Scientific Computing / Computational Engineering und Robotik

Prof. Dr. Oskar von Stryk, Aljoscha Schmidt

Sommersemester 2025

3. Übung

Hinweise zu dieser Übung

- Für die Teilnahme an der Übung ist eine Anmeldung beim **Lernportal Informatik** notwendig. Dort sind auf der Kursseite zusätzliche Informationen zur Veranstaltung und die Regelungen zur Anrechnung der Übungsleistungen in die Endnote aufgeführt:

  `https://moodle.informatik.tu-darmstadt.de/course/view.php?id=1724`

- Von dieser Übung wird die **2. Aufgabe** bewertet.
- Die **handschriftlichen Lösungen** zu den Übungsaufgaben sind als einzelnes PDF-Dokument über Moodle bis **Montag, den 19.05.2025 um 12:00 Uhr** abzugeben. Erlaubt ist die Abgabe mit Stift auf Papier verfasster Lösungen als Scans oder Fotografien sowie digital handschriftlich erstellte Lösungen.
- **Beachten Sie die** auf der Kursseite im Lernportal Informatik angegebenen **Regelungen zur Übung**.

Aufgabe 1: Inverse Kinematik eines ebenen 2-DOF-Roboterbeins

Betrachtet wird das in Abbildung 1 dargestellte vereinfachte 2-DOF[1]-Bein eines Humanoidroboters bestehend aus zwei Drehgelenken und zwei Gliedern der Länge $l_1 = l_2 = 30$. Die Basis des Beines befinde sich in der Hüfte des Roboters, deren Position ${}^B\boldsymbol{r}_0 = (40, 50, 0)^T$ bzgl. des Koordinatensystems S_B als fest angenommen wird. Der Roboter soll mit dem Fuß gegen einen Ball treten, dessen Mittelpunkt sich an der Stelle ${}^B\boldsymbol{p} = (60, 5, 0)^T$ befinde (vgl. Abbildung 1c).

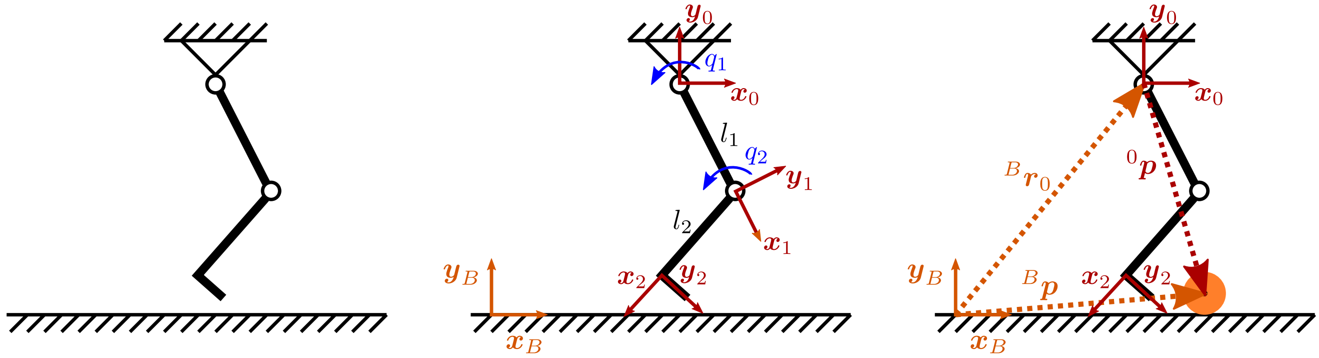

Abbildung 1: Vereinfachtes 2-DOF-Beinmodell eines Fußball spielenden Humanoidroboters

[1]DOF – Degrees of Freedom – bezeichnet die Anzahl der Bewegungsfreiheitsgrade eines Roboters, also typischerweise die Anzahl seiner unabhängig ansteuerbaren Gelenkantriebe.

Mit waagerechter Nullstellung und lokalen Koordinatensystemen wie in Abbildung 1b ergibt sich als Vorwärtskinematikmodell des Beines die homogene Transformationsmatrix

$$
{}^{0}\boldsymbol{T}_2(q_1, q_2) \;=\; \begin{pmatrix} \cos(q_1+q_2) & -\sin(q_1+q_2) & 0 & l_1\cos q_1 + l_2\cos(q_1+q_2) \\ \sin(q_1+q_2) & \cos(q_1+q_2) & 0 & l_1\sin q_1 + l_2\sin(q_1+q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Es soll nun die inverse Kinematik des Beines betrachtet werden, um damit die Gelenkwinkel q_1 und q_2 zur gewünschten Fußposition zu bestimmen. Dazu ist die Lösung nichtlinearer Gleichungen nötig, die außer in Spezialfällen wie diesem im Allgemeinen sehr schwierig ist. Daher sollen numerische Lösungsverfahren zur Anwendung kommen.

a) Bestimmen Sie mittels der Vorwärtskinematik und den gegebenen Parametern den Vektor ${}^{0}\boldsymbol{r}_2$ in Abhängigkeit von q_1, q_2.
Geben Sie außerdem die Position des Balles ${}^{0}\boldsymbol{p}$ in Bezug auf das Koordinatensystem S_0 an.

b) Stellen Sie eine Zielfunktion $\mathbf{F}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^2$ mit $\boldsymbol{x} = (q_1, q_2)^T$ auf, so dass $\mathbf{F}(\boldsymbol{x}) = 0$ genau dann gilt, wenn ${}^{0}\boldsymbol{r}_2 = {}^{0}\boldsymbol{p}$. Die Orientierung des Endeffektors müssen Sie hierbei nicht berücksichtigen.

c) Lösen Sie die nichtlineare Gleichung $\mathbf{F}(\boldsymbol{x}) = 0$ mit Hilfe der Fixpunktiteration. Nutzen Sie dabei die Relaxationsmatrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -0.02 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{pmatrix}$, für die das Verfahren konvergiert. Starten Sie mit dem Vektor $\boldsymbol{x}^{(0)} = (-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2})^T$ und führen Sie zwei Iterationen durch. Berechnen Sie die Iterierten auf vier Nachkommastellen genau.

d) Wenden Sie nun das Newton-Verfahren für $\mathbf{F}(\boldsymbol{x}) = 0$ an. Berechnen Sie dafür zunächst allgemein die Jacobi-Matrix $\mathbf{J_F} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{x}}$ und lösen Sie dann in jedem Schritt das lineare Gleichungssystem $\mathbf{J_F}(\boldsymbol{x})\Delta\boldsymbol{x} = -\mathbf{F}(\boldsymbol{x})$. Führen Sie ebenfalls beginnend mit dem Startvektor $\boldsymbol{x}^{(0)} = (-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2})^T$ zwei Iterationen mit einer Genauigkeit von vier Nachkommastellen aus.

e) Prüfen Sie abschließend, welche Endeffektorpositionen ${}^{0}\mathbf{r}_E$ tatsächlich zu den von Ihnen berechneten Gelenkwinkelstellungen $\boldsymbol{x}^{(2)}_{\text{FPI}}$ (Aufgabe c)) und $\boldsymbol{x}^{(2)}_{\text{Newton}}$ (Aufgabe d)) gehören. Deuten Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 2: Iterative Nullstellenapproximation (10 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{10}x^3 + e^{-x^2} \cdot \cos(x).$$

Dem Plot in Abbildung 2 können Sie entnehmen, dass die Funktion eine Nullstelle bei $x_s \approx -1.0$ besitzt.

Die Nullstelle soll im Folgenden mithilfe der in der Vorlesung vorgestellten numerischen Lösungsverfahren für nichtlineare Gleichungen ermittelt werden.

Sofern in den folgenden Teilaufgaben Rechenergebnisse gefordert sind, dürfen diese rechnergestützt (mit double precision!) ermittelt werden. Für die Abgabe genügt es, die Ergebnisse auf 8 Dezimalstellen genau zu notieren.

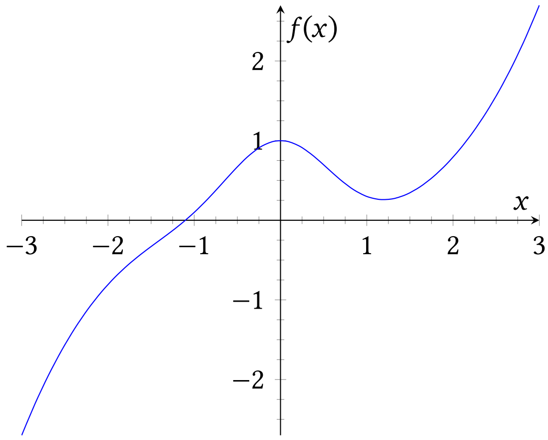

Abbildung 2: Plot von f(x)

a) Zunächst soll die Fixpunktiteration zur Nullstellensuche eingesetzt werden. Entscheiden Sie anhand von Abbildung 2, ob für die triviale Fixpunktgleichung $g_1(x) = f(x) + x$ die Konvergenzbedingung erfüllt ist.

b) Untersuchen Sie nun die Fixpunktgleichung $g_2(x) = a \cdot f(x) + x$ mit $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Bestimmen Sie zunächst den optimalen Relaxations-Koeffizient a mittels des in der Vorlesung vorgestellten Ansatzes. Nutzen Sie hierfür noch den ungefähren Wert $x_s \approx -1.0$.
Entscheiden Sie dann rechnerisch mit der genauen Nullstelle $x_s = -1.1023352300012041$, ob die Konvergenzbedingung für g_2 erfüllt ist.

c) Als zweites numerisches Iterationsverfahren haben Sie das Newton-Verfahren kennengelernt. Stellen Sie dafür die Iterationsvorschrift zur Nullstellenberechnung von $f(x)$ auf.

d) Führen Sie für das relaxierte Fixpunktverfahren und das Newton-Verfahren jeweils fünf Schritte ausgehend von $x_0 = -0.1$ durch und notieren Sie das Ergebnis zu jeder Iteration.

e) Welches der beiden Verfahren ist zu welchen Zeitpunkten das geeignetere? Begründen Sie jeweils, warum das der Fall ist. Betrachten Sie dazu Ihre Ergebnisse aus der letzten Teilaufgabe und auch den theoretischen Hintergrund zu den Verfahren, wie er in der Vorlesung vorgestellt wurde.

f) Welches Konvergenzverhalten ist für die beiden Verfahren zu vermuten, wenn als Startwert $x_0 = 1$ gewählt wird? Begründen Sie.

g) In realen Implementierungen des Newton-Verfahrens ist es häufig zu aufwändig oder gar unmöglich, die Jacobi-Matrix analytisch anzugeben. Stattdessen wird sie oft mithilfe von *Vorwärtsdifferenzen* approximiert, d. h. mit

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) \approx \frac{F_i\big(x + e_j h\big) - F_i(x)}{h},$$

wobei e_j der j-te Einheitsvektor und h die Schrittweite ist. Die nachstehende Einzelaufgabe illustriert an unserer Testfunktion $f(x)$ den praktischen Einfluss der Schrittweite h auf die Genauigkeit der Vorwärtsdifferenzenapproximation.

1. Schätzen Sie die Ableitung für $x = -0.2$ mit dem *Vorwärtsdifferenzenquotienten*

   $$D_h f(-0.2) = \frac{f(-0.2 + h) - f(-0.2)}{h}.$$

   Berechnen Sie dazu den absoluten Fehler $|f'(-0.2) - D_h f(-0.2)|$ für mindestens die Schrittweiten $h \in \{10^{-0}, 10^{-4}, 10^{-8}, 10^{-12}, 10^{-16}\}$. (Notieren Sie die Ergebnisse jeweils auf acht Dezimalen genau.)

2. Begründen Sie mit wenigen Sätzen, weshalb der Fehler ab einem bestimmten h trotz kleinerer Schrittweite wieder zunimmt.

Hinweis zu wissenschaftlichem Arbeiten

Der Fachbereich Informatik misst der Einhaltung der Grundregeln der wissenschaftlichen Ethik großen Wert bei. Mit der Abgabe einer Lösung für eine schriftliche Aufgabe oder eine Programmieraufgabe bestätigen Sie, dass Sie/Ihre Gruppe die alleinigen Autoren des gesamten Materials sind. Es ist nicht gestattet, Lösungen anderer Personen als die der Gruppenmitglieder als Lösung der Aufgabe abzugeben. Falls die Verwendung von Fremdmaterial gestattet ist, so müssen alle relevanten Quellen explizit und korrekt angegeben werden. Dem widersprechendes Handeln ist Plagiarismus und ist ein ernster Verstoß gegen die Grundlagen des wissenschaftlichen Arbeitens, das ernsthafte Konsequenzen bis hin zur Exmatrikulation haben kann. Weiterführende Informationen finden Sie auf der Internetseite des Fachbereichs Informatik:

`https://www.informatik.tu-darmstadt.de/studium_fb20/im_studium/studienbuero/plagiarismus/index.de.jsp`