

Project 1 calculations

Exponentialfördelningen

Täthetsfunktionen

$$p_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

Likelihood för en observation

$$L(\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Log-likelihood för en observation

$$\begin{aligned} l(\lambda) &= \ln(\lambda e^{-\lambda x}) \\ &= \ln(\lambda) + \ln(e^{-\lambda x}) \\ &= \ln(\lambda) - \lambda x \ln(e) \\ &= \ln(\lambda) - \lambda x \end{aligned}$$

Log-likelihood för hela urvalet

$$\begin{aligned} l_n(\lambda) &= \sum_{i=1}^n (\ln(\lambda) - \lambda x_i) \\ &= n \ln(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i \end{aligned}$$

Första derivatan av likelihood funktionen för urvalet

$$\begin{aligned} l'_n(\lambda) &= \frac{d}{d\lambda} (n \ln(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i) \\ &= n\lambda^{-1} - \sum_{i=1}^n x_i \end{aligned}$$

ML skattningen ges utav att lösa

$$\begin{aligned}l'_n(\lambda) &= n\lambda^{-1} - \sum_{i=1}^n x_i = 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i &= \frac{n}{\lambda} \\ \Leftrightarrow \hat{\lambda} &= \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i}\end{aligned}$$

För att beräkna fisherinformationen behöver vi andraderivatan utav log-likelihood funktionen

$$\begin{aligned}l''_n(\lambda) &= \frac{d}{d\lambda}(n\lambda^{-1} - \sum_{i=1}^n x_i) \\ &= -n\lambda^{-2}\end{aligned}$$

Fisherinformationen för urvalet blir då

$$\begin{aligned}I_n(\lambda) &= -E[l''_n(\lambda)] \\ &= -E[-n\lambda^{-2}] \\ &= n\lambda^{-2}\end{aligned}$$

Medelfelet för ML-skattningen ges då utav

$$\begin{aligned}Sd(\hat{\lambda}) &= I_n(\hat{\lambda})^{-1/2} \\ &= (n\hat{\lambda}^{-2})^{-1/2} \\ &= \hat{\lambda}n^{-1/2}\end{aligned}$$