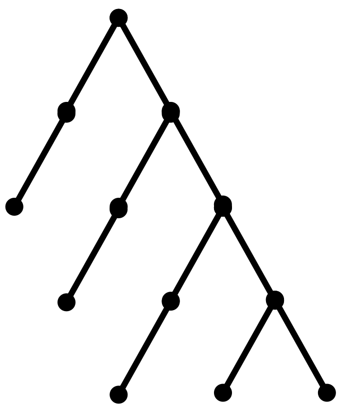
Tree Isomorphism

longhuan@sjtu.edu.cn

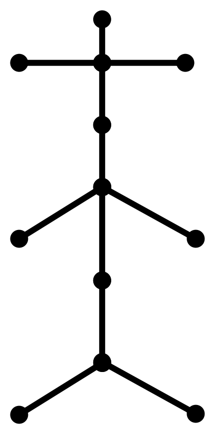
Rooted Tree Isomorphism

树

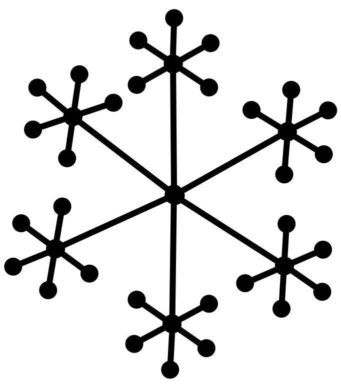
- 树(Tree)：连通无环图。
- 叶子(leaf)：图G中度数为1的顶点被称为叶子或终点(end-vertex)。



T_1



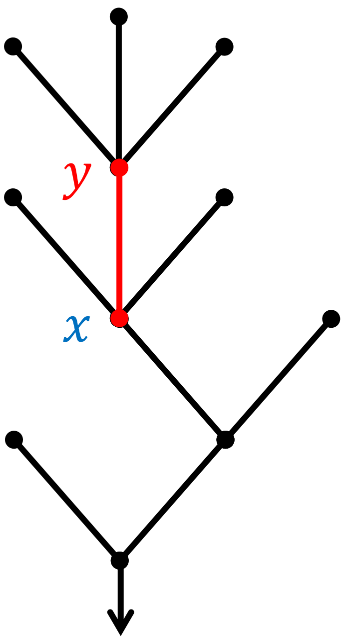
T_2



T_3

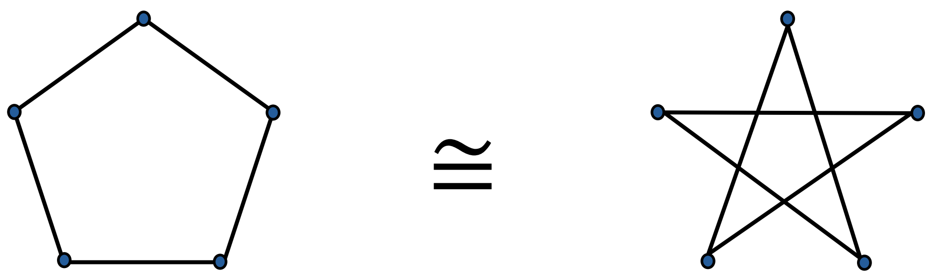
有根树

- 有根树(Rooted tree)：二元组(T,r)中T表示一棵树，$r \in V(T)$表示树上的一个特别顶点，称为根(root)。约定根用箭头标明。
- 对树上的一条边$\{x,y\} \in E(T)$，如果x是出现在从根r到y的唯一路径上，则称x是y的父亲 (father)，相应地称y是x的儿子(son)。



图同构

- **图同构(*Graph isomorphism*)：** 若对图$G=(V,E)$ 以及图$G'=(V',E')$ 存在双射函数$f:V\rightarrow V'$，满足对任意$x,y\in V$ 都有 $\{x,y\}\in E$ 当且仅当 $\{f(x),f(y)\}\in E'$ 那么我们称图G和图G'是同构的。



- 一般图之间的同构问题：尚无有效算法。
- **有根树之间的同构：** 有快速算法。

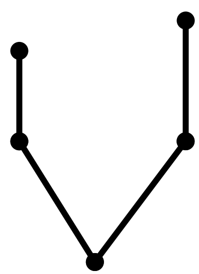
有根树同构

- **定义：** $(T,r) \cong' (T',r')$：

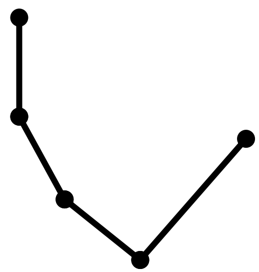
  ① $f: V(T) \to V(T')$ 是 $T \cong T'$，

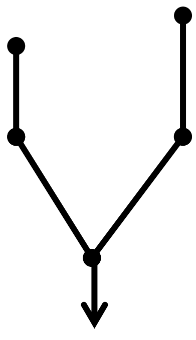
  ② $f(r) = r'$。

- 例：

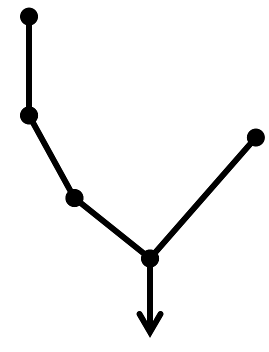


$\cong$





$\ncong'$



$\cong'$ 关系严格地强于$\cong$关系。

有根树同构判定算法

- 思路：将树的比较转化为字符串的比较。
- 字符串比较：字典序(lexicographic order)
  对不同序列$s = s_1 s_2 \dots s_n$ 和 $t = t_1 t_2 \dots t_m$
  - 如果s是t的初始序列(即 $t = s t_i \dots t_m$)则$s < t$，
  - 如果t是s的初始序列(即 $s = t s_j \dots s_m$)则$t < s$；
  - 否则，令i是$s_i \neq t_i$的最小下标，
    - 若$s_i < t_i$则$s < t$,
    - 若$t_i < s_i$则$t < s$。
- 例：00<001， 01011<0110 。

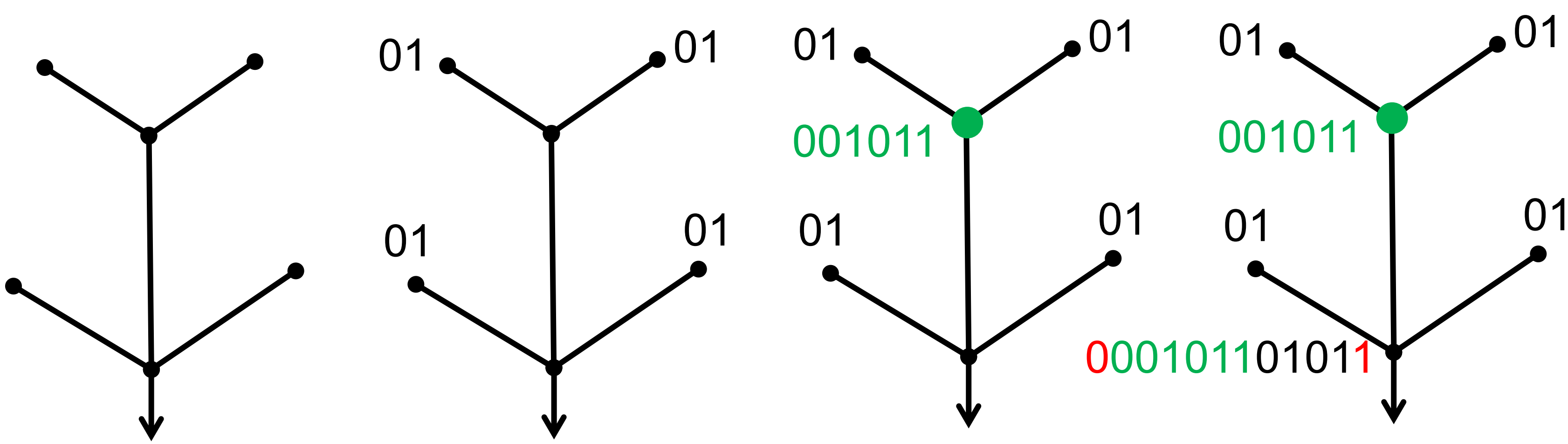
有根树同构判定算法

- 对有根树(T,r)如下编码

  R1. 所有非根叶结点都赋值为01。

  R2. 假设点v的儿子节点为$w_1, w_2, \dots, w_k$都已各完成赋值为$A(w_i)$，且$A(w_1) \le A(w_2) \le \cdots \le A(w_k)$则对$v$节点赋值为$0A(w_1)A(w_2)\cdots A(w_k)1$。

根节点r的编码就是(T,r)的编码，用$\#(T,r)$表示。



有根树同构判定算法

- **性质：** $(T,r)\cong'(T',r')$当且仅当它们具有相同的编码。
- 证明：
  - 充分性：从有根树同构的定义和编码可证。
  - 必要性：**解码**，从编码恢复原始的树结构。

    任意有根树的编码必然有$0S1$的一般形式，其中$S=S_1S_2\dots S_t$。

    S_1是S中0,1个数相等的最小前缀。

    S_2是第二个0,1平衡的最小前缀，等等。

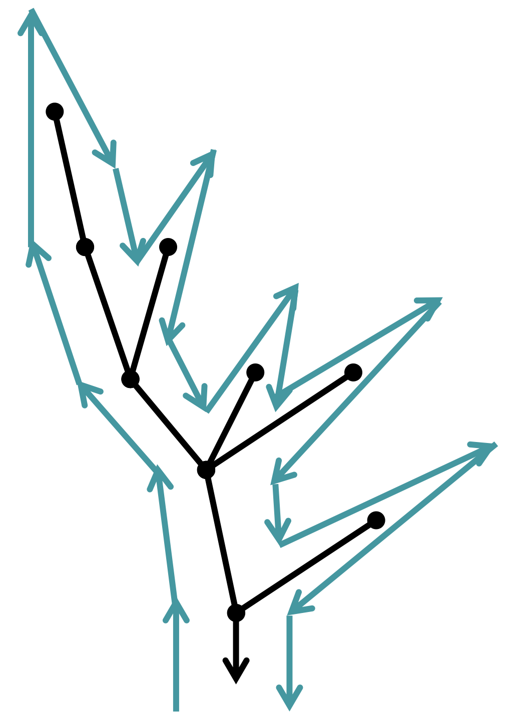
    可以据此恢复出有根树，且显然这样的有根树必然是同构的。

从编码恢复原始的树结构

0(0(0(0(01)1(01))1)(01)(01)1)(01)1

0 0 0 0 01 1 01 1 01 01 1 01 1

↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↓ ↓ ↑ ↓ ↓ ↑ ↓ ↑ ↓ ↓ ↑↓ ↓

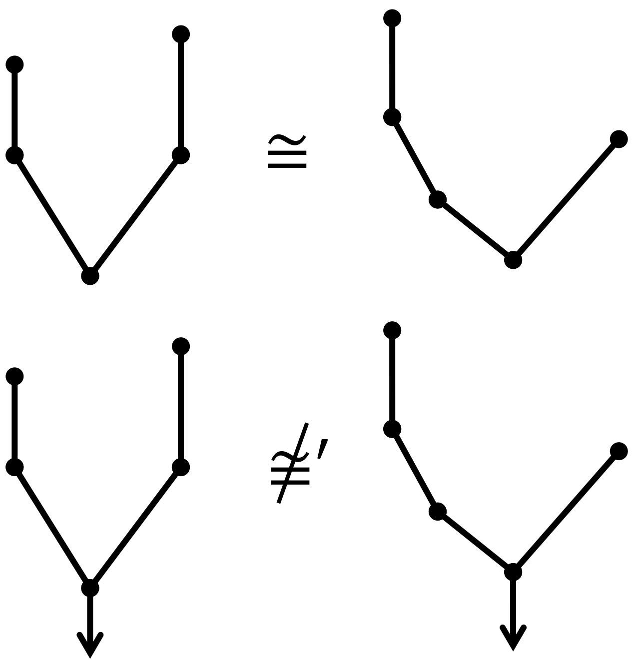


总结

- **性质：**$(T, r) \cong' (T', r')$当且仅当它们具有相同的编码。
- 有根树同构存在有效的判定算法。

树同构

一般树（无根树）同构判定

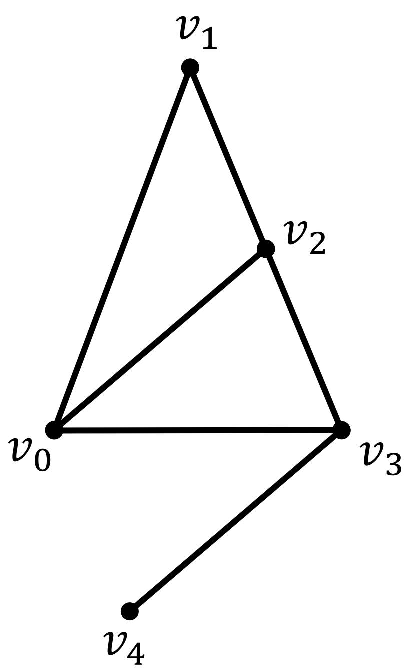


- 前面确定了有根树的同构判定算法。
- 回顾：$\cong'$ 关系严格地强于 $\cong$ 关系。
- 对一般树(无根树)：找到其中可以用作根的节点，且该根节点在任何同构函数下都被保持。

同构的保持，注意根的选择

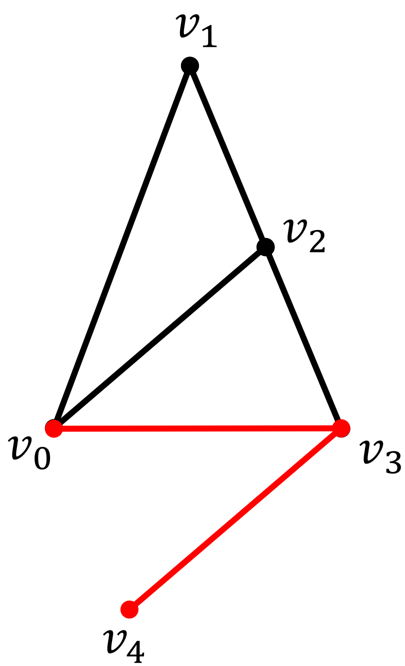
问题规约：一般树同构 $\sqsubseteq$ 有根树同构

为一般树找根



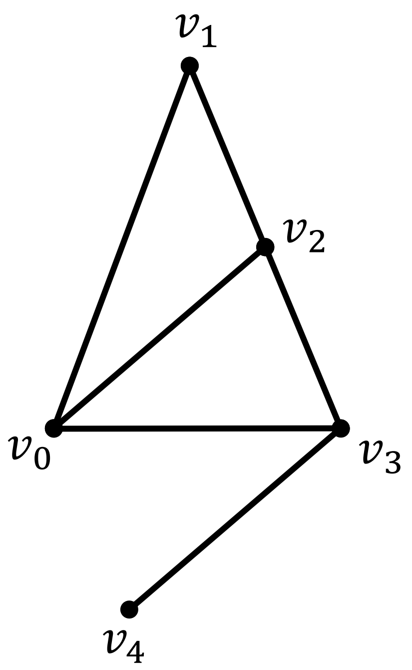
- **距离(Distance)**：图G中的两个顶点u, v，$dis_G(u, v)$表示u, v间最短路径的长度。若u, v不在一个连通分支里，定义$dis_G(u, v) = \infty$。(不连通)
- 例: 左图中$dis_G(v_0, v_4) = ?$

为一般树找根



- 距离(Distance)：图G中的两个顶点u, v，$dis_G(u, v)$表示u, v间最短路径的长度。若u, v不在一个连通分支里，定义$dis_G(u, v) = \infty$。
- 例: 左图中$dis_G(v_0, v_4) = 2$

为一般树找根

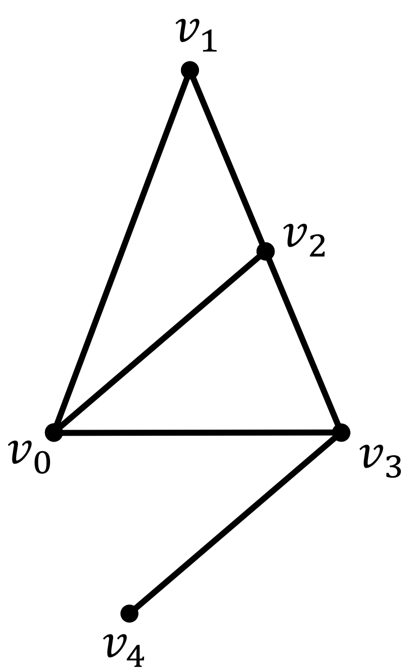


- 偏心率(Excentricity)：图G及图中的顶点v，偏心率定义为：

$$ex_G(v) = \max_{u \in G} dis_G(u, v)$$

- 例: 左图中$ex_G(v_4) = ?$

为一般树找根



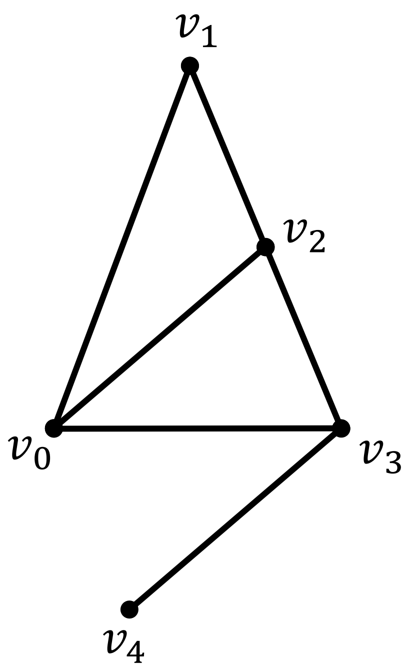
- 偏心率(Excentricity)：图G及图中的顶点v，偏心率定义为：

$$ex_G(v) = \max_{u \in G} dis_G(u, v)$$

- 例: 左图中$ex_G(v_4) = ?$

$$dis_G(v_0, v_4) = 2$$
$$dis_G(v_1, v_4) = 3$$
$$dis_G(v_2, v_4) = 2$$
$$dis_G(v_3, v_4) = 1$$

为一般树找根



- 偏心率(Excentricity)：图G及图中的顶点v，偏心率定义为：

$$ex_G(v) = \max_{u \in G} dis_G(u, v)$$

- 例: 左图中$ex_G(v_4) = 3$

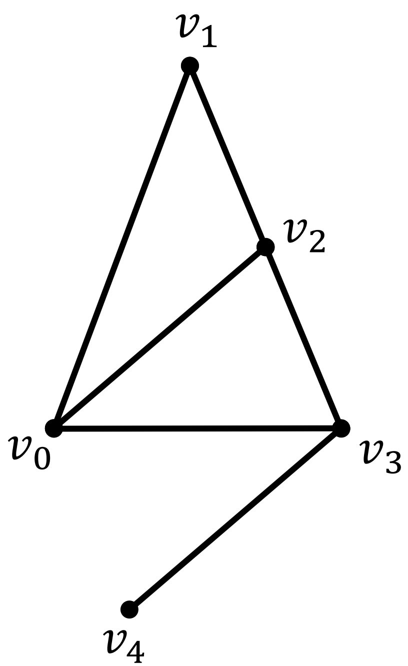
$dis_G(v_0, v_4) = 2$

$dis_G(v_1, v_4) = 3$

$dis_G(v_2, v_4) = 2$

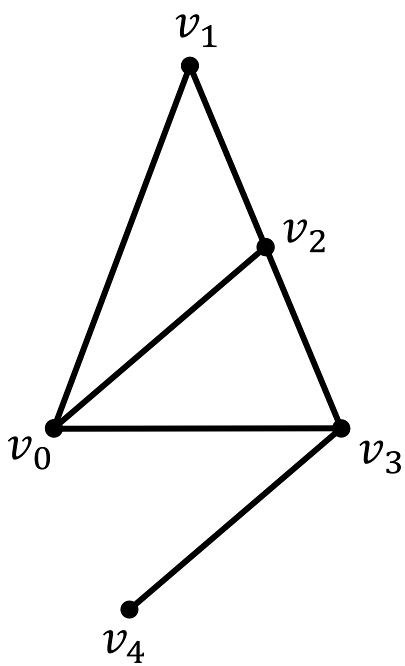
$dis_G(v_3, v_4) = 1$

为一般树找根



- 中心(Center)：图G中偏心率最小的顶点集合叫做中心。用符号$C(G)$表示。
- 例: 左图中$C(G) = ?$

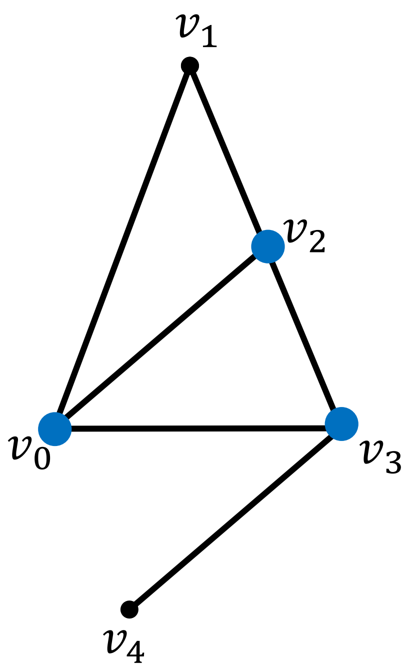
为一般树找根



- 中心(Center)：图G中偏心率最小的顶点集合叫做中心。用符号$C(G)$表示。
- 例: 左图中$C(G)=$？

$$ex_G(v_0)=2 \checkmark$$
$$ex_G(v_1)=3$$
$$ex_G(v_2)=2 \checkmark$$
$$ex_G(v_3)=2 \checkmark$$
$$ex_G(v_4)=3$$

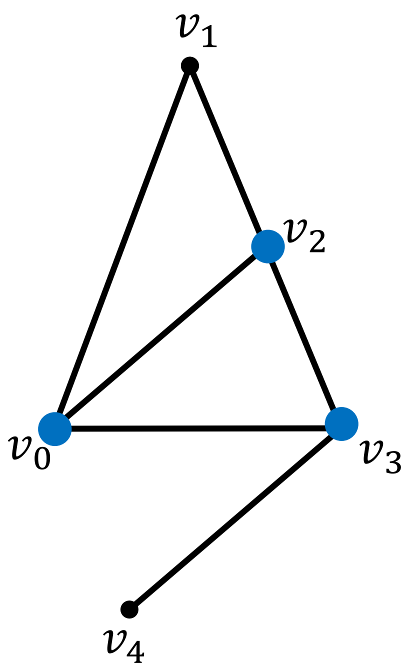
为一般树找根



- 中心(Center)：图G中偏心率最小的顶点集合叫做中心。用符号$C(G)$表示。
- 例: 左图中$C(G) = \{v_0, v_2, v_3\}$

$$ex_G(v_0) = 2$$
$$ex_G(v_1) = 3$$
$$ex_G(v_2) = 2$$
$$ex_G(v_3) = 2$$
$$ex_G(v_4) = 3$$

为一般树找根



- 中心(Center)：图G中偏心率最小的顶点集合叫做中心。用符号$C(G)$表示。
- 应用：城市规划。如消防中心，救助站
- 中心可能任意大：
  - 环C_n，有$|C(C_n)| = n$
  - 完全图K_n，有$|C(K_n)| = n$

各点都是中心

为一般树找根

有3个点还能再删
待证

- **性质**：对树$T=(V,E)$，$C(T)$至多含有2个顶点。且若$C(T)=\{x,y\}$，则$\{x,y\}\in E$。两顶点一定相邻
- 证明：若$|T|\le 2$，结论显然。否则：

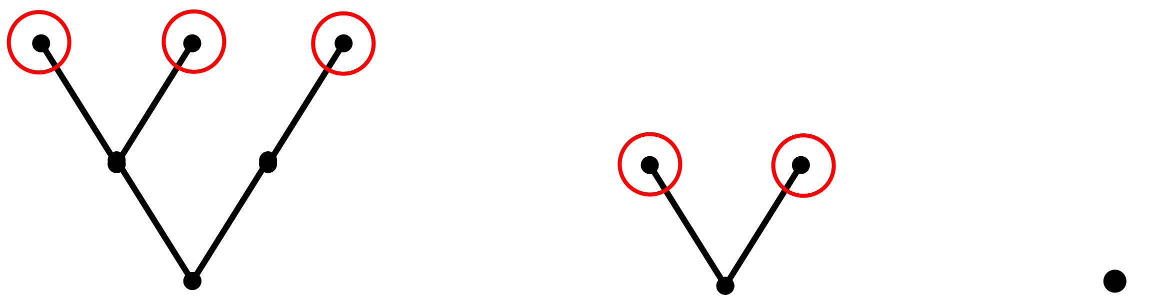
  利用树的特殊性：与树上任一点v距离最远的点必然是叶子结点。

  – 从T构造T'：T'是从T中删去所有叶子结点。显然对T'上的点v有 $ex_T(v)=ex_{T'}(v)+1$，进而$C(T')=C(T)$。中心不变 大家偏心率都变小了1

  – 反复以上过程。直至最后剩下一个顶点（$C(T)$是一个顶点）或一条边（$C(T)$是两个顶点）。

为一般树找根

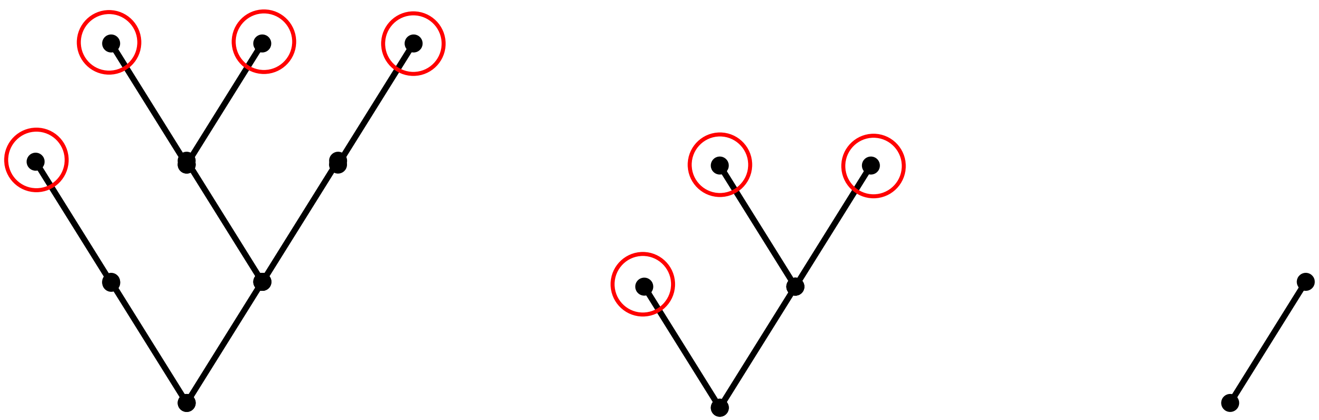
- 例1：



剩一个点

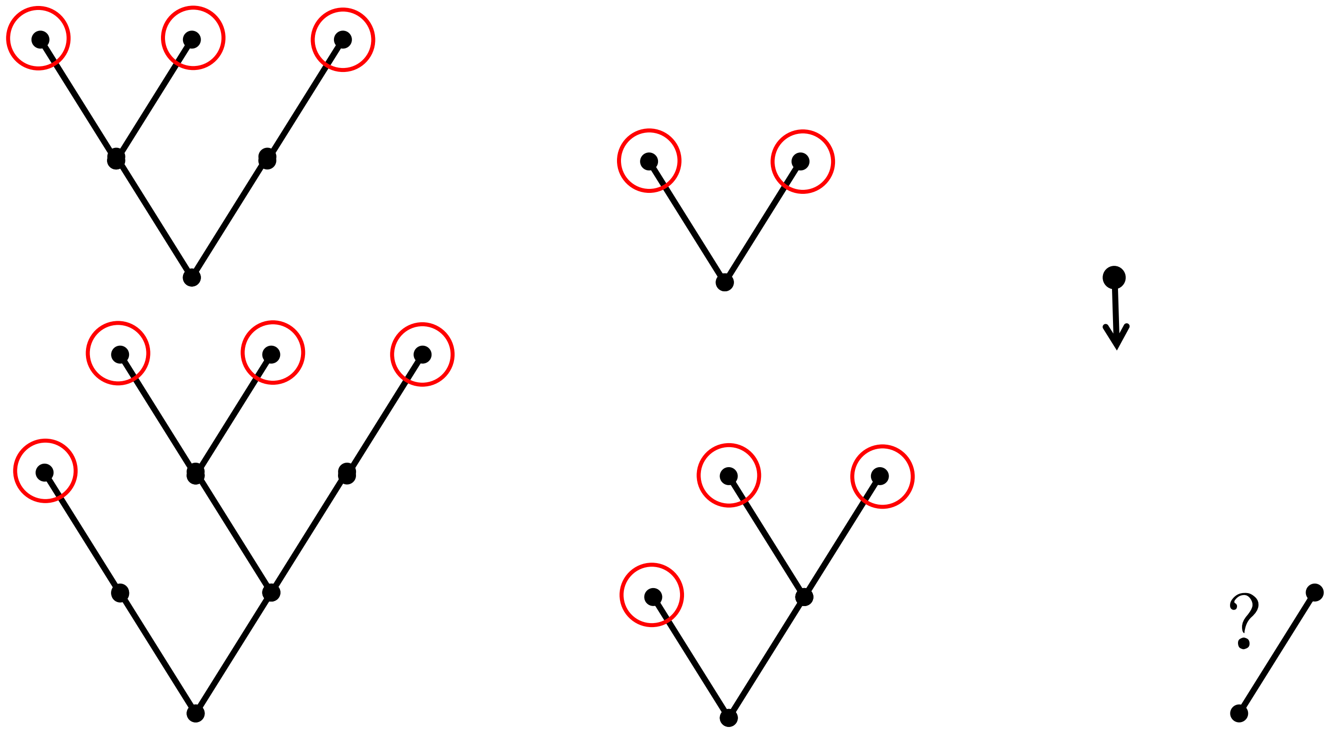
为一般树找根

- 例2：



剩两个点

为一般树找根



用树的中心来完成树到有根树的转化：
- $|C(T)| = 1$ 则中心就是根，
- $|C(T)| = 2$ 的情形如何处理？

树的编码

根

- $C(T)$中只含唯一顶点v：输出有根树(T,v)的编码 $\boldsymbol{\#(T,v)}$ 。
- $C(T)=\{x_1,x_2\}$： $e=\{x_1,x_2\}$

$T-e$：必含有正好两个连通分支T_1,T_2。不失一般性设$x_1\in V(T_1)$，$x_2\in V(T_2)$。

- 计算$\#(T_1,x_1)$ 和$\#(T_2,x_2)$；
  编码小的作为根
  - 如果$\#(T_1,x_1)\le\#(T_2,x_2)$，输出 $\boldsymbol{\#(T,x_1)}$；
  - 否则，输出 $\boldsymbol{\#(T,x_2)}$。
  则唯一确定了根

$\#T$ = 上述过程的输出

- 验证：$T \cong T'$ 当且仅当 $\#T \cong \#T'$ 。

- 证明：（与有根树证明相似）

树同构问题

- 树同构存在有效判定算法
  - 找中心
  - 定根
  - 有根树编码
  - 编码比较