

Relatório 3 - Raios X

Calebe Adjuto Araujo de Assunção, Davi Valadares Rodrigues Feliciano, and Matheus Gonçalves de Freitas
IF-UnB/ Laboratório de Física Moderna - 2021/1 - Grupo 2
(Data: 11 de setembro de 2023)

O espectro de alta energia do cobre pode ser obtido pelo bombardeamento de elétrons em alta velocidade em um ânodo de um tubo de raios X. O feixe resultante pode ser analisado com o uso de cristais de LiF e KBr, os quais por difração, realizam a monocromatização do feixe incidente em um ângulo θ . O resultado pode ser medido por um detector do tipo Geiger-Müller em um ângulo 2θ relativo ao feixe inicial, e, variando tal ângulo de 0° a 90° , o espectro de raios X é obtido. No resultado, é interessante aferir as energias das linhas de emissão K_β e K_α , e, medindo o ângulo mínimo no qual é detectada radiação, é possível atestar a lei de deslocamento de Duane-Hunt e obter um valor aproximado para a constante de Planck. Completando o experimento, mostra-se que as posições das bordas de absorção de diversos elementos químicos tem relação com seu número atômico, e procura-se estabelecer tal relação, conhecida como lei de Moseley.

INTRODUÇÃO

Os elementos atômicos, por terem configurações eletrônicas diversas, têm diversas faixas espectrais possíveis, entre elas as no espectro do raio X. Essas faixas espectrais na região do raio X podem ser extremamente úteis para a visualização de características de metais por suas configurações eletrônicas.

Uma forma de extrair informações sobre tais estruturas eletrônicas — e consequentemente caracterizar os diferentes elementos presentes em uma amostra arbitrária — normalmente é utilizada a excitação de elétrons de níveis mais baixos, o que causa a geração de fótons de alta energia, na região dos raios X.

Existem diversos motivos para se caracterizar os elementos utilizando a excitação de elétrons de níveis mais baixos, sendo o principal a pouca diferença entre os níveis de energia dos elétrons superiores nos metais analisados e/ou seus baixos níveis de energia necessários para retirar os elétrons superiores da estrutura eletrônica.

Existem diversas formas de produzir essa excitação em elétrons de níveis mais baixos, como por colisão de prótons[1], resultando diretamente em feixes de raio X, ou por colisão de elétrons, para produzirem fótons de alta energia.

O método por difração de elétrons, método de Bragg, é extremamente interessante, pois consegue produzir ótimos dados de maneira acessível. Esse método funciona através de um tubo com vácuo, com um ânodo — neste caso, constituído de cobre — e um cátodo ligado a um filamento, como exibido na figura 1. Esses eletrodos, ao serem submetidos a uma tensão, emitem elétrons que colidem no ânodo, sofrendo assim uma brusca desaceleração e emitindo fótons por efeito *Bremsstrahlung*. Além disso, alguns elétrons penetram suficientemente os átomos do ânodo para arrancar elétrons de baixas camadas. Na transição do átomo desse estado altamente excitado ao estado fundamental, um conjunto de fótons de alta energia é emitido.

A partir disso, são gerados feixes policromáticos, que são difratados em um cristal, o qual é responsável por mono-cromatizar o feixe. A radiação difratada se-

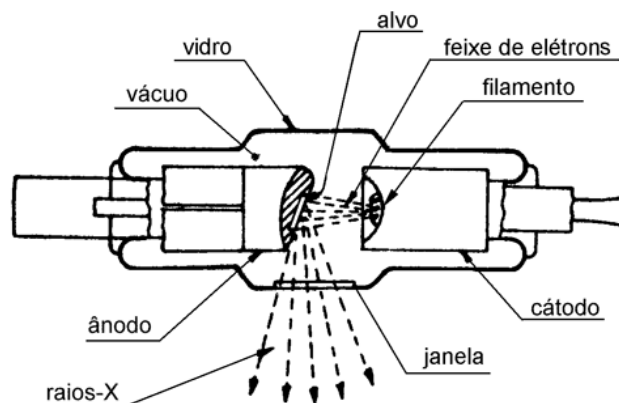


Figura 1. Representação de um tubo de raios X como o usado no experimento, o qual tem o próprio ânodo como alvo, constituído de cobre.

gue a lei de Bragg, tornando-se possível assim calcular a energia dos fótons no feixe pela expressão

$$E_{cin} = eU, \quad (1)$$

onde E_{cin} é a energia cinética do elétron, e é a carga do elétron e U é a diferença de potencial entre o ânodo e o cátodo. Na equação 1 é possível notar que a energia dos fótons, que é inversamente proporcional à λ , cresce ao aumentar a diferença de potencial entre o cátodo e o ânodo.

Quando os fótons incidem em um cristal analisador, eles sofrem uma difração. Esse efeito é causado por interferências nas camadas do cristal devido ao ângulo de incidência dos fótons, como pode ser visto na figura 2. Por consequência, para uma angulação do cristal de θ em relação a direção do feixe, este sai em uma direção 2θ , monocromático.

Assim, varrendo o cristal de $\theta = 0$ a $\theta = \pi/2$, e medindo a intensidade do feixe resultante no respectivo ângulo 2θ , é possível registrar o espectro de altas energias do cobre. A conversão entre medições de ângulo do cristal e energia do feixe obtido é feita pela equação 2, a qual é conhecida por lei de Bragg.

$$2d \sin \theta = n\lambda \quad (2)$$

Na equação 2, n é a ordem do espelhamento e d é a distância entre os átomos. A equação 2 pode então

ajudar a ajustar o λ_{min} e consequentemente a diferença de tensão mínima para visualizar os efeitos de interferência gerados.

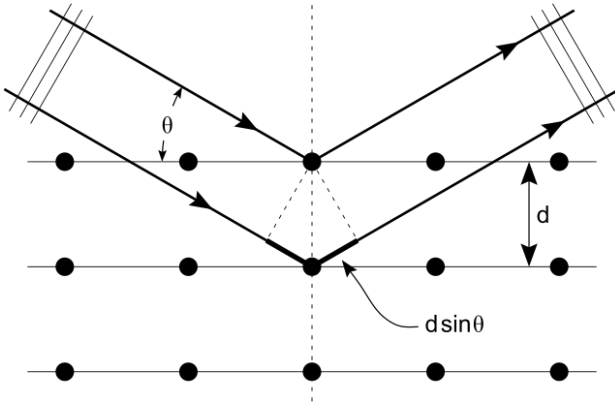


Figura 2. Representação simplificada de um cristal analisador como os usados no experimento.

Existe uma relação bem definida entre o menor comprimento de onda observado no espectro medido e a tensão de aceleração aplicada na válvula de raios X. Essa relação é denominada lei de Duane-Hunt, e é descrita pela equação 3, que foi obtida experimentalmente no início do século XX.

$$U \times \lambda_{min} = 1,25 \times 10^{-6} \text{ V m} \quad (3)$$

A partir dessa equação, da equação 1, da equação 3, e usando $E = hf$, é possível reescrever a lei de Duane-Hunt na forma

$$U = \frac{hc}{2ed \sin \theta_{min}}, \quad (4)$$

onde θ_{min} é o ângulo do cristal correspondente a observação de um feixe com o menor comprimento de onda λ_{min} . Desse modo, é possível atestar a validade da lei de Duane-Hunt por meio de uma estimativa da constante de Planck, uma vez que em um gráfico de medidas de U e $1/\sin \theta_{min}$ espera-se uma reta com coeficiente angular A , o qual se relaciona com a constante de Planck por meio de

$$h = \frac{2Aed}{c}. \quad (5)$$

Com a introdução de uma substância entre o cristal analisador de raios X e o sensor utilizado, é possível observar bordas de absorção característica do elemento absorvedor. Os raios X que penetram tal material podem perder energia em diversos processos, tais como espalhamento Compton ou Efeito Fotoelétrico. Para a faixa dos raios X, apenas o último apresenta efeitos significativos [3]. Assim, a transmitância do material em termos da energia do feixe de raios X incidente terá um comportamento similar ao representado na figura 3, onde a descontinuidade representa a transição eletrônica correspondente à absorção de um fóton.

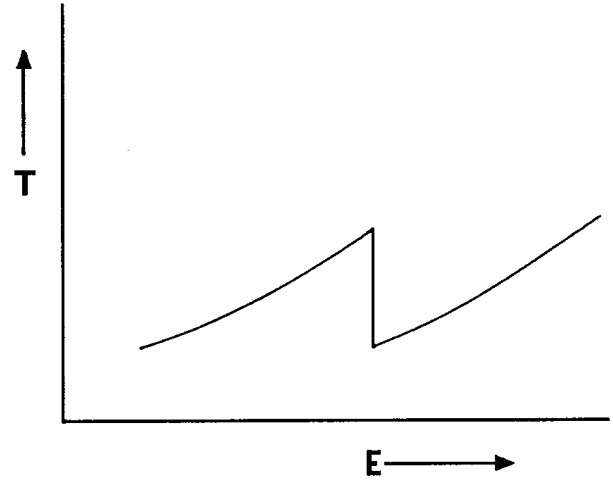


Figura 3. Curva de transmissão em termos da energia do feixe de raios X incidente sobre a substância utilizada.

A energia dessa transição, para átomos de número atômico Z é dada de forma aproximada pela equação

$$E = \frac{m_e e^4}{8h^2 \epsilon_0^2} \left(\frac{Z - b}{n} \right)^2, \quad (6)$$

onde b é a constante de blindagem, a qual depende de Z , e n é o número atômico da camada na qual ocorre a absorção. Tal expressão é conhecida como lei de Moseley, e pode ser verificada usando a forma para a equação 7 para obter as energias dos fótons incidentes.

$$E = \frac{nhc}{2d \sin \theta} \quad (7)$$

Reescrevendo a equação 6 como

$$E = Rh \left(\frac{Z - b}{n} \right)^2, \quad (8)$$

onde

$$R = \frac{m_e e^4}{8h^3 \epsilon_0^2} = 3,289 89 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$$

é a constante de Rydberg, essa lei pode ser atestada experimentalmente usando diferentes substâncias com elementos de diferentes números atômicos, e medindo a energia correspondente as bordas de absorção para cada caso. Desse modo, o gráfico de Z em termos de \sqrt{E} deve ser uma reta, uma vez que

$$Z = \sqrt{\frac{E}{Rh}} + b. \quad (9)$$

Aqui foi tomado $n = 1$ antecipando o fato de que as absorções ocorrerão na camada K, o que será confirmado posteriormente. Finalmente, por meio do coeficiente angular m da reta obtida, cujo valor esperado é

$$A = \frac{1}{\sqrt{Rh}} = 6,77 \times 10^8 \text{ J}^{-1/2}, \quad (10)$$

pode-se confirmar a lei de Moseley.

Objetivos

Verificar experimentalmente a lei de Duane-Hunt, a lei de Bragg, os ângulos mínimos de difração, as faixas K_α e K_β do cobre, e a caracterização das bordas de absorção de diversos elementos, pelo método de espectroscopia por raios X.

METODOLOGIA

Materiais

1. Unidade de medição de raios X, como a exibida na figura 4;
2. Diafragmas (colimadores) com aberturas de 2mm e 5mm;
3. Detector do tipo Geiger-Müller;
4. Computador com o programa *Measure*, com plugin para o contador de Geiger-Müller instalado;
5. Interface *Cobra3* para viabilizar a coleta de dados com uso do computador;
6. Monocristais de LiF e KBr, com $d = 2,014 \times 10^{-10}\text{m}$ e $d = 3,295 \times 10^{-10}\text{m}$, respectivamente;
7. Conjunto de absorvedores contendo placas de Zinco, Germânio, Arsênio, Selênio, Bromo, Rubídio e Estrôncio.

Procedimentos

1. Fazer as conexões da unidade de raios X com a interface *Cobra3*, habilitando o plugin do contador Geiger-Müller no software *Measure*.
2. No *Measure*, ajusta-se o tempo de aquisição dos dados, os ângulos inicial (8°) e final (89°) de aquisição.
3. Na unidade de raios X, usa-se a configuração de varredura dupla, na qual o detector vai de 0° a 90° , enquanto o cristal vai de 0 a 45° . Configura-se também uma tensão de 17kV no voltímetro, que, de acordo com a tabela de conversão fornecida, corresponde a 26,5kV na válvula. O uso de tal tabela é justificado na subseção seguinte.
4. Posiciona-se o ângulo do detector em aproximadamente para 5° , e, com a segunda velocidade de varredura é iniciada a aquisição dos dados.

5. Com esses passos foram obtidas medidas de intensidade de raios X em função do ângulo de Bragg para a determinação das energias características de K_α e K_β com uso dos monocristais de LiF e KBr, e com colimadores de 2mm e 5 mm.
6. No próximo passo, através de tensões de aproximadamente 13kV, 15kV, 17kV, 19kV, 21kV, 23kV e 25kV, com o cristal de LiF, mediu-se o ângulo mínimo θ_{min} no qual começa a ser detectada radiação, correspondente ao menor comprimento de onda, ou à energia máxima. Com os resultados, procura-se determinar, por meio da lei de Duane-Hunt, uma estimativa para a constante de Planck.
7. Por fim, é feita a aquisição de dados da intensidade dos raios X em função do ângulo de Bragg correspondente às bordas de absorção para amostras de vários elementos químicos, como Zinco, Germânio, Arsênio, Selênio, Bromo, Rubídio e Estrôncio. Com esse resultado, procura-se com o uso da lei de Moseley estimar a constante de Rydberg.

Alguns Problemas nos Materiais

A unidade de raios X apresenta uma amostragem de tensão aplicada diferente da real devida a troca de sua fonte. Assim, usa-se uma tabela de conversão para traduzir os valores observados no display da unidade de raios X em valores reais de queda de tensão no tubo de raios X.

Um outro problema está no conversor digital-analógico, que, devido a problemas de funcionamento, introduz flutuações consideráveis nas medidas. Uma forma de contornar isso é colocando um capacitor em paralelo à entrada da interface *Cobra3*, funcionando como um filtro, o que remove um pouco o ruído da coleta de dados. Além disso, os dados obtidos podem ser submetidos a filtros Gaussianos na análise, conforme necessário.

Finalmente, o cristal de KBr foi quebrado anteriormente e restaurado, mas ainda ficaram algumas fissuras, o que pode gerar alterações nos dados, pois os fragmentos colados não ficaram perfeitamente alinhados, o que muda o ângulo de incidência para cada fragmento.

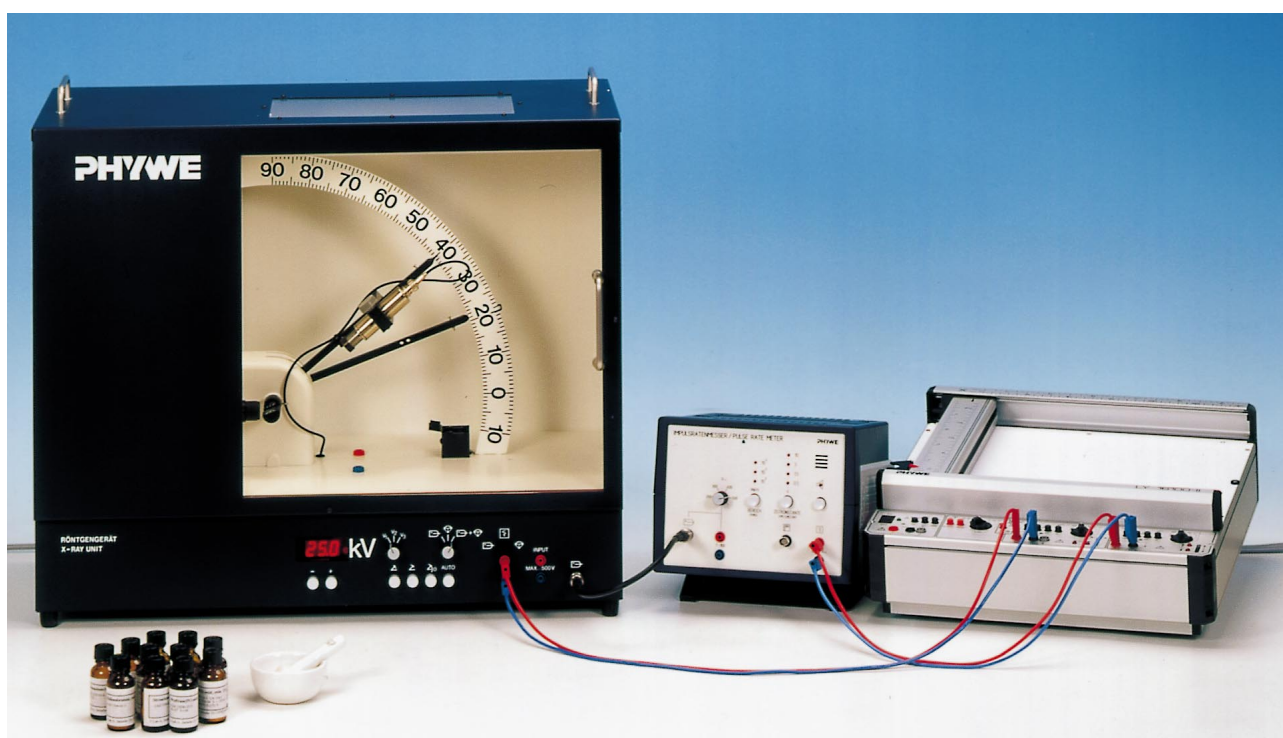


Figura 4. Unidade de Raios X utilizada no experimento. Os dois aparelhos exibidos a direita na figura foram substituídos pela interface *Cobra3* conectada a um computador, onde foi usado o software *Measure* para a aquisição dos dados.

RESULTADOS

Com os dados obtidos na medição do espectro do cobre, foram confeccionados as Tabelas II, III e IV e o gráfico na figura 6. Além disso, com esses mesmos resultados, foi possível atestar se o equipamento como um todo se encontrava calibrado: por meio da equação 7, infere-se que

$$\sin \theta_1 = \frac{\sin \theta_n}{n},$$

para $n = 2, 3$, tanto para a K_β , quanto para a K_α , o que pode ser confirmado na Tabela V. Por fim, pode-se concluir que os valores obtidos para as energias das linhas espectrais K_β e K_α flutuaram em torno do valores teóricos conhecidos [2] $E_\beta = 8,906\text{keV}$ e $E_\alpha = 8,048\text{keV}$, havendo uma discordância nos dados obtidos para E_β .

Na parte da aquisição da energia máxima, i. e. do ângulo θ_{min} , em função da tensão de aceleração, os dados obtidos foram submetidos a filtro gaussiano e foi feita uma regressão linear, já que o perfil angular exibido na figura 5 causa um perfil parabólico indesejado no início do espectro, uma vez que o esperado é um crescimento brusco.

Com o resultado da regressão, a melhor estimativa do ângulo desejado é dada pela raiz da reta obtida. Os dados filtrados e as retas estimadas são retratados na figura 7, e os dados dos ajustes lineares estão na Tabela VI.

Espera-se que os dados obtidos obedeçam a lei de Duane-Hunt, portanto um gráfico da tensão de aceleração U em termos de $1/\sin \theta_{min}$ deve resultar em uma reta. Na figura 7 pode-se observar que, de fato, os resultados são bem representados por uma reta. Ademais, o coeficiente angular obtido, e a respectiva estimativa da constante de Planck — representados na Tabela VII — foram próximos ao esperado. A pequena discrepância nesses valores sugere que talvez a tabela de conversão mencionada na seção anterior tenha sido confeccionada com valores de tensões na fonte em vazio — isto é, em circuito aberto — ao invés de medidas da queda de tensão na válvula.

Tendo isso em vista, assumindo que os valores para os ângulos de energia máxima estão corretos, foram estimadas, usando o coeficiente angular esperado, as tensões de aceleração esperadas. Os valores obtidos se encontram na Tabela VIII e podem ser comparado posteriormente com novas medições no circuito do equipamento.

Abertura	θ_0	σ
2mm	$0,43 \pm 0,02$	$0,96 \pm 0,02$
5mm	$0,33 \pm 0,06$	$2,26 \pm 0,07$

Tabela I. Parâmetros dos ajustes exibidos na figura 5 para os diferentes colimadores. Os valores não nulos para θ_0 sugerem que as medições relativas ao ângulo do detector se encontram descalibradas, e devem ser corrigidas pela subtração de tal valor.

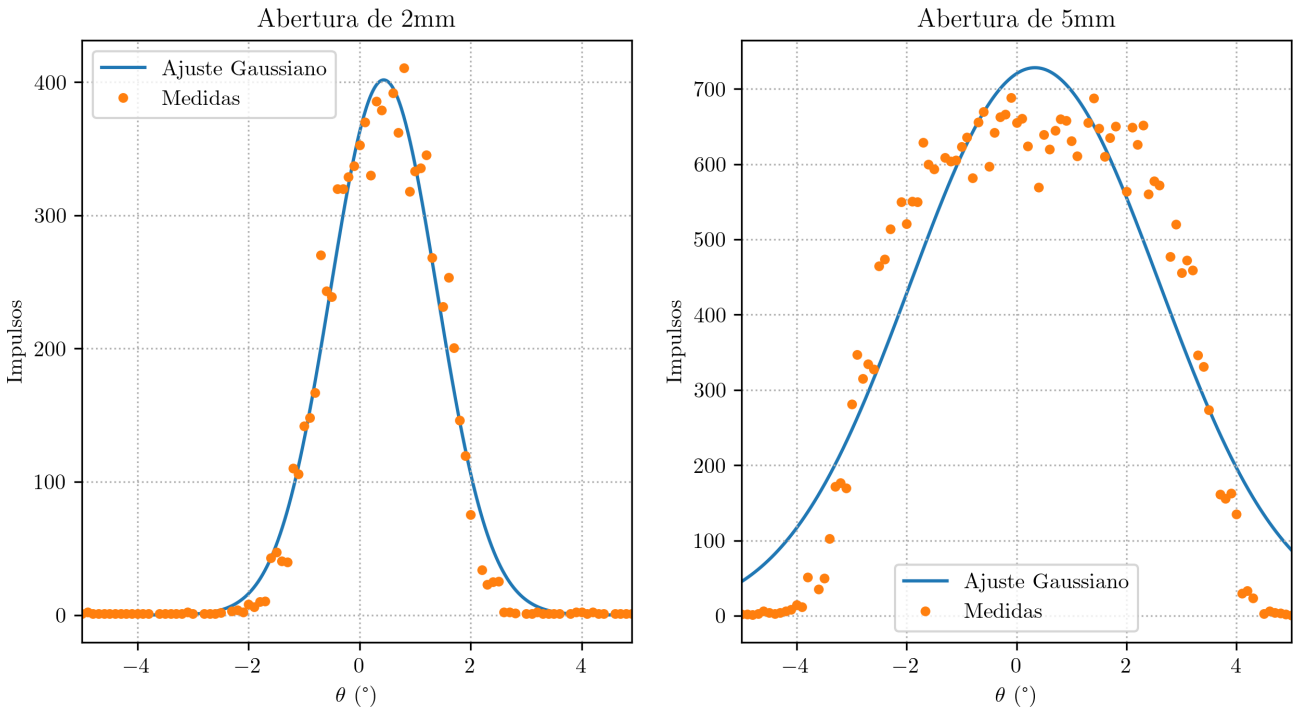


Figura 5. Perfil angular obtido pelo uso de diafragmas com aberturas de 2mm e 5mm, respectivamente, no tubo de saída dos raios X, e ajuste da função $f(\theta) = A \exp\{-(\theta - \theta_0)^2/2\sigma^2\}$ correspondente. O centro θ_0 da gaussiana obtida foi usado para corrigir as medições angulares subsequentes. Os valores para os parâmetros obtidos se encontram na Tabela I.

Por último, com os dados relativos ao espectro do cobre com absorção feita pelos elementos Zinco, Germânio, Arsênio, Selênio, Bromo, Rubídio e Estrôncio,

foi construído o gráfico da figura 8. As respectivas bordas de absorção foram localizadas pela interpolação dos dados obtidos, após a passagem dos mesmos,

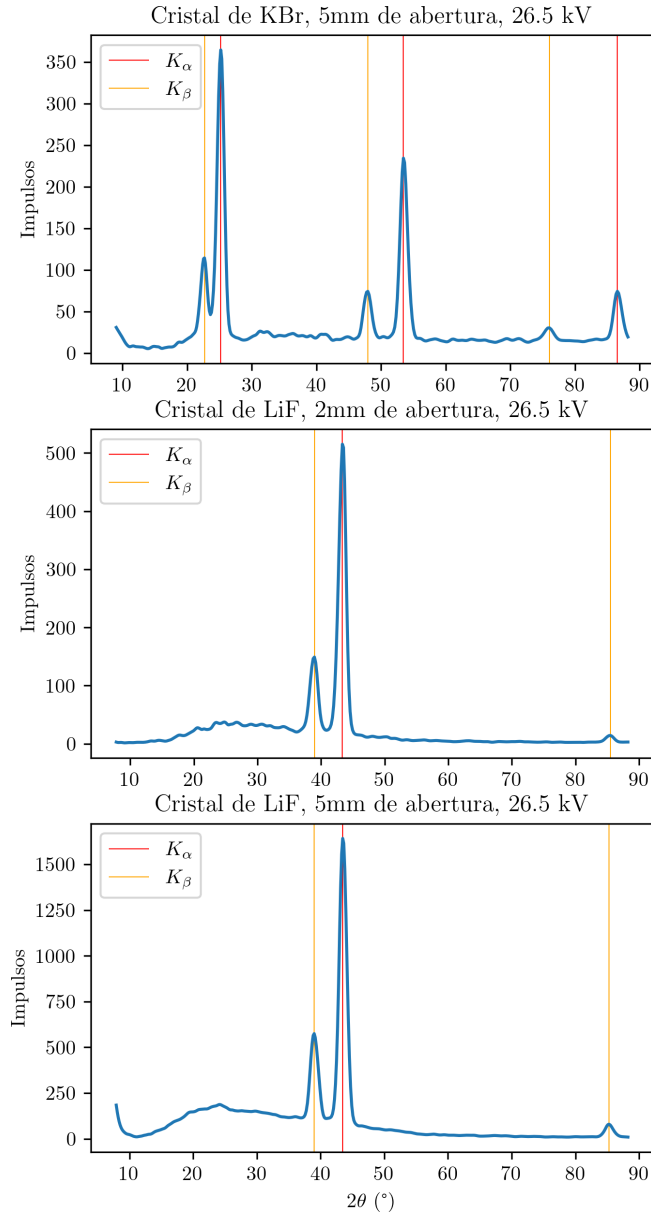


Figura 6. Espectro de emissão característico do cobre obtido por difração em cristais analisadores de LiF e KBr com diafragmas de diferentes aberturas e tensão de aceleração de 26,5keV. Os valores obtidos para θ_{β} e θ_{α} em cada caso estão dispostos nas Tabelas II, III e IV, respectivamente.

novamente, por um filtro gaussiano.

Como a borda de absorção, em teoria, corresponde a uma descontinuidade na transmitância do aparato absorvedor, esta pode ser localizada pelo ponto de inflexão presente no espectro resultante e ausente no espectro do cobre puro. Assim, foi feita uma interpolação dos dados filtrados, e calculados os pontos de inflexão desejados.

Com os valores obtidos, foi possível fazer um gráfico da Lei de Moseley, do número atômico do elemento absorvedor em termos da energia da borda de absorção obtida. Espera-se uma reta, e, como é possível constatar pela figura 9, o resultado obtido é favorável. Espera-se que o coeficiente angular coincida com $(Rh)^{-1/2}$, onde R é a constante de Rydberg e h é a constante de Planck. Como retratado na Tabela X, a estimativa se deu de forma bem próxima, tendo em

vista que o experimento realizado tem caráter didático.

DISCUSSÃO

Como observado, os resultados do experimento se mostraram favoráveis. Tanto a lei de Duane-Hunt, quanto a lei de Moseley puderam ser confirmadas, com uma variação pequena entre os valores estimados e os valores esperados. Porém, não se deve ignorar tais variações, tendo em vista que estas são potenciais fontes de aprendizado acerca do experimento e do equipamento utilizado.

Como possíveis causas dos desvios observados nas medições de E_{α} e E_{β} com relação aos valores conhecidos [2], pode-se apontar: o uso do capacitor como

filtro — o que foi feito devido a um problema no conversor analógico digital — pode ter causado um erro sistemático nas medições de ângulo devido à sua reatância capacitiva; o fato de o cristal de KBr ter sido danificado previamente torna difícil a aferição de seu ângulo em relação ao feixe, já que podem existir fragmentos dispostos em diferentes angulações; a tabela de conversão usada para traduzir os valores lidos no display da unidade em valores de tensão na válvula pode não ter sido confeccionada da forma correta, o que introduz uma dificuldade na determinação da tensão no tubo de raios X.

CONCLUSÃO

Apesar dos empecilhos, foi possível confirmar por meio do experimento a validade da lei de Duane-Hunt, obtendo uma estimativa de $h = e$ da lei de Moseley. Dado o caráter didático do experimento, as discrepâncias ocorreram em escala tolerável, e puderam ser explicadas pelos problemas advindos do equipamento. Além disso, as faixas de emissão K_β e K_α foram observadas com sucesso, e as medições de suas energias tiveram valores próximos aos valores, teóricos, com pequenas discrepâncias.

PARTICIPAÇÕES

- Calebe Adjuto Araujo de Assunção — Metodologia e Discussão.
- Davi Valadares Rodrigues Feliciano — Obtenção dos dados, confecção dos gráficos e tabelas e elaboração da seção de Resultados
- Matheus Gonçalves de Freitas — Introdução e conclusão.

-
- [1] Elspeth F. Garman and Geoffrey W. Grime. Elemental analysis of proteins by micropixe. *Progress in Biophysics and Molecular Biology*, 89(2):173–205, 2005. Synchrotron X-ray and Proton Beams in Structural Biology.
- [2] National Institute of Standards and Technology. X-ray transition energies database. <https://physics.nist.gov/PhysRefData/XrayTrans/Html/search.html>, 2021. [Online; accessed 01-October-2021].
- [3] PHYWE. LEP 5.4.05 K and L-absorption edges of X-rays / Moseley's law and Rydberg constant. https://www.nikhef.nl/~h73/knic/praktikum/phywe/LEP/Experim/5_4_05.pdf, 2021. [Online; accessed 26-September-2021].
- [4] Wikipedia contributors. Deming regression — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Deming_regression&oldid=1029996482, 2021. [Online; accessed 26-September-2021].

θ_β (°)	E_β (Js)	E_β (10^3 eV)	θ_α (°)	E_α (Js)	E_α (10^3 eV)
$19,5 \pm 0,5$	$(1,48 \pm 0,04) \times 10^{-15}$	$9,2 \pm 0,2$	$21,7 \pm 0,5$	$(1,34 \pm 0,03) \times 10^{-15}$	$8,3 \pm 0,2$
$42,7 \pm 0,5$	$(1,45 \pm 0,01) \times 10^{-15}$	$9,1 \pm 0,1$			

Tabela II. Valores dos ângulos de Bragg correspondentes às linhas de absorção K_β e K_α do cobre obtidas passando um feixe de raios X por um cristal analisador de LiF, com o diafragma de 2mm de abertura e tensão de aceleração de 26,5keV na válvula geradora.

θ_β (°)	E_β (Js)	E_β (10^3 eV)	θ_α (°)	E_α (Js)	E_α (10^3 eV)
$11,3 \pm 0,5$	$(1,53 \pm 0,07) \times 10^{-15}$	$9,6 \pm 0,4$	$12,6 \pm 0,5$	$(1,38 \pm 0,05) \times 10^{-15}$	$8,6 \pm 0,3$
$24,0 \pm 0,5$	$(1,48 \pm 0,03) \times 10^{-15}$	$9,3 \pm 0,2$	$26,7 \pm 0,5$	$(1,34 \pm 0,02) \times 10^{-15}$	$8,4 \pm 0,1$
$38,0 \pm 0,5$	$(1,47 \pm 0,02) \times 10^{-15}$	$9,2 \pm 0,1$	$43,3 \pm 0,5$	$(1,32 \pm 0,01) \times 10^{-15}$	$8,2 \pm 0,1$

Tabela III. Valores dos ângulos de Bragg correspondentes às linhas de absorção K_β e K_α do cobre obtidas passando um feixe de raios X por um cristal analisador de KBr, com o diafragma de 5mm de abertura e tensão de aceleração de 26,5keV na válvula geradora.

θ_β (°)	E_β (Js)	E_β (10^3 eV)	θ_α (°)	E_α (Js)	E_α (10^3 eV)
$19,5 \pm 0,5$	$(1,48 \pm 0,04) \times 10^{-15}$	$9,2 \pm 0,2$	$21,7 \pm 0,5$	$(1,33 \pm 0,03) \times 10^{-15}$	$8,3 \pm 0,2$
$42,6 \pm 0,5$	$(1,46 \pm 0,01) \times 10^{-15}$	$9,1 \pm 0,1$			

Tabela IV. Valores dos ângulos de Bragg correspondentes às linhas de absorção K_β e K_α do cobre obtidas passando um feixe de raios X por um cristal analisador de LiF, com o diafragma de 5mm de abertura e tensão de aceleração de 26,5keV na válvula geradora.

n	$\sin \theta_{\beta n}/n$	$\sin \theta_{\alpha n}/n$
1	$0,197 \pm 0,009$	$0,218 \pm 0,009$
2	$0,203 \pm 0,008$	$0,225 \pm 0,008$
3	$0,205 \pm 0,007$	$0,229 \pm 0,006$

Tabela V. Valores de $\sin \theta/n$ para os ângulos de Bragg correspondente as linhas de emissão K_β e K_α para o espectro do cobre obtido por difração no cristal de KBr, com colimador de 5mm e tensão de aceleração de 26,5keV. Os valores coincidentes sugerem que a unidade de raios X se encontra calibrada de forma satisfatória.

U (10^3 eV)	A	B	r	$\theta_{min} = -B/A$
12,3	66 ± 1	-828 ± 14	0,9998	$12,6 \pm 0,3$
13,5	$69,8 \pm 0,4$	-783 ± 6	0,99996	$11,2 \pm 0,1$
16,4	48 ± 1	-482 ± 16	0,998	$10,0 \pm 0,4$
19,4	$65,8 \pm 0,8$	-544 ± 8	0,9998	$8,3 \pm 0,2$
22,8	77 ± 1	-578 ± 9	0,9996	$7,5 \pm 0,2$
26,5	$99,9 \pm 0,5$	-722 ± 4	0,99995	$7,2 \pm 0,1$

Tabela VI. Valores estimados para θ_{min} como raiz de uma reta obtida por regressão linear dos dados referentes à porção inicial do espectro do cobre para diferentes tensões de aceleração. Foi aplicado um filtro gaussiano sobre os dados, e considerados no ajuste linear terceiro quinto dos pontos obtidos, de forma a evitar o perfil parabólico inicial e o decréscimo na inclinação esperado no final da curva.

A	b	r	h Estimado (Js)
$3,4 \pm 0,2$	-3 ± 1	0,993	$(7,3 \pm 0,5) \times 10^{-34}$

Tabela VII. Coeficientes angular, linear e de determinação obtidos na regressão linear realizada sobre os dados de U e θ_{min} , representados no gráfico da figura 7. Usando o coeficiente angular obtido na equação 4, estimou-se um valor de $h = (7,3 \pm 0,5) \times 10^{-34}$ Js, o que se encontra próximo do valor conhecido $h = 6,62 \times 10^{-34}$ Js.

V (10^3 eV)	V Esperado (10^3 eV)
12,3	$7,1 \pm 0,1$
13,5	$7,9 \pm 0,1$
16,4	$8,8 \pm 0,4$
19,4	$10,5 \pm 0,2$
22,8	$11,5 \pm 0,2$
26,5	$12,0 \pm 0,1$

Tabela VIII. Valores para a queda de tensão na válvula de raios X obtidos pela tradução do valor do visor do aparelho pela tabela de conversão fornecida, e valores esperados usando a lei de Duane-Hunt e assumindo que os valores obtidos para θ_{min} encontram-se corretos. Tal discrepância sugere que os valores registrados na tabela de conversão foram obtidos medindo a tensão do gerador, com a válvula desconectada, o que corresponde a um valor maior do que a queda de tensão no tubo de raios X.

Elemento	Z	θ_k	E (10^{-15} Js)	\sqrt{E} (10^{-8} Js)	E (10^3 eV)	\sqrt{E} (10^3 eV)
Zn	30	$18,1 \pm 0,5$	$1,59 \pm 0,04$	$3,99 \pm 0,05$	$9,9 \pm 0,3$	$3,15 \pm 0,04$
Ge	32	$15,6 \pm 0,1$	$1,83 \pm 0,06$	$4,28 \pm 0,07$	$11,4 \pm 0,4$	$3,38 \pm 0,05$
As	33	$14,8 \pm 0,1$	$1,93 \pm 0,06$	$4,39 \pm 0,07$	$12,0 \pm 0,4$	$3,47 \pm 0,06$
Se	34	$13,8 \pm 0,1$	$2,06 \pm 0,07$	$4,54 \pm 0,08$	$12,9 \pm 0,5$	$3,59 \pm 0,06$
Br	35	$12,9 \pm 0,1$	$2,21 \pm 0,08$	$4,70 \pm 0,09$	$13,8 \pm 0,5$	$3,72 \pm 0,07$
Rb	37	$11,2 \pm 0,1$	$2,5 \pm 0,1$	$5,0 \pm 0,1$	$15,8 \pm 0,7$	$3,98 \pm 0,09$
Sr	38	$10,3 \pm 0,1$	$2,8 \pm 0,1$	$5,3 \pm 0,1$	$17,3 \pm 0,8$	$4,2 \pm 0,1$

Tabela IX. Dados obtidos para os ângulos de Bragg θ_k correspondentes às bordas de absorção K de diferentes elementos químicos nos espectros da figura 8.

A	$(Rh)^{-1/2}$	B
$(6,3 \pm 0,2) \times 10^8$	$6,8 \times 10^8$	5 ± 1
$(6,4 \pm 0,2) \times 10^8$	$6,8 \times 10^8$	5 ± 1

Tabela X. Dados obtidos — por regressão linear e regressão do tipo ODR [4], respectivamente — para os coeficientes angular A e linear B da reta que melhor representa a lei de Moseley para as bordas de absorção K obtidas. O segundo método leva em consideração as incertezas de \sqrt{E} para a estimativa de A e B . Com esses resultados, a constante de Planck pode ser estimada por $h = 2000Aed/c = (1,69 \pm 0,01) \times 10^{-33}$ Js. O valor obtido apresenta uma discrepância considerável ao valor teórico esperado de $h = 6,62 \times 10^{-34}$ Js, o que sugere um possível erro durante as medições das tensões no tubo de raios X, que será discutido na seção seguinte.

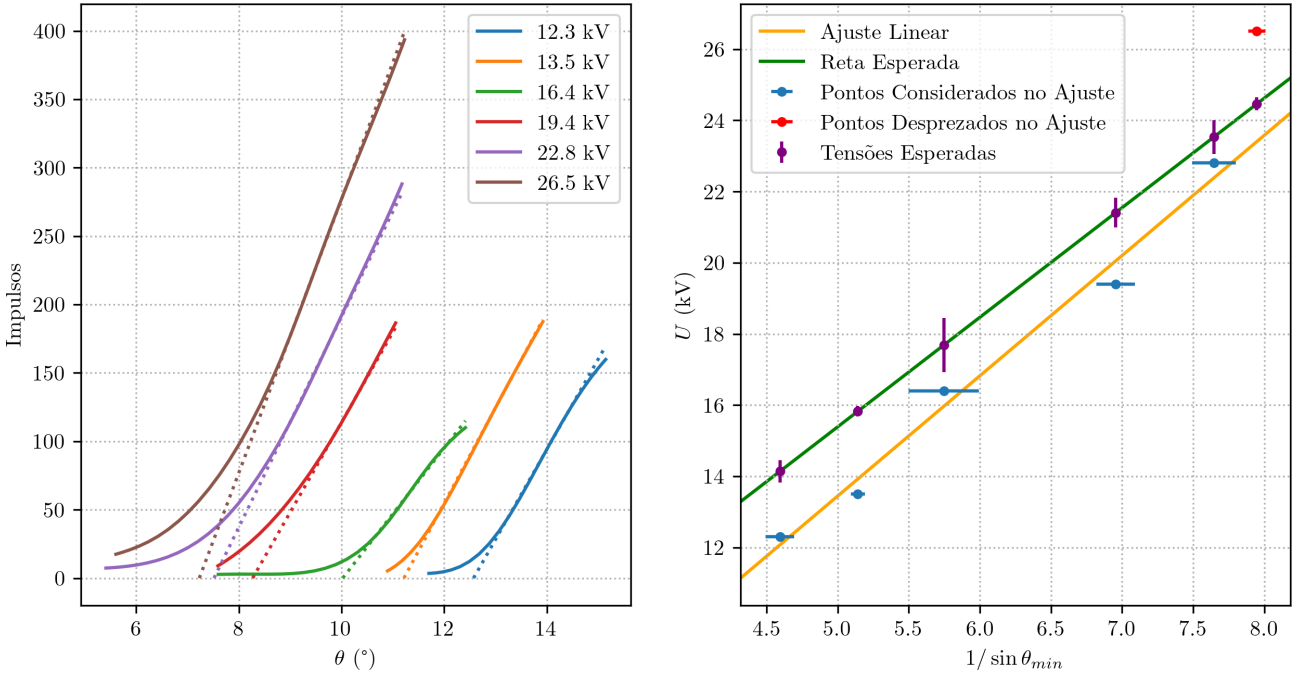


Figura 7. À esquerda, início do espectro do cobre obtido com uma resolução mais alta, i. e. tempos de coleta maiores. Devido à grande quantidade de ruído nos dados, estes foram submetidos a um filtro gaussiano. Com o resultado, é possível obter θ_{min} como a raiz da reta que melhor representa os dados. À direita, em laranja, reta obtida assumindo que os dados são bem representados pela lei de Duane-Hunt; em roxo, a reta esperada assumindo que os valores estimados para θ_{min} estão corretos.

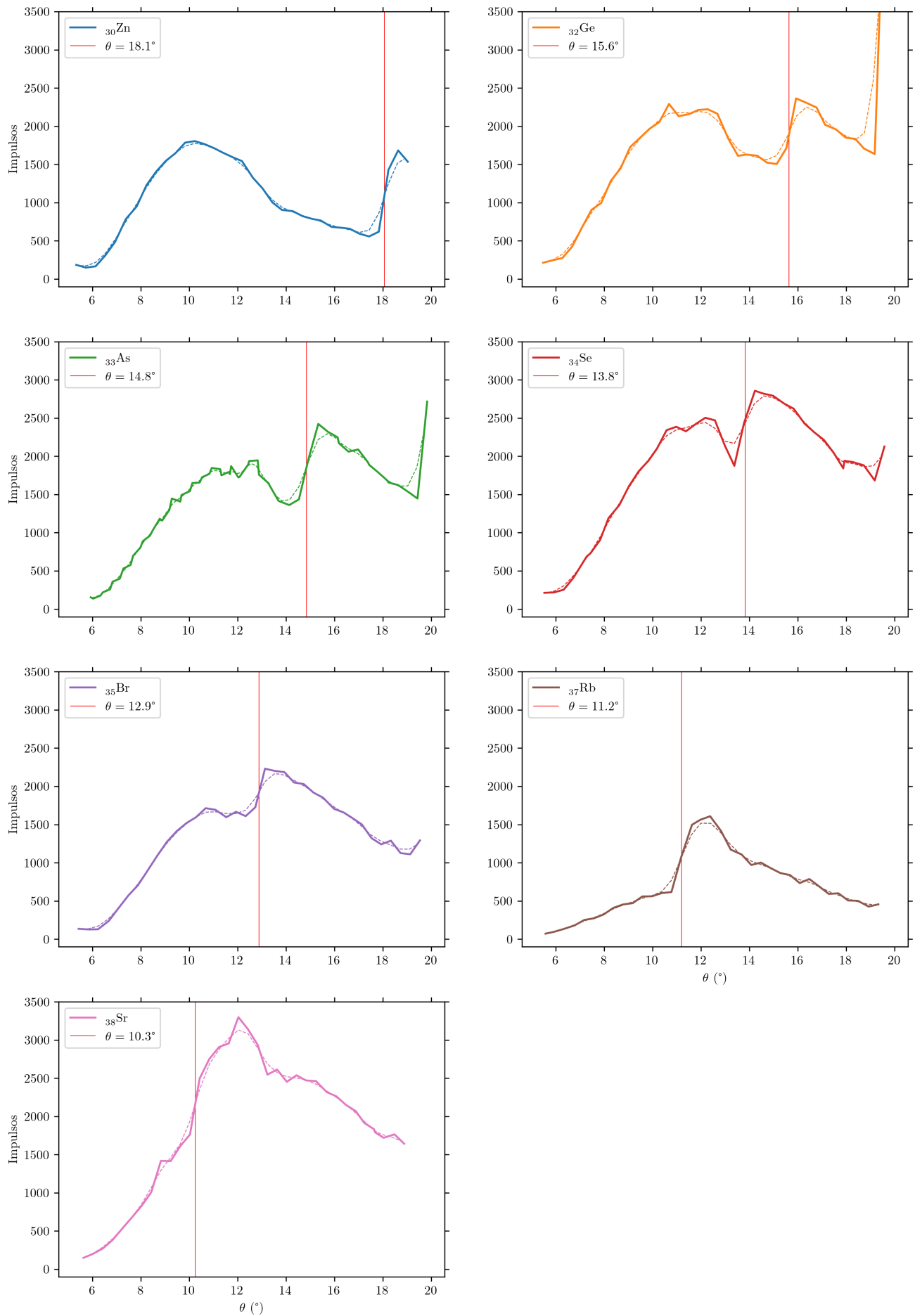


Figura 8. Espectro de emissão do cobre transmitido em filtros de diferentes elementos químicos. A linha vermelha denota o ângulo no qual está localizado a borda de absorção do elemento em questão. Uma vez que em alguns elementos a descontinuidade esperada na borda de absorção não se faz nítida o suficiente — por limitações do aparelho utilizado — o ângulo de interesse foi determinado pelo ponto de inflexão dos dados submetidos a um filtro gaussiano. O resultado da aplicação de tal filtro nos dados é ilustrado em cada gráfico pela linha intermitente.

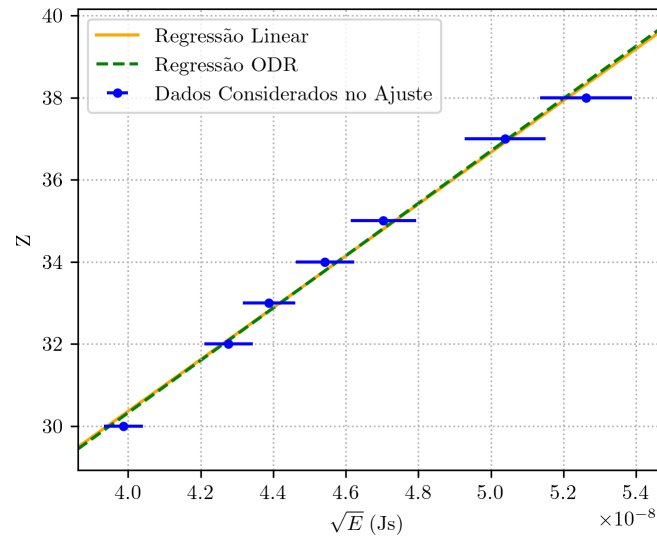


Figura 9. Gráfico ilustrando a lei de Moseley. Como esperado, os dados de Z e \sqrt{E} são bem representados por uma reta, e o coeficiente angular previsto é $A = (Rh)^{-1/2}$. Aqui dois métodos de regressão foram utilizados, pois a regressão do tipo ODR [2] leva em consideração as incertezas em \sqrt{E} , o que resultou em um coeficiente angular ligeiramente mais próximo do valor esperado, como pode ser observado na Tabela X.