Inlämningsuppgift 2

Erik Ödmann, David Carlsson

2022-03-18

Deluppgift 1

Vi har ett stickprov $X_1, ..., X_n$ från $X \sim Poi(\theta)$, där θ är okänd ($\theta > 0$).

Fall 1

I första fallet använder vi apriorifördelningen $p(\theta) \propto 1/\sqrt{\theta}$ som tillhör klassen av Jeffreys fördelningar, där $p(\theta) \propto \sqrt{I(\theta)}$. För att kontrollera detta behöver vi beräkna fisherinformationen för en poissionfördelad variabel. Fisherinformationen ges utav formeln

$$I(\theta) = -E[l''(\theta)]$$

Där likelihood funktionen för en observation är

$$L(\theta) = \frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!}$$

Vilket ger oss log-likelihood funktionen för en observation

$$\begin{aligned} l(\theta) &= \ln\left(\frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!}\right) \\ &= \ln(\theta^x e^{-\theta}) - \ln(x!) \\ &= \ln(\theta^x) + \ln(e^{-\theta}) - \ln(x!) \\ &= x\ln(\theta) - \theta - \ln(x!) \end{aligned}$$

Förstaderivatan utav log-likelihood funktionen för en observation blir

$$\begin{aligned} l'(\theta) &= \frac{d}{d\theta}\bigg(x\ln(\theta) - \theta - \ln(x!)\bigg) \\ &= \frac{x}{\theta} - 1 \end{aligned}$$

och andraderivatan kan då beräknas till

$$\begin{aligned} l''(\theta) &= \frac{d}{d\theta}\left(\frac{x}{\theta} - 1\right) \\ &= -\frac{x}{\theta^2} \end{aligned}$$

Eftersom att $E[x] = \theta$ kan vi då beräkna Jeffreys fördelning till

$$
\begin{aligned}
p(\theta) \propto \sqrt{I(\theta)} &= \sqrt{-E[l''(\theta)]} \\
&= \sqrt{-E\left[-\frac{x}{\theta^2}\right]} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\theta}}
\end{aligned}
$$

Vilket är lika med apriorifördelningen som vi skulle utgå ifrån. Nu kan vi fortsätta med att härleda aposteriorifördelningen som ges utav uttrycket

$$
p(x|\theta) = \frac{p(\theta|x)p(\theta)}{p(x)} \propto p(\theta|x)p(\theta)
$$

Där $p(\theta|x)$ är likelihood funktionen för hela stickprovet och $p(\theta)$ är apriorifördelningen som vi blev tilldelade. Likelihooden för hela stickprovet ges utav

$$
\begin{aligned}
L_n(\theta) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta^{x_i} e^{-\theta}}{x_i!} \\
&= \frac{\theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i} e^{-n\theta}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} \\
&= \frac{\theta^{n\bar{x}} e^{-n\theta}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} \\
&\propto \theta^{n\bar{x}} e^{-n\theta}
\end{aligned}
$$

Aposteriorifördelningen blir då

$$
\begin{aligned}
p(x|\theta) &\propto \theta^{n\bar{x}} e^{-n\theta} \frac{1}{\sqrt{\theta}} \\
&= \theta^{n\bar{x}-1/2} e^{-n\theta}
\end{aligned}
$$

och eftersom $\Gamma(\alpha, \beta) \propto \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta}$ kan vi säga att aposteriorifördelningen är proportionell mot $\Gamma(n\bar{x} + 1/2, n)$ vilket är en gammafördelning.

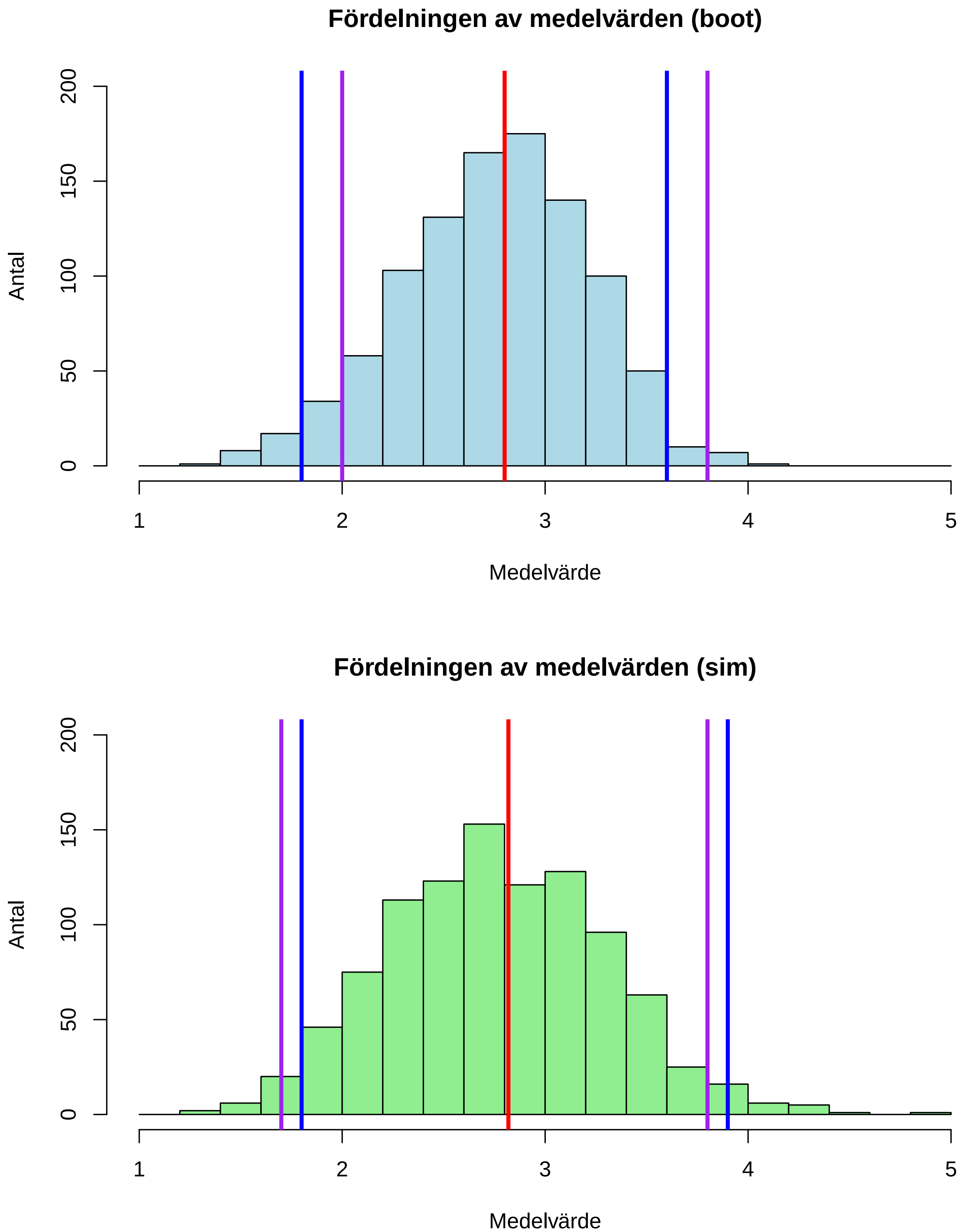
Fall 2

Nu utgår vi istället från apriorifördelningen $p(\theta) \sim \Gamma(\alpha, \beta) \propto \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta}$ samt likelihood funktionen från fall 1. Detta ger oss aposteriorifördelningen

$$
\begin{aligned}
p(x|\theta) &\propto \theta^{n\bar{x}} e^{-n\theta} \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta} \\
&= \theta^{\alpha+n\bar{x}-1} e^{-(\beta+n)\theta}
\end{aligned}
$$

Vilket är proportionell mot $\Gamma(\alpha + n\bar{x}, \beta + n)$. Vi kan därmed dra slutsatsen att aposteriorifördelningen i fall 2 är proportionell mot samma gammafördelning som i fall 1 då $\alpha = 1/2$ och $\beta = 0$.

Deluppgift 2



Figur 1: Simulerad fördelninen av medelvärdet för icke-parametriskt samt parametrisk bootstrap. Medelvärdet av fördelningen är markerat med den röda linjen. Konfidensintervallsgränserna är markerade i blått (percentil) och lila (“basic”).