

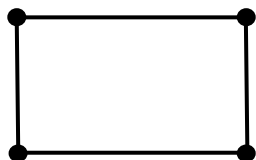
# 图论导引：

基本定义、特殊图

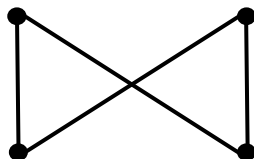
# 基本概念

- **定义：** 图 $G$ 是一个有序对 $(V, E)$ ，其 $V$ 中是一个集合被称为**顶点集**， $E$ 是一组由二元 $V$ 元素组成的集合，称为**边集**，既  $E \subseteq \binom{V}{2}$ 。
- 图 $G$ ，为方便常用  $V(G), E(G)$  来分别表示“ $G$ 的顶点集”和“ $G$ 的边集”。
- 画图(drawing):

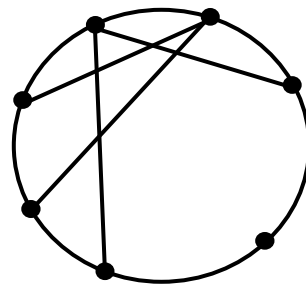
Simple



$G_1$

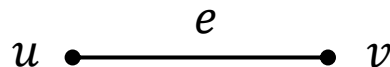


$G_2$



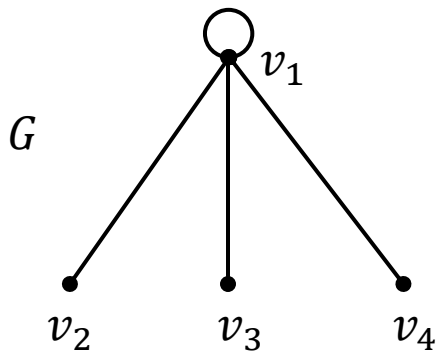
$G_3$

- **阶(Order)**: 图顶点的个数, 即 $|V|$ 。亦常用 $|G|$ 表示。
- 若 $e = \{u, v\} \in E$ , 则称点 $u$ 和 $v$ 在图 $G$ 中是**相邻的(adjacent)**, 或称 $u$ 是 $v$ 的**邻居(neighbor)**。此时亦称 $e$ 和 $u, v$ **相关联(incident)**。
  - 显然, 一条边与且只与两个顶点相关联。



- 常用 $N(u)$ 表示与顶点 $u$ 相邻的点集。

例:



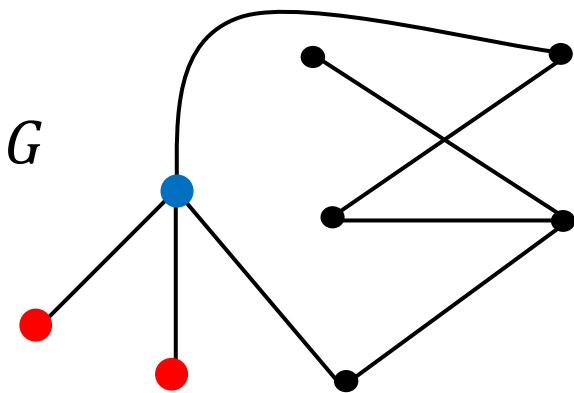
$$|G| = 4, N(v_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

# 顶点的度

- 给定图 $G = (V, E)$ ,  $v \in V$ , 定义该顶点在图 $G$ 中的度(degree)为:

$$\deg_G(v) = |\{u : \{u, v\} \in E\}| = |N(v)|$$

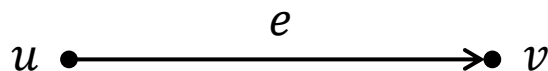
- 一般地,  $\delta(G)$ 表示图 $G$ 的最小度,  $\Delta(G)$ 表示最大度。
- 显然 $\deg_G(v) \leq |E|$ 。



$$\delta(G) = 1$$
$$\Delta(G) = 4$$

# 有向图和无向图

- 上面讨论的图统称为：无向图(undirected graph)。
- 如果边集 $E$ 是二元有序对的集合，即 $e \in E$ 都是形如 $e = (u, v)$ 的形式，此时的图称为有向图(directed graph)。  $u$ 称为边 $e$ 的起点， $v$ 称为边 $e$ 的终点。



- 除显示声明外，均表示无向图。

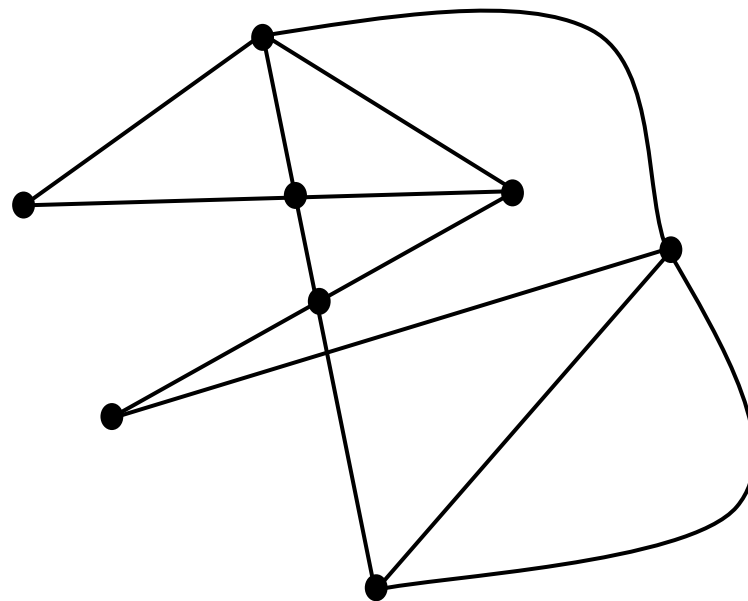
- 很多现实问题可以抽象为图：



2015年上海地铁线路图（部分）

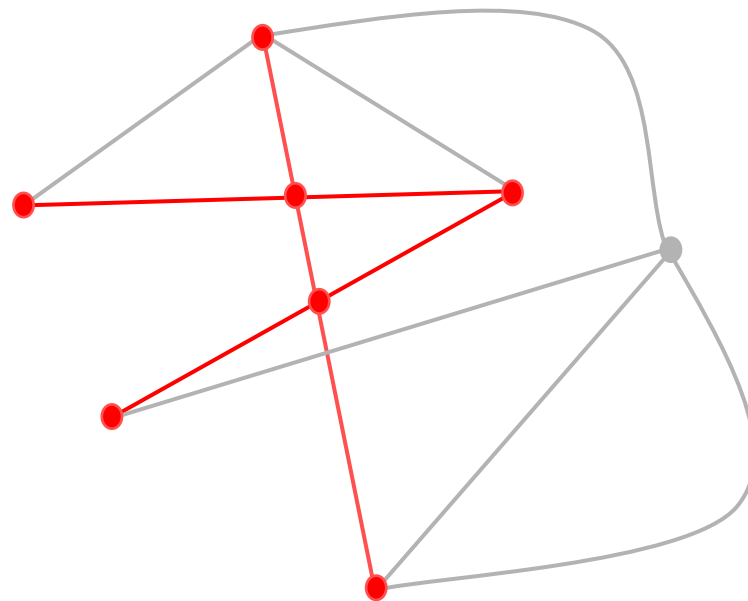
# 子图

**定义：** 已有图 $G$ 和 $G'$ ，  
若 $V(G) \subseteq V(G')$ 且  
 $E(G) \subseteq E(G')$ ，则称  
 $G$ 是 $G'$ 的**子图**  
(*subgraph*)。



# 子图

**定义：** 已有图 $G$ 和 $G'$ ，  
若 $V(G) \subseteq V(G')$ 且  
 $E(G) \subseteq E(G')$ ，则称  
 $G$ 是 $G'$ 的**子图**  
(*subgraph*)。

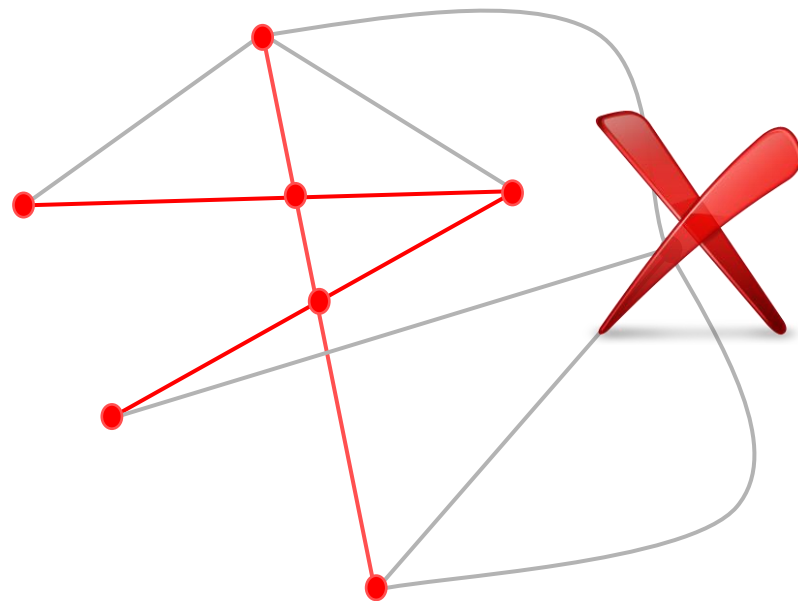




# 导出子图

**定义：** 已有图 $G$ 和 $G'$ ，  
若 $V(G) \subseteq V(G')$ 且  
 $E(G) \subseteq E(G')$ ，则称  
 $G$ 是 $G'$ 的**子图**  
**(subgraph)**。

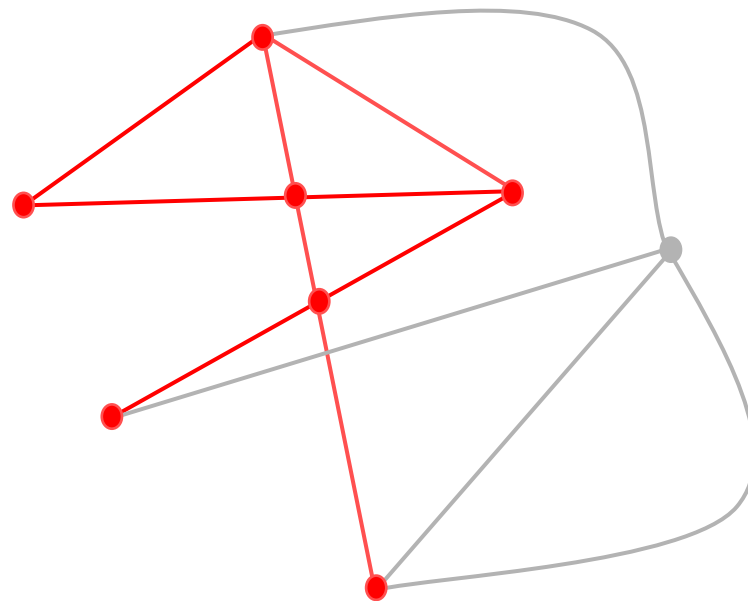
若还有 $E(G) = E(G') \cap$   
 $\binom{V(G')}{2}$  则  $G$ 是 $G'$ 的**导**  
**出子图 (induced**  
**subgraph)**



# 导出子图

**定义：** 已有图 $G$ 和 $G'$ ，  
若 $V(G) \subseteq V(G')$ 且  
 $E(G) \subseteq E(G')$ ，则称  
 $G$ 是 $G'$ 的**子图**  
**(subgraph)**。

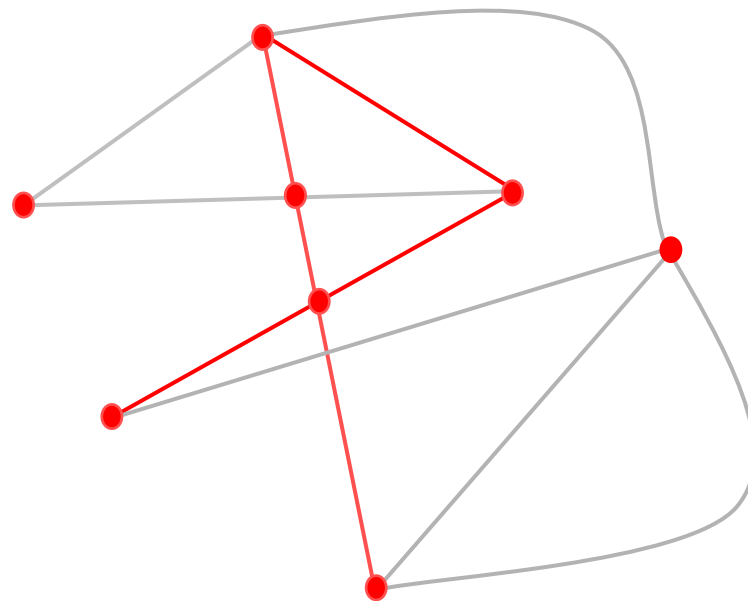
若还有 $E(G) = E(G') \cap$   
 $\binom{V(G)}{2}$  则  $G$ 是 $G'$ 的**导**  
**出子图 (induced**  
**subgraph)**



# 生成子图

**定义：** 已有图 $G$ 和 $G'$ ，  
若 $V(G) \subseteq V(G')$ 且  
 $E(G) \subseteq E(G')$ ，则称  
 $G$ 是 $G'$ 的**子图**  
**(subgraph)**。

若还有 $V(G) = V(G')$   
则  $G$ 是 $G'$ 的**生成子图**  
**(spanning subgraph)**



# 图上的基本操作

- $G + e_{ij}$ : 在 $G$ 中增加边 $e_{ij} = \{v_i, v_j\}$ 。
- $G - e_{ij}$ : 从 $G$ 中删去边 $e_{ij} = \{v_i, v_j\}$ 。
  - 反复操作, 可得到图 $G$ 的任意生成子图
- $G - \bar{E}$ , 其中 $\bar{E} \subseteq E(G)$ : 从 $G$ 中删去 $\bar{E}$ 中的所有边。
- $G - v$ : 从 $G$ 中删去顶点 $v$ 及其关联的边。
  - 反复操作, 可得到图 $G$ 的任意导出子图。
- $G - \bar{V}$ , 其中 $\bar{V} \subseteq V(G)$ : 从 $G$ 中删去 $\bar{V}$ 中的所有顶点及与这些顶点相关联的边。

# 图上的基本操作

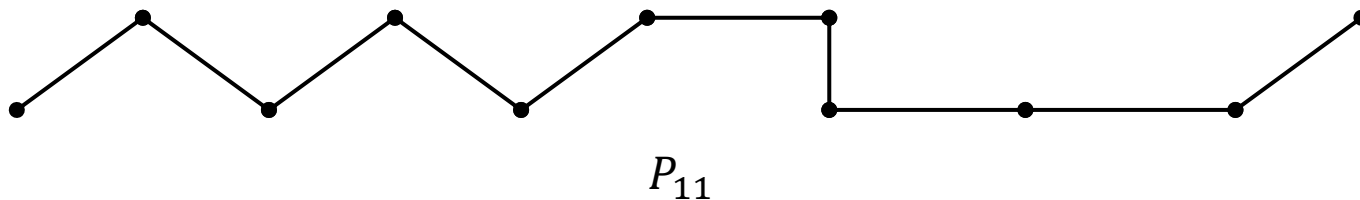
- $G \cup \{e_{ij}\}$ : 在 $G$ 中增加边 $e_{ij} = \{v_i, v_j\}$ 。
- $G \setminus \{e_{ij}\}$ : 从 $G$ 中删去边 $e_{ij} = \{v_i, v_j\}$ 。
  - 反复操作, 可得到图 $G$ 的任意生成子图
- $G \setminus \bar{E}$ , 其中 $\bar{E} \subseteq E(G)$ : 从 $G$ 中删去 $\bar{E}$ 中的所有边。
- $G \setminus \{v\}$ : 从 $G$ 中删去顶点 $v$ 及其关联的边。
  - 反复操作, 可得到图 $G$ 的任意导出子图。
- $G \setminus \bar{V}$ , 其中 $\bar{V} \subseteq V(G)$ : 从 $G$ 中删去 $\bar{V}$ 中的所有顶点及与这些顶点相关联的边。

# 特殊图

- 路径图(Path  $P_n$ )

- $V = \{0, 1, \dots, n\},$

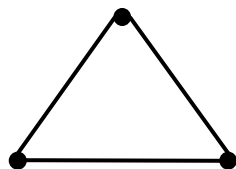
- $E = \{i - 1, i\} : i = 1, 2, \dots, n\}.$



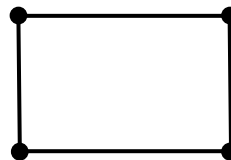
- 环(Cycle  $C_n$ )

- $V = \{1, 2, \dots, n\},$

- $E = \{i, i + 1\} : i = 1, 2, \dots, n - 1\} \cup \{\{1, n\}\}.$



$C_3$

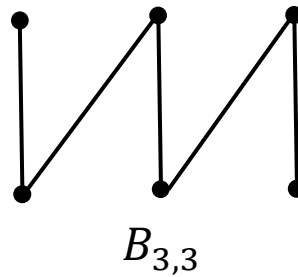
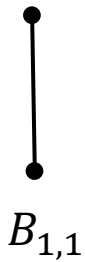


$C_4$

# 特殊图

- 二分图(Bipartite graph  $B_{n,m}$ )

- $V = \{u_1, \dots, u_n\} \cup \{v_1, \dots, v_m\},$
- $E \subseteq \{\{u_i, v_j\} : i = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots, m\}.$

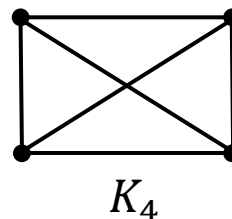
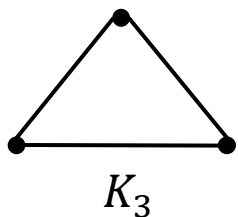


# 特殊图

- 完全图(Complete graph  $K_n$ )

- $V = \{1, 2, \dots, n\}$

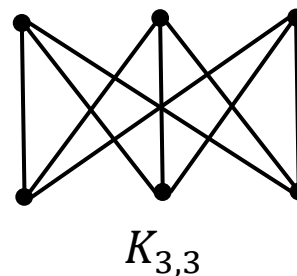
- $E = \binom{V}{2}$ .



- 完全二分图(Complete bipartite graph  $K_{n,m}$ )

- $V = \{u_1, \dots, u_n\} \cup \{v_1, \dots, v_m\}$ ,

- $E = \{\{u_i, v_j\} : i = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots, m\}$ .





# 正则图

- 如果图中所有顶点的度数都是一个常值 $r$ ，则称该图为 $r$ -正则图( $r$ -regular graph)。

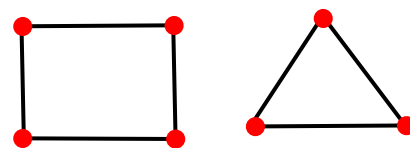
– 0-正则图：空图



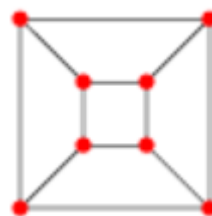
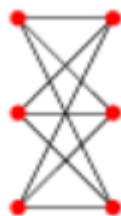
– 1-正则图：不相连的边（集）



– 2-正则图：不相交的环（集）

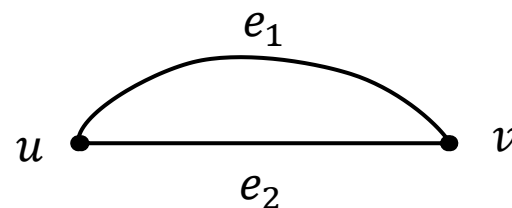
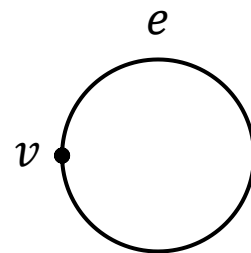


– 3-正则图：又称为立方图 (cubic graph)



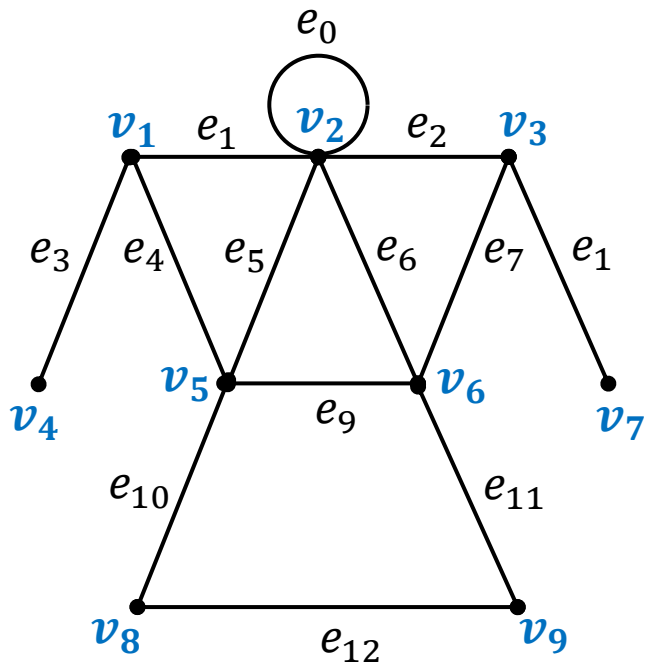
# 简单图

- 对无向图  $G = (V, E)$ 
  - **自环(Loop):**  $e \in E$ , 如果  $e = \{v, v\}$  其中  $v \in V$ , 则称  $e$  是一个自环。
  - **重边(Multiedge):**  $e_1, e_2 \in E$  且  $e_1 = e_2 = \{u, v\}$ , 其中  $u, v \in V$ , 则称  $e_1, e_2$  是重边。

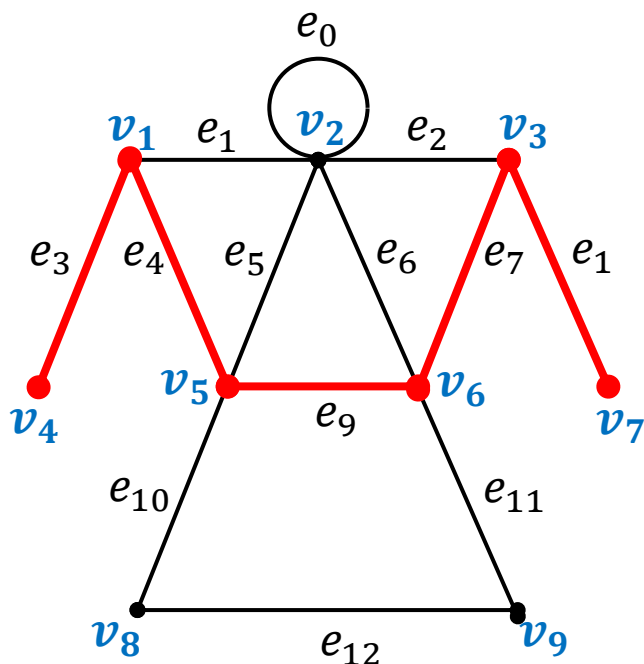


- **简单图(Simple graph):** 没有自环和重边的无向图被称为简单图。

# 路径与游走



# 路径与游走

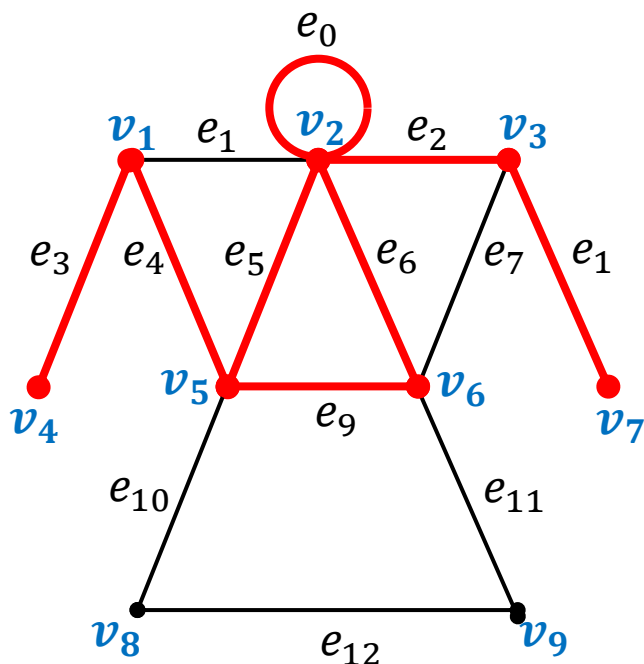


- 路径(Path):

– 不允许环，各顶点和边至多出现一次。

$(v_4, e_3, v_1, e_4, v_5, e_9, v_6, e_7, v_3, e_1, v_7)$

# 路径与游走



- 路径(Path):

- 不允许环，各顶点和边至多出现一次。

$(v_4, e_3, v_1, e_4, v_5, e_9, v_6, e_7, v_3, e_1, v_7)$

- 游走(Walk):

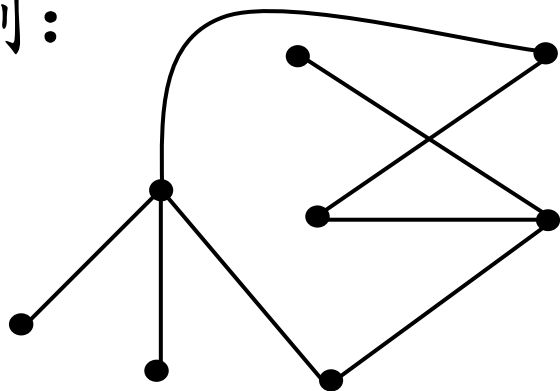
- 允许环，顶点和边可重复。

$(v_4, e_3, v_1, e_4, v_5, e_5, v_2, e_0, v_2, e_0, v_2, e_6, v_6, e_9, v_5, e_5, v_2, e_2, v_3, e_1, v_7)$

# 连通图

- **连通图(Connected graph):** 如果图 $G$ 上任意两点 $u, v$ 之间都有一条路径, 则称 $G$ 是一个连通图。否则, 称为**非连通图(disconnected graph)**。

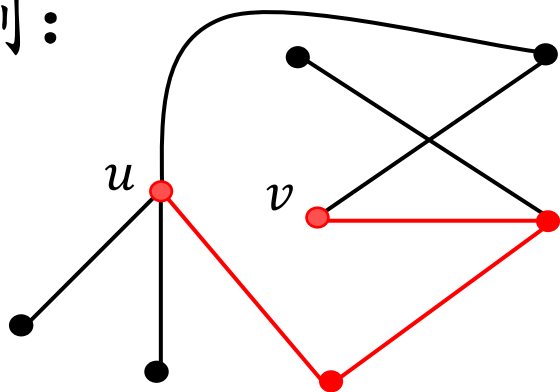
● 例：



# 连通图

- **连通图(Connected graph)**: 如果图 $G$ 上任意两点 $u, v$ 之间都有一条路径, 则称 $G$ 是一个连通图。否则, 称为**非连通图(disconnected graph)**。

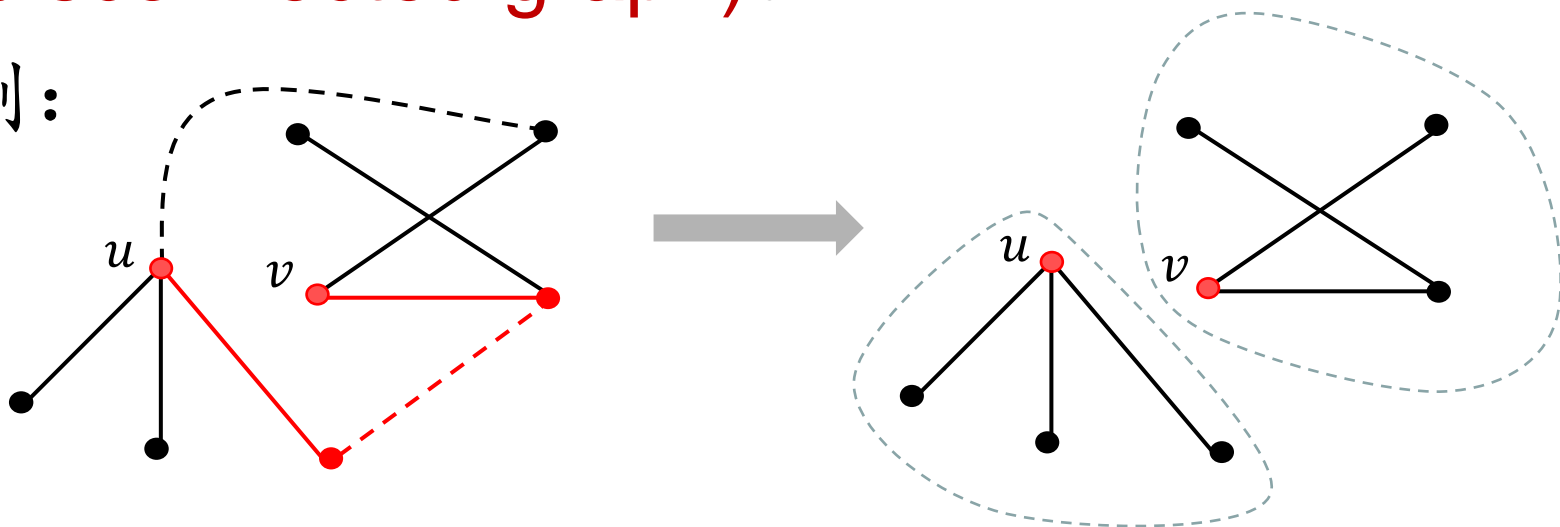
- 例:



# 连通图

- **连通图(Connected graph):** 如果图 $G$ 上任意两点 $u, v$ 之间都有一条路径, 则称 $G$ 是一个连通图。否则, 称为**非连通图(disconnected graph)**。

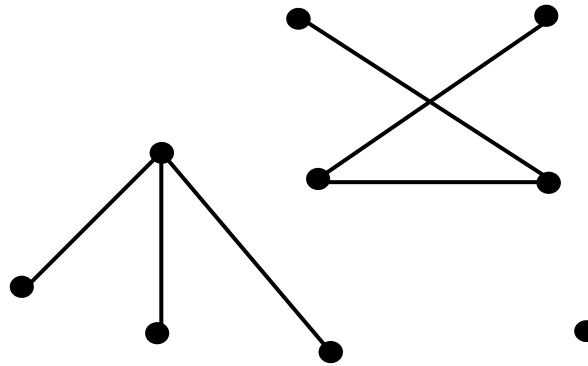
• 例:





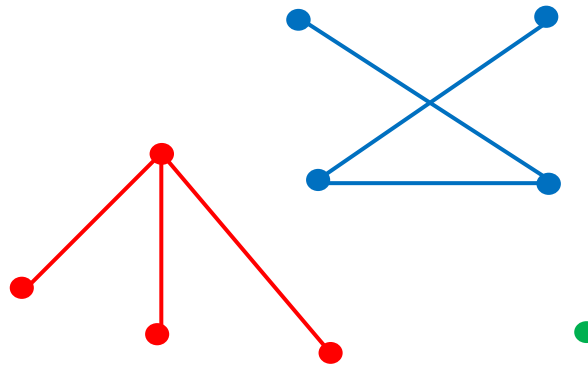
# 极大连通子图

- 对给定图 $G$ ,定义 $G$ 的**极大连通子图**:
  - ①是原图的子图,
  - ②是连通图,
  - ③已经等于原图, 或再扩大(增加顶点或边) 则成为非连通图。



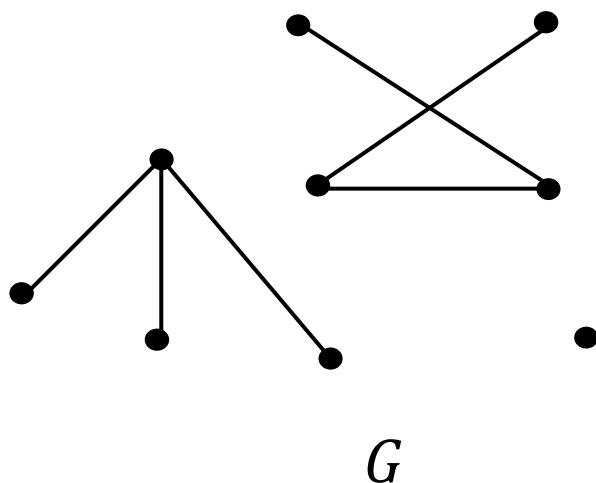
# 极大连通子图

- 对给定图 $G$ ,定义 $G$ 的**极大连通子图**:
  - ①是原图的子图,
  - ②是连通图,
  - ③已经等于原图, 或再扩大(增加顶点或边)则成为非连通图。



# 连通分支

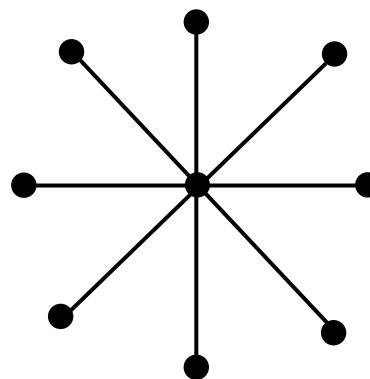
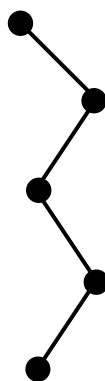
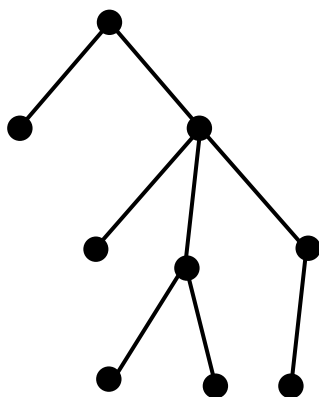
- **连通分支(Component)**: 图 $G = (V, E)$ 的极大连通子图也被称为图 $G$ 的连通分支。
- 连通分支可能不唯一, 图 $G$ 的极大连通分支的个数用 $Con(G)$ 表示。
- 例:



$$Con(G) = 3$$

# 树

- 无环连通图被称为树(tree)



- 树是一类很重要的对象，在实际中有广泛应用，后面会专门讲到。

# 顶点的度

- 给定无向图  $G = (V, E)$ ,  $v \in V$ , 定义该顶点在图  $G$  中的度(degree)为:

$$\deg_G(v) = |u : \{u, v\} \in E| = |N(v)|$$

- 一般地,  $\delta(G)$  表示图  $G$  的最小度,  $\Delta(G)$  表示最大度。
- 易验证
  - $\deg_G(v) \leq |E|$
  - $G = P_n$  则  $1 \leq \deg_G(v) \leq 2$
  - $G = C_n$  则  $\deg_G(v) = 2$
  - $G = K_n$  则  $\deg_G(v) = n - 1$

- **握手定理**(*Handshaking theorem*, Leonhard Euler 1736): 给定无向图 $G = (V, E)$ , 以下等式成立

$$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|$$

- 证明: 一条边与两个顶点相关联, 在对 $\deg_G(v)$ 做累加时, 每条边被使用到两次。对边计数有类似推理。故等式成立。
- **推论:** 无向图中, 度数为奇数的点一定是有偶数多个。
- 证明: