1 Odhady

Definice 1.1 *Faktoriál* $n! = 1 * 2 * ... * n$.

Definice 1.2 *Kombinační číslo* $\binom{n}{k} = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{n-i}{k-i}$.

Tvrzení 1.1 $\forall n \in \mathbb{N} : n^{n/2} \leq n! \leq n^n$.

Tvrzení 1.2 $\forall n \in \mathbb{N} : e(\frac{n}{e})^n \leq n! \leq en(\frac{n}{e})^n$.

Tvrzení 1.3 *Stirlingova formule.* $\forall n \in \mathbb{N} : \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n \sim n!$.

Tvrzení 1.4 $\forall n, k \in \mathbb{N} : (\frac{n}{k})^n \leq \binom{n}{k} \leq n^k$.

Tvrzení 1.5 $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{2^n}{n+1} \leq \binom{2n}{n} \leq 2^n$.

Tvrzení 1.6 $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{2^{2n}}{2\sqrt{n}} \leq \binom{2n}{n} \leq \frac{2^{2n}}{\sqrt{2n}}$.

2 Vytvořující funkce

Tvrzení 2.1 *Binetův vzorec.* $\forall n \in \mathbb{N} : F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$.

Věta 2.1 *Zobecněná binomická věta.* $\forall n \in \mathbb{R}, x \in (-1,1) : (1+x)^n = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} x^i$.

Důsledek 2.1 $\forall n \in \mathbb{N} : (1-x)^{-n} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i-1}{i} x^i$.

Definice 2.1 *Catalanovo číslo* $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Věta 2.2 *Počet binárních zakořeněných stromů na n vrcholech je roven C_n.*

3 Konečné projektivní roviny

Definice 3.1 *Konečná projektivní rovina* $(X, \mathcal{P})$.

Tvrzení 3.1 *Každé dvě přímky v KPR mají stejný počet bodů.*

Definice 3.2 *Řád KPR* $n = |P \in \mathcal{P}| - 1$.

Tvrzení 3.2 *Vlastnosti KPR.*

Definice 3.3 *Duální množinový systém k* $(X, \mathcal{P})$ *je* $(\mathcal{P}, \{\{P \in \mathcal{P} : x \in P\} : x \in X\})$.

Tvrzení 3.3 *Duálem ke KPR řádu n je KPR řádu n.*

Věta 3.1 *Pokud existuje algebraické těleso velikosti n, pak existuje KPR řádu n.*

Definice 3.4 *Latinský čtverec.*

Definice 3.5 *Latinské čtverce* L_1, L_2 *řádu n jsou ortogonální pokud* $\forall l_1, l_2 \exists i, j \in \{1...n\} : L_{1_{ij}} = l_1, L_{2_{ij}} = l_2$.

Tvrzení 3.4 *Existuje nejvýše $n-1$ ortogonálních latinských čtverců řádu n.*

Věta 3.2 *Existuje KPR řádu $n \geq 2$ právě když existuje $n-1$ navzájem ortogonálních latinských čtverců.*

4 Toky v sítích

Definice 4.1 *Síť. Zdroj. Stok.*

Definice 4.2 *Tok. Kirchhoffovy zákony. Velikost toku.*

Definice 4.3 *Řez, elementární řez. Kapacita řezu.*

Věta 4.1 *Maximální tok existuje.*

Věta 4.2 *Hlavní věta o tocích. Pro maximální tok f a minimální řez R platí $w(f) = c(R)$.*

Věta 4.3 *Věta o celočíselnosti. Maximální tok v sítí s celočíselnými kapacitami je celočíselný.*

Věta 4.4 *Kőnigova–Egerváryho věta. V bipartitním grafu je velikost maximálního párování rovna velikosti minimálního vrcholového pokrytí.*

Definice 4.4 *Systém různých reprezentantů v $(X, I, \mathcal{M})$ je funkce $f : I \to X$, která je prostá a navíc $\forall i \in I : f(i) \in M_i$.*

Věta 4.5 *Hallova věta. Množinový systém má SRR právě když platí Hallova podmínka.*

Důsledek 4.1 *Pokud v bipartitním grafu $G = (A \cup B, E)$ platí $\forall a \in A, b \in B : deg(a) > deg(b)$, tak existuje párování velikost alespoň $|A|$.*

Tvrzení 4.1 *Každý latinský obdélník lze doplnit na latinský čtverec.*

5 Míra souvislosti grafů

Definice 5.1 *Hranový řez, vrcholový řez.*

Definice 5.2 *Hranová souvislost, vrcholová souvislost.*

Definice 5.3 *Hranově t-souvislý graf. Vrcholově t-souvislý graf.*

Lemma 5.1 *Pro graf G platí $K_e(G) - 1 \leq K_e(G - e) \leq K_e(G)$.*

Lemma 5.2 *Pro graf G platí $K_v(G) - 1 \leq K_v(G - e) \leq K_v(G)$.*

Věta 5.1 *Pro graf G platí $K_v(G) \leq K_e(G)$.*

Věta 5.2 *Fordova–Fulkersonova věta. V každém hranově t-souvislém grafu mezi každými dvěma vrcholy existuje t hranově disjunktních cest.*

Věta 5.3 *Mengerova věta. V každém vrcholově t-souvislém grafu mezi každými dvěma vrcholy existuje t vrcholově disjunktních cest.*

Věta 5.4 *Ušaté lemma. Graf je vrcholově 2-souvislý právě když jej lze vytvořit z K_3 operacemi podrozdělení a přidávání hrany.*

6 Počítání dvěma způsoby

Věta 6.1 *Počet stromů na n vrcholech $\mathcal{K}(K_n) = n^{n-2}$. Odpovídá počtu koster úplného grafu.*

Věta 6.2 *Počet koster grafu úplného grafu bez jedné hrany $\mathcal{K}(K_n - e) = (n - 2)n^{n-3}$.*

Věta 6.3 *Spernerova věta. Maximální velikost nezávislého množinového systému $\mathcal{M} \subset 2^{\{1 \dots n\}}$ je $\binom{n}{n/2}$.*

7 Úvod do Ramseyovy teorie

Věta 7.1 *Dirichletův princip.*

Definice 7.1 *Ramseyovo číslo* $R(k, l)$.

Věta 7.2 *Ramseyova věta pro grafy.* $\forall k, l \in \mathbb{N} : R(k, l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$.

Tvrzení 7.1 $\forall k \in \mathbb{N} : R(k, k) \geq 2^{k/2}$.

Věta 7.3 *Ramseyova věta pro p-tice.* $\forall p, r, n_1, ..., n_r$ *je* $R_p(n_1, ..., n_r)$ *konečné.*

Věta 7.4 *Erdősova–Szekeresova věta.* $\forall K \in \mathbb{N}$ *existuje* $ES(k)$, *že každá konečná množina* $s \geq ES(k)$ *bodů v* $\mathbb{R}^2$ *v obecné poloze obsahuje* $ES(k)$ *bodů v konvexní poloze.*

Věta 7.5 *Nekonečná Ramseyova věta.* $\forall p, r \in \mathbb{N}$ *existuje r-obarvení množiny* $\binom{\mathbb{N}}{p}$, *že existuje nekonečná* $A \subset \mathbb{N}$ *taková, že všechny p-tice z A jsou stejné barvy.*

Lemma 7.1 *Kőnigovo lemma. Každý nekonečný, konečně větvící se strom, obsahuje nekonečnou větev.*

Věta 7.6 *Nekonečná verze Ramseyovy věty implikuje konečnou verzi.*

8 Samoopravné kódy

Definice 8.1 *Abeceda, slovo, kód.*

Definice 8.2 *Parametry kódu.*

Definice 8.3 *Kombinatorická koule. Objem kombinatorické koule* $V(t) = |B(x, t)| = \sum_{i=0}^{t} \binom{n}{i}(q-1)^i$

Tvrzení 8.1 *Hammingův odhad. Pro každý kód s parametry* $(n, k, 2t+1)_q$ *platí* $|C| \leq \frac{q^n}{V(t)}$.

Tvrzení 8.2 *Gilbertův–Varshamův odhad.* $\forall n, d, q \in \mathbb{N}$ *existuje kód* C *s parametry* $(n, k, d)_q$, *že* $|C| \geq \frac{q^n}{V(d-1)}$.

Definice 8.4 *Lineární kód je podprostor vektorového prostoru* $\mathbb{K}^n$, *kde* $\mathbb{K}$ *je konečné těleso, které tvoří abecedu kódu. Značím* $[n, k, d]_q$

Definice 8.5 *Generující matice kódu* $M \in \mathbb{K}^{k \times n}$, *jejími řádky jsou bazické vektory kódu* C.

Definice 8.6 *Duální kód* $C^{\perp} = \{x \in \mathbb{K} : \forall y \in C < x, y >= 0\}$.

Definice 8.7 *Kódování pomocí lineárních kódů. Informační a kontrolní symboly.*

Definice 8.8 *Kontrolní matice kódu* $M^{\perp}$. *Její podoba vzhledem ke generující matici.*

Definice 8.9 *Syndrom slova* $y \in \mathbb{K}_n^q$ *je* $M^{\perp}y$.

Lemma 8.1 *Syndrom je prostý na* $B(0, t)$, *kde* $t = \frac{d-1}{2}$.