vuela

Junta de Andalucía

Agencia Digital de Andalucía

Experto en Inteligencia Artificial

Matemáticas básicas

Manuel Pegalajar Cuéllar

Horario de clases
19:00 a 21:00 h

CURSO

Experto en Inteligencia Artificial

Matemáticas básicas

CONTENIDOS

Fundamentos de Teoría de Conjuntos

Fundamentos de Análisis Matemático

Operaciones con matrices

Fundamentos de estadística descriptiva

Fundamentos de probabilidad

Métodos de Monte-Carlo

Estadística para clasificación binaria

CURSO

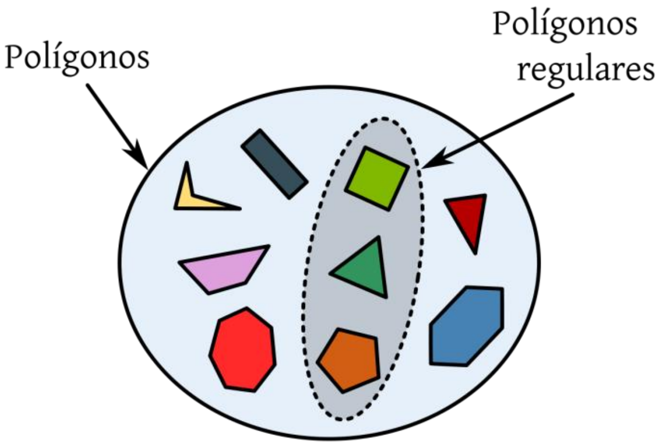
Experto en Inteligencia Artificial

Matemáticas básicas

CONTENIDOS

Conjunto

Colección de elementos que guardan una relación entre sí. Un **subconjunto** contiene elementos del conjunto original.



Fuente de imagen:
https://es.wikipedia.org/wiki/Conjunto

Definición de conjunto por extensión y por comprensión

- **Extensión**: Nombrando todos los elementos.
- **Comprensión**: Determinando una característica común.

Ejemplo:

A= {a} (Extensión)

A= {x : x es vocal de la palabra manzana} (Comprensión)

B= {'Pepito', 'Juan', 'Margarita'}

B= {x : x es un niño que se porta bien en clase}

Algunas formas de clasificar conjuntos:

- Numerables vs no numerables
- Finitos vs infinitos
- Ordenados vs no ordenados

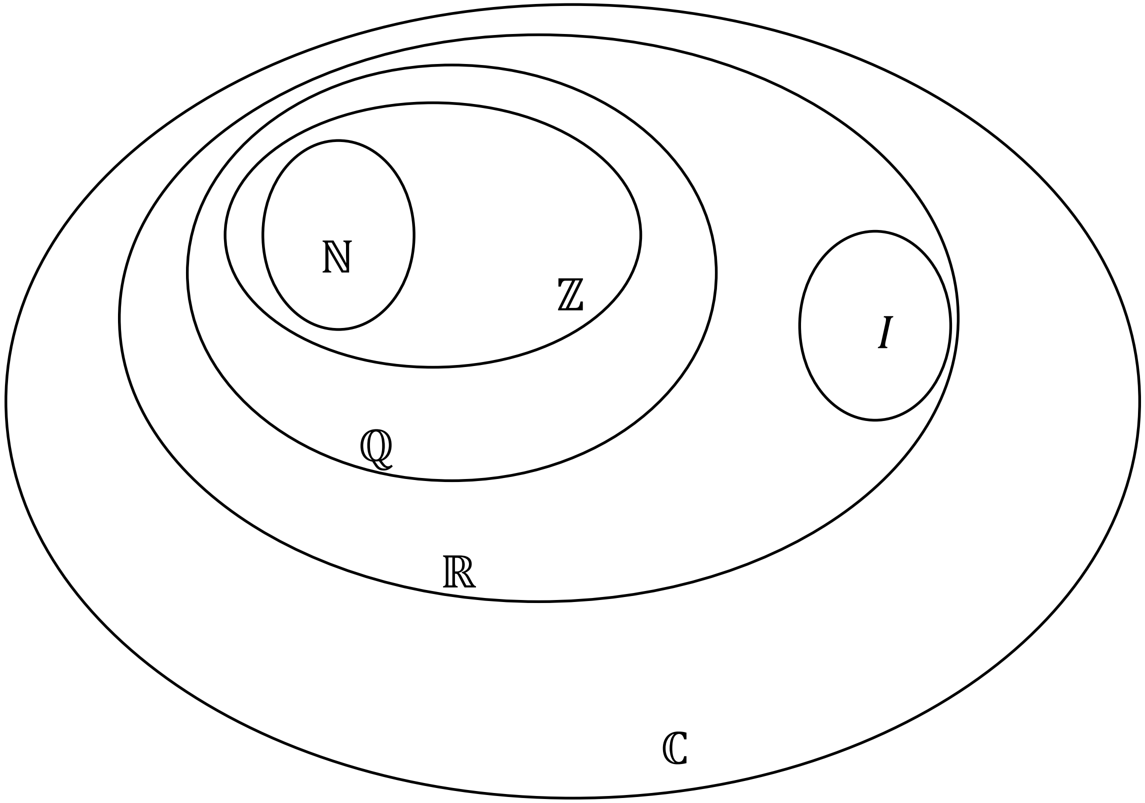
A= {x : x es vocal de la palabra manzana} (Comprensión)

B= {‘Pepito’, ‘Juan’, ‘Margarita’}

B= {x : x es un niño que se porta bien en clase}

Conjuntos de números:

- Naturales
- Enteros
- Racionales
- Irracionales
- Reales
- Complejos



Operaciones: Complemento

El complemento de un subconjunto A de otro conjunto B, $\mathbf{A^c}$, son todos los elementos de B que no están en A.

Ejemplo:

A= {a, e}

B= {a, e, i, o, u}

A^c= {i, o, u}

También notado como $\bar{A}$

Ejemplo:

A= {rojo, naranja, verde}

B= {x: x es color del arco iris}

A^c= {azul, amarillo, índigo, violeta}

Operaciones: Intersección ∩

La intersección de dos conjuntos A y B es otro conjunto que contiene todos los elementos comunes a A y B.

Ejemplo:

A= {m, a, n, z}

B= {p, e, r, a}

A ∩ B= {a}

Ejemplo:

A= {rojo, naranja, verde}

B= {azul, naranja, verde}

A ∩ B= {naranja, verde}

Operaciones: Unión ∪

La unión de dos conjuntos A y B es otro conjunto que contiene todos los elementos de A y de B (sin repetir).

Ejemplo:

A= {m, a, n, z}

B= {p, e, r, a}

A ∪ B= {m,a,n,z,p,e,r}

Ejemplo:

A= {rojo, naranja, verde}

B= {azul, naranja, verde}

A ∪ B= {rojo, naranja, verde, azul}

Operaciones: Partes $\wp$

Las partes de un conjunto A es el conjunto de todos los posibles subconjuntos que se pueden crear a partir de A, incluyendo el vacío Ø.

Ejemplo:

A= {m, a, n, z}

P(A)= {Ø, {m}, {a}, {n}, {z}, {m, a}, {m, n}, {m, z}, {a, n}, {a, z}, {n, z}, {m, a, n}, {m, a, z}, {m, n, z}, {a, n, z}, {m, a, n, z} }

Operaciones: Cardinal

El cardinal de un conjunto A, **|A|**, es el número de elementos del conjunto

Ejemplo:

A= {m, a, n, z}

P(A)= {Ø, {m}, {a}, {n}, {z}, {m, a}, {m, n}, {m, z}, {a, n}, {a, z}, {n, z}, {m, a, n}, {m, a, z}, {m, n, z}, {a, n, z}, {m, a, n, z} }

$|A| = 4 \qquad |P(A)| = 16 = 2^{|A|}$

Operaciones: Producto cartesiano

El producto cartesiano de dos conjuntos A y B, AxB, es otro conjunto formado por todos los pares posibles entre elementos de A y elementos de B.

Ejemplo:

A= {m, a, n}

B= {1, 2, 3}

AxB= { (m,1), (m,2), (m,3), (a,1), (a,2), (a,3), (n,1), (n,2), (n,3) }

|AxB| = |A|*|B|

Relaciones: Pertenencia

Dado un elemento **x** y un conjunto **A** la relación de pertenencia indica que **x** es un elemento que se encuentra dentro del conjunto A.

Ejemplo:

A= {m, a, n}

B= {1, 2, 3}

$m \in A$ $1 \notin A$

$2 \in B$ $n \notin A$

Relaciones: Equivalencia/igualdad

Dos conjuntos son equivalente/iguales si ambos contienen exactamente los mismos elementos.

Ejemplo:

A= {m, a, n}

B= {n, m, a}

C= {p, e, r}

$$A = B$$
$$A \cap B = \emptyset$$
$$C \neq A$$

Relaciones: Inclusión

Un conjunto A está incluido en otro conjunto B si todos los elementos de A pertenecen al conjunto B

Ejemplo:

A= {m, a, n}

B= {n, m, a, g}

C= {n, m, a}

$A \subset B$

$B \not\subset A$

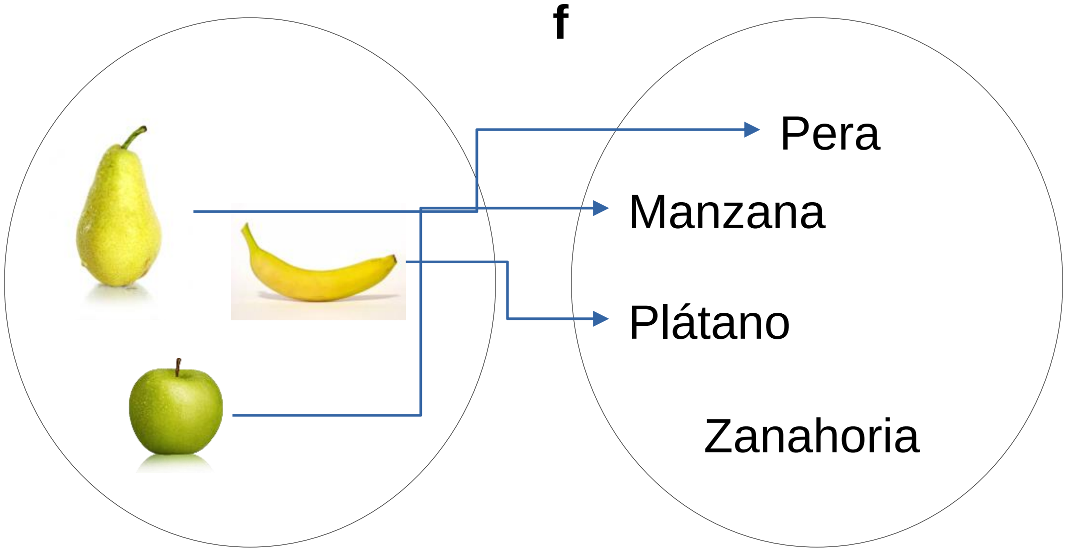
$C \subseteq A$

Aplicaciones

Relación existente entre los elementos de un conjunto origen A (**dominio**) y los de otro conjunto destino B (**codominio**). Se nota **f:A -> B**

Ejemplo:

F()= Pera



Propiedades:

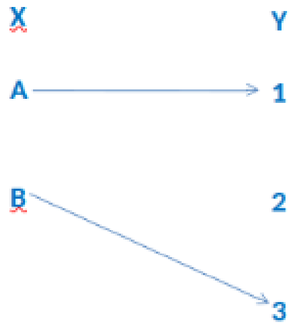
- Conmutativa
- Asociativa
- Distributiva
- Idempotencia
- Absorción
- Ley de Morgan

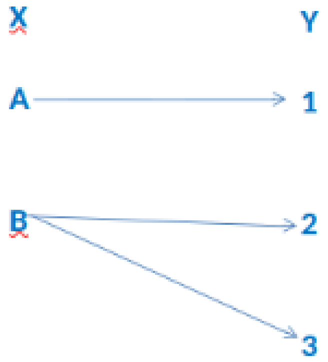
F?

$$A \cap B = B \cap A; A \cup B = B \cup A$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup A = A$$
$$A \cup (A \cap B) = A; A \cap (A \cup B) = A$$
$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}; \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Aplicaciones: Propiedades

Inyectiva: No hay dos elementos del dominio con igual elemento del codominio.
Sobreyectiva: Todos los elementos del codominio tienen un elemento del dominio.
Biyectiva: Inyectiva + Sobreyectiva





Aplicaciones: Composición

Ejecución secuencial de varias aplicaciones, una detrás de otra, (***f*** o ***g***)(x)= f(g(x))

Ejemplo:

A Luces de semáforo
B= Posición
S= Significado

$$C = \{rojo, verde, amarillo\}$$
$$P = \{arriba, centro, abajo\}$$
$$S = \{pasar, parar, cuidado\}$$
$$f: P \to C, g; C \to S$$
$$f = \{(arriba, rojo), (abajo, verde), (centro, amarillo)\}$$
$$g = \{(rojo, parar), (verde, pasar), (amarillo, cuidado)\}$$
$$(g \circ f)(arriba) = parar;\ (g \circ f)(abajo) = pasar$$
$$(g \circ f)(centro) = cuidado$$

CURSO

Experto en Inteligencia Artificial

Matemáticas básicas

CONTENIDOS

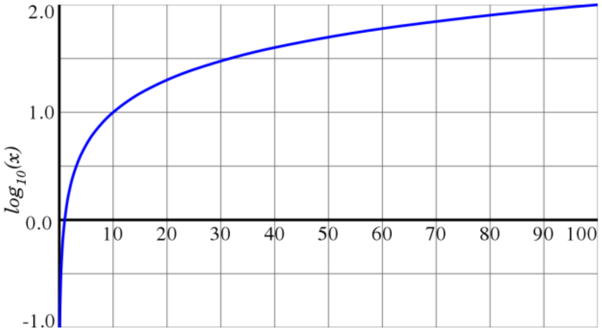
Función

Aplicación entre conjuntos numéricos.

Ejemplos:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = x^2 + 7$$

$$g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$
$$g(x, y) = x + y * i$$



Límite

- **Límite en un punto** de una función real de variable real: se relaciona con cómo varían los valores de la función a medida que el valor de la variable se acerca a un determinado punto.

$$\lim_{x \to a} f(x) \to b$$

Ejemplos:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 + e^{-x}} \to 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + e^{-x}} \to \frac{1}{2} \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x + 1} \to \infty$$

Límite: Regla de la suma

El límite de una suma es la suma de los límites.

$$\lim_{x \to a} (f+g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

Ejemplo:

$$f(x) = x^2$$
$$g(x) = x + 1$$
$$\lim_{x \to 0} (f+g)(x) = 0 + 1 = 1$$

Límite: Regla del producto

El límite de una multiplicación es la multiplicación de los límites.

$$\lim_{x\to a}(f * g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) * \lim_{x\to a} g(x)$$

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$g(x) = \frac{2x+1}{x+2}$$

$$\lim_{x\to 0}(f * g)(x) = 1 * 1/2 = 1/2$$

Límite: Regla del cociente

El límite de un cociente es el cociente de los límites.

$$\lim_{x\to a}(f/g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \Big/ \lim_{x\to a} g(x)$$

Ejemplo:

$$f(x) = 1$$

$$g(x) = 1 + e^{-x}$$

$$\lim_{x\to\infty}(f/g)(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+e^{-x}} = 1/1 = 1$$

Límite: Regla de la potencia

El límite de una potencia es la potencia de los límites.

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} f(x)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

Ejemplo:

$$f(x) = e$$
$$g(x) = -x$$
$$\lim_{x\to\infty} (f^{g})(x) = \lim_{x\to\infty} e^{-x} \to 0$$

Indeterminaciones

Situaciones comunes donde no es posible calcular el límite directamente. En ocasiones se puede abordar el cálculo desde otra perspectiva.

Tipos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \cdot \pm\infty$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty - \infty$$

Concepto de derivada en un punto

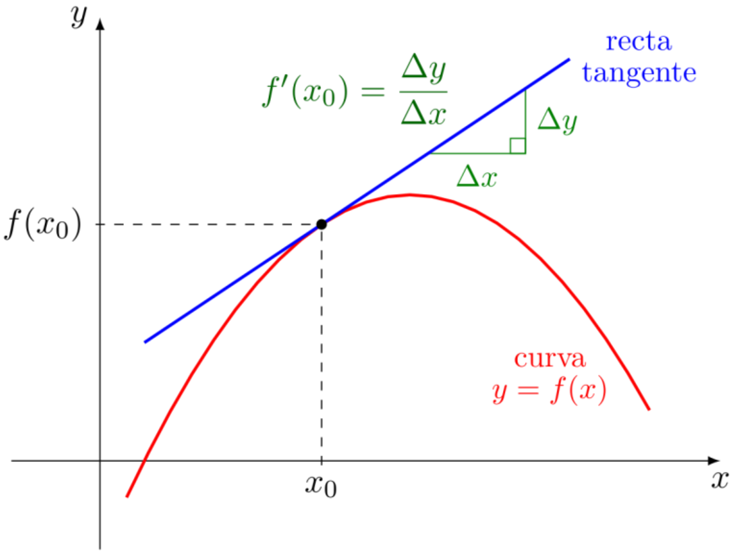
Se define como; $$f'(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(a) - f(x)}{a - x}$$

Ejemplos:

$$f(x) = 2x + 3 \to f'(x) = 2$$

$$f(x) = log(x) \to f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = x^2 + 3x + 1 \to f'(x) = 2x + 3$$



Concepto de integral

Operación inversa a la derivada. Sea **f** una función derivada de otra función **F**. A **F se le llama primitiva de f**.

$$\int f(x)\partial x = F(x) + c$$

Ejemplos:

$$f(x) = 2 \rightarrow \int f(x)\partial x = 2x + C$$

$$f(x) = 2x + 3 \rightarrow \int f(x)\partial x = x^2 + 3x + C$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow \int f(x)\partial x = log(x) + C$$

CURSO

Experto en Inteligencia Artificial

Matemáticas básicas

CONTENIDOS

Matriz

Grupo de números organizados en filas y columnas.

$$A_{n,m} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 1.1 & 2.4 & 3.2 \\ 3.7 & 8.4 & 4.5 \end{pmatrix}$$

- **Matriz cuadrada**

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

- **Matriz traspuesta**

$$A^t = \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}$$

- **Matriz diagonal**

$$B = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

- **Matriz inversa**

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/100 & 1/6 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

- **Matriz identidad**

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Suma/resta de matrices: Deben tener la misma dimensión (número de filas y columnas).

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,m} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & \dots & a_{1,m} + b_{1,m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} + b_{n,1} & \dots & a_{n,m} + b_{n,m} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \\ 11 & 13 \end{pmatrix}$$

Multiplicación de matrices: No es conmutativa (A*B no es B*A). El número de columnas de la primera debe ser igual que el número de filas de la segunda.

Se aplica la regla conocida como *"filas por columnas"*.

$$A_{n,k} * B_{k,m} = C_{n,m}$$

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il} * b_{lj}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$$

Determinantes: |A|, medida del grado de independencia de las filas/columnas de una matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow det(A) = 1 * 4 - 2 * 2 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 37 \\ 41 & 53 & 60 \\ 71 & 18 & 19 \end{pmatrix} \rightarrow det(A) = -105693$$

Rango: rank(A), medida del número de filas/columnas de una matriz que son independientes entre sí.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow rank(A) = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 37 \\ 41 & 53 & 60 \\ 71 & 18 & 19 \end{pmatrix} \rightarrow rank(A) = 3$$

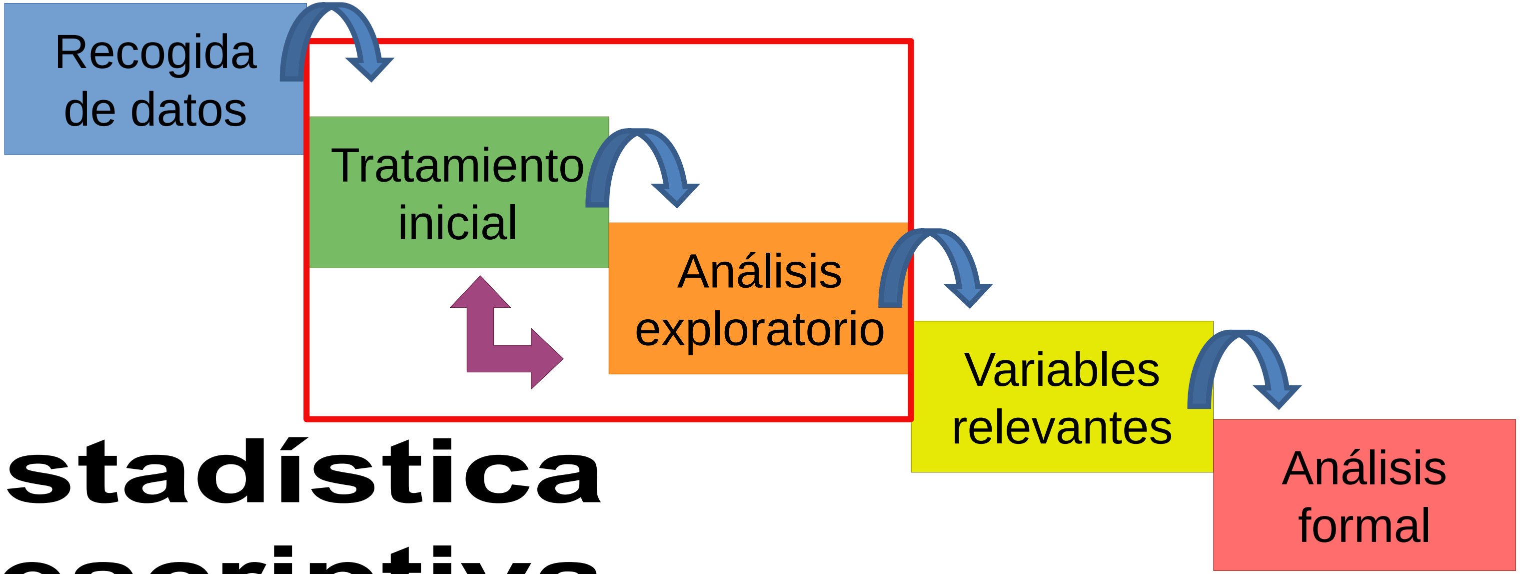
CURSO

Experto en Inteligencia Artificial

Matemáticas básicas

CONTENIDOS

Fases del tratamiento estadístico de datos:



Estadística descriptiva

Población

Conjunto de elementos sobre los que se realiza un estudio

Muestra

Subconjunto representativo de elementos de la población

Individuo

Elemento particular y único de la población

Variable

Característica de estudio de cada individuo

Ejemplo: Estudio sobre síntomas de COVID prolongado

- **Población:** Conjunto de personas que han pasado el COVID

- Muestra: Personas concretas sobre las que se realiza el estudio

- Individuo: Perico Palotes, con ID=1122

- **Variables:** Presenta migrañas, presenta cansancio, etc.

Tipos de variables:

- **Cualitativas:** Color del pelo, marca, profesión…
- **Numéricas:**
    - **Discretas:** Edad, número de hijos, número de habitaciones...
    - **Continuas:** Altura, kms, velocidad, peso...

Ejemplo de muestra:

Pasajeros de avión (en miles) por mes y año

year	month	passengers
1949	January	112
1949	February	118
1949	March	132
1949	April	129
1949	May	121
1949	June	135
1949	July	148
1949	August	148
1949	September	136
1949	October	119

Ejemplo de muestra: Estudio de pingüinos en el ártico

species	island	bill_length_mm	bill_depth_mm	flipper_length_mm	body_mass_g	sex
Adelie	Torgersen	39.1	18.7	181	3750	MALE
Adelie	Torgersen	39.5	17.4	186	3800	FEMALE
Adelie	Torgersen	40.3	18	195	3250	FEMALE
Adelie	Torgersen					
Adelie	Torgersen	36.7	19.3	193	3450	FEMALE
Adelie	Torgersen	39.3	20.6	190	3650	MALE
Adelie	Torgersen	38.9	17.8	181	3625	FEMALE
Adelie	Torgersen	39.2	19.6	195	4675	MALE
Adelie	Torgersen	34.1	18.1	193	3475	
Adelie	Torgersen	42	20.2	190	4250	

Resúmenes de datos: Tablas de frecuencias para cada variable **X** del problema.

X={3, 2, 2, 4, 3, 3, 1, 2, 3, 4} (variable discreta)

x_i	n_i
1	1
2	3
3	4
4	2
TOTAL:	10

Resúmenes de datos: Tablas de frecuencias para cada variable **X** del problema.

X={3.5, 4.1, 6.9, 9.8, 10, 7.5, 6.1, 5.2, 2.3, 4.8} (variable continua)

x_i	n_i
[0-5)	4
[5-7)	3
[7-9)	1
[9-10]	2
TOTAL:	10

Estadísticos principales de interés:

- **Medidas de posición**: Dividen al conjunto en partes porcentuales y recogen un valor que resume el comportamiento de la población.

- **Medidas de dispersión**: Estudian cómo varían los datos entre individuos dentro de la misma muestra.

MEDIDAS DE POSICIÓN COMUNES

Medidas de posición: Mínimo y máximo

$X=\{3, 2, 2, 4, 3, 3, 1, 2, 3, 4\}$

x_i	n_i
1	1
2	3
3	4
4	2
TOTAL:	10

$\min(X) = 1$
$\max(X) = 4$

Medidas de posición: **Media**

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{N} f_i x_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} n_i x_i$$

X={3, 2, 2, 4, 3, 3, 1, 2, 3, 4}

media(X)= 2,7

x_i	n_i
1	1
2	3
3	4
4	2
TOTAL:	10

Medidas de posición: Moda

- **Variables discretas** $Mo(X) = x_i : i = argmax n_i$

X={3, 2, 2, 4, 3, 3, 1, 2, 3, 4}

Mo(X)= 3

x_i	n_i
1	1
2	3
3	4
4	2
TOTAL:	10

Medidas de posición: Moda

- **Variables continuas**

$$Mo(X) = e_{i-1} + \frac{h_i - h_{i-1}}{(h_i - h_{i-1}) + (h_i - h_{i+1})} a_i$$

- i= índice del intervalo con x_i de frecuencia máxima
- a_i= amplitud del intervalo
- h_i= n_i/a_i
- e_i= extremo superior del intervalo anterior a x_i.

Medidas de posición: Moda

- **Variables continuas: X={3.5, 6.1, 6.9, 9.8, 5.1, 7.5, 6.1, 2.2, 2.3, 4.8}**

x_i	n_i	a_i	h_i
[0-5)	4	5-0=5	4/5=0.8
[5-7)	4	7-5=2	4/2=2
[7-9)	1	9-7=2	1/2=0.5
[9-10]	1	10-9=1	1/1=1
TOTAL:	10		

$$Mo(X) = 5 + \frac{2 - 0.6}{(2 - 0.6) + (2 - 0.5)} 2 = 5{,}97$$

Medidas de posición: Mediana

- **Variables discretas**

$$X=\{3, 2, 2, 4, 3, 3, 1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4\}$$

$$Me(X)= 3$$

Medidas de posición: Mediana

- **Variables continuas**

$$Me(X) = e_{i-1} + \frac{\frac{N}{2} - N_{i-1}}{n_i} a_i$$

X={3.5, 6.1, 6.9, 9.8, 5.1, 7.5, 6.1, 2.2, 2.3, 4.8}

x_i	n_i	a_i	N_i
[0-5)	4	5-0=5	4
[5-7)	4	7-5=2	8
[7-9)	1	9-7=2	9
[9-10]	1	10-9=1	10
TOTAL:	10		

N_i>=N/2

$$Me(X) = 5 + \frac{10/2 - 4}{4} 2 = 5{,}5$$

Medidas de posición: Percentiles

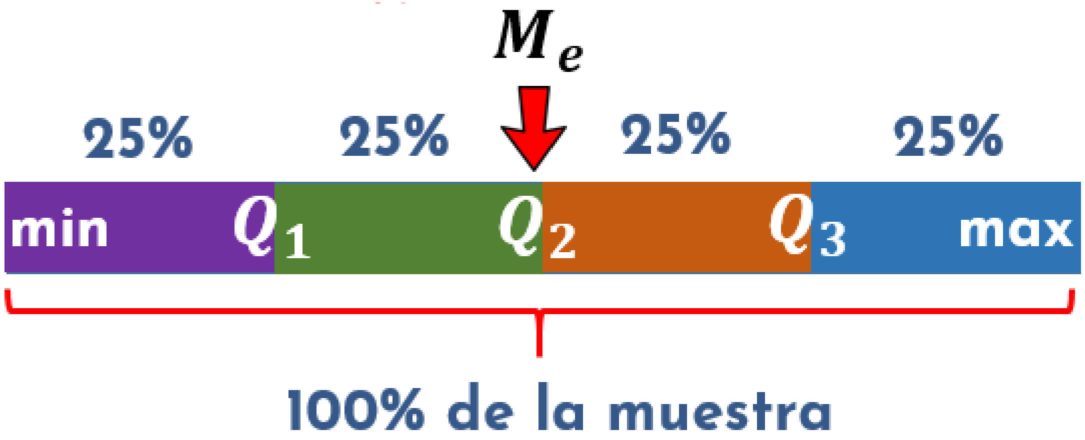
X={3, 2, 2, 4, 3, 3, 1, 2, 3, 4}

x_i	n_i	f_i	F_i
1	1	1/10= 0.1	0.1
2	3	3/10=0.3	0.4
3	4	4/10=0.4	0.8
4	2	2/10=0.2	1.0
TOTAL:	10		

La variable x_1=1 recoge hasta el percentil P_{10}.
La variable x_2=2 recoge hasta el percentil P_{40}.
La variable x_3=3 recoge hasta el percentil P_{80}.
La variable x_4=4 recoge hasta el percentil P_{100}

Medidas de posición: Cuartiles

- $Q_1 = P_{25}$
- $Q_2 = P_{50}$
- $Q_3 = P_{75}$
- $Q_4 = P_{100}$



Fuente de imagen: https://lasmatesfaciles.com/2021/06/21/cuartiles-deciles-y-percentiles-para-datos-agrupados/

MEDIDAS DE DISPERSIÓN COMUNES

Medidas de dispersión: Rango

X={3, 2, 2, 4, 3, 3, 1, 2, 3, 4}.

Rango(X)= max(X) – min(X)= 4-1= 3

Medidas de dispersión: **Varianza**

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2$$

X={3, 2, 2, 4, 3, 3, 1, 2, 3, 4}.

Var(X)= 0.81

Medidas de dispersión: **Desviación típica/estándar**

$$\sigma = +\sqrt{\sigma^2}$$

X={3, 2, 2, 4, 3, 3, 1, 2, 3, 4}.

Var(X)= 0.81
sd(X)= 0.9

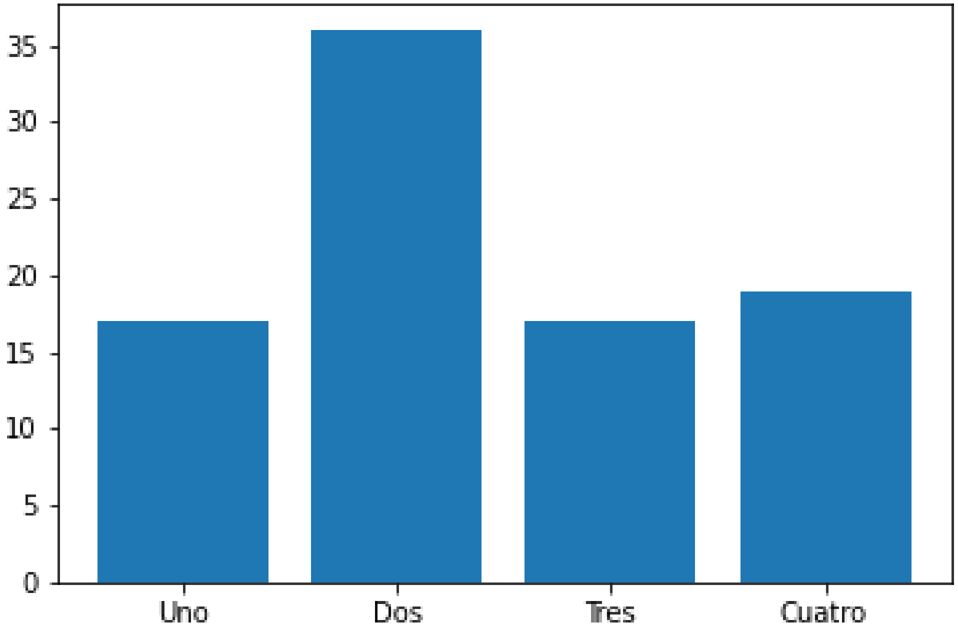
ANÁLISIS EXPLORATORIO DE DATOS

Análisis exploratorio de datos

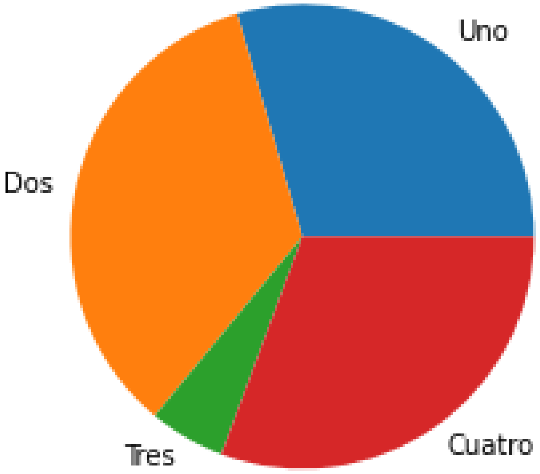
Conjunto de técnicas para realizar un análisis preliminar de los datos, mediante métodos para visualizar resúmenes existentes sobre una muestra tomada de una población

- Gráficos de barras
- Histogramas
- Gráficos de dispersión
- Gráficos de series (líneas)
- Gráficos de sectores
- Etc.

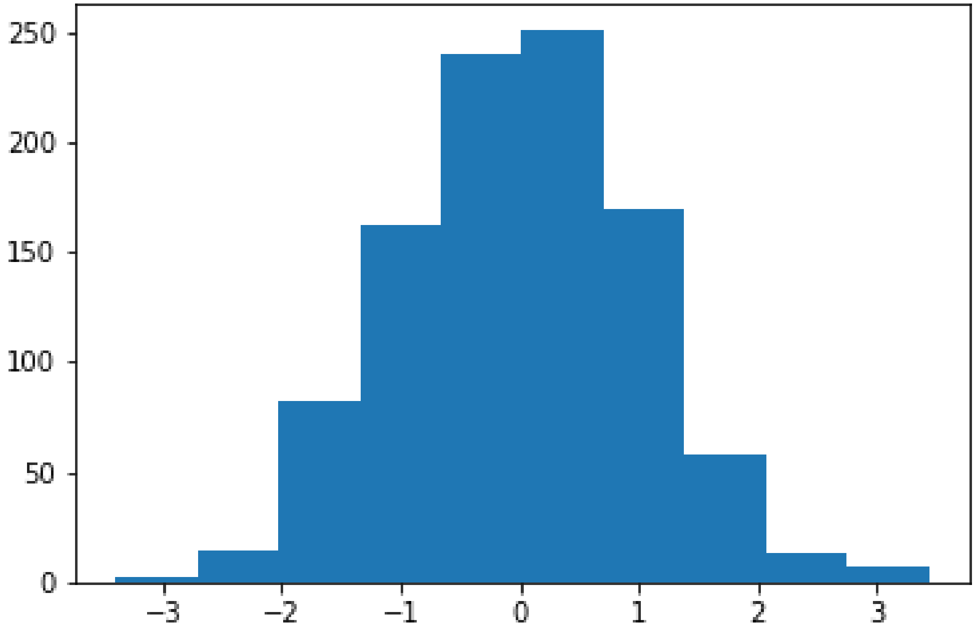
Gráficos de barras



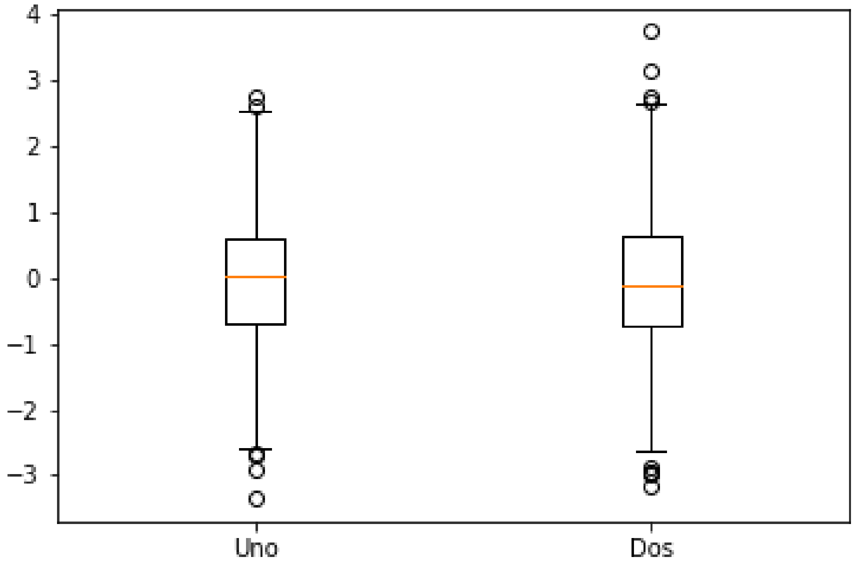
Gráficos de sectores



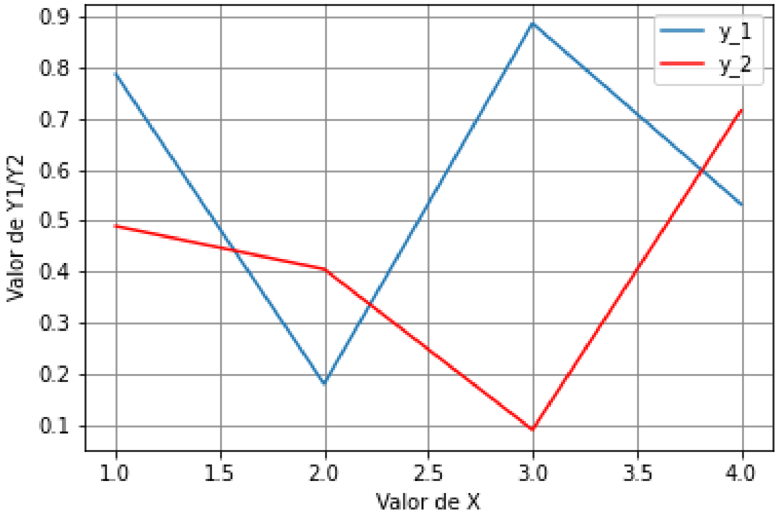
Histogramas



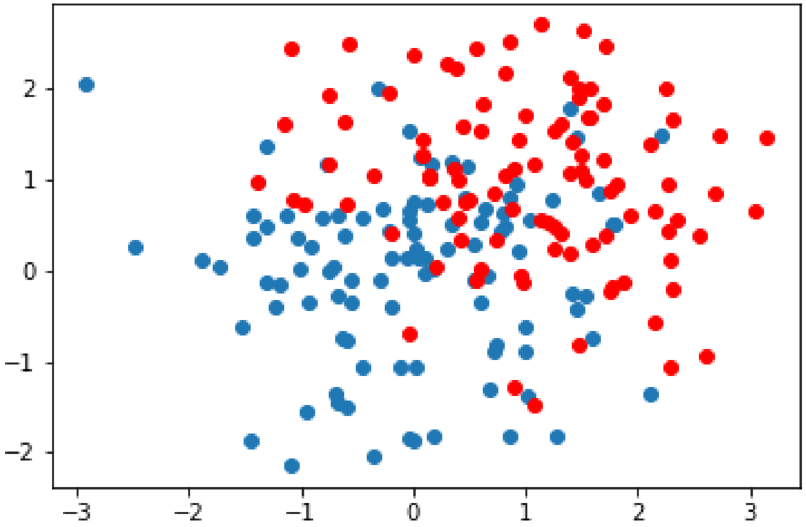
Gráficos de cajas y bigotes



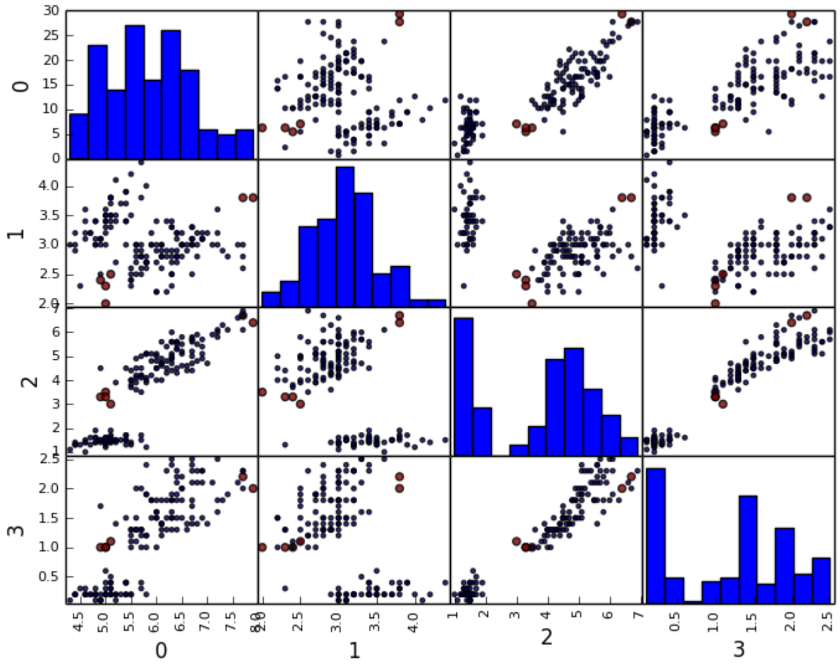
Gráficos de series (líneas)



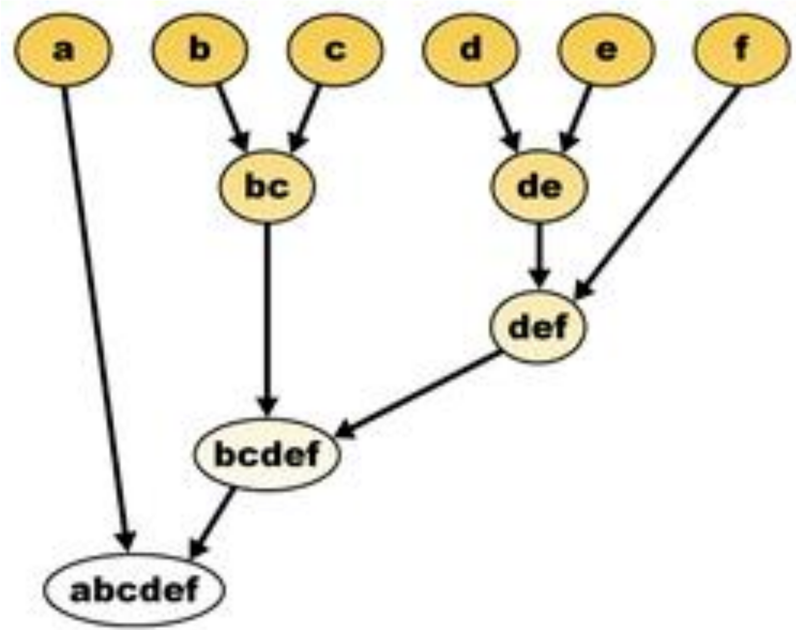
Gráficos de dispersión (puntos)



Matrices dispersas



Dendogramas



Fuente de imagen: https://es.wikipedia.org/wiki/Dendrograma

ANÁLISIS CON VARIAS VARIABLES

Tabla de frecuencias de dos variables

En cada fila se fija un valor para una variable (por ejemplo $\mathbf{x_i}$), y en cada columna el valor de la otra variable (por ejemplo $\mathbf{y_i}$). Cada celda **(fila i, columna j)** de la tabla contiene el número de individuos que presentan simultáneamente los valores $\mathbf{x_i}$ e $\mathbf{y_j}$

Individuos (x,y): {(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 1), (1, 3), (2, 2), (1, 3), (1, 1)}

X\Y	**1**	**2**	**3**	**TOTAL**
1	2	0	3	5
2	2	1	0	3
TOTAL	4	1	3	8

Independencia estadística

Se dice que ambas variables son independientes, y que por tanto no se percibe relación entre ellas, si se cumple para cualquier para $\mathbf{x_i}$, $\mathbf{y_i}$, que:

$$n_{ij} = \frac{n_i * n_j}{N}, \forall i, j$$

Individuos (x,y): {(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 1), (1, 3), (2, 2), (1, 3), (1, 1)}

X\Y	1	2	3	TOTAL
1	2	0	3	5
2	2	1	0	3
TOTAL	4	1	3	8

Independencia

Covarianza

Nos permite conocer el comportamiento de una variable con respecto a otra

$$Cov(X,Y) = \sigma_{x,y} = \frac{\sum_i \sum_j (x_i - \overline{x})(y_j - \overline{y})}{N}$$

Matriz de covarianzas:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{x,y} \\ \sigma_{y,x} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$$

Coeficiente de correlación y de determinación

Se utiliza para conocer cómo de correlacionadas están dos variables

$$r = \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x \sigma_y}$$

- **Si r está cercano a 1, entonces X,Y tienen una relación positiva fuerte.**
- **Si r está cercano a -1, entonces X,Y tienen una relación negativa fuerte.**
- **Si r está cercano a 0, entonces no se aprecia correlación.**

CURSO

Experto en Inteligencia Artificial

Matemáticas básicas

CONTENIDOS

Variable aleatoria

Variable estadística cuya frecuencia de valores tiene una componente de azar.

X={cara, cruz} → p(X=cara)= 0.5 , p(X=cruz)= 0.5= 1-p(X=cara)

La probabilidad de un suceso siempre debe ser no negativa .
La probabilidad de un suceso siempre debe ser inferior a 1.
La suma de las probabilidades de todos los eventos debe ser igual a 1.
La probabilidad de que ocurra un suceso x_i o un suceso x_j es la suma de las probabilidades .
La probabilidad de que ocurra un suceso x_i y además un suceso x_j es la multiplicación de las probabilidades sólo en el caso de independencia.

X= variable aleatoria discreta con posibles sucesos {x_i}

$p(X = x_i) \geq 0, p(X = x_i) \leq 1$ **→ probabilidad entre 0 y 1**

$\sum_i p(X = x_i) = 1$ **→ Suma de todas las probabilidades igual a 1**

$p\left(X = x_i \cup X = x_j\right) = p(X = x_i) + p\left(X = x_j\right)$ **→ probabilidad de un suceso u otro**

$p\left(X = x_i \cap X = x_j\right)$ **→ probabilidad de un suceso Y otro**

Probabilidad conjunta

Si tenemos dos variables aleatorias **X, Y**, se define la **probabilidad conjunta** de que se produzca el evento **x_i** de **X** y el evento **y_j** de **Y** como **$p(X=x_i, Y=y_j)$**

Probabilidades marginales

Conociendo la probabilidad conjunta de dos variables, **$p(X=x_i, Y=y_j)$**, podemos conocer las probabilidades marginales **$p(X=x_i)$** y **$p(Y=y_j)$**

$$p(x_i) = \sum_j p(x_i, y_j) \qquad p(y_j) = \sum_i p(x_i, y_j)$$

Probabilidad condicionada

Es la probabilidad de que ocurra un evento sabiendo que otro ya se ha producido se nota como **p(X=x_i| Y=y_j)** (probabilidad de **x_i** sabiendo que se ha dado **y_j**),

$$p(x|y) = \frac{p(x \cap y)}{p(y)}$$

Teorema de Bayes

Permite relacionar las probabilidades condicionadas entre variables

$$p(x_i|x_j) = \frac{p(x_i)p(x_j|x_i)}{p(x_j)} = \frac{p(x_i)p(x_j|x_i)}{\sum_{k=1,k\neq j}^{n} p(x_k)p(x_j|x_k)}$$

Ejemplo: Casos de aprobación de préstamos hipotecarios

Caso	Tasación	Valoración	Entradas	Balance	Aprobar
1	+	-	No	+	No
2	-	-	Sí	-	No
3	+	+	No	+	Sí
4	-	+	Sí	+	Sí
5	-	+	Sí	-	No
6	+	+	Sí	-	Sí
7	+	+	Sí	+	Sí
8	+	-	Sí	-	No
9	+	+	No	-	No

P(Aprobar=Si)?

P(Aprobar=Si, Tas=+)?

P(Aprobar=Si| Tas=+)?

P(Tas=+| Aprobar=Si)?

Ejemplo: Casos de aprobación de préstamos hipotecarios

Caso	Tasación	Valoración	Entradas	Balance	Aprobar
1	+	-	No	+	No
2	-	-	Sí	-	No
3	+	+	No	+	Sí
4	-	+	Sí	+	Sí
5	-	+	Sí	-	No
6	+	+	Sí	-	Sí
7	+	+	Sí	+	Sí
8	+	-	Sí	-	No
9	+	+	No	-	No

$$P(Aprobar = Si) = \frac{4}{9}$$

$$P(Apr = Si, Tas = '+') = \frac{3}{9}$$

$$P(Apr = Si | Tas = '+') = \frac{3}{6}$$

$$P(Tas = '+' | Apr = Si) = \frac{3}{4}$$

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

Distribución de probabilidad

Función **f** que relaciona los eventos de una variable aleatoria con sus valores de probabilidad.

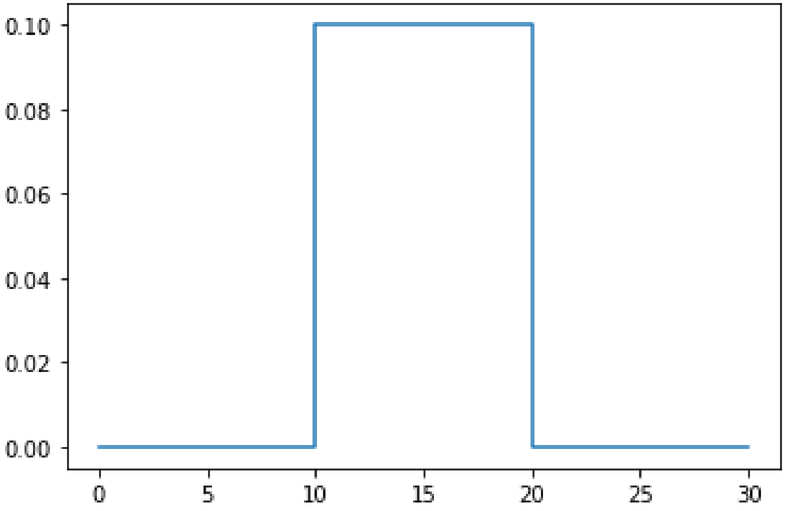
$$f: X \to [0,1]$$

$$x \to f(x) = p(X = x)$$

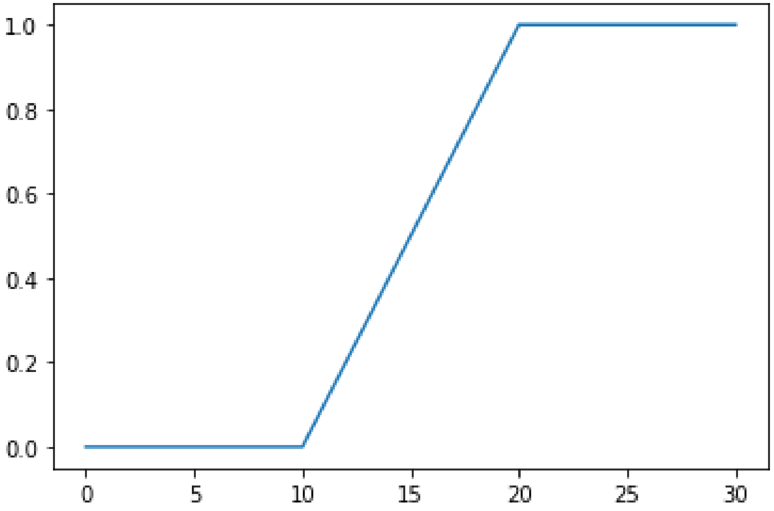
Distribución de probabilidad acumulada

$$\mathbf{F(x_i) = p(x <= x_i)}$$

Distribución Uniforme U(a,b)

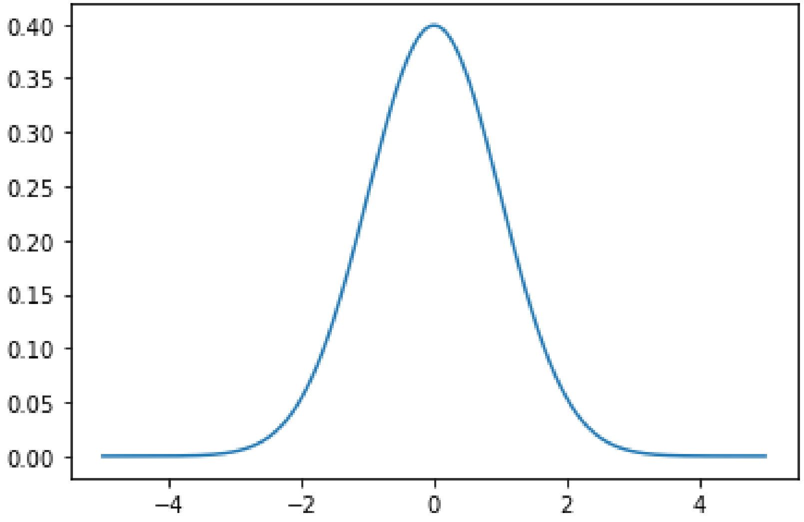


f

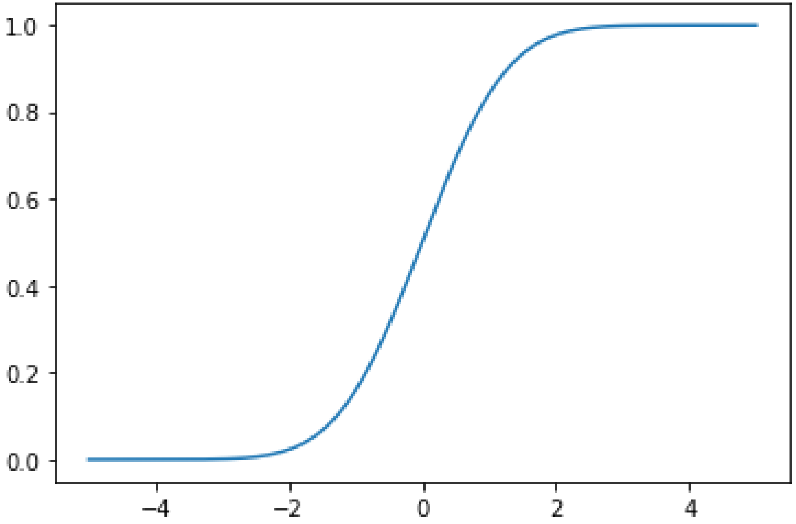


F

Distribución Normal N(m,s)



f



F

Tests de hipótesis

Nos servirán para verificar formalmente las características de los datos muestreados, y también para comparar resultados.

Los usaremos principalmente para saber si unos datos se distribuyen de acuerdo a una distribución de probabilidad, o para ver si varias muestras de datos pueden ser explicadas desde la misma (o diferente) distribución de probabilidad.

Tests de hipótesis

- **De aleatoriedad:** Por ejemplo Box-Pierce. Indica si los datos son aleatorios o no.
- **De normalidad:** Por ejemplo Jarque Bera y Shapiro-Wilk. Indican si los datos se pueden explicar mediante una distribución normal.
- **Paraḿetricos (distribuciones de datos normales):**
  - **De medias de una muestra:** Test de Student (t-Test) de una muestra. Comprueba si una distribución puede explicarse como una normal de media dada.
  - **De medias de dos muestras:** Test de Student (t-Test) de dos muestras. Comprueba si dos muestras siguen una distribución normal con la misma muestra, aunque desviación típica desconocida.
- **No paraḿetricos:**
  - Wilcoxon, Kruskal-Wallis: Comparan si dos o más muestras de datos siguen la misma distribución de probabilidad.

CURSO

Experto en Inteligencia Artificial

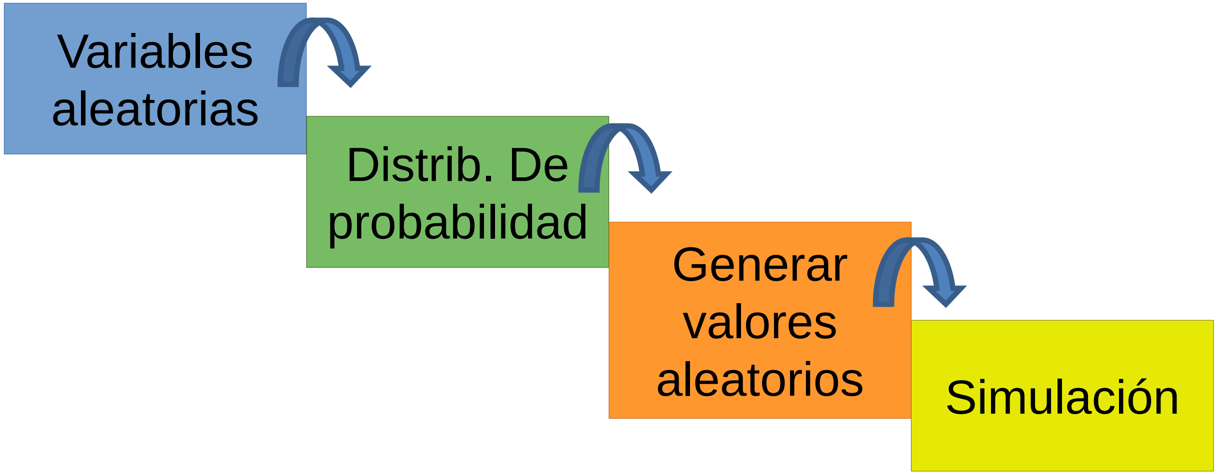
Matemáticas básicas

CONTENIDOS

- Fundamentos de Teoría de Conjuntos
- Fundamentos de Análisis Matemático
- Operaciones con matrices
- Fundamentos de estadística descriptiva
- Fundamentos de probabilidad
- Métodos de Monte-Carlo
- Estadística para clasificación binaria

Monte-Carlo

La simulación por Monte-Carlo es un método muy simple, a la vez que potente, para modelar sistemas o problemas que tienen componentes aleatorias/probabilísticas. Es un mecanismo de simulación muy utilizado en Inteligencia Artificial (por ejemplo, aprendizaje por refuerzo).



Ejemplo práctico: Simulación de inventario de vacunas.

En un centro de salud se dispone de un servicio de vacunación para un tipo de vacuna con fecha de consumo inmediata. De este modo, se debe adquirir diariamente un número determinado de vacunas a administrar ese día. A fin de poder optimizar los costes de adquisición de las vacunas con el proveedor, se desea realizar una estimación del número de vacunas diario que deberían adquirirse.

Datos:

Vacunas	N.º de días
0	4
1	3
2	3
3	4
4	2
5	2
6	3
7	2
8	5
9	2

Variables: Vacunas

Distribución de datos y distribución acumulada:

Vacunas	Prob.	Prob. Acc.
0	4/30	4/30
1	3/30	7/30
2	3/30	10/30
3	4/30	14/30
4	2/30	16/30
5	2/30	18/30
6	3/30	21/30
7	2/30	23/30
8	5/30	28/30
9	2/30	1.0

Generación de aleatorios y simulación

Aleatorios: 10 valores (poco)
5, 23, 10, 18, 2,
14, 14, 19, 22, 20

Demanda esperada de vacunas

$$\frac{1+7+2+5+0+3+3+6+7+6}{10} = 4$$

Cálculo analítico:

$$\overline{vacuna} = 4{,}3$$

Valor aleatorio	Vacunas
5	1
23	7
10	2
18	5
2	0
14	3
14	3
19	6
22	7
20	6

CURSO

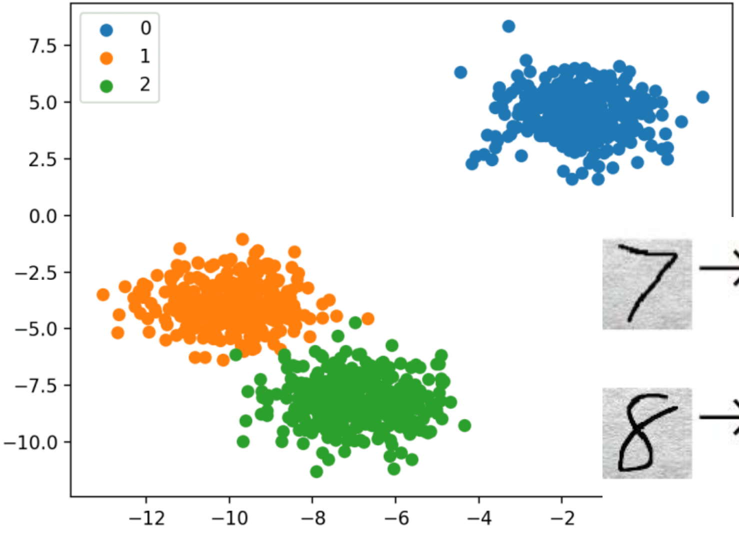
Experto en Inteligencia Artificial

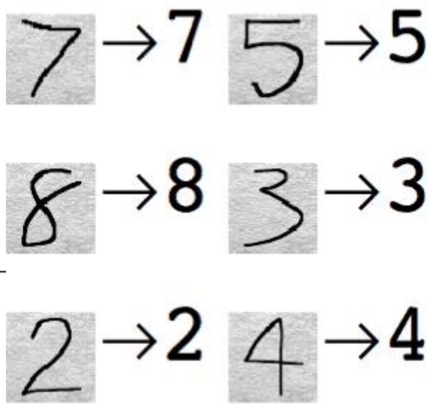
Matemáticas básicas

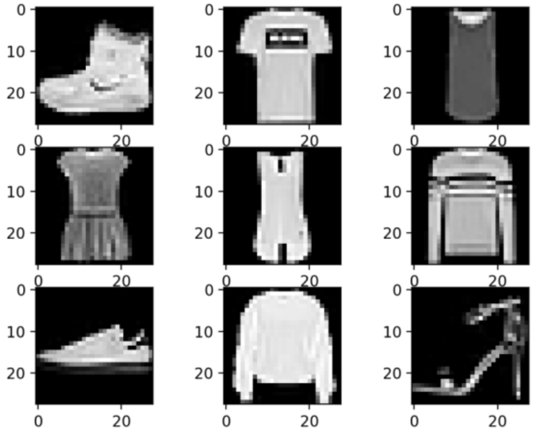
CONTENIDOS

Clasificación

La **clasificación** es un problema que pretende asignar individuos de una muestra a una categoría previamente conocida.

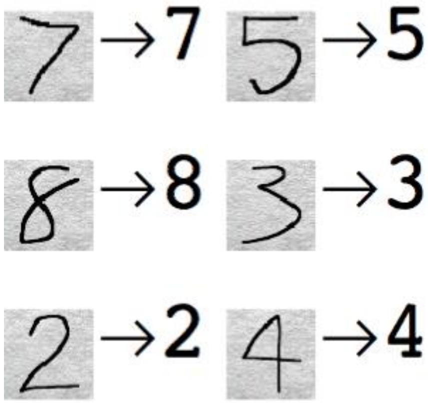






Clasificador

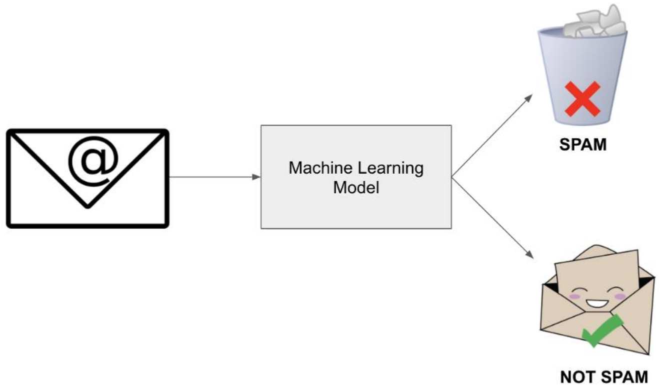
Modelo matemático que tiene como entrada **atributos** y como salida proporciona una **clase**. Cada par (atributos, clase) es un **patrón**.

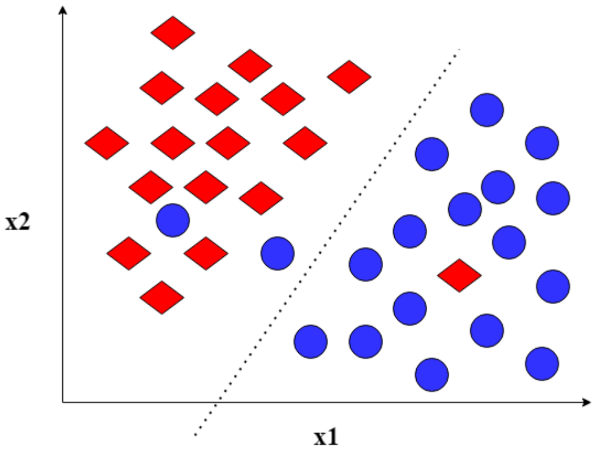


Ejemplos de patrones (imagen, dígito)

Clasificador binario

Responde ante la detección de una clase deseada o su ausencia (patrones positivos y patrones negativos).





Terminología:

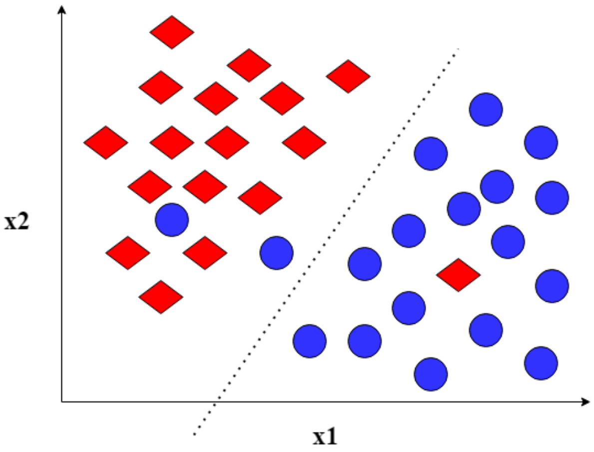
- **True Positive (TP):** Número de patrones que deben ser + y se clasifican correctamente.
- **False Positive (FP):** Número de patrones que deben ser - y se clasifican como +.
- **True Negative (TN):** Número de patrones que deben ser - y se clasifican correctamente.
- **False Negative (FN):** Número de patrones que deben ser + y se clasifican como -.
- **True Positive Rate (TPR) / False Positive Rate (FPR).**
- **True Negative Rate (TNR) / False Negative Rate (FNR).**

$$TPR = \frac{TP}{TP + FN} \qquad TNR = \frac{TN}{TN + FP}$$

Terminología:

- **Accuracy:** (N= tamaño de la muestra)

$$acc = \frac{TP + TN}{N}$$



$$TP = 16; FP = 1$$
$$TN = 16; FN = 2$$
$$TPR = \frac{16}{18}; TNR = \frac{16}{17}; FPR = \frac{2}{18}; FNR = \frac{1}{17}$$
$$Acc = \frac{32}{35}$$

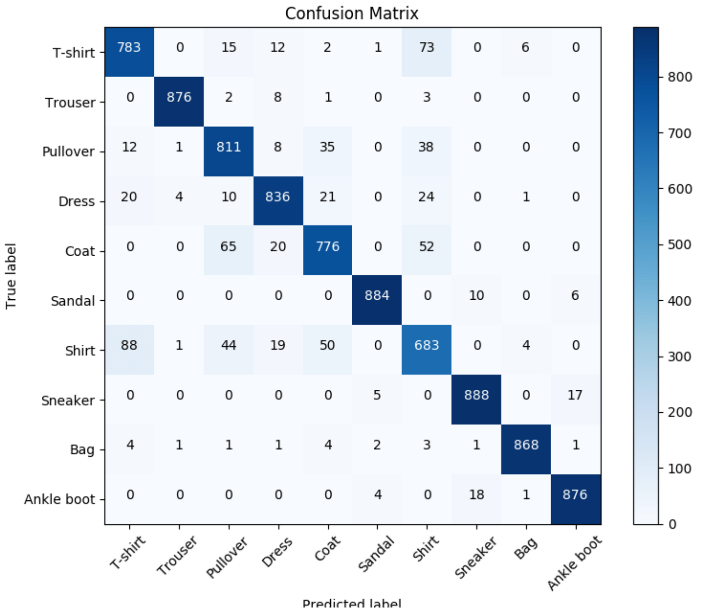
Tablas de confusión

Visualiza en una tabla la relación entre datos esperados y resultados del clasificador.

		Clasificador	
		Positivo	Negativo
Datos reales	Positivo	TP	FN
	Negativo	FP	TN

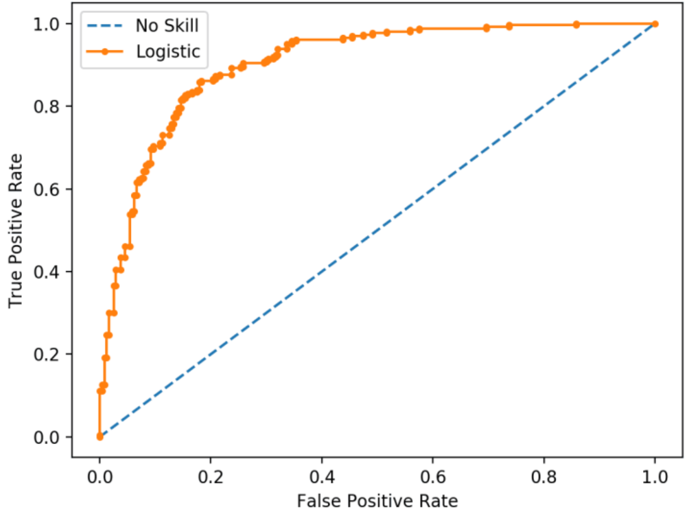
Clasificación

En clasificación multi-clase, cada fila/columna está asociada a cada posible valor de clase. Las celdas son el número de instancias que deberían ser de una clase (fila/columna), y cómo el clasificador las clasifica (columna/fila).



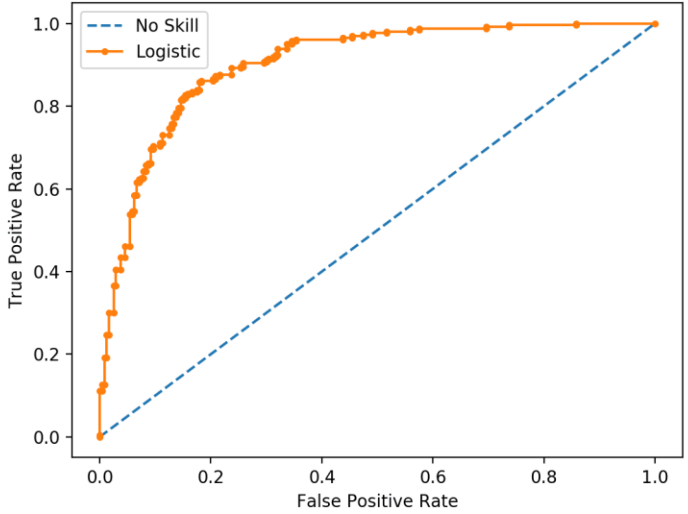
Curvas ROC (Receiver Operating Charasteristic)

Muestra, en el eje X, la evolución de la tasa de falsos positivos, y en el eje Y la tasa de positivos bien clasificados.



AUC (Area Under Curve)

Es el área (integral) de la curva mostrada en la gráfica ROC. A valor más próximo a 1, mejor (más robusto) es el clasificador.



vuela

Junta de Andalucía

Agencia Digital
de Andalucía