Aproximação de somatórios

Definição de somatório

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$$

Definição de somatório

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$$

Ex.: para $f(i) = 2i + 1$, temos que

$$\sum_{i=1}^{3} f(i) = f(1) + f(2) + f(3)$$

Definição de somatório

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$$

Ex.: para $f(i) = 2i + 1$, temos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3} f(i) &= f(1) + f(2) + f(3) \\ &= (2 \cdot {\color{red}1} + 1) + (2 \cdot {\color{red}2} + 1) + (2 \cdot {\color{red}3} + 1)\end{aligned}$$

Definição de somatório

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$$

Ex.: para $f(i) = 2i + 1$, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3} f(i) &= f(1) + f(2) + f(3) \\
&= (2 \cdot 1 + 1) + (2 \cdot 2 + 1) + (2 \cdot 3 + 1) \\
&= 3 + 5 + 7 = 15
\end{aligned}$$

Motivação

Somatórios aparecem ao contar quantas vezes uma instrução é executada.
Ex.:

```
para i de 1 até n
   para j de 1 até i
      para k de 1 até j
         imprima i,j,k     ---> quantas vezes é executada?
```

Motivação

Somatórios aparecem ao contar quantas vezes uma instrução é executada.
Ex.:

```
para i de 1 até n
   para j de 1 até i
      para k de 1 até j
         imprima i,j,k     ---> quantas vezes é executada?
```

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \sum_{k=1}^{j} 1 \in \Theta(?)$$

Propriedades

Propriedades

Distributiva:

$$\sum c \cdot f(i) = c \cdot \sum f(i)$$

Propriedades

Distributiva:

$$\sum c \cdot f(i) = c \cdot \sum f(i)$$

Ex.: $\sum_{i=1}^{n} 2i = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} i$.

Propriedades

Distributiva:

$$\sum c \cdot f(i) = c \cdot \sum f(i)$$

Associativa:

$$\sum (f(i) + g(i)) = \sum f(i) + \sum g(i)$$

Propriedades

Distributiva:

$$\sum c \cdot f(i) = c \cdot \sum f(i)$$

Associativa:

$$\sum (f(i) + g(i)) = \sum f(i) + \sum g(i)$$

Ex.: $\sum_{i=1}^{n}(2^i + i) = \sum_{i=1}^{n} 2^i + \sum_{i=1}^{n} i$.

Propriedades

Distributiva:

$$\sum c \cdot f(i) = c \cdot \sum f(i)$$

Associativa:

$$\sum (f(i) + g(i)) = \sum f(i) + \sum g(i)$$

Comutativa: Elementos podem ser somados em qualquer ordem.

Propriedades

Distributiva:

$$\sum c \cdot f(i) = c \cdot \sum f(i)$$

Associativa:

$$\sum (f(i) + g(i)) = \sum f(i) + \sum g(i)$$

Comutativa: Elementos podem ser somados em qualquer ordem.
Ex.: $f(1) + f(2) = f(2) + f(1)$.

Determinar $\Theta(\sum_{i=1}^{n} f(i))$ para $f(i)$ na forma básica $c \cdot b^{a \cdot i} \cdot i^d \cdot \log^e i$

Determinar $\Theta(\sum_{i=1}^{n} f(i))$ para $f(i)$ na forma básica $c \cdot b^{a \cdot i} \cdot i^d \cdot \log^e i$

Somas geométricas

Quando $b^a > 1$, os termos crescem tanto com o aumento de i que o somatório é dominado pelo último termo. Então,

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) \;\in\; \Theta(f(n)) = \Theta(b^{an} \cdot n^d \cdot \log^e n).$$

Determinar $\Theta(\sum_{i=1}^{n} f(i))$ para $f(i)$ na forma básica $c \cdot b^{a \cdot i} \cdot i^d \cdot \log^e i$

Somas geométricas

Quando $b^a > 1$, os termos crescem tanto com o aumento de i que o somatório é dominado pelo último termo. Então,

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) \;\in\; \Theta(f(n)) = \Theta(b^{an} \cdot n^d \cdot \log^e n).$$

Ex.: $\sum_{i=1}^{n} 2^i \log i \;\in\; \Theta(2^n \log n)$.

Determinar $\Theta(\sum_{i=1}^{n} f(i))$ para $f(i)$ na forma básica $c \cdot b^{a \cdot i} \cdot i^d \cdot \log^e i$

Somas geométricas

Quando $b^a > 1$, os termos crescem tanto com o aumento de i que o somatório é dominado pelo último termo. Então,

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) \;\in\; \Theta(f(n)) = \Theta(b^{an} \cdot n^d \cdot \log^e n).$$

Quando $f(i)$ cresce mais que exponencial, ou seja, o expoente de b cresce mais que uma função linear, também aplicamos a regra da soma geométrica.

Determinar $\Theta(\sum_{i=1}^{n} f(i))$ para $f(i)$ na forma básica $c \cdot b^{a \cdot i} \cdot i^d \cdot \log^e i$

Somas geométricas

Quando $b^a > 1$, os termos crescem tanto com o aumento de i que o somatório é dominado pelo último termo. Então,

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) \ \in \ \Theta(f(n)) = \Theta(b^{an} \cdot n^d \cdot \log^e n).$$

Quando $f(i)$ cresce mais que exponencial, ou seja, o expoente de b cresce mais que uma função linear, também aplicamos a regra da soma geométrica.
Ex.: $\sum_{i=1}^{n} 2^{i^2} \ \in \ \Theta(f(n)) = \Theta(2^{n^2})$.

Determinar $\Theta(\sum_{i=1}^{n} f(i))$ para $f(i)$ na forma básica $c \cdot b^{a \cdot i} \cdot i^d \cdot \log^e i$

Somas aritméticas

Quando $b^a = 1$ e $d > -1$, a metade dos termos possuem aproximadamente o último valor. Então,

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) \ \in \ \Theta(n \cdot f(n)) = \Theta(n^{d+1} \cdot \log^e n).$$

Determinar $\Theta(\sum_{i=1}^{n} f(i))$ para $f(i)$ na forma básica $c \cdot b^{a \cdot i} \cdot i^d \cdot \log^e i$

Somas aritméticas

Quando $b^a = 1$ e $d > -1$, a metade dos termos possuem aproximadamente o último valor. Então,

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) \ \in \ \Theta(n \cdot f(n)) = \Theta(n^{d+1} \cdot \log^e n).$$

Ex.: $\sum_{i=1}^{n} i^2 \log i \ \in \ \Theta(n^3 \log n)$.

Determinar $\Theta(\sum_{i=1}^{n} f(i))$ para $f(i)$ na forma básica $c \cdot b^{a \cdot i} \cdot i^d \cdot \log^e i$

Somas aritméticas

Quando $b^a = 1$ e $d > -1$, a metade dos termos possuem aproximadamente o último valor. Então,

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) \in \Theta(n \cdot f(n)) = \Theta(n^{d+1} \cdot \log^e n).$$

Ex. **(constante)**: $\sum_{i=1}^{n} 1 \in \Theta(n \cdot f(n)) = \Theta(n \cdot 1) = \Theta(n)$.

Determinar $\Theta(\sum_{i=1}^{n} f(i))$ para $f(i)$ na forma básica $c \cdot b^{a \cdot i} \cdot i^d \cdot \log^e i$

Somas aritméticas

Quando $b^a = 1$ e $d > -1$, a metade dos termos possuem aproximadamente o último valor. Então,

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) \ \in \ \Theta(n \cdot f(n)) = \Theta(n^{d+1} \cdot \log^e n).$$

Ex. **(linear)**: $\sum_{i=1}^{n} i \ \in \ \Theta(n \cdot f(n)) = \Theta(n \cdot n) = \Theta(n^2)$.

Determinar $\Theta(\sum_{i=1}^{n} f(i))$ para $f(i)$ na forma básica $c \cdot b^{a \cdot i} \cdot i^d \cdot \log^e i$

Somas aritméticas

Quando $b^a = 1$ e $d > -1$, a metade dos termos possuem aproximadamente o último valor. Então,

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) \;\in\; \Theta(n \cdot f(n)) = \Theta(n^{d+1} \cdot \log^e n).$$

Ex. **(polinomial)**: $\sum_{i=1}^{n} i^d \;\in\; \Theta(n^{d+1})$.

Determinar $\Theta(\sum_{i=1}^{n} f(i))$ para $f(i)$ na forma básica $c \cdot b^{a \cdot i} \cdot i^d \cdot \log^e i$

Somas aritméticas

Quando $b^a = 1$ e $d > -1$, a metade dos termos possuem aproximadamente o último valor. Então,

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) \;\in\; \Theta(n \cdot f(n)) = \Theta(n^{d+1} \cdot \log^e n).$$

Ex. **(polinomial)**: $\sum_{i=1}^{n} i^d \;\in\; \Theta(n^{d+1})$.
Ex.: $\sum_{i=1}^{n} i^2 \;\in\; \Theta(n \cdot f(n)) = \Theta(n \cdot n^2) = \Theta(n^3)$.

Determinar $\Theta(\sum_{i=1}^{n} f(i))$ para $f(i)$ na forma básica $c \cdot b^{a \cdot i} \cdot i^d \cdot \log^e i$

Somas aritméticas

Quando $b^a = 1$ e $d > -1$, a metade dos termos possuem aproximadamente o último valor. Então,

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) \ \in \ \Theta(n \cdot f(n)) = \Theta(n^{d+1} \cdot \log^e n).$$

Ex. **(acima da harmônica)**: $\sum_{i=1}^{n} 1/i^{0{,}99} = \sum_{i=1}^{n} i^{-0{,}99} \ \in \ \Theta(n^{-0{,}99+1}) = \Theta(n^{0{,}01})$.

Determinar $\Theta(\sum_{i=1}^{n} f(i))$ para $f(i)$ na forma básica $c \cdot b^{a \cdot i} \cdot i^d \cdot \log^e i$

Somas com cauda limitada

Quando $b^a < 1$ (**geométrica decrescente**), ou quando $b^a = 1$ e $d < -1$ (**aritmética decrescente**), os termos decrescem tão rápido com o aumento de i que o somatório é dominado pelo 1o termo (que não depende de n). Então,

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) \ \in \ \Theta(f(1)) = \Theta(1).$$

Determinar $\Theta(\sum_{i=1}^{n} f(i))$ para $f(i)$ na forma básica $c \cdot b^{a \cdot i} \cdot i^d \cdot \log^e i$

Somas com cauda limitada

Quando $b^a < 1$ (**geométrica decrescente**), ou quando $b^a = 1$ e $d < -1$ (**aritmética decrescente**), os termos decrescem tão rápido com o aumento de i que o somatório é dominado pelo 1o termo (que não depende de n). Então,

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) \ \in \ \Theta(f(1)) = \Theta(1).$$

Ex.: $\sum_{i=1}^{n} (1/2)^i \log i \ \in \ \Theta(1)$.

Determinar $\Theta(\sum_{i=1}^{n} f(i))$ para $f(i)$ na forma básica $c \cdot b^{a \cdot i} \cdot i^d \cdot \log^e i$

Somas com cauda limitada

Quando $b^a < 1$ (**geométrica decrescente**), ou quando $b^a = 1$ e $d < -1$ (**aritmética decrescente**), os termos decrescem tão rápido com o aumento de i que o somatório é dominado pelo 1o termo (que não depende de n). Então,

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) \;\in\; \Theta(f(1)) = \Theta(1).$$

Ex.: $\sum_{i=1}^{n} 1/i^2 \;\in\; \Theta(1)$.

Determinar $\Theta(\sum_{i=1}^{n} f(i))$ para $f(i)$ na forma básica $c \cdot b^{a \cdot i} \cdot i^d \cdot \log^e i$

Somas com cauda limitada

Quando $b^a < 1$ (**geométrica decrescente**), ou quando $b^a = 1$ e $d < -1$ (**aritmética decrescente**), os termos decrescem tão rápido com o aumento de i que o somatório é dominado pelo 1o termo (que não depende de n). Então,

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) \;\in\; \Theta(f(1)) = \Theta(1).$$

Também tem cauda limitada quando o denominador cresce mais que exponencial.
Ex.: $\sum_{i=1}^{n} 1/2^{i^2} \;\in\; \Theta(1)$.

Determinar $\Theta(\sum_{i=1}^{n} f(i))$ para $f(i)$ na forma básica $c \cdot b^{a \cdot i} \cdot i^d \cdot \log^e i$

Soma harmônica

Quando $b^a = 1$, $d = -1$ e $e = 0$, temos que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \ln n + \epsilon, \quad \text{com } 0 < \epsilon \leq 1.$$

Portanto, $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \in \Theta(\log n)$.

Obs.: $\ln n$ é o logaritmo de n na base 2,718281828459...

Mais exemplos

$$\sum_{i=1}^{n} \left(8 \cdot \frac{2^i}{i^{100}} + i^3 \right)$$

Mais exemplos

$$\sum_{i=1}^{n}\left(8\cdot\frac{2^i}{i^{100}}+i^3\right) = 8\sum_{i=1}^{n}\frac{2^i}{i^{100}}+\sum_{i=1}^{n}i^3$$

Mais exemplos

$$\sum_{i=1}^{n} \left(8 \cdot \frac{2^i}{i^{100}} + i^3 \right) = 8 \sum_{i=1}^{n} \frac{2^i}{i^{100}} + \sum_{i=1}^{n} i^3$$

- 1º somatório: $b^a = 2 > 1$ (geométrica), então $\Theta(f(n)) = \Theta(2^n / n^{100})$.

Mais exemplos

$$\sum_{i=1}^{n}\left(8\cdot\frac{2^i}{i^{100}}+i^3\right) = 8\sum_{i=1}^{n}\frac{2^i}{i^{100}}+\sum_{i=1}^{n} i^3$$

- 1º somatório: $b^a = 2 > 1$ (geométrica), então $\Theta(f(n)) = \Theta(2^n/n^{100})$.
- 2º somatório: $b^a = 1,\ d = 3 > -1$ (aritmética), então $\Theta(n \cdot f(n)) = \Theta(n \cdot n^3) = \Theta(n^4)$.

Mais exemplos

$$\sum_{i=1}^{n}\left(8\cdot\frac{2^i}{i^{100}}+i^3\right) = 8\sum_{i=1}^{n}\frac{2^i}{i^{100}}+\sum_{i=1}^{n} i^3 \in \Theta\left(\frac{2^n}{n^{100}}\right)$$

- 1º somatório: $b^a = 2 > 1$ (geométrica), então $\Theta(f(n)) = \Theta(2^n/n^{100})$.
- 2º somatório: $b^a = 1,\ d = 3 > -1$ (aritmética), então $\Theta(n\cdot f(n)) = \Theta(n\cdot n^3) = \Theta(n^4)$.
- O 1º somatório domina.

Mais exemplos

$$\sum_{i=1}^{n} \left(3^{i \log i} + 5^i + i^{100} \right)$$

- 1º somatório: $f(i)$ cresce mais que exponencial (geométrica), então $\Theta(f(n)) = \Theta(3^{n \log n})$.

Mais exemplos

$$\sum_{i=1}^{n} \left(3^{i \log i} + 5^{i} + i^{100}\right)$$

- 1º somatório: $f(i)$ cresce mais que exponencial (geométrica), então $\Theta(f(n)) = \Theta(3^{n \log n})$.
- 2º somatório: $b^a = 5 > 1$ (geométrica), então $\Theta(f(n)) = \Theta(5^n)$.

Mais exemplos

$$\sum_{i=1}^{n} \left(3^{i \log i} + 5^i + i^{100}\right)$$

- 1º somatório: $f(i)$ cresce mais que exponencial (geométrica), então $\Theta(f(n)) = \Theta(3^{n \log n})$.
- 2º somatório: $b^a = 5 > 1$ (geométrica), então $\Theta(f(n)) = \Theta(5^n)$.
- 3º somatório: $b^a = 1,\ d = 100 > -1$ (aritmética), então $\Theta(n \cdot f(n)) = \Theta(n \cdot n^{100}) = \Theta(n^{101})$.

Mais exemplos

$$\sum_{i=1}^{n} \left(3^{i \log i} + 5^i + i^{100}\right) \in \Theta\left(3^{n \log n}\right)$$

- 1º somatório: $f(i)$ cresce mais que exponencial (geométrica), então $\Theta(f(n)) = \Theta(3^{n \log n})$.
- 2º somatório: $b^a = 5 > 1$ (geométrica), então $\Theta(f(n)) = \Theta(5^n)$.
- 3º somatório: $b^a = 1,\ d = 100 > -1$ (aritmética), então $\Theta(n \cdot f(n)) = \Theta(n \cdot n^{100}) = \Theta(n^{101})$.
- O 1º somatório domina.

Mais exemplos

$$\sum_{i=1}^{n} \left(i^{4,3} \log^3(i) + i^3 \log^9(i) \right)$$

- Os dois somatórios são aritméticos, mas o 1º tem maior d.

Mais exemplos

$$\sum_{i=1}^{n} \left(i^{4,3} \log^3(i) + i^3 \log^9(i) \right)$$

- Os dois somatórios são aritméticos, mas o 1º tem maior d.
- Podemos então ignorar o 2º somátório, pois é dominado pelo 1º.

Mais exemplos

$$\sum_{i=1}^{n} \left(i^{4,3} \log^3(i) + i^3 \log^9(i)\right)$$

- Os dois somatórios são aritméticos, mas o 1º tem maior d.
- Podemos então ignorar o 2º somatório, pois é dominado pelo 1º.
- Portanto, é $\Theta(n \cdot f(n)) = \Theta(n \cdot n^{4,3} \log^3 n) = \Theta(n^{5,3} \log^3 n)$.

Mais exemplos

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\log^3 i}{i^{0,6}}$$

- Como $b^a = 1$ e $d = -0{,}6 > -1$, o somatório é aritmético.

Mais exemplos

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\log^3 i}{i^{0,6}}$$

- Como $b^a = 1$ e $d = -0{,}6 > -1$, o somatório é aritmético.
- Portanto, é $\Theta(n \cdot f(n)) = \Theta(n \cdot \log^3 n / n^{0,6}) = \Theta(n^{0,4} \log^3 n)$.

Mais exemplos

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\log^3 i}{i^{1,6} + 3i}$$

- No denominador temos um polinômio de grau 1,6, portanto $b^a = 1$ e $d = -1{,}6 < -1$ (cauda limitada).

Mais exemplos

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\log^3 i}{i^{1,6} + 3i}$$

- No denominador temos um polinômio de grau 1,6, portanto $b^a = 1$ e $d = -1{,}6 < -1$ (cauda limitada).
- Então, o somatório é $\Theta(1)$.

Mais exemplos

$$\sum_{i=m}^{n} \frac{1}{n}$$

- Observe que o somatório começa em m.

Mais exemplos

$$\sum_{i=m}^{n} \frac{1}{n}$$

- Observe que o somatório começa em m.
- Podemos escrever

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = \sum_{i=1}^{n} f(i) - \sum_{i=1}^{m-1} f(i).$$

Mais exemplos

$$\sum_{i=m}^{n} \frac{1}{n}$$

- Observe que o somatório começa em m.
- Podemos escrever

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = \sum_{i=1}^{n} f(i) - \sum_{i=1}^{m-1} f(i).$$

- Então,

$$\sum_{i=m}^{n} \frac{1}{n} = (\ln n + \epsilon_1) - (\ln(m-1) + \epsilon_2) = \ln(n/(m-1)) + (\epsilon_1 - \epsilon_2) \in \Theta(\log(n/m)).$$

Mais exemplos

$$\sum_{i=m}^{m+n} i^2$$

- É um somatório aritmético, pois $b^a = 1$ e $d = 2 > -1$.

Mais exemplos

$$\sum_{i=m}^{m+n} i^2$$

- É um somatório aritmético, pois $b^a = 1$ e $d = 2 > -1$.
- Neste caso, pertence a Θ do número de termos vezes o último termo.

Mais exemplos

$$\sum_{i=m}^{m+n} i^2$$

- É um somatório aritmético, pois $b^a = 1$ e $d = 2 > -1$.
- Neste caso, pertence a Θ do número de termos vezes o último termo.
    - Número de termos: $(m + n) - (m - 1) = n + 1$.

Mais exemplos

$$\sum_{i=m}^{m+n} i^2$$

- É um somatório aritmético, pois $b^a = 1$ e $d = 2 > -1$.
- Neste caso, pertence a Θ do número de termos vezes o último termo.
  - Número de termos: $(m + n) - (m - 1) = n + 1$.
  - Último termo: $(m + n)^2$.

Mais exemplos

$$\sum_{i=m}^{m+n} i^2$$

- É um somatório aritmético, pois $b^a = 1$ e $d = 2 > -1$.
- Neste caso, pertence a Θ do número de termos vezes o último termo.
  - Número de termos: $(m+n) - (m-1) = n+1$.
  - Último termo: $(m+n)^2$.
- Portanto, o somatório é $\Theta(n \cdot (m+n)^2)$.

Mais exemplos

$$\sum_{i=1}^{5n^2+n} i^3 \log i$$

- É um somatório aritmético, pois $b^a = 1$ e $d = 3 > -1$.

Mais exemplos

$$\sum_{i=1}^{5n^2+n} i^3 \log i$$

- É um somatório aritmético, pois $b^a = 1$ e $d = 3 > -1$.
- Neste caso, pertence a Θ do número de termos vezes o último termo.

Mais exemplos

$$\sum_{i=1}^{5n^2+n} i^3 \log i$$

- É um somatório aritmético, pois $b^a = 1$ e $d = 3 > -1$.
- Neste caso, pertence a Θ do número de termos vezes o último termo.
    - Número de termos: $5n^2 + n$.

Mais exemplos

$$\sum_{i=1}^{5n^2+n} i^3 \log i$$

- É um somatório aritmético, pois $b^a = 1$ e $d = 3 > -1$.
- Neste caso, pertence a Θ do número de termos vezes o último termo.
  - Número de termos: $5n^2 + n$.
  - Último termo: $(5n^2 + n)^3 \log(5n^2 + n)$.

Mais exemplos

$$\sum_{i=1}^{5n^2+n} i^3 \log i$$

- É um somatório aritmético, pois $b^a = 1$ e $d = 3 > -1$.
- Neste caso, pertence a Θ do número de termos vezes o último termo.
  - Número de termos: $5n^2 + n$.
  - Último termo: $(5n^2 + n)^3 \log(5n^2 + n)$.
- Portanto, o somatório é $\Theta((5n^2 + n)^4 \log(5n^2 + n)) = \Theta(n^8 \log n)$.

Mais exemplos

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot n \cdot m$$

- n e m não dependem de i, então podem sair do somatório:

Mais exemplos

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot n \cdot m$$

- n e m não dependem de i, então podem sair do somatório:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot n \cdot m = n \cdot m \cdot \sum_{i=1}^{n} i = n \cdot m \cdot \Theta(n^2) = \Theta(n^3 \cdot m).$$

Mais exemplos

$$\sum_{i=n/2}^{n} \frac{1}{i^2}$$

- Somatório com cauda limitada, pois $b^a = 1$ e $d = -2 < -1$.

Mais exemplos

$$\sum_{i=n/2}^{n} \frac{1}{i^2}$$

- Somatório com cauda limitada, pois $b^a = 1$ e $d = -2 < -1$.
- Neste caso, o somatório pertence a Θ do primeiro termo:

$$\sum_{i=n/2}^{n} \frac{1}{i^2} \in \Theta\left(\frac{1}{(n/2)^2}\right) = \Theta\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Mais exemplos

$$\sum_{i=n/2}^{n} \frac{1}{i^2}$$

- Somatório com cauda limitada, pois $b^a = 1$ e $d = -2 < -1$.
- Neste caso, o somatório pertence a Θ do primeiro termo:

$$\sum_{i=n/2}^{n} \frac{1}{i^2} \in \Theta\left(\frac{1}{(n/2)^2}\right) = \Theta\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

- Obs.: Como $1/n^2$ converge para zero, cresce menos que as funções em $\Theta(1)$.

Mais exemplos

$$\sum_{i=1}^{\log_2 n} 2^{\log_2 n - i} \cdot i^2$$

- $2^{\log_2 n - i} = 2^{\log_2 n} \cdot 2^{-i} = n \cdot (1/2)^i$.

Mais exemplos

$$\sum_{i=1}^{\log_2 n} 2^{\log_2 n - i} \cdot i^2$$

- $2^{\log_2 n - i} = 2^{\log_2 n} \cdot 2^{-i} = n \cdot (1/2)^i$.
- Somatório com cauda limitada, pois $b^a = 1/2 < 1$.

Mais exemplos

$$\sum_{i=1}^{\log_2 n} 2^{\log_2 n - i} \cdot i^2$$

- $2^{\log_2 n - i} = 2^{\log_2 n} \cdot 2^{-i} = n \cdot (1/2)^i$.
- Somatório com cauda limitada, pois $b^a = 1/2 < 1$.
- Neste caso, o somatório pertence a Θ do primeiro termo: $f(1) = n \cdot (1/2)^1 \cdot 1^2 \in \Theta(n)$.

Mais exemplos

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{n} i^2 j^3$$

Mais exemplos

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n} i^2 j^3 = \sum_{i=1}^{n} {\color{red} i^2} \sum_{j=0}^{n} j^3$$

Mais exemplos

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n} i^2 j^3 = \sum_{i=1}^{n} i^2 \sum_{j=0}^{n} j^3 = \sum_{i=1}^{n} i^2 \Theta(n^4)$$

Mais exemplos

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n} i^2 j^3 = \sum_{i=1}^{n} i^2 \sum_{j=0}^{n} j^3 = \sum_{i=1}^{n} i^2 \Theta(n^4) = \Theta(n^4) \sum_{i=1}^{n} i^2$$

Mais exemplos

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n} i^2 j^3 = \sum_{i=1}^{n} i^2 \sum_{j=0}^{n} j^3 = \sum_{i=1}^{n} i^2 \Theta(n^4) = \Theta(n^4) \sum_{i=1}^{n} i^2 = \Theta(n^4)\Theta(n^3)$$

Mais exemplos

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n} i^2 j^3 = \sum_{i=1}^{n} i^2 \sum_{j=0}^{n} j^3 = \sum_{i=1}^{n} i^2 \Theta(n^4) = \Theta(n^4)\sum_{i=1}^{n} i^2 = \Theta(n^4)\Theta(n^3) = \Theta(n^7).$$

Mais exemplos

```
para i de 1 até n
   para j de 1 até i
      para k de 1 até j
         imprima i,j,k     ---> quantas vezes é executada?
```

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \sum_{k=1}^{j} 1$$

Mais exemplos

```
para i de 1 até n
   para j de 1 até i
      para k de 1 até j
         imprima i,j,k     ---> quantas vezes é executada?
```

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{j} 1 \in \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\Theta(j)$$

Mais exemplos

```
para i de 1 até n
   para j de 1 até i
      para k de 1 até j
         imprima i,j,k     ---> quantas vezes é executada?
```

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{j} 1 \;\in\; \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\Theta(j) = \sum_{i=1}^{n}\Theta\left(\sum_{j=1}^{i} j\right)$$

Mais exemplos

```
para i de 1 até n
   para j de 1 até i
      para k de 1 até j
         imprima i,j,k      ---> quantas vezes é executada?
```

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{j} 1 \in \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\Theta(j) = \sum_{i=1}^{n}\Theta\left(\sum_{j=1}^{i} j\right) = \sum_{i=1}^{n}\Theta\left(i^2\right)$$

Mais exemplos

```
para i de 1 até n
   para j de 1 até i
      para k de 1 até j
         imprima i,j,k     ---> quantas vezes é executada?
```

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{j} 1 \;\in\; \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\Theta(j) = \sum_{i=1}^{n}\Theta\left(\sum_{j=1}^{i} j\right) = \sum_{i=1}^{n}\Theta\left(i^2\right) = \Theta\left(\sum_{i=1}^{n} i^2\right)$$

Mais exemplos

```
para i de 1 até n
   para j de 1 até i
      para k de 1 até j
         imprima i,j,k     ---> quantas vezes é executada?
```

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{j}1 \ \in \ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\Theta(j)=\sum_{i=1}^{n}\Theta\left(\sum_{j=1}^{i}j\right)=\sum_{i=1}^{n}\Theta\left(i^2\right)=\Theta\left(\sum_{i=1}^{n}i^2\right)=\Theta\left(n^3\right)$$

Demonstrações das aproximações de somatórios na forma básica

Soma geométrica simples:

Se $b > 1$, então $\sum_{i=1}^{n} b^i \in \Theta(b^n)$.

Se $b < 1$, então $\sum_{i=1}^{n} b^i \in \Theta(1)$.

$$
\begin{aligned}
S &= 1 + b + b^2 + \cdots + b^n \\
b \cdot S &= b + b^2 + b^3 + \cdots + b^{n+1} && \text{multiplicando por } b \\
(1-b) \cdot S &= 1 - b^{n+1} && \text{subtraindo as duas equações} \\
S &= \frac{1 - b^{n+1}}{1-b} = \frac{b^{n+1} - 1}{b - 1}
\end{aligned}
$$

Quando $b < 1$ temos que $(1 - b^{n+1})/(1-b)$ converge para $1/(1-b)$, pois b^{n+1} é decrescente.
Quando $b > 1$ temos uma constante positiva vezes b^n, pois

$$
\frac{b^{n+1} - 1}{b - 1} = \left(\frac{b}{b-1}\right) b^n - \left(\frac{1}{b-1}\right)
$$

Teorema: Suponha que $\exists b > 1,\ \exists n_0,\ \forall i \geq n_0,\ f(i+1)/f(i) \geq b$, ou seja, existe $b > 1$ tal que $f(i+1)/f(i) \geq b$ para todo i suficientemente grande. Então, $\sum_{i=1}^{n} f(i) \in \Theta(f(n))$.

Fazendo uma série de substituições, e assumindo $i \geq n_0$,

$$f(i) \leq \left(\frac{1}{b}\right)^1 f(i+1) \leq \left(\frac{1}{b}\right)^2 f(i+2) \leq \left(\frac{1}{b}\right)^3 f(i+3) \leq \cdots \leq \left(\frac{1}{b}\right)^{n-i} f(n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \sum_{i=1}^{n_0-1} f(i) + \sum_{i=n_0}^{n} f(i) \leq \Theta(1) + \sum_{i=n_0}^{n} \left(\frac{1}{b}\right)^{n-i} f(n) = \Theta(1) + f(n) \sum_{j=0}^{n-n_0} \left(\frac{1}{b}\right)^j$$
$$\leq \Theta(1) + f(n) \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{b}\right)^j = \Theta(1) + f(n)\Theta(1) \in \Theta(f(n)).$$

Como $f(n) \leq \sum_{i=1}^{n} f(i) \leq \Theta(f(n))$, concluímos que $\sum_{i=1}^{n} f(i) \in \Theta(f(n))$.

Teorema: Suponha que $\exists b < 1,\ \exists n_0,\ \forall i \geq n_0,\ f(i+1)/f(i) \leq b$, ou seja, existe $b < 1$ tal que $f(i+1)/f(i) \leq b$ para todo i suficientemente grande. Então, $\sum_{i=1}^{n} f(i) \in \Theta(1)$.

Fazendo uma série de substituições, e assumindo $i \geq n_0$,

$$f(i) \leq b^1 f(i-1) \leq b^2 f(i-2) \leq \cdots \leq b^{i-n_0} f(n_0)$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \sum_{i=1}^{n_0-1} f(i) + \sum_{i=n_0}^{n} f(i) \leq \Theta(1) + \sum_{i=n_0}^{n} b^{i-n_0} f(n_0) = \Theta(1) + f(n_0) \sum_{j=0}^{n-n_0} b^j$$

$$\leq \Theta(1) + f(n_0) \sum_{j=0}^{n} b^j = \Theta(1) + f(n_0)\Theta(1) \in \Theta(1).$$

Como $\Theta(1) \leq \sum_{i=1}^{n} f(i) \leq \Theta(1)$, concluímos que $\sum_{i=1}^{n} f(i) \in \Theta(1)$.

Soma geométrica: Se $b^a > 1$, então $\sum_{i=1}^{n} f(i) \in \Theta(f(n))$.

$$\frac{f(i+1)}{f(i)} = \frac{c \cdot b^{a(i+1)} \cdot (i+1)^d \cdot \log^e(i+1)}{c \cdot b^{ai} \cdot i^d \cdot \log^e i} \geq b^a > 1$$

Pois

- $b^{a(i+1)}/b^{ai} = b^a$.
- $(i+1)^d/i^d \geq 1$, visto que $g(i) = i^d$ é não decrescente.
- $\log^e(i+1)/\log^e i \geq 1$, visto que $g(i) = \log^e i$ é não decrescente (base > 1 e $i > 1$).

Cauda limitada: Se $b^a < 1$, então $\sum_{i=1}^{n} f(i) \in \Theta(1)$.

$$\frac{f(i+1)}{f(i)} = \frac{c \cdot b^{a(i+1)} \cdot (i+1)^d \cdot \log^e(i+1)}{c \cdot b^{ai} \cdot i^d \cdot \log^e i} < 1$$

Para i suficientemente grande, pois

- $b^{a(i+1)}/b^{ai} = b^a < 1$.
- $g(i) = (i+1)^d/i^d$, converge para 1.
- $h(i) = \log^e(i+1)/\log^e i$, converge para 1.
- Então existe n_0 tal que $b^a \cdot g(i) \cdot h(i) < 1$ para todo $i \geq n_0$.

Soma aritmética simples: $\sum_{i=1}^{n} i \in \Theta(n \cdot f(n)) = \Theta(n^2)$.

$$\begin{aligned}
S &= 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n \\
S &= n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1 && \text{lei comutativa} \\
2S &= (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1) && \text{somando as duas equações} \\
2S &= n(n+1) \\
S &= \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n}{2} \cdot (f(n)+1) \in \Theta(n \cdot f(n)) = \Theta(n^2)
\end{aligned}$$

Teorema: Se existe n_0 tal que $f(i)$ é não decrescente para todo $i \geq n_0$, e $f((n+n_0)/2) \in \Theta(f(n))$, então $\sum_{i=1}^{n} f(i) \in \Theta(n \cdot f(n))$.

Como $f(i)$ é não decrescente a partir de n_0, metade dos elementos entre n_0 e n possuem valor pelo menos $f((n+n_0)/2)$. Então,

$$\sum_{i=0}^{n} f(i) \geq \frac{n}{2} \cdot f\left(\frac{n+n_0}{2}\right) = \frac{n}{2} \cdot \Theta(f(n)) = \Theta(n \cdot f(n)).$$

Para n suficientemente grande temos que $f(n)$ será o maior dos termos. Então,

$$\sum_{i=0}^{n} f(i) \leq n \cdot f(n).$$

Como $\Theta(n \cdot f(n)) \leq \sum_{i=0}^{n} f(i) \leq n \cdot f(n)$, concluímos que $\sum_{i=0}^{n} f(i) \in \Theta(n \cdot f(n))$

Soma aritmética: Se $b^a = 1$ e $d > 0$, então $\sum_{i=1}^{n} f(i) \in \Theta(n \cdot f(n))$.

Para $f(i)$ na forma básica com $b^a = 1$ temos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f((n+n_0)/2)}{f(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{c \cdot ((n+n_0)/2)^d \cdot \log^e((n+n_0)/2)}{c \cdot n^d \cdot \log^2 n} = \frac{1}{2^d} \text{ (constante positiva)}$$

Com isso concluímos que $f((n+n_0)/2) \in \Theta(f(n))$.

Para aplicar o teorema anterior basta então mostrar que $f(i)$ é assintoticamente não decrescente para $d > 0$. De fato, a derivada de $f(i)$ é não negativa para todo $i \geq 2^{-e/d}$.

$$\frac{df}{di} = i^{d-1} \log^{e-1}(i)(d \log(i) + e)$$

$f(i) = i^d \log_2^e i$, com $d \neq 0$ (funciona para outras bases do log maiores que 1).
Derivada:

$$\frac{df(i)}{di} = i^{d-1} \cdot \log_2^{e-1}(i) \cdot (d \log_2(i) + e)$$

- Para $i > 1$ temos que $i^{d-1} > 0$ e $\log_2^{e-1}(i) > 0$.
- Então o sinal da derivada é o sinal do fator $d \log_2^e(i) + e$.
  - Tem o mesmo sinal de d para todo $i > 2^{-e/d}$ (constante).
- Então $f(i)$ é crescente para $d > 0$, e decrescente para $d < 0$, para i suf. grande.

- Divida $\sum_{i=1}^{n} f(i)$ em blocos, onde o k-ésimo bloco tem os próximos 2^k termos.
- Ou seja, o k-ésimo bloco vale $F(k) = \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} f(i)$.
- Como cada bloco tem 2^k termos, o maior valor de k é aproximadamente $\log_2 n$.
- Quando $d < 0$ temos que $f(i)$ é decrescente a partir de um determinado bloco. Neste caso o 1o termo do bloco $f(2^k) = (2^k)^d \log_2^e 2^k = 2^{kd} \cdot k^e$ é o maior, ou seja, $F(k) \leq \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} f(2^k) = 2^k \cdot f(2^k) = 2^k \cdot 2^{kd} \cdot k^e = 2^{k(d+1)} \cdot k^e$. Então

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) \approx \sum_{k=0}^{\log_2 n} F(k) \leq \sum_{k=0}^{\log_2 n} 2^{k(d+1)} \cdot k^e \in \Theta()$$

$$2^{k(d+1)} \cdot k^e \leq F(k) \leq 2^k \cdot (2^{k+1} - 1)^d \cdot \log_2^e(2^{k+1} - 1)$$
$$\leq 2^k \cdot (2^{k+1})^d \cdot \log_2^e(2^{k+1}) = 2^d \cdot 2^{k(d+1)} \cdot (k+1)^e$$

Se $d > -1$, então $\sum F(k)$ é soma geométrica: $\Theta((2^{d+1})^{\log_2 n} \log^e n) = \Theta(n \cdot n^d \log^e n)$ para limite inferior e superior.

Se $d < -1$, então $\sum F(k)$ é soma geométrica decrescente: $\Theta(1)$ para limite inferior e superior.