| - 2$ 。故图  $G$  中必存在度数小于2的顶点, 且图  $G$  是连通图, 任何点度数非0, 故存在度数为1的点, 设为  $v$ 。

- 考虑  $G' = G - v$ 。易验证归纳假设条件成立, 根据归纳假设  $G'$  是树。

- 显然,  $G'$  是树蕴含  $G$  是树。



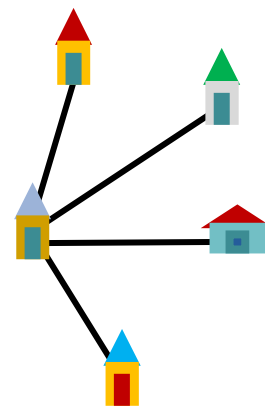
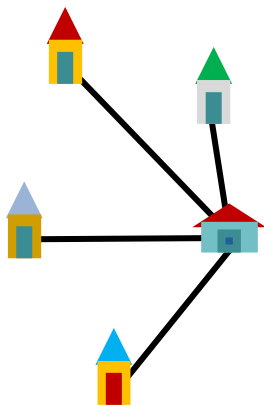
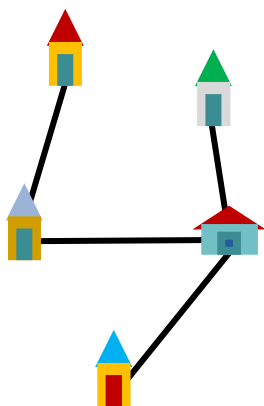




- **问题：**某小镇一共有 $n$ 座房子，某天小镇上的人计划在房子下面修建紧急逃生地道，使得所有房子从地下最后是连通的，同时出于安全考虑地道图中不允许有环。问有多少种挖掘地道的方案？

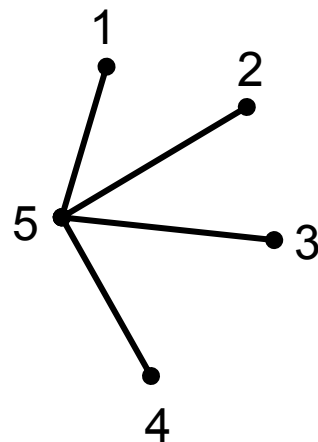
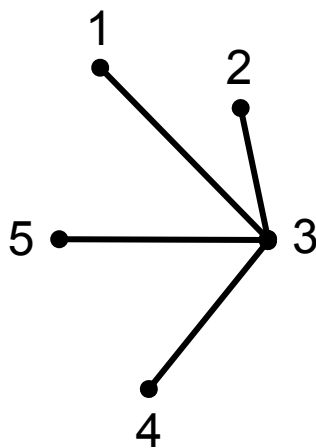
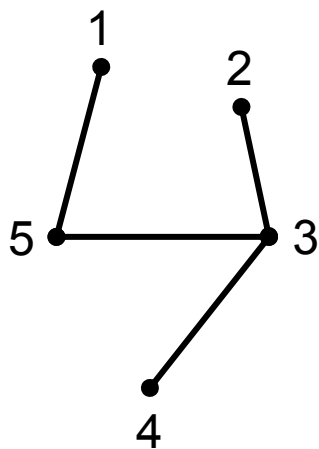
# 树的计数

- 问题抽象：  $n$  个不同顶点所能构成的树的个数。



# 树的计数

- **问题抽象**：  $n$  个不同顶点所能构成的树的个数。
- 两棵树  $T, T'$  是“相等”的当且仅当树  $T$  的边集与树  $T'$  的边集相等。



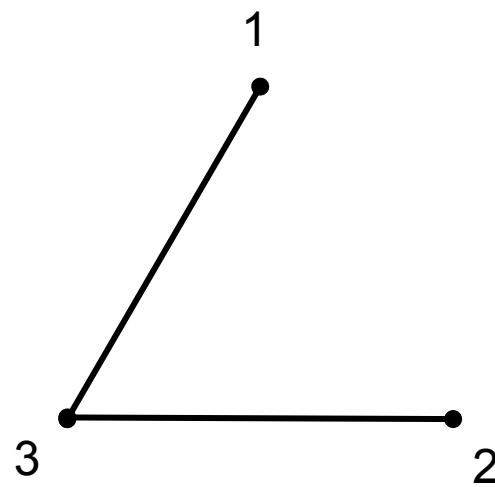
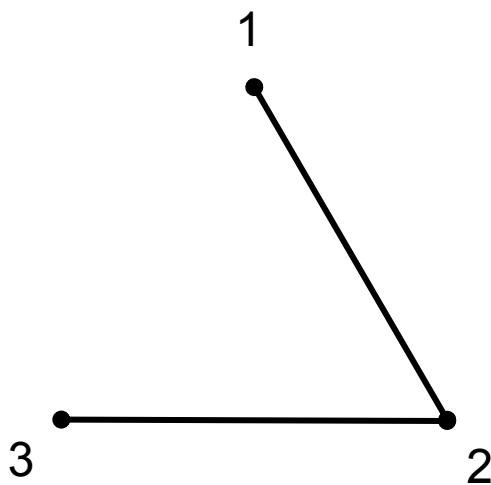
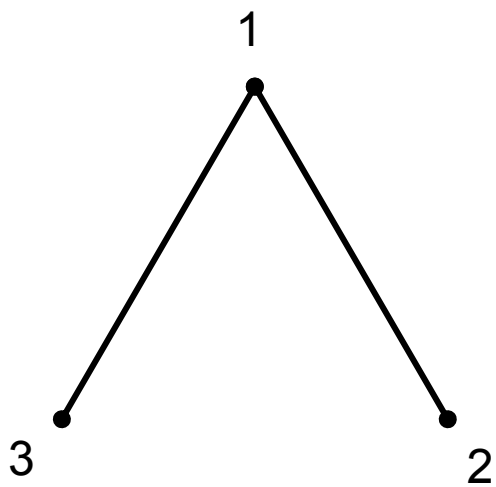
# 生成树

- **生成树(Spanning tree)**: 对连通图 $G = (V, E)$ , 生成树是包含 $G$ 的所有顶点且为树的子图。
- 上述问题最终抽象为: 设 $V = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $n \geq 2$ , 问 $K_n$ 的生成树一共有多少种?

- $n = 2$ : 1种



•  $n = 3$ : 3种



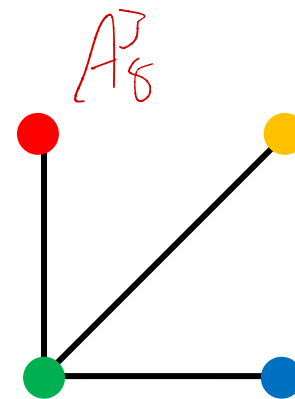
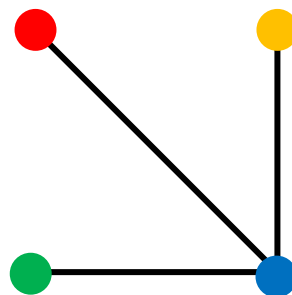
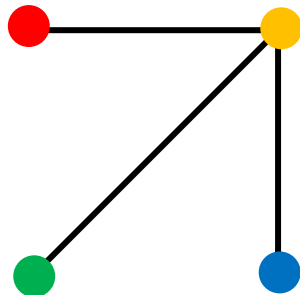
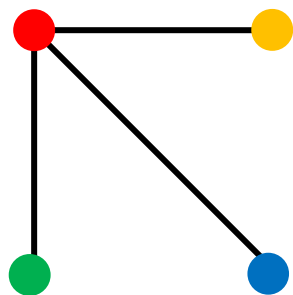
3 1 1 1

0 0 0 0 0  
 $\binom{3}{5} = 10$

$C_8^2 = 10$

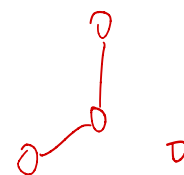
•  $n = 4$ : ?种

— 星形: 4种



$A_8^3$

— 路径:  $\frac{4!}{2} = 12$  种

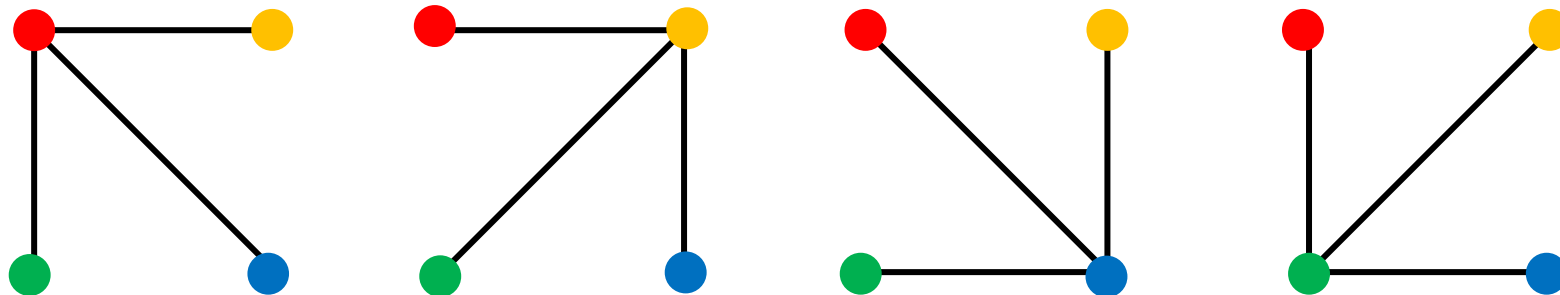


5 4 3

1 1 1 1

•  $n = 4$ : 16种

– 星形: 4种



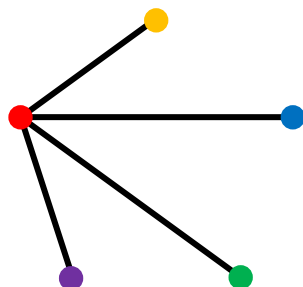
– 路径:  $\frac{4!}{2} = 12$  种



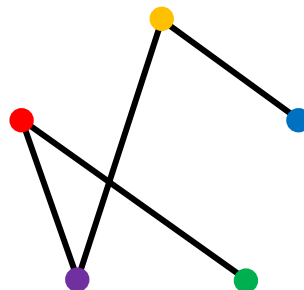


•  $n = 5$ : ?种

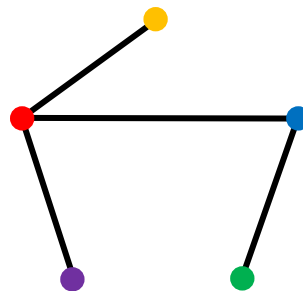
— 星形: 5 种



— 路径:  $\frac{5!}{2} = 60$  种

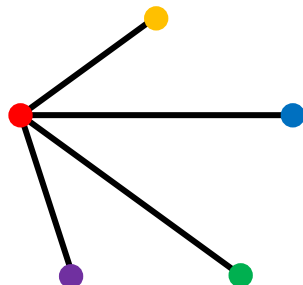


— T形:  $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$  种

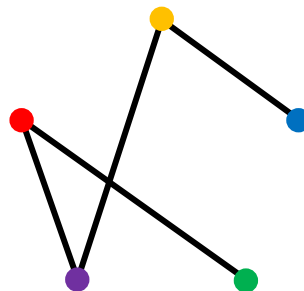


•  $n = 5$ : 125种

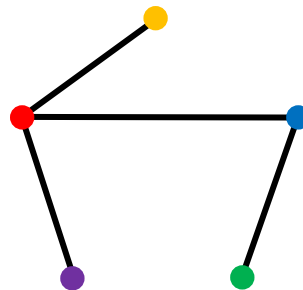
— 星形: 5种



— 路径:  $\frac{5!}{2} = 60$ 种



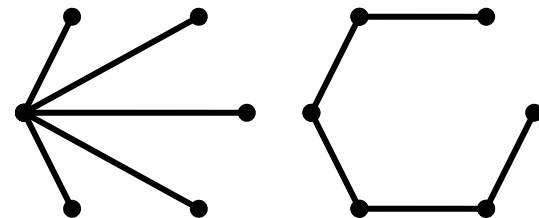
— T形:  $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ 种



- $n = 6$ : ?种

•  $n = 6$ : ?种

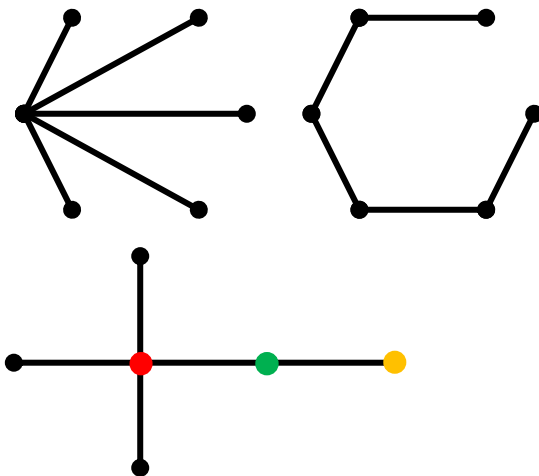
– 星形: 6种, 路径:  $\frac{6!}{2} = 360$  种



•  $n = 6$ : ?种

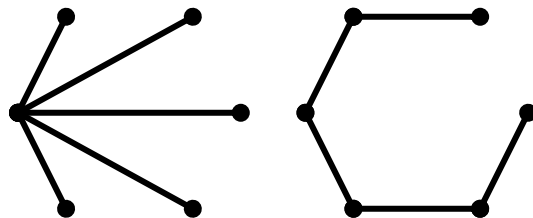
– 星形: 6种, 路径:  $\frac{6!}{2} = 360$  种

– 十字架形:  $6 \times 5 \times 4 = 120$  种

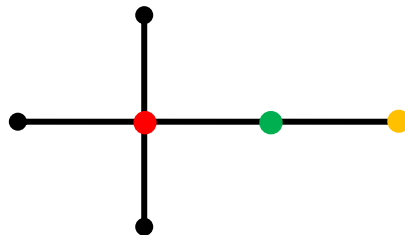


•  $n = 6$ : ?种

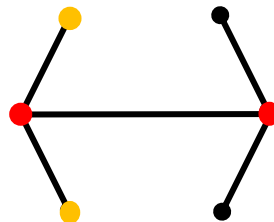
– 星形: 6种, 路径:  $\frac{6!}{2} = 360$  种



– 十字架形:  $6 \times 5 \times 4 = 120$  种



– 双箭头形:  $\binom{6}{2} \times \binom{4}{2} = 90$  种

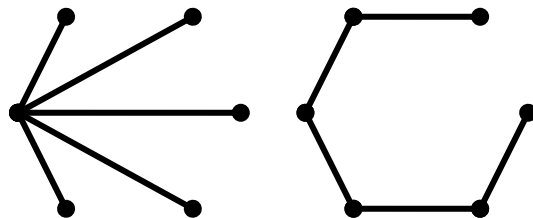


0-60-

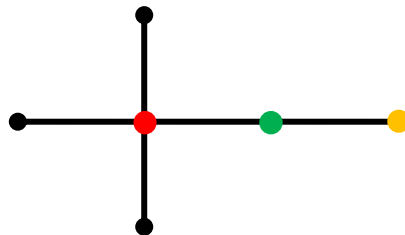
0-0-0-0

•  $n = 6$ : ?种

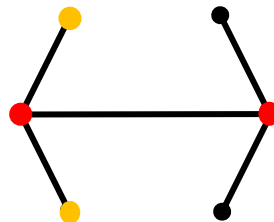
– 星形: 6种, 路径:  $\frac{6!}{2} = 360$  种



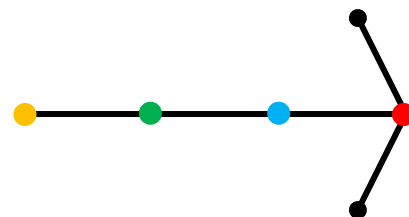
– 十字架形:  $6 \times 5 \times 4 = 120$  种



– 双箭头形:  $\binom{6}{2} \times \binom{4}{2} = 90$  种

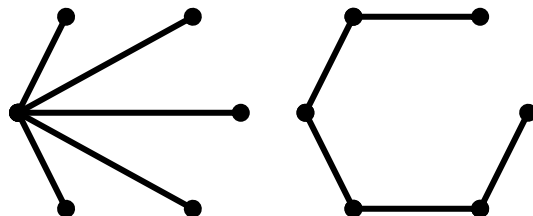


– 单箭头形:  $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$  种

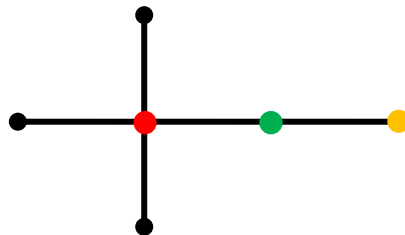


•  $n = 6$ : ?种

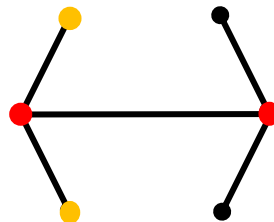
– 星形: 6种, 路径:  $\frac{6!}{2} = 360$  种



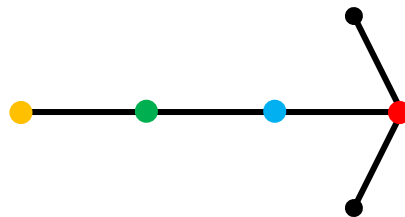
– 十字架形:  $6 \times 5 \times 4 = 120$  种



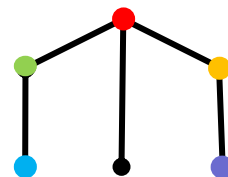
– 双箭头形:  $\binom{6}{2} \times \binom{4}{2} = 90$  种



– 单箭头形:  $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$  种



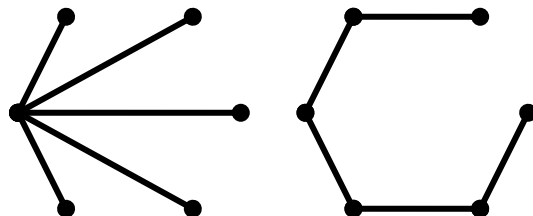
– 雨棚形:  $\frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{2} = 360$  种



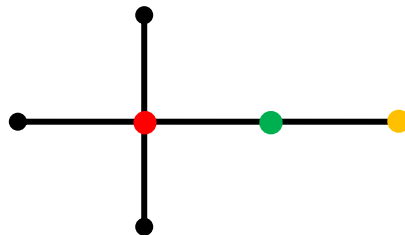


•  $n = 6$ : 1296种

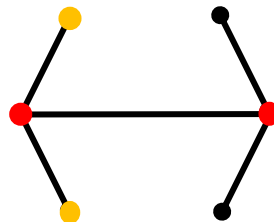
– 星形: 6种, 路径:  $\frac{6!}{2} = 360$  种



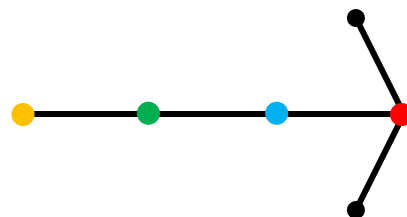
– 十字架形:  $6 \times 5 \times 4 = 120$  种



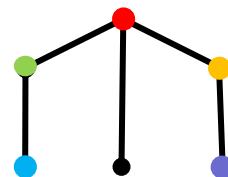
– 双箭头形:  $\binom{6}{2} \times \binom{4}{2} = 90$  种



– 单箭头形:  $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$  种



– 雨棚形:  $\frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{2} = 360$  种



# 含 $n$ 个顶点的树

顶点个数	树的种数
1	1
2	1
3	3
4	16
5	125
6	1296

# 含 $n$ 个顶点的树

顶点个数	树的种数
1	$1 = 1^{-1}$
2	$1 = 2^0$
3	$3 = 3^1$
4	$16 = 4^2$
5	$125 = 5^3$
6	$1296 = 6^4$

- **Caley 定理(Caley's formula):**  $n$ 个顶点能构成的不同树一共有 $n^{n-2}$ 种。



# A proof via score

用归纳法

要写的声音

**Proposition.** Let  $d_1, d_2, \dots, d_n$  be positive integers summing up to  $2n - 2$ . Then the number of spanning trees of the graph  $K_n$  in which the vertex  $i$  has degree exactly  $d_i$  for all  $i = 1, 2, \dots, n$  equals

$$\frac{(n-2)!}{(d_1-1)!(d_2-1)! \cdots (d_n-1)!}$$

集序列对应  
生成树 棵树

**Proof.** (By induction on  $n$ )  $T$ : the set of STs of  $K_n$  with given degrees.

- $n = 1, 2$ , the proposition holds trivially. 因为  $2n-2$ , 一定有度为1的
- $n > 2$ : there must exist an  $i$  with  $d_i = 1$ . w.l.o.g.  $d_n = 1$ .
- For  $1 \leq i \leq n-1$ ,  $T_i \subseteq T$ , where  $T_i$  is the STs with  $\{i, n\} \in E$
- Delete  $v_n$  from each tree in  $T_i$  to get  $T'_i$ : STs of  $K_{n-1}$  with degrees  $d_1, d_2, \dots, d_{i-1}, d_i - 1, d_{i+1}, \dots, d_{n-1}$ .

取特殊点  $V_n$  (度数为 1)

看它与谁相邻

$$T_i \subseteq T \quad |T| = \sum_{j=1}^n |T_j|$$

去掉  $V_i V_n$  这条边

树  $t_i$  变成树  $t_j'$

# A proof via score

**Proposition.** Let  $d_1, d_2, \dots, d_n$  be positive integers summing up to  $2n - 2$ . Then the number of spanning trees of the graph  $K_n$  in which the vertex  $i$  has degree exactly  $d_i$  for all  $i = 1, 2, \dots, n$  equals

$$\frac{(n-2)!}{(d_1-1)!(d_2-1)! \cdots (d_n-1)!}.$$

**Proof. (Continue)**

树 树 树 不变 树

$$\bullet \quad |T_i| = |T'_i| = \frac{(n-3)!}{(d_1-1)! \cdots (d_{i-1}-1)! (d_i-2)! (d_{i+1}-1)! \cdots (d_{n-1}-1)!}$$

$$= \frac{(n-3)!(d_i-1)}{(d_1-1)!(d_2-1)! \cdots (d_{n-1}-1)!} \quad \text{用归纳假设 设}$$

$$|T| = \sum_{i=1}^n |T_i| = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(n-3)!(d_i-1)}{(d_1-1)!(d_2-1)! \cdots (d_{n-1}-1)!} = \cdots$$

$$(2n-2) - (n-1) - 1 = n-2$$

$$= (n-2)!$$

# A proof via score

**Proposition.** Let  $d_1, d_2, \dots, d_n$  be positive integers summing up to  $2n - 2$ . Then the number of spanning trees of the graph  $K_n$  in which the vertex  $i$  has degree exactly  $d_i$  for all  $i = 1, 2, \dots, n$  equals

$$\frac{(n-2)!}{(d_1-1)!(d_2-1)! \cdots (d_n-1)!}.$$

**Finally**

$$\begin{aligned} |T(K_n)| &= \sum_{\substack{d_1, d_2, \dots, d_n \geq 1 \\ d_1 + d_2 + \dots + d_n = 2n-2}} \frac{(n-2)!}{(d_1-1)!(d_2-1)! \cdots (d_n-1)!} \\ &= \sum_{\substack{k_1 + k_2 + \dots + k_n = n-2 \\ k_1, \dots, k_n \geq 0}} \frac{(n-2)!}{k_1! k_2! \cdots k_n!} \\ &= \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)^{n-2}} = n^{n-2}. \end{aligned}$$



# A proof with Vertebrates

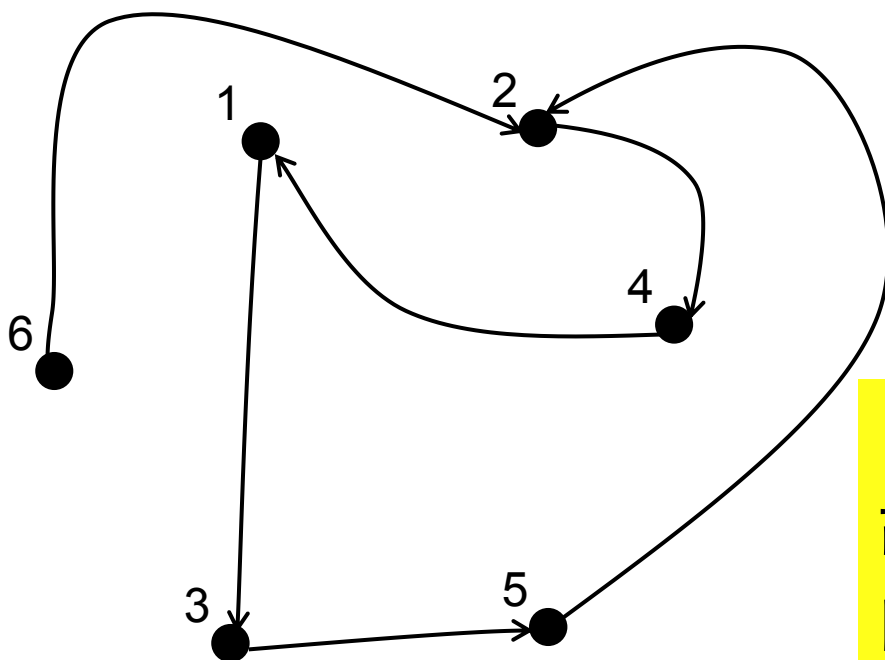


# 有限域上的函数与函数图

- Function graph

$$f: V \rightarrow V$$

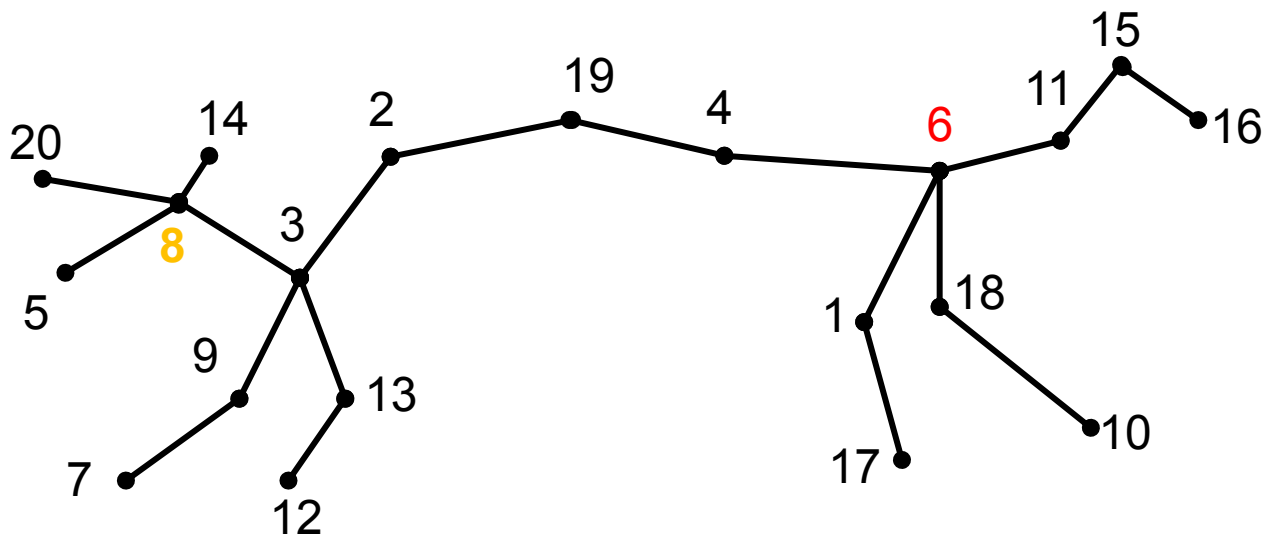
$v$	1	2	3	4	5	6
$f(v)$	3	4	5	1	2	2

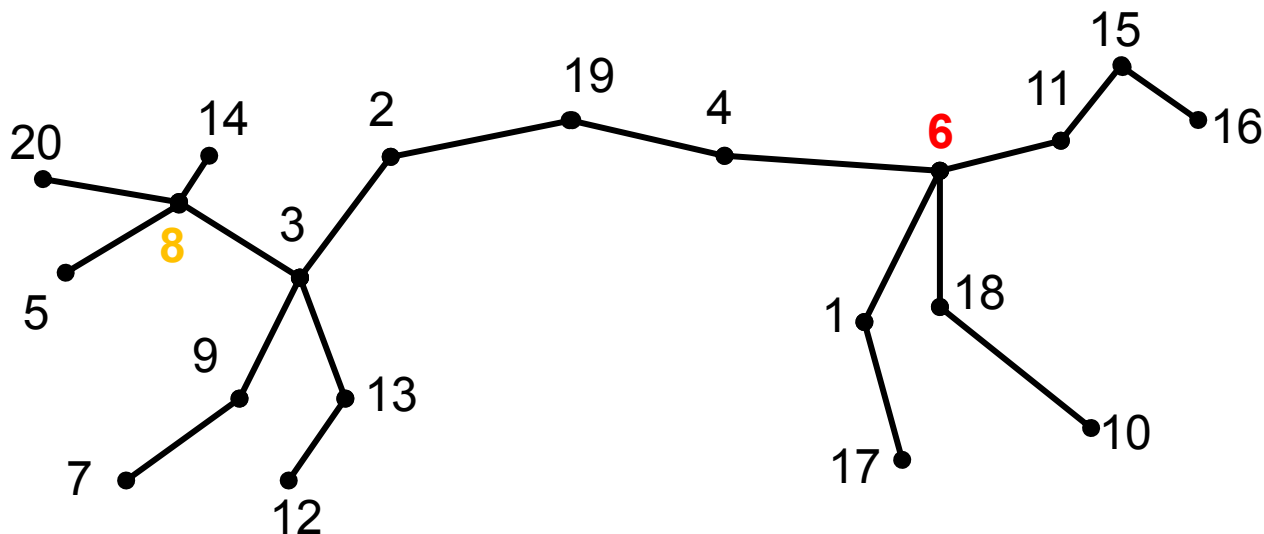


函数图与函数一一对应。  
故 $|V| = n$ 时共有 $n^n$ 种不同的函数图。

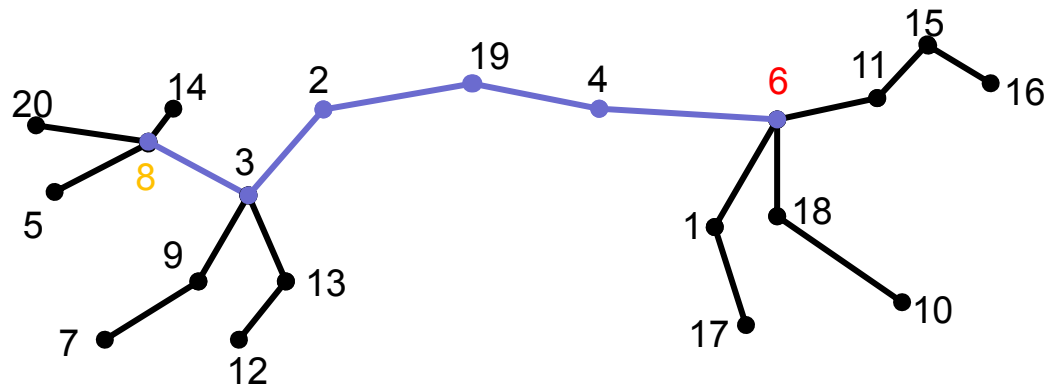
# 脊椎动物(Vertebrate)骨骼标本

- **骨骼标本**：三元组 $(T, h, b)$ 被称为骨骼标本若其中(1)  $T$ 是一棵树；(2)  $h, b \in V$ 。  $h$ 被称为颈椎骨，  $b$ 被称为尾椎骨。
- 注意：  $h, b$ 必须是树上的节点，除此外没有任何限制（可重合）。

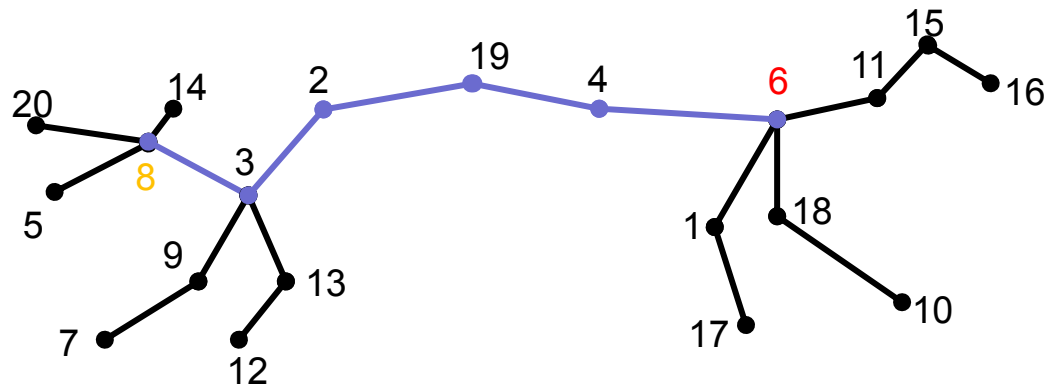




- ① 如果 $|V| = n$ , 用 $T_n$ 表示 $V$ 上的树的所有可能棵数。
- ② 每一棵树 $T$ 对应 $n^2$ 种骨骼标本 $(T, h, b)$ 。
- ③ 骨骼标本与 $V$ 上的函数图一一对应。有 $n^n$ 种。
- ④ 根据②③: 
$$T_n = \frac{n^n}{n^2} = n^{n-2}$$

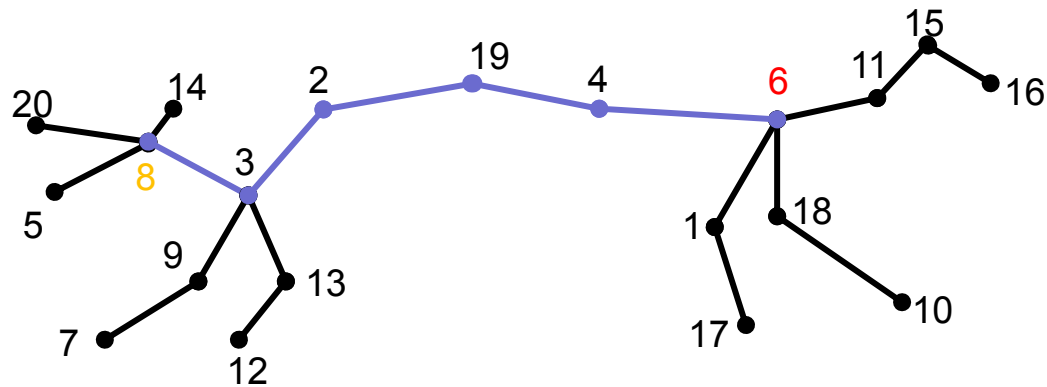


- **脊椎(Spine)**: 出现在从颈椎骨到尾椎骨的路径上的点被称为脊椎。



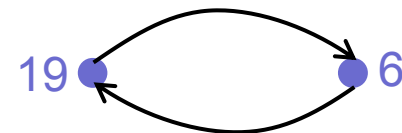
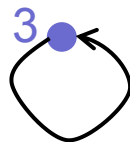
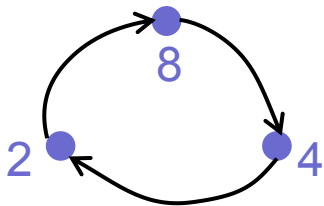
- **脊椎(Spine)**: 出现在从颈椎骨到尾椎骨的路径上的点被称为脊椎。

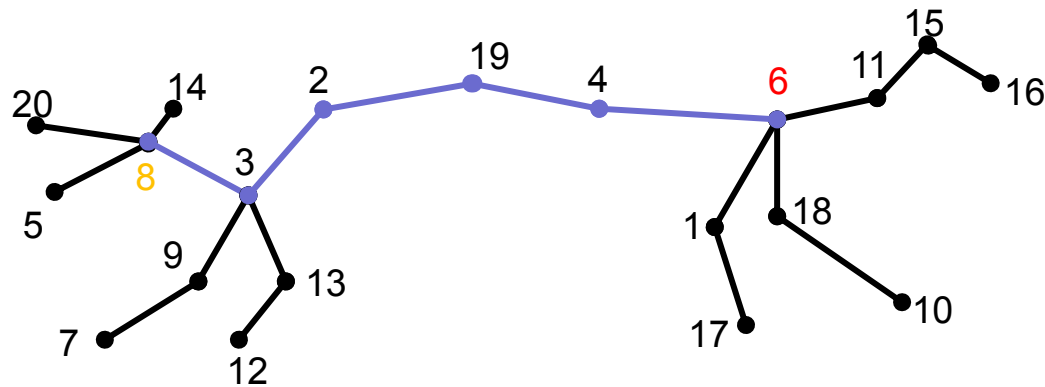
$v$						
$f(v)$	8	3	2	19	4	6



- **脊椎(Spine)**: 出现在从颈椎骨到尾椎骨的路径上的点被称为脊椎。

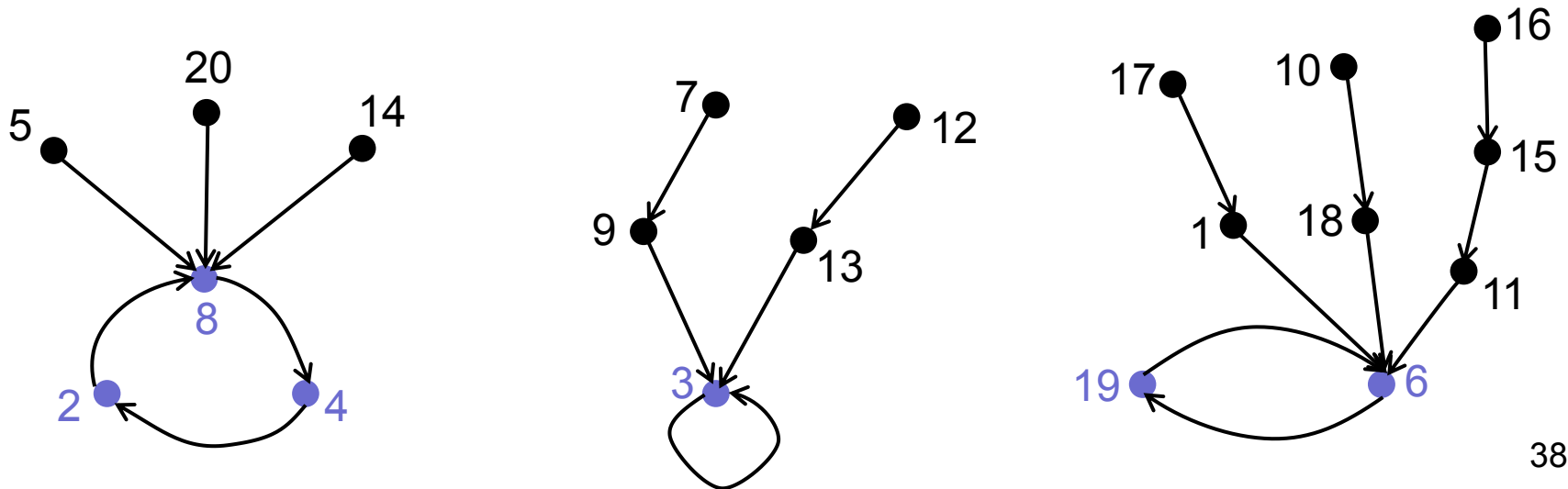
$v$	2	3	4	6	8	19
$f(v)$	8	3	2	19	4	6





- **脊椎(Spine)**: 出现在从颈椎骨到尾椎骨的路径上的点被称为脊椎。

$v$	2	3	4	6	8	19
$f(v)$	8	3	2	19	4	6

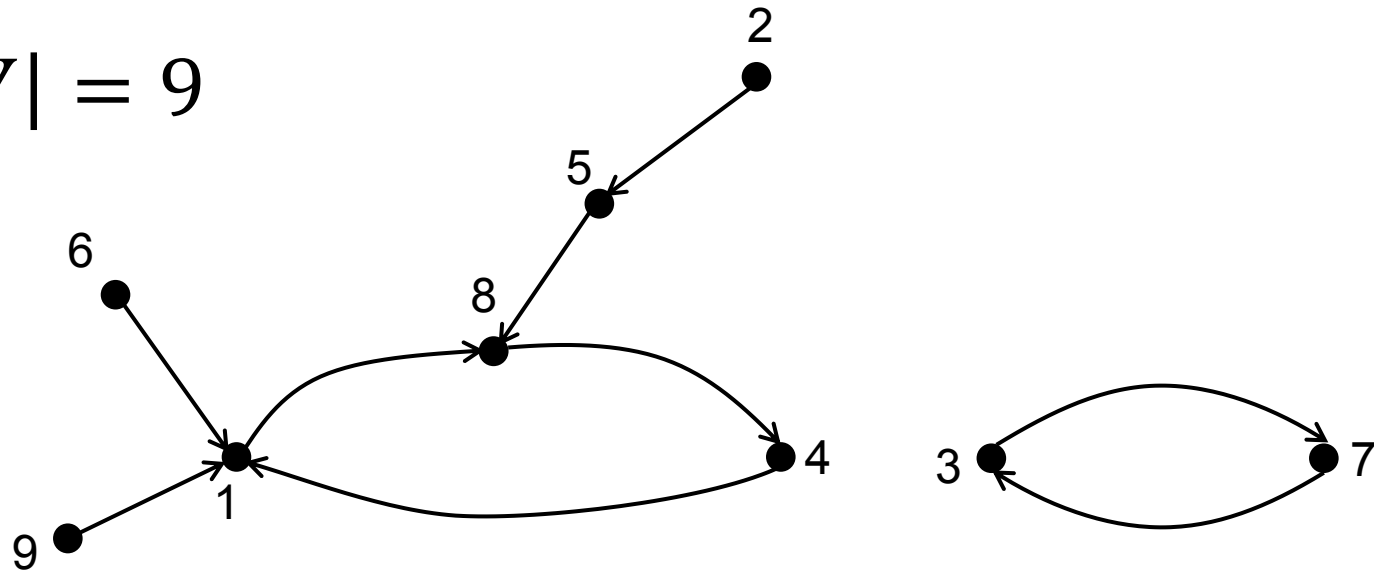




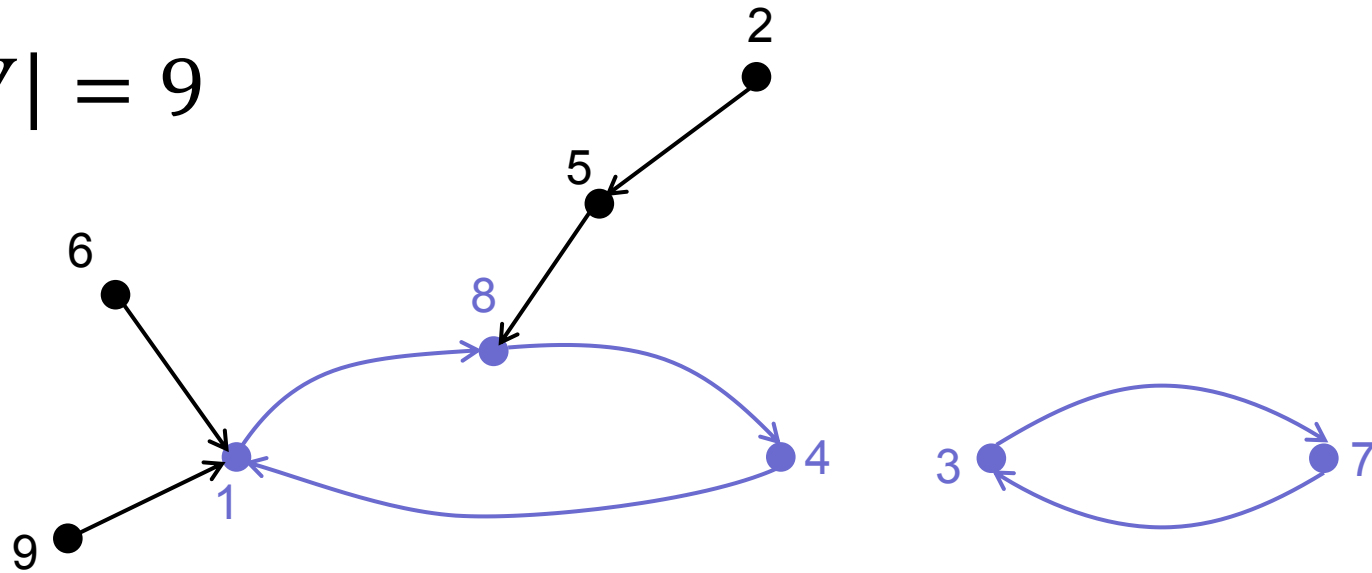
# 骨骼标本与 $V$ 上的函数图一一对应

- $V$ 上的骨骼标本  $\longrightarrow$  函数  $f: V \rightarrow V$
- 函数  $f: V \rightarrow V \longrightarrow V$ 上的骨骼标本

$$|V| = 9$$

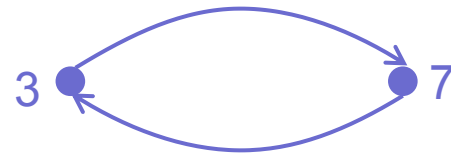
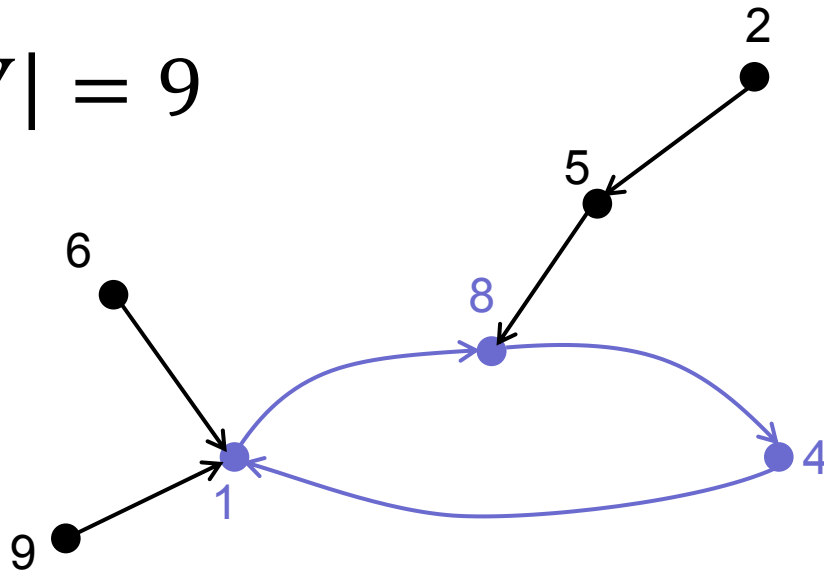


$$|V| = 9$$



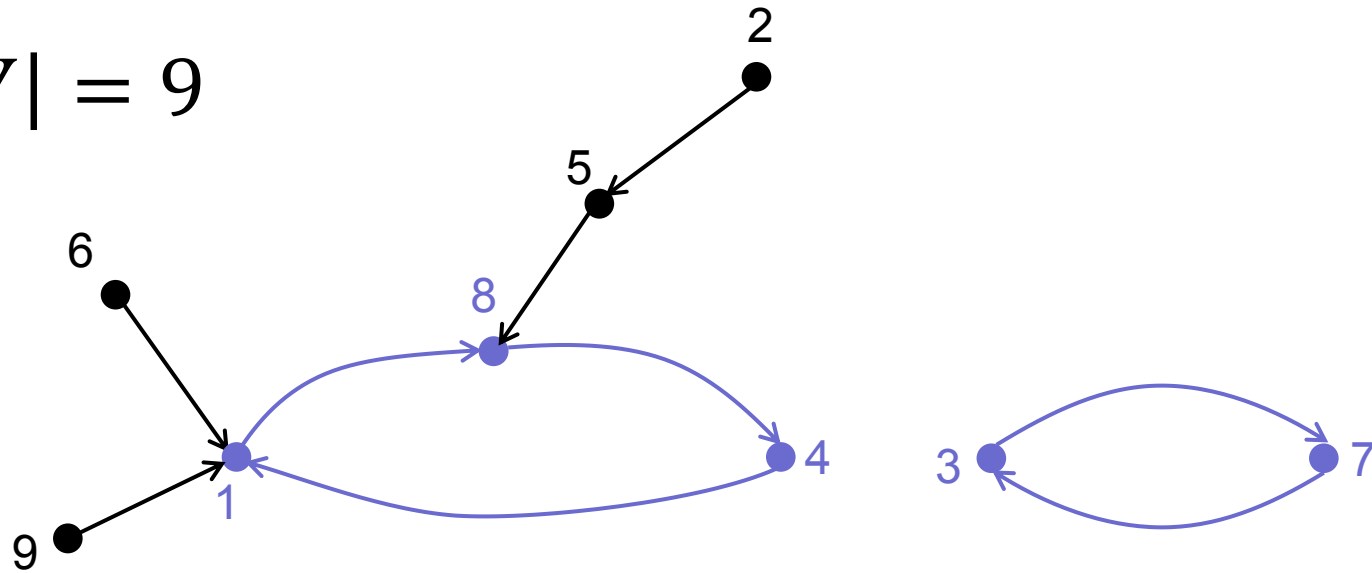
$v$	1	3	4	7	8
$f(v)$					

$$|V| = 9$$

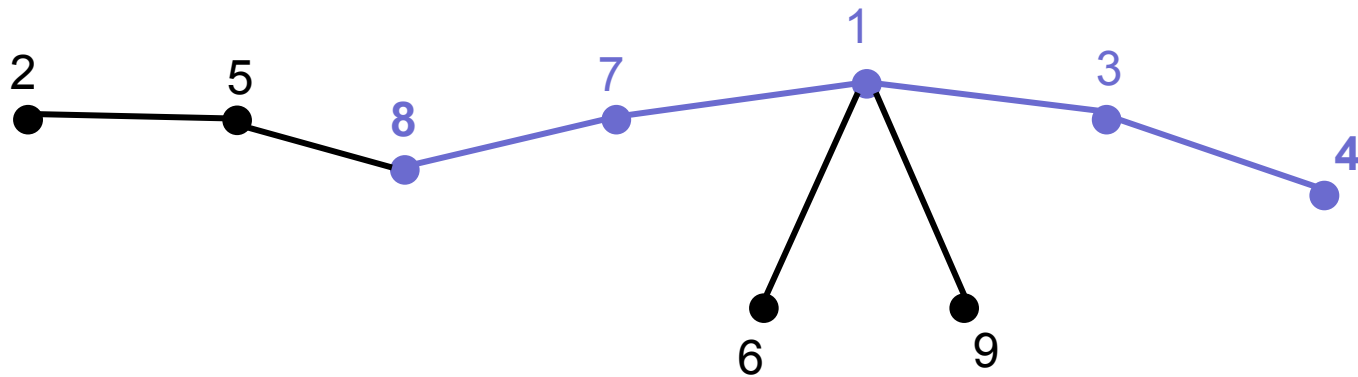


$v$	1	3	4	7	8
$f(v)$	8	7	1	3	4

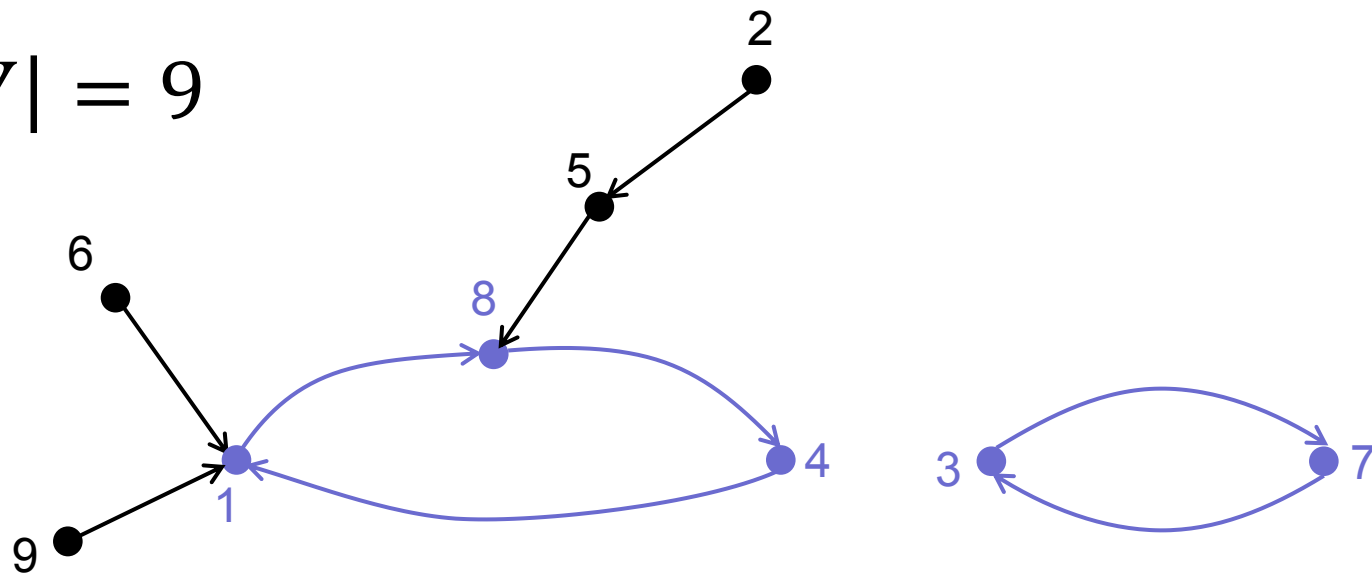
$$|V| = 9$$



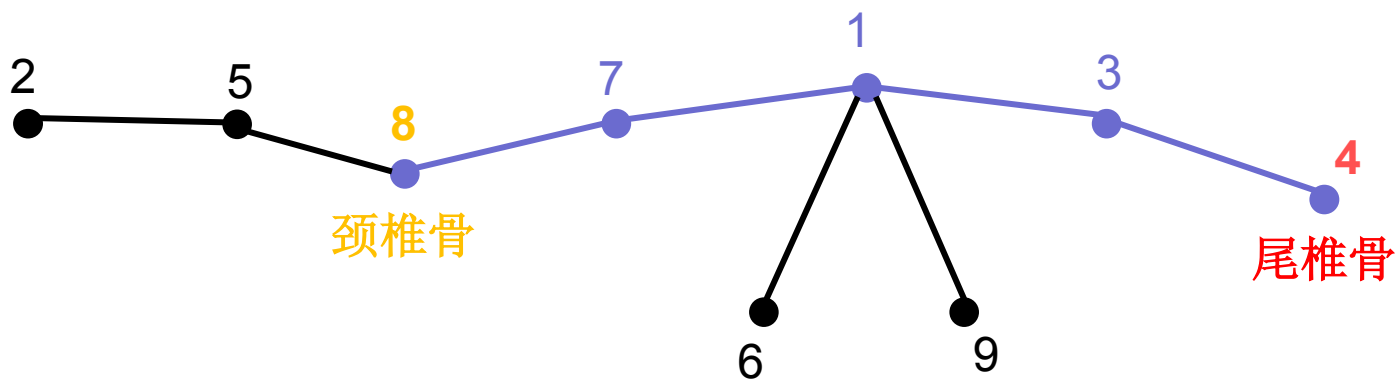
$v$	1	3	4	7	8
$f(v)$	8	7	1	3	4



$$|V| = 9$$



$v$	1	3	4	7	8
$f(v)$	8	7	1	3	4



- ① 如果 $|V| = n$ ，用 $T_n$ 表示 $V$ 上的树的所有可能棵数。
- ② 每一棵树 $T$ 对应 $n^2$ 种骨骼标本 $(T, h, b)$ 。
- ③ 骨骼标本与 $V$ 上的函数图一一对应。故有 $n^n$ 种。
- ④ 根据②③：
$$T_n = \frac{n^n}{n^2} = n^{n-2}$$

# Proof working with determinants

$$G = (V, E), \text{ where } V = \{1, 2, \dots, n\} \quad n \geq 2,$$
$$E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$$

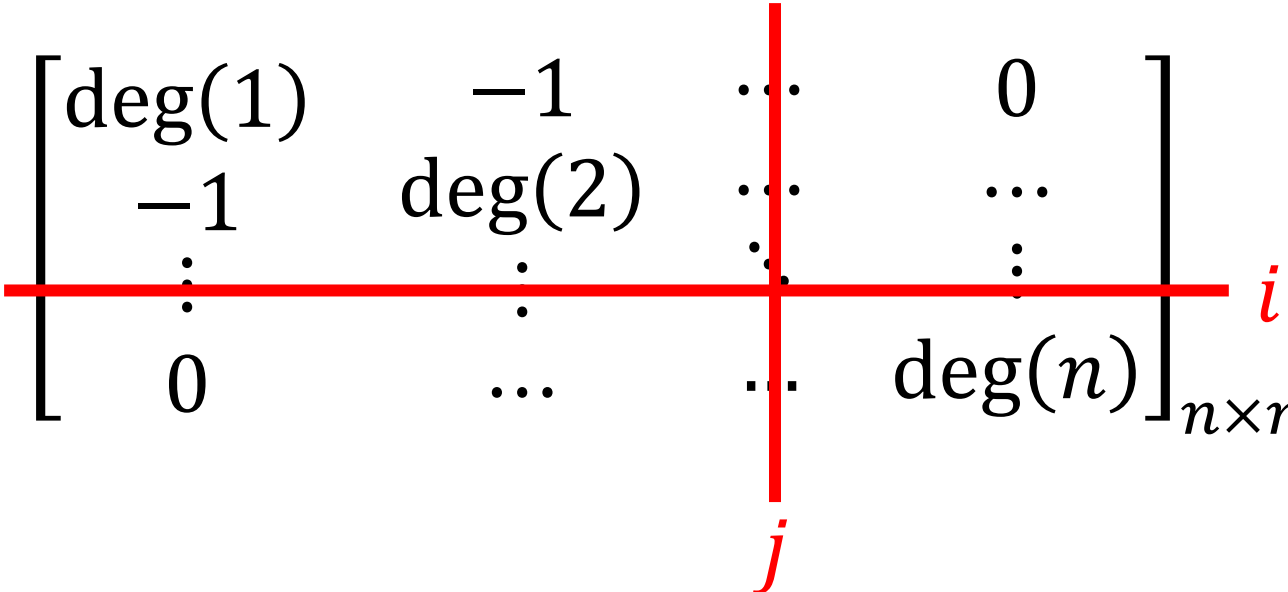
Define  $n \times n$  matrix  $Q$  -- the *Laplace matrix* for  $G$ :

$$q_{ii} = \deg_G(i) \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

$$q_{ij} = \begin{cases} -1 & \{i, j\} \in E(G) \\ 0 & \text{other wise} \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j.$$



$$Q = \begin{bmatrix} \deg(1) & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & \deg(2) & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \deg(n) \end{bmatrix}_{n \times n}$$



$Q_{ij}$  denote the  $(n - 1) \times (n - 1)$  matrix arising from the matrix  $Q$  by deleting the  $i$ th row and  $j$ th column.

**Theorem.** For every graph  $G$ ,  $T(G) = \det Q_{11}$ .

Application:  $G = K_n$

$$Q = \begin{bmatrix} n & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$Q_{11} = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{bmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}$$

$$\det(Q_{11}) = n^{n-2}$$

**Theorem.** For every graph  $G$ ,  $T(G) = \det Q_{11}$ .

- Proof. (By induction) We show that the theorem holds for multigraphs (i.e., for graphs with multiple edges, no self-loops).
- For an edge

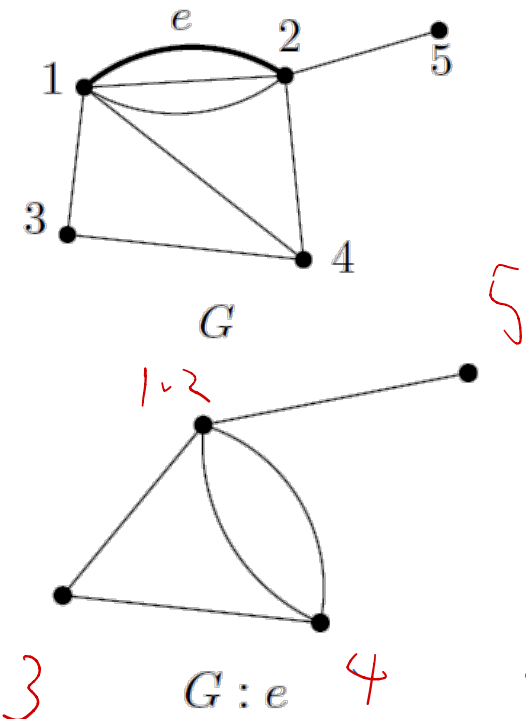
①  $G - e$  Graph  $(V, E \setminus \{e\})$

②  $G: e$  contraction

I. Remove the edge  $e$

## II. Merge the endpoints of $e$

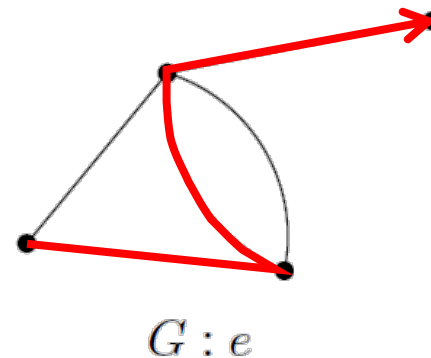
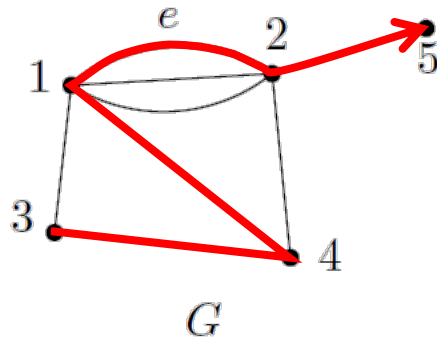
### III. Remove self-loops



**Theorem.** For every graph  $G$ ,  $T(G) = \det Q_{11}$ .

- Proof. For an edge

②  $G:e$



$$T(G) = T(G - e) + T(G:e)$$

**Theorem.** For every graph  $G$ ,  $T(G) = \det Q_{11}$ .

- Proof. For an edge  $e \in G$

$$T(G) = T(G - e) + T(G : e) \quad e = \{1, 2\}$$

$Q'$ : the Laplacian of  $G - e$

$Q''$ : the Laplacian of  $G : e$

$Q'_{11} = Q_{11}$  except the element in the upper left corner minus 1.

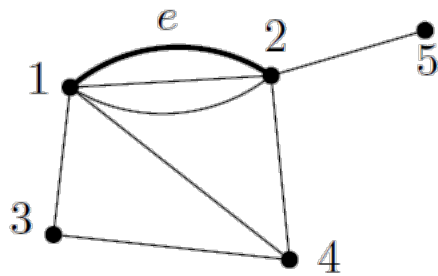
$Q''_{11} = Q_{11,22}$ .

**Theorem.** For every graph  $G$ ,  $T(G) = \det Q_{11}$ .

- Proof. For an edge  $e \in G$

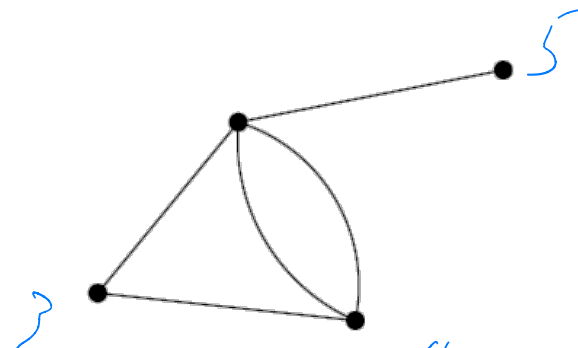
$$T(G) = T(\textcolor{red}{G} - \textcolor{red}{e}) + T(\textcolor{blue}{G} : \textcolor{blue}{e}) \quad e = \{1,2\}$$

$$Q''_{11} = Q_{11,22}.$$



$G$

$$Q_{11} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$G : e$

$$Q''_{11} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Theorem.** For every graph  $G$ ,  $T(G) = \det Q_{11}$ .

- Proof. By induction on  $m$  that the results holds for every multigraph  $G$  with at most  $m$  edges.
- Base:  $m = 0$  works.
- Vertex 1 is incident to at least one edge. Fix one of them and call it  $e$ . Numbering the other end of  $e$  to be 2. By induction

$$\begin{aligned} T(G) &= T(\textcolor{red}{G} - \textcolor{red}{e}) + T(\textcolor{blue}{G} : \textcolor{blue}{e}) \\ &= \det Q'_{11} + \det Q''_{11} \\ &= \det Q'_{11} + \det Q_{11,22} \\ &= \det Q_{11} \end{aligned}$$

**Theorem.** For every graph  $G$ ,  $T(G) = \det Q_{11}$ .

- Proof. By induction on  $m$  that the results holds for every multigraph  $G$  with at most  $m$  edges.
- Base:  $m = 0$  works.
- Vertex 1 is incident to at least one edge. Fix one of them and call it  $e$ . Numbering the other end of  $e$  to be 2. By induction

$$\begin{aligned} T(G) &= T(\textcolor{red}{G} - \textcolor{red}{e}) + T(\textcolor{blue}{G} : \textcolor{blue}{e}) \\ &= \det Q'_{11} + \det Q''_{11} \\ &= \det Q'_{11} + \det Q_{11,22} \\ &= \det Q_{11} \end{aligned}$$