# Beräkningar inlämningsuppgift 1

Erik Ödmann, David Carlsson

## Exponentialfördelningen

### Täthetsfunktionen

$$p_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

### Likelihood för en observation

$$L(\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$$

### Log-likelihood för en observation

$$\begin{aligned} l(\lambda) &= \ln(\lambda e^{-\lambda x}) \\ &= \ln(\lambda) + \ln(e^{-\lambda x}) \\ &= \ln(\lambda) - \lambda x \ln(e) \\ &= \ln(\lambda) - \lambda x \end{aligned}$$

### Log-likelihood för hela urvalet

$$\begin{aligned} l_n(\lambda) &= \sum_{i=1}^{n} (\ln(\lambda) - \lambda x) \\ &= n \ln(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i \end{aligned}$$

### Första derivatan av likelihood funktionen för urvalet

$$\begin{aligned} l_n'(\lambda) &= \frac{d}{d\lambda}(n \ln(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i) \\ &= n\lambda^{-1} - \sum_{i=1}^{n} x_i \end{aligned}$$

**ML skattningen ges utav att lösa**

$$\begin{aligned} l'_n(\lambda) &= n\lambda^{-1} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i &= \frac{n}{\lambda} \\ \Leftrightarrow \hat{\lambda} &= \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \end{aligned}$$

**För att beräkna fisherinformationen behöver vi andraderivatan utav log-likelihood funktionen**

$$\begin{aligned} l''_n(\lambda) &= \frac{d}{d\lambda}(n\lambda^{-1} - \sum_{i=1}^{n} x_i) \\ &= -n\lambda^{-2} \end{aligned}$$

**Fisherinformationen för urvalet blir då**

$$\begin{aligned} I_n(\lambda) &= -E[l''_n(\lambda)] \\ &= -E[-n\lambda^{-2}] \\ &= n\lambda^{-2} \end{aligned}$$

**Medelfelet för ML-skattningen ges då utav**

$$\begin{aligned} Sd(\hat{\lambda}) &= I_n(\hat{\lambda})^{-1/2} \\ &= (n\hat{\lambda}^{-2})^{-1/2} \\ &= \hat{\lambda} n^{-1/2} \end{aligned}$$

# Binomialfördelningen

## Täthetsfunktionen

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = \text{Antal utfall}$$

## Likelihood för hela urvalet

$$L_n(p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

## Log-likelihood för hela urvalet

$$\begin{aligned} l_n(p) &= \ln(\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}) \\ &= \ln(\binom{n}{k}) + \ln(p^k) + \ln((1-p)^{n-k}) \\ &= \ln(\binom{n}{k}) + k\ln(p) + (n-k)\ln(1-p) \end{aligned}$$

## Första derivatan utav log-likelihood funktionen för hela urvalet

$$\begin{aligned} l'_n(p) &= \frac{d}{dp}(\ln(\binom{n}{k}) + k\ln(p) + (n-k)\ln(1-p)) \\ &= kp^{-1} - (n-k)(1-p)^{-1} \end{aligned}$$

## ML-skattninges ges utav att lösa ekvationen för p

$$\begin{aligned} l'_n(p) &= kp^{-1} - (n-k)(1-p)^{-1} = 0 \\ &\Leftrightarrow kp^{-1} = (n-k)(1-p)^{-1} \\ &\Leftrightarrow (1-p)k = p(n-k) \\ &\Leftrightarrow k - pk = pn - pk \\ &\Leftrightarrow k = pn \\ &\Leftrightarrow \hat{p} = \frac{k}{n} \end{aligned}$$

## För att beräkna fisherinformationen behöver vi andraderivatan utav log-likelihood funktionen

$$\begin{aligned} l''_n(p) &= \frac{d}{dp}(kp^{-1} - (n-k)(1-p)^{-1}) \\ &= -kp^{-2} - (n-k)(1-p)^{-2} \end{aligned}$$

## Fisherinformationen för hela urvalet blir då

$$\begin{aligned} I_n(p) &= -E[l_n''(p)] \\ &= -E[-kp^{-2} - (n-k)(1-p)^{-2}] \\ &= -E[\frac{-k + 2kp - np^2}{p^2(1-p)^2}] \end{aligned}$$

Eftersom $E[k] = np$ får vi

$$\begin{aligned} I_n(p) &= \frac{np + np^2}{p^2(1-p)^2} \\ &= \frac{n}{p(1-p)} \end{aligned}$$

## Medelfelet för ML-skattningen ges då utav

$$\begin{aligned} Sd(\hat{p}) &= I_n(\hat{p})^{-1/2} \\ &= \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \end{aligned}$$