1：解：Fibonacci 数

$\{1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \cdots\}$

当 $i=0,1,2,3,4$ 等时，显然成立

（$i=0$ 时视取 0 个数）（$4=1+3$）

设 $i \le n$ 时成立 对于 $i=n+1$（$n \ge 4$）

已知 $i=n-2, n-1, n$ 等时均可被

Fibonacci 数表示，下证明 1、2 可以

同时出现在任何一个大于等于 4 的

数的表示中，首先 $4=3+1$

对于大于 4 的数，若它们的表示

已经使用了 1 和 2 两个数，则可以

将1、2合成为3，并去掉1、2并加入3
若3也已使用，则将2、3合成为5，
去掉2、3并加入5，
若5也已使用，则将3、5合成为8，
去掉3、5并加入8，……
经过若干次上述操作，1、2必不会
同时出现在数的表示中。

由于已知$j\le n$时成立，对于$j=n+1$
若1未被包含在n的表示中，
则加入1即可得到$n+1$，
若已包含1，则未包含2，则去掉1，
加入2，即可得到$n+1$的表示
综上，任何自然数可表示为不同的F-数之和

2：解：(1)：$a_{n+2}=3a_n-2a_{n+1}$

$P(x)=x^2+2x-3=0$

$\therefore x=1$ 或 $x=-3$

设 $a_n=C_1\cdot 1^n+C_2\cdot(-3)^n$

$a_0=C_1+C_2=2$

$a_1=C_1-3C_2=3$

$\therefore \begin{cases} C_1=\frac{9}{4} \\ C_2=-\frac{1}{4} \end{cases}$

$\therefore a_n=\frac{9}{4}-\frac{1}{4}\cdot(-3)^n$

(2)：对于齐次部分，$a_{n+1}=2a_n$

则易知 $a_n' = C\cdot 2^n$

又对于非齐次部分，可设 $a_n'' = S$

则代入 $a_{n+1} = 2a_n + 3$

可知 $S = 2S + 3$

$\therefore S = -3$

$\therefore a_n = a_n' + a_n'' = C\cdot 2^n - 3$

$a_0 = 1 = C - 3 \quad \therefore C = 4$

$\therefore a_n = 4\cdot 2^n - 3 = 2^{n+2} - 3$

3：解：令 $b_n = \ln(a_n)$

由于 $a_0 > 0$，$a_1 > 0$，$a_n = \sqrt{a_{n+1} a_n} > 0$

知 b_n 恒有意义

$\therefore \ln(a_{n+2}) = \frac{1}{2}[\ln(a_{n+1}) + \ln(a_n)]$

即 $b_{n+2} = \frac{1}{2}[b_{n+1} + b_n]$

$\varphi(x) = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$

解得 $x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{2}$

则 $b_n = C_1 \cdot 1^n + C_2(-\frac{1}{2})^n$

$b_0 = \ln a_0 = \ln 2, b_1 = \ln a_1 = \ln 8 = 3\ln 2$

$$\therefore \begin{cases} C_1 + C_2 = \ln 2 \\ C_1 - \frac{1}{2}C_2 = 3\ln 2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} C_2 = -\frac{4}{3}\ln 2 \\ C_1 = \frac{2}{3}\ln 2 \end{cases}$$

$$\therefore \ln a_n = b_n = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{4}{3}\ln 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\therefore a_n = e^{b_n} = \frac{e^{\frac{2}{3}\ln 2}}{e^{\frac{4}{3}\ln 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n}} = \frac{2^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}}$$

$$= 2^{\frac{2}{3} - \frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$$

4：解：$h_n = \frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n\right]$

猜测 $1+\sqrt{2}$，$1-\sqrt{2}$ 是某一元二次方程的两个解

设 $x^2+bx+c=0$

$$\therefore \begin{cases} c=(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) \\ -b=(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2}) \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} b=-2 \\ c=-1 \end{cases}$$

$\therefore x^2-2x-1=0$

推出 $h_n=2h_{n-1}+h_{n-2}$

而 $h_0=1$，$h_1=1$，

$h_n=2h_{n-1}+h_{n-2}$，均为整数