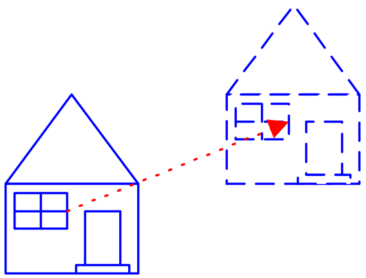
Transformações 2D

Transformações geométricas 2D

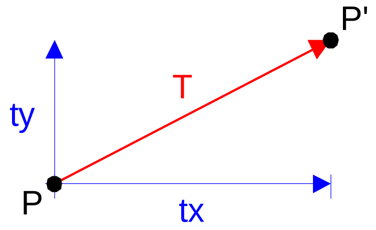
- As transformações geométricas 2D permitem alterar a posição, orientação, tamanho e forma dos objectos num determinado plano.



Translação

- Deslocamento dos objectos segundo um determinado vector.
  - Adição a cada coordenada das distâncias de translação.

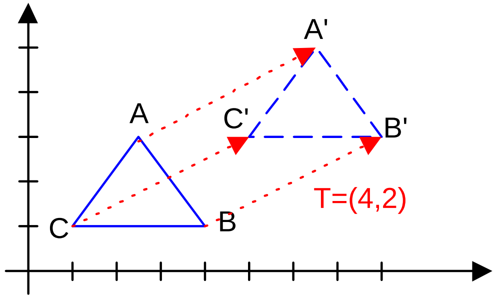
$$\begin{cases} x' = x + t_x \\ y' = y + t_y \end{cases}$$



- O par de distâncias denomina-se vector de translação

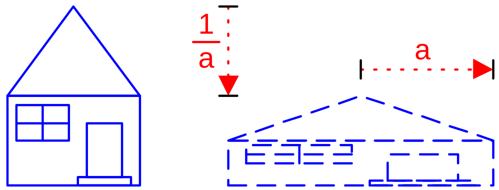
$$P' = P + \vec{T}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$



Transformações 2D
(cont.)

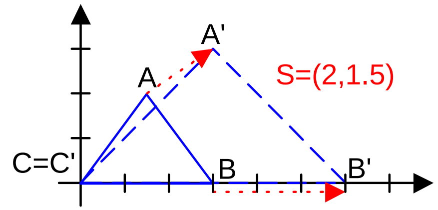
Alteração de escala



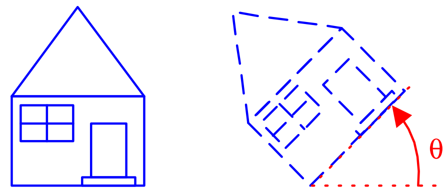
- Alteração do tamanho de um objecto.
  - multiplicação das coordenadas x e y por constantes.

$$\begin{cases} x' = s_x . x \\ y' = s_y . y \end{cases} \qquad P' = S.P \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

  - Factor de multiplicação:
    - <1 reduz o objecto.
    - >1 aumenta o objecto.
    - $s_x = s_y$ factor de escala uniforme

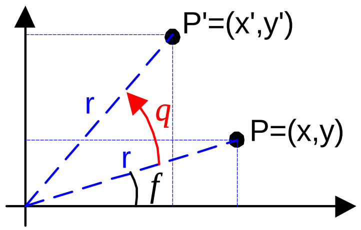


Rotação



- Deslocamento circular de um objecto sobre a origem.

$$\begin{cases} x' = r.\cos(f+q) \\ y' = r.sen(f+q) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = r.\cos(f)\cos(q) - r.sen(f)sen(q) \\ y' = r.\cos(f)sen(q) + r.sen(f)\cos(q) \end{cases}$$

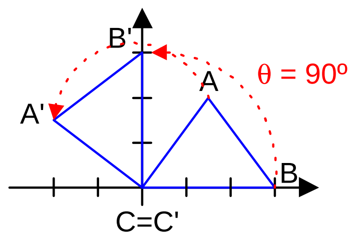


como: $\begin{cases} x = r.\cos(f) \\ y = r.sen(f) \end{cases}$

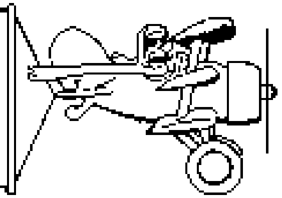
então:

$$\begin{cases} x' = x.\cos(q) - y.sen(q) \\ y' = x.sen(q) + y.\cos(q) \end{cases}$$

$$P' = R.P \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(q) & -sen(q) \\ sen(q) & \cos(q) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



Coordenadas Homogéneas



- Muitas das aplicações gráficas envolvem sequências de transformações geométricas.
  - grande quantidade de cálculos. (nº *transformações* $\times$ nº*vértices*)
- As transformações geométricas podem ser representadas por:

$$P' = M_1.P + M_2 \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rs_{xx} & rs_{xy} \\ rs_{yx} & rs_{yy} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

Coordenadas homogéneas

- Podem-se combinar as matrizes M_1 e M_2 numa única matriz de dimensão superior (3×3).
  - necessário representar vértices por vectores com três elementos.

$$(x, y) \rightarrow (x_h, y_h, h) \quad em\ que \quad \begin{cases} x_h = x.h \\ y_h = y.h \end{cases}$$

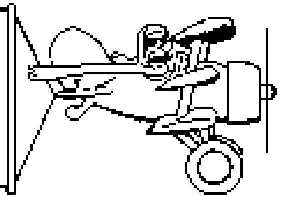
  - Normalmente utiliza-se ***h* = *1***. (x, y) => (x, y, 1)

Equações gerais de transformação

- As transformações (compostas ou não) podem ser representadas de uma forma geral:

$$P_h' = M_h.P_h \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rs_{xx} & rs_{xy} & t_x \\ rs_{yx} & rs_{yy} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} x' = x.rs_{xx} + y.rs_{xy} + t_x \\ y' = x.rs_{yx} + y.rs_{yy} + t_y \end{cases}$$

Coordenadas Homogéneas *(cont.)*



☞ Translação

vectores coluna

$$P' = T(t_x, t_y).P \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

vectores linha

$$P' = P.T(t_x, t_y) \qquad \begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & 1 \end{bmatrix}$$

☞ Alteração de Escala

$$P' = S(s_x, s_y).P \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

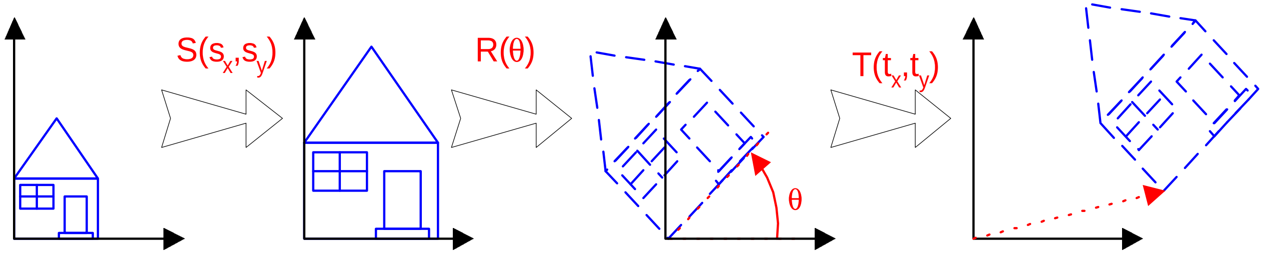
$$P' = P.S(s_x, s_y) \qquad \begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

☞ Rotação

$$P' = R(q).P \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(q) & -sen(q) & 0 \\ sen(q) & \cos(q) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P' = P.R(q) \qquad \begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos(q) & sen(q) & 0 \\ -sen(q) & \cos(q) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Com as transformações básicas em coordenadas homogéneas é possível representar qualquer sequência de transformações por uma única matriz de transformação composta.



Concatenação de matrizes

- A operação que representa a composição de transformações é a concatenação de matrizes.
  - A concatenação de matrizes é associativa.

$$A.B.C = (A.B).C = A.(B.C)$$

  - A concatenação de matrizes não é em geral comutativa.
- Exemplo anterior:

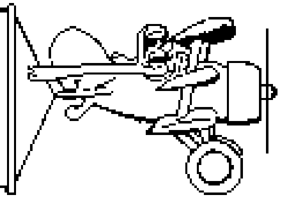
$$P' = T(t_x,t_y).R(q).S(s_x,s_y).P \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos(q) & -sen(q) & 0 \\ sen(q) & \cos(q) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

  - Uma vez que a concatenação de matrizes é associativa:

$$P' = \left[T(t_x,t_y).R(q).S(s_x,s_y)\right].P = M.P \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rs_{xx} & rs_{xy} & t_x \\ rs_{yx} & rs_{yy} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Composição de Transformações

(cont.)



Translação

- Composição de translações

$$P' = T(t_{x2},t_{y2}).T(t_{x1},t_{y1}).P = T(t_{x1}+t_{x2},t_{y1}+t_{y2}).P$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{x2} \\ 0 & 1 & t_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{x1} \\ 0 & 1 & t_{y1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & t_{x1}+t_{x2} \\ 0 & 0 & t_{y1}+t_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Translação inversa

$$P = T^{-1}(t_x,t_y).T(t_x,t_y).P \Leftrightarrow T^{-1}(t_x,t_y).T(t_x,t_y) = I \Leftrightarrow T^{-1}(t_x,t_y) = T(-t_x,-t_y)$$

Alteração de escala

- Composição de escalamentos

$$P' = S(s_{x2},s_{y2}).S(s_{x1},s_{y1}).P = S(s_{x1}.s_{x2},s_{y1}.s_{y2}).P$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} s_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{x1}.s_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y1}.s_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Escalamento inverso

$$P = S^{-1}(s_x,s_y).S(s_x,s_y).P \Leftrightarrow S^{-1}(s_x,s_y).S(s_x,s_y) = I \Leftrightarrow S^{-1}(s_x,s_y) = S\left(\frac{1}{s_x},\frac{1}{s_y}\right)$$

Rotação

- Composição de rotações

$$P' = R(q_2).R(q_1).P = R(q_1+q_2).P$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & -sen(q_2) & 0 \\ sen(q_2) & \cos(q_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -sen(q_1) & 0 \\ sen(q_1) & \cos(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(q_1+q_2) & -sen(q_1+q_2) & 0 \\ sen(q_1+q_2) & \cos(q_1+q_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

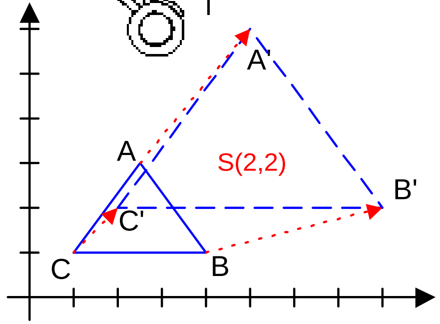
- Rotação inversa

$$P = R^{-1}(q).R(q).P \Leftrightarrow R^{-1}(q).R(q) = I \Leftrightarrow R^{-1}(q) = R(-q)$$

Composição de Transformações
(cont.)

☞ Alteração de escala relativa a um ponto de referência

⇨ A alteração de escala de um objecto que não esteja posicionado na origem provoca uma translação, para além da alteração de escala.



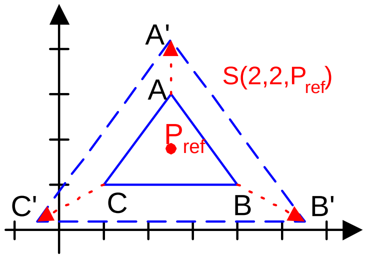
✑ Solução:

① Transladar os objectos de forma a que o ponto de referência coincida com a origem.

② Realizar a alteração de escala.

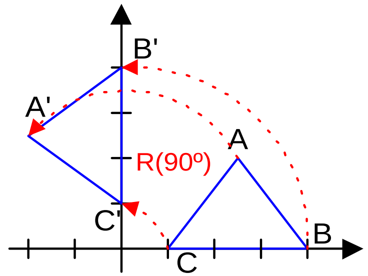
③ Deslocar o ponto de referência para a posição anterior.

$$P = S(s_x, s_y, x_{ref}, y_{ref}) = T^{-1}(-x_{ref}, -y_{ref}).S(s_x, s_y).T(-x_{ref}, -y_{ref}).P =$$
$$= T(x_{ref}, y_{ref}).S(s_x, s_y).T(-x_{ref}, -y_{ref}).P$$



☞ Rotação em relação a um ponto de referência

⇨ A operação de rotação desloca os objectos num percurso circular em torno da origem.



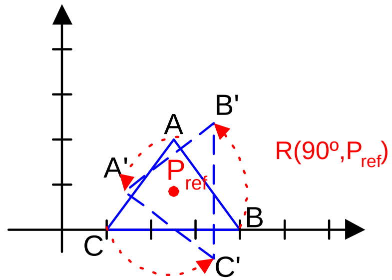
✑ Solução:

① Transladar os objectos de forma a que o ponto de referência coincida com a origem.

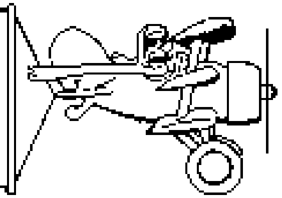
② Rodar os objectos.

③ Deslocar o ponto de referência para a posição anterior.

$$P' = R(q, x_{ref}, y_{ref}) = T^{-1}(-x_{ref}, -y_{ref}).R(q).T(-x_{ref}, -y_{ref}).P =$$
$$= T(x_{ref}, y_{ref}).R(q).T(-x_{ref}, -y_{ref}).P$$



Transformações 2D
(cont.)

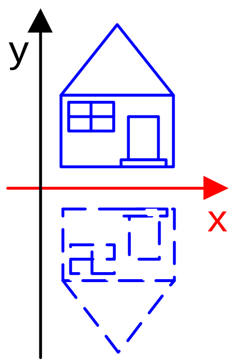


☞ Reflexão

✏ Produz uma imagem “espelhada“ de um objecto em relação a um determinado eixo.

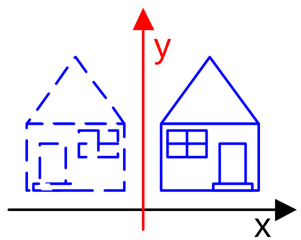
Eixo x

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



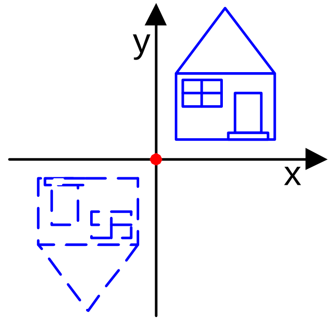
Eixo y

$$R_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Origem

$$R_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

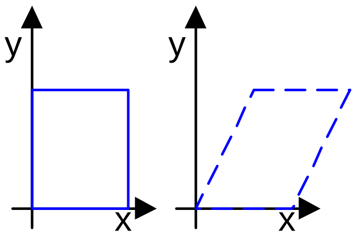


☞ *Shear*

✏ Causa a distorção de um determinado objecto segundo uma determinada direcção.

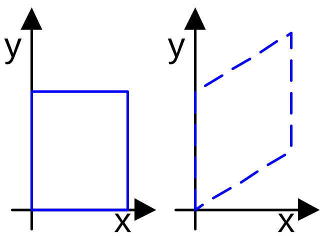
Shear em x

$$Sh_x(sh_x) = \begin{bmatrix} 1 & sh_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



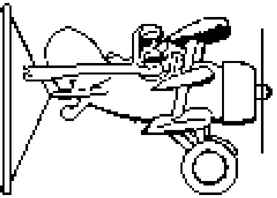
Shear em y

$$Sh_y(sh_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ sh_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

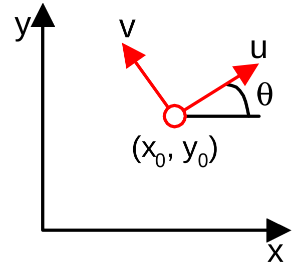


Transformações 2D

(cont.)



☞ Transformações entre sistemas de coordenadas



- Frequentemente é necessário converter as coordenadas que descrevem objectos num determinado referencial para outro.
  - p.ex: passagem de coordenadas de modelação para coordenadas universais.
- Dado um novo sistema coordenado definido por:
  - Um ponto origem. (x_0,y_0)
  - Um vector unitário por eixo. (u e v)
- Para se obter a matriz transformação
  - desloca-se o novo referencial de forma a coincidir com o antigo:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

① Translação para a origem:

$$P' = T(-x_0, -y_0).P$$

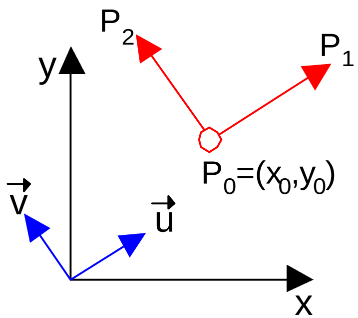
$$R = \begin{bmatrix} \cos q & \operatorname{sen} q & 0 \\ -\operatorname{sen} q & \cos q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

② Rotação do referencial:

- Rotação com um ângulo *-q*.

$$P' = R(-q).T(-x_0, -y_0).P$$

- Alternativamente, a matriz de rotação pode ser criada, preenchendo a matriz (2x2) do canto superior esquerdo, com os dois versores ortogonais do referencial.
- Utilizando os vectores unitários do novo referencial obtemos a matriz rotação **R**.

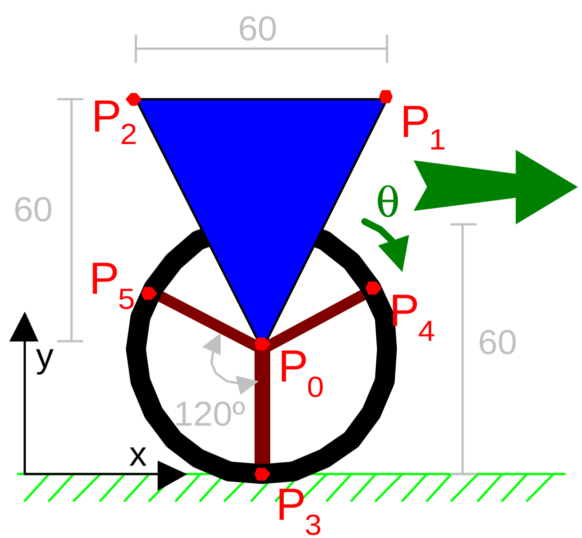


$$\vec{u} = \frac{P_1 - P_0}{\|P_1 - P_0\|} = (u_x, u_y) \qquad \vec{v} = \frac{P_2 - P_0}{\|P_2 - P_0\|} = (v_x, v_y) \equiv (-u_y, u_x) \qquad R = \begin{bmatrix} u_x & u_y & 0 \\ v_x & v_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformações 2D

- **Exemplo:** Determine as transformações necessárias para animar o seguinte modelo de um monociclo.
  - Consoante a roda gira um determinado ângulo (θ), o veículo vai-se deslocando para a frente.
    - Corpo do veículo (pontos $\mathbf{P_0}$ a $\mathbf{P_2}$)
      - O corpo do veículo desloca-se para a frente num movimento de translação. O deslocamento é igual ao perímetro do arco de rotação da roda.

$$P' = T\left(2\pi r\frac{\theta}{360^o},0\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2\pi r\frac{\theta}{360^o} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



    - Roda (pontos $\mathbf{P_3}$ a $\mathbf{P_5}$)
      - A roda realiza uma rotação em torno do seu eixo ($\mathbf{P_0}$), e simultaneamente esse eixo desloca-se para a frente em consonância com o resto do corpo do veículo.

$$P' = T\left(2\pi r\frac{\theta}{360^o},0\right).T(x_0,y_0).R(-\theta).T(-x_0,-y_0).P$$

$$P' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2\pi r\frac{\theta}{360^o} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\text{sen}(-\theta) & 0 \\ \text{sen}(-\theta) & \cos(-\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .P$$