

Trabalho 02 – Método da Rigidez: Elemento de Barra

Universidade Federal de Santa Maria
UFSM00233 – Elementos Finitos em Mecânica dos Sólidos
Davi Lima Mendes dos Santos - 202012282
Professor: Dr. Tiago dos Santos

5 de abril de 2025

Sumário

1	Introdução	2
2	Metodologia do Método da Rigidez	2
3	Resultados	4
3.1	Exemplo de aplicação de (Ferreira e Fantuzzi 2020)	4
3.2	Problema 2.1 de (Fish e Belytscho 2007)	6
3.3	Problema 2.5, parte a), de (Fish e Belytscho 2007)	8
3.4	Problema 2.5, parte b), de (Fish e Belytscho 2007)	9
3.5	Exemplo de aplicação criado pelo autor	11
4	Conclusão	12
A	Apêndice do problema 2.1 de (Fish e Belytscho 2007).	13
B	Apêndice do problema 2.5 a) de (Fish e Belytscho 2007).	15
C	Apêndice do problema 2.5 b) de (Fish e Belytscho 2007).	17
D	Apêndice do exemplo de aplicação criado pelo autor.	19

1 Introdução

Este relatório apresenta conceitos trabalhados na aula (Santos 2025) e expostos em (Ferreira e Fantuzzi 2020) e (Fish e Belytscho 2007) sobre o Método da Rigidez: Elemento de Barra. A aplicação desse método foi empregada na solução de diferentes exercícios que envolvem sistemas compostos por elementos de barras e molas, diferenciando-os em elementos e nós para a aplicação do Método de Elementos Finitos (FEM - *Finite Element Method*). O resultado final foi a obtenção dos deslocamentos de cada nó e das forças de reação a partir de uma força externa atuante no sistema.

2 Metodologia do Método da Rigidez

Inicialmente, tem-se um sistema composto por uma barra que sofre somente a ação de esforço axial. Ela é então dividida em elementos conectados a um nó em cada extremidade. Esse elemento, para estar em equilíbrio estático, apresenta uma componente de força interna axial em cada extremidade seccionada (f_1 e f_2) e cada extremidade tem um deslocamento próprio que descreve o comportamento do elemento no sistema (u_1 e u_2). Além disso, esse elemento de barra pode ser aproximado por uma mola ideal de elasticidade k .

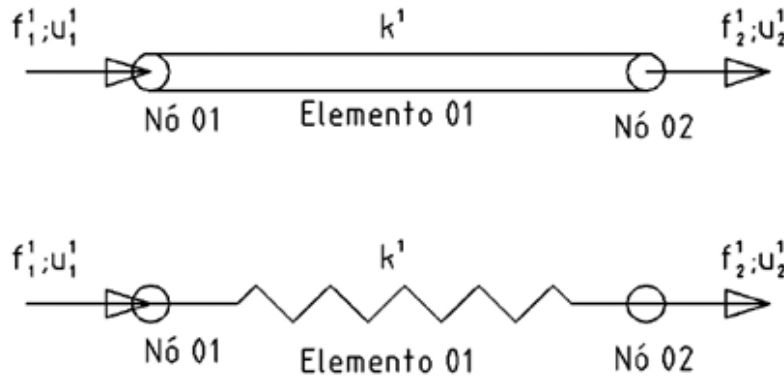


Figura 1: Idealização do sistema (Santos 2025).

Na figura 1, é ilustrada a descrição realizada. Um importante remarque é a presença do sobrescrito '1', que faz referência ao elemento 1. Desta forma, f_1^1 significa a força interna que age no nó esquerdo do elemento 1. De forma análoga, f_2^1 é a força no nó direito do elemento 1. De forma simplificada, se o subíndice 1 faz referência a um lado do elemento, o subíndice 2 se refere ao outro lado. Por fim, vemos que a elasticidade do elemento 1 é representada como k^1 em uma mola ideal que representa o elemento de barra.

Como o elemento é simplificado a uma mola, sua retração pode ser expressa da seguinte maneira.

$$\delta^1 = u_1^1 - u_2^1 \quad (1)$$

Nota-se que a equação trata da diferença entre o deslocamento sofrido pelo nó 1 do elemento 1 pelo nó 2 do elemento 1. Seguindo a lei de Hooke, a relação entre força e retração é descrita.

$$f_1^1 = k^1 \times \delta^1 = k^1(u_1^1 - u_2^1) \quad (2)$$

Já para a outra extremidade do elemento:

$$f_2^1 = k^1 \times (-\delta^1) = k^1(u_2^1 - u_1^1) \quad (3)$$

As equações 2 e 3 podem ser escritas de forma matricial, exposto na equação 4.

$$\begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \end{Bmatrix} = k^1 \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

Aplicando o conceito de elasticidade do elemento de barra, obtém-se a seguinte expressão, em que E é o módulo de elasticidade, A é a área da seção transversal e l é o comprimento do elemento de barra.

$$\begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \end{Bmatrix} = \frac{E^1 A^1}{l^1} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Assim, tem-se a formulação para somente um elemento de barra. Em um sistema de 2 elementos de barra conectados por um nó comum, a formulação do segundo elemento é idêntica à formulada até aqui. Entretanto, é feita uma relação entre variáveis locais (de cada elemento) com o global (forças e deslocamentos de cada nó), conforme ilustrado na figura abaixo.

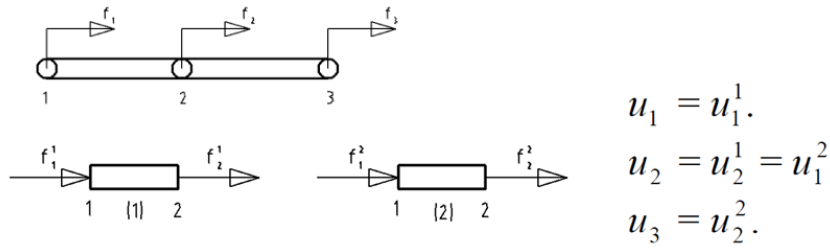


Figura 2: Relação entre variáveis locais e globais (Santos 2025).

Na figura 2, as forças globais são atribuídas aos nós separadamente, de tal forma que o nó 1 experiencie um deslocamento u_1 e esforço f_1 , já o nó 2 possui u_2 e f_2 próprio. Entretanto, estes são pontos partilhados pelos elementos. Isso faz com que o deslocamento u_1^1 seja igual a u_1 . De maneira análoga, o deslocamento u_2 do nó 2 é igual a u_2^1 e u_1^2 . Já o deslocamento u_3 é igual a u_2^2 . A relação entre as forças de cada nó com a dos elementos é dada pela soma entre elas de forma a adquirir equilíbrio estático. Ou seja, no nó 1: $f_1 = f_1^1$. No nó dois: $f_2 = f_2^1 + f_1^2$. Por fim, no nó 3: $f_3 = f_2^2$. Isso faz com que a relação entre forças e deslocamentos se transforme em:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} = [K_{3 \times 3}] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Agora a matriz de elasticidade é de ordem três. Para encontrar cada um de seus termos, os seguintes passos devem ser seguidos.

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ f_1^2 \\ f_2^2 \end{Bmatrix} = k^1 \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ 0 \end{Bmatrix} + k^2 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

Assim, a equação 6 se torna na equação 8 a seguir.

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k^1 & -k^1 & 0 \\ -k^1 & k^1 + k^2 & -k^2 \\ 0 & -k^2 & k^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

3 Resultados

3.1 Exemplo de aplicação de (Ferreira e Fantuzzi 2020)

Foi implementado um algoritmo de análise de barras 1D que segue a metodologia de cálculo do método da rigidez abordado previamente, provido por (Ferreira e Fantuzzi 2020), para encontrar os deslocamentos dos nós do sistema disposto na figura 3, além de obter as forças de reação de apoio dos nós engastados.

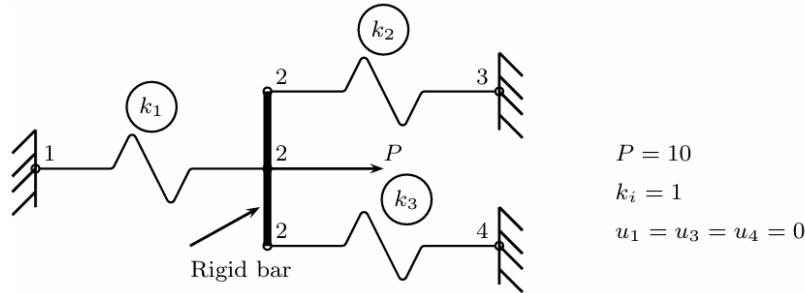


Figura 3: Ilustração do problema (Ferreira e Fantuzzi 2020).

No sistema acima, há 3 elementos com coeficiente de elasticidade $k = 1 \text{ N/m}$ e 4 nós, sendo o segundo nó partilhado por todos os elementos, enquanto os outros três nós são engastados. Uma força externa $P = 10 \text{ N}$ é aplicada no nó 2. Ratificando que o objetivo do exemplo de aplicação é encontrar a posição de equilíbrio do nó e as forças de reação de apoio a partir da implementação do código MATLAB disponível no *listing 1*.

Listing 1: Código MATLAB de (Ferreira e Fantuzzi 2020) para o problema de barra 1D.

```

1 % .....
2 % MATLAB codesfor FiniteElement Analysis
3 % problem1.m
4 % A.J.M. Ferreira,N. Fantuzzi2019
5 %%
6
7 % clear memory
8 clear
9 % elementNodes:connectionsat elements
10 elementNodes= [1 2;2 3;2 4];
11 % numberElements:numberof Elements
12 numberElements= size(elementNodes,1);
13 % numberNodes:number ofnodes
14 numberNodes= 4;
15 % for structure:
16 % displacements:displacementvector
17 % force: forcevector
18 % stiffness:stiffnessmatrix
19 displacements= zeros(numberNodes,1);
20 force = zeros(numberNodes,1);
21 stiffness =zeros(numberNodes);
22 % applied loadat node 2
23 force(2) = 10.0;

```

```

24
25 % computation of the system stiffness matrix
26 for e = 1:numberElements
27 % elementDof: element degrees of freedom (Dof)
28 elementDof = elementNodes(e,:);
29 stiffness(elementDof,elementDof) = ...
30 stiffness(elementDof,elementDof) + [1 -1;-1 1];
31 end
32
33 % boundary conditions and solution
34 % prescribed dofs
35 prescribedDof = [1;3;4];
36 % free Dof: activeDof
37 activeDof = setdiff((1:numberNodes)',prescribedDof);
38 % solution
39 displacements(activeDof) = ...
40 stiffness(activeDof,activeDof)\force(activeDof);
41 % output displacements/reactions
42 outputDisplacementsReactions(displacements,stiffness,...
43 numberNodes,prescribedDof)
44
45 function outputDisplacementsReactions...
46 (displacements,stiffness,GDof,prescribedDof)
47 % output of displacements and reactions in tabular form
48 % GDof: total number of degrees of freedom of the problem
49 % displacements
50 disp('Displacements')
51 jj = 1:GDof; format
52 [jj' displacements]
53 % reactions
54 F = stiffness*displacements;
55 reactions = F(prescribedDof);
56 disp('reactions')
57 [prescribedDof reactions]
58 end

```

Os principais parâmetros do sistema estão na linha 10 (onde é definido os nós de cada elemento), linha 14 (onde se especifica o número de nós - 4), linha 23 (onde é atribuído a f_2 uma força de 10 N) e linha 35 (onde se insere os nós com restrição ao movimento linear - nós 1, 3 e 4).

O resultado da simulação do algoritmo 1 é ilustrado na tabela 1. Os dados de saída informam que nos nós 1, 3 e 4 não houve deslocamento e isso faz sentido, já que são nós engastados. Além disso, nesses mesmos nós houve forças de reação de apoio de -3,3333 N, que também estão de acordo ao esperado, já que o somatório das forças de reação tem a mesma magnitude que a força P aplicada no nó 2. Por fim, o nó 2 sofreu um deslocamento de 3,3333 m já que era o único nó livre ao movimento. Esta magnitude de deslocamento é lógica, pois a elasticidade resultante dos elementos conectados a ele é de 3 N/m e a força externa no nó é de 10 N, resultando neste mesmo deslocamento de 3,3333 m. Desta forma, os resultados do modelo de Ferreira e Fantuzzi 2020 estão de acordo com o esperado, dando confiabilidade ao algoritmo. Vale ressaltar que o sentido positivo dos deslocamentos e forças é da esquerda para a direita neste exemplo.

Nós	Deslocamentos (m)	Forças (N)
1	0	-3.3333 (reação)
2	3.3333	P = 10 (externo)
3	0	-3.3333 (reação)
4	0	-3.3333 (reação)

Tabela 1: Resultado do método de elementos finitos de (Ferreira e Fantuzzi 2020).

3.2 Problema 2.1 de (Fish e Belytscho 2007)

O mesmo algoritmo de elementos finitos desenvolvido por Ferreira e Fantuzzi 2020 e apresentado no *listing* 1, será implementado para encontrar os deslocamentos e forças de reação dos nós no sistema da figura 4, presente no problema 2.1 da literatura de (Fish e Belytscho 2007).

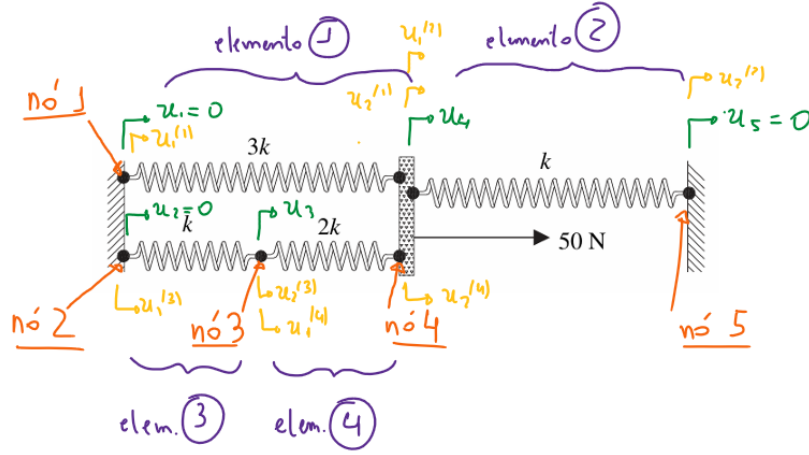


Figura 4: Problema com 4 elementos e 5 nós.

No problema ilustrado, o nó 4 recebe uma força externa de 50 N fazendo os nós 3 e 4 serem deslocados. Enquanto isso, os outros nós permanecem sem deslocamento pois estão engastados, entretanto, espera-se que surjam forças de reação de apoio nos nós fixos por conta da força externa de 50 N. Nota-se que os elementos de barra, aproximados por molas, tem uma elasticidade própria. Neste sentido, o elemento 1 possui elasticidade de $3k$, já o 2 e 3 possuem elasticidades iguais a k , enquanto que o 4º elemento possui elasticidade de $2k$.

Na figura 4, ainda é possível notar a representação dos deslocamentos globais (em verde) e dos locais (em amarelo), seguindo a mesma metodologia apresentada para a definição do alongamento de um elemento de barra na equação 1, já as forças globais e locais podem ser visualizadas na figura 5. Os deslocamentos e forças locais e globais foram completamente detalhados para que o método da rigidez pudesse ser calculado manualmente e então comparar a matriz de rigidez encontrada pelo cálculo manual à matriz de rigidez calculada no algoritmo de (Ferreira e Fantuzzi 2020), a fim de verificar a confiabilidade dos resultados da simulação de elementos finitos. O cálculo para a matriz de rigidez K utilizando o método da rigidez do problema abordado nesta subseção pode ser visualizado nas figuras 9 e 10 presentes no Apêndice A.

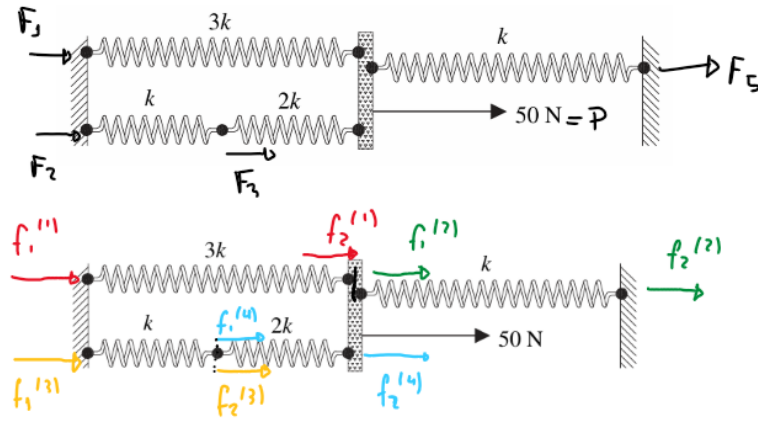


Figura 5: Forças globais (em preto) e locais (em diferentes cores para cada nó).

Os resultados da tabela 2 foram obtidos a partir da implementação do código exposto no *listing 2* do Apêndice A, em que foi necessário modificar o cálculo da matriz rigidez no código para compensar a elasticidade tripla do elemento 1 e dupla do elemento 4. A tabela revela que no nó 4 foi empregada a força externa de 50 N e isso gerou algumas forças de reação na direção contrária nos nós 1, 2 e 5, já que eles eram os nós com restrição ao movimento (engastados). O nó 3 não possui nenhuma força vinculada a ele pois ele está livre ao movimento, não surgindo forças de reação.

Um importante ponto para verificar a confiabilidade dos dados da simulação é realizar o somatório de forças do sistema. Como o método da rigidez parte do pressuposto de que o sistema está em equilíbrio, esse somatório deve resultar em zero: $-32.1429 - 7.1429 + 0 + 50 - 10.7143 = 0$. Assim, os resultados simulados fazem sentido do ponto de vista das forças de reação.

Em relação aos deslocamentos, é importante perceber que nos nós engastados não houve deslocamento. Entretanto, os nós livres 3 e 4 sofreram deslocamento na mesma direção de aplicação da força $P = 50$ N. Além disso, o nó 4, que recebeu diretamente a força P , sofreu maior deslocamento que o nó 3. Estas observações, mais uma vez corroboram à confiabilidade dos resultados, pois elas têm sentido físico.

Nós	Deslocamentos (m)	Forças (N)
1	0	-32.1429 (reação)
2	0	-7.1429 (reação)
3	7.1429	0
4	10.7143	50 (externo)
5	0	-10.7143 (reação)

Tabela 2: Deslocamentos e forças no problema 2.1 de (Fish e Belytscho 2007).

Uma última etapa para verificar a confiabilidade do sistema seria calcular manualmente a matriz de rigidez K e compará-la à matriz calculada pelo algoritmo. Abaixo é possível verificar ambas, ratificando que para obter K_{algo} é necessário executar o código 2 enquanto que K_{calc} é o resultado do cálculo exibido nas figuras 9 e 10 no Apêndice A.

$$\mathbf{K}_{\text{algo.}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{\text{calc.}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Desta forma, o fato de as duas matrizes de rigidez serem iguais traz mais confiabilidade aos resultados expostos na tabela 2. Entretanto, para problemas mais complexos em quantidade de nós e elementos, nem sempre é viável implementar o método da rigidez, como exposto na figura 9, para conferir os resultados da simulação por conta do amplo tempo de cálculo manual. Então, em sistemas complexos, é necessário realizar averiguações persistentes dos dados inseridos pelo usuário em um algoritmo de elementos finitos confiável a fim de evitar erros na simulação.

3.3 Problema 2.5, parte a), de (Fish e Belytscho 2007)

O próximo problema a ser solucionado utilizando o algoritmo de elementos finitos de (Ferreira e Fantuzzi 2020) está ilustrado na figura 6. Nela, há 4 elementos de barra aproximados por molas ideais com elasticidade $k^{(1)} = k^{(2)} = k^{(3)} = k^{(4)} = 1 \text{ N/m}$ e há 5 nós que ligam estes elementos, em que são atribuídos os deslocamentos u_1, u_2, u_3, u_4 e u_5 e as forças f_1, f_2, f_3, f_4 e f_5 para os nós 1, 2, 3, 4 e 5, respectivamente.

Além dos deslocamentos e forças globais, também são representados os deslocamentos e forças locais de cada elemento na figura 6 para poder implementar manualmente o método da rigidez, a fim de conferir os resultados. Tanto o algoritmo implementado nesta seção quanto os cálculos manuais do método da rigidez para o problema 2.5, parte a), de (Fish e Belytscho 2007) podem ser conferidos no Apêndice B, a partir do *listing* 3 e na figura 11, respectivamente.

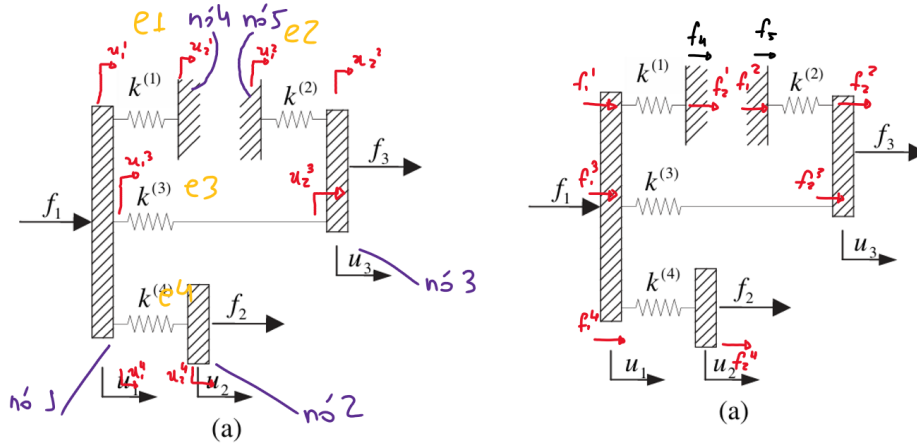


Figura 6: Problema 2.5 a) de (Fish e Belytscho 2007), com elementos e nós declarados.

Os resultados da simulação de elementos finitos, feitos pelo código presente no *listing* 3, estão expostos na tabela 3. Nela, são evidenciados os deslocamentos e forças presentes em

cada nó. O autor escolheu aplicar uma força externa de 10 N ao nó 1 e como consequência, houve forças de reação de apoio contrárias nos nós 4 e 5. Vale ressaltar que o somatório da magnitude dessas reações de apoio é igual à magnitude da força externa, dando uma ideia inicial de que o resultado encontrado é válido. Os nós 4 e 5 têm limitação ao movimento, então faz sentido haver reações de apoio neles. Em relação aos outros nós (1, 2 e 3), eles não têm restrição ao movimento e o resultado da simulação presente na tabela 3 atribui um deslocamento positivo de 6,667, 6,667 e 3,333 metros para cada um deles, respectivamente. Analisando os nós 1 e 2, vemos que eles têm o maior deslocamento. Isso faz sentido, porque o nó 1 recebe diretamente a força externa e o nó 2 está ligado diretamente ao nó 1, sem apresentar qualquer força contrária ao movimento do subsistema composto pelo nó 1, elemento 4 e nó 2 (em um sistema aberto). Já o nó 3 apresenta menor deslocamento porque a força aplicada no nó 1 passa pelo elemento 3, que é um elemento dissipador.

Nós	Deslocamentos (m)	Forças (N)
1	6.6667	10 (externo)
2	6.6667	0
3	3.3333	0
4	0	-6.6667 (reação)
5	0	-3.3333 (reação)

Tabela 3: Deslocamentos e forças no problema 2.5 a) de (Fish e Belytscho 2007).

Embora os resultados apresentados na tabela 3 pareçam ser confiáveis, ainda é possível conferir um fator importante no cálculo das forças e deslocamentos dos nós: a matriz de rigidez K . Desta forma, mais uma vez, a matriz de rigidez do algoritmo é representada por $K_{algo.}$, enquanto a matriz calculada manualmente através do método da rigidez é representada por $K_{calc.}$. O cálculo do método da rigidez para o problema 2.5, parte a), de (Fish e Belytscho 2007) está exposto na figura 11 do Apêndice B.

$$\mathbf{K}_{algo.} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{calc.} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, como $K_{algo.} = K_{calc.}$, os resultados presentes na tabela 3 são "duplamente" confiáveis.

3.4 Problema 2.5, parte b), de (Fish e Belytscho 2007)

O sistema exposto na figura 7 também foi simulado, através do código de elementos finitos do *listing* 4 (Apêndice C). Trata-se de um sistema com 5 nós, em que somente o nó 5 é fixo, e há 6 elementos. O autor arbitrou uma força $f_4 = 10$ N que age no nó 4 e avaliou os deslocamentos e forças de reação exibidos na tabela 4 como resultado da simulação. Vale ressaltar que as forças e deslocamentos locais de cada elemento também

estão presentes no sistema da figura 7 para facilitar o entendimento do cálculo manual, que emprega o método da rigidez, presente na figura 12 do Apêndice C.

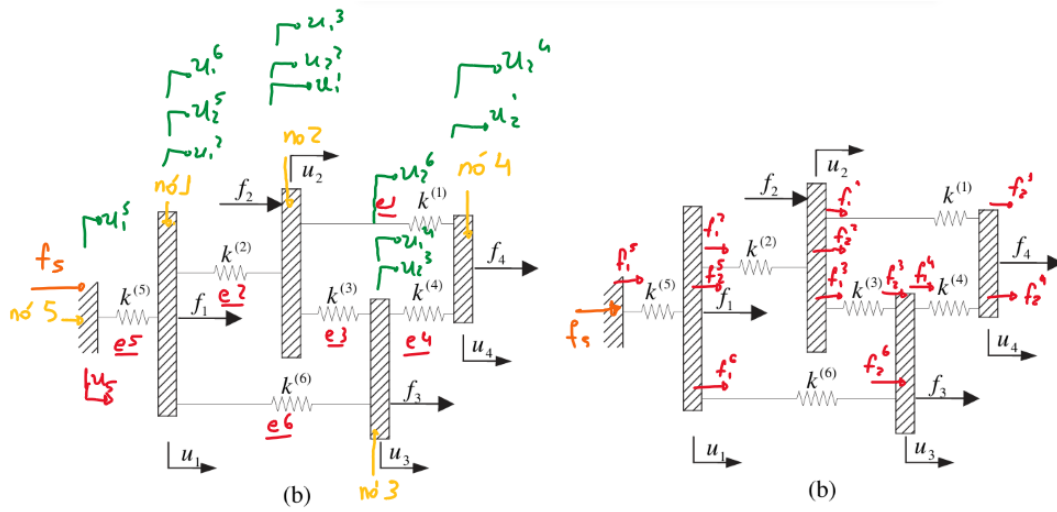


Figura 7: Problema 2.5 b) de (Fish e Belytscho 2007), com elementos e nós declarados.

Avaliando os resultados presentes na tabela 4, é possível ver que a força externa de 10 N do nó 4 gerou uma força de reação de apoio no nó 5 de magnitude idêntica, mas sentido contrário. Além disso, como o nó 5 é fixo, ele não possui deslocamento. O mesmo não ocorre com os outros nós livres, já que houve deslocamento de 10, 15, 15 e 20 metros no nós 1, 2, 3 e 4. O maior deslocamento ocorreu no nó 4, seguido dos deslocamentos dos nós 3 e 2 que estavam separados por um elemento (cada), enquanto que o nó 1 teve menor deslocamento já que estava separado por mais elementos até o nó de aplicação da força externa.

Nós	Deslocamentos (m)	Forças (N)
1	10	0
2	15	0
3	15	0
4	20	10 (externo)
5	0	-10 (reação)

Tabela 4: Deslocamentos e forças no problema 2.5 b) de (Fish e Belytscho 2007).

Comparando as matrizes abaixo, obtidas na implementação do algoritmo e no cálculo manual do método da rigidez (figura 12 do Apêndice C), vemos que elas são idênticas. Isso atribui maior confiabilidade aos resultados da simulação, uma vez que os dados de entrada do código do *listing* 4 foram bem inseridos e revisados.

$$\mathbf{K}_{\text{algo.}} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{\text{calc.}} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, os resultados da simulação presentes na tabela 4 têm grande confiabilidade.

3.5 Exemplo de aplicação criado pelo autor

O sistema criado pelo autor trata-se de uma aproximação grosseira da plataforma de um automóvel, visível na figura 8. Há 6 nós que interligam 5 elementos, em que os nós 1 e 3 representam o pavimento (sendo nós engastados), os nós 2 e 4 representam o centro das rodas do automóvel, o nó 5 faz alusão à plataforma e o nó 6 representa o conjunto poltrona-passageiro do automóvel. Em relação aos elementos de barra aproximados por molas ideais, $e1$ e $e3$ referem-se aos pneus, $e2$ e $e4$ representam a suspensão do carro e $e5$ representa a interface entre a poltrona e a plataforma. Além disso, no sistema global, é atribuído a cada nó uma força f_i e deslocamento u_i , em que $i = 1, 2, \dots, 6$.

Há somente uma carga aplicada no sistema: f_6 , que age no nó 6, representando o peso do conjunto poltrona-passageiro. Além disso, há dois deslocamentos nulos: u_1 e u_3 , nos nós engastados 1 e 3 que representam o pavimento.

Ademais, uma boa escolha do parâmetro de rigidez dos elementos é importante para uma melhor representação do automóvel. Tendo isso em vista, foram escolhidas as seguintes elasticidades comumente usadas na indústria automotiva: $k_1 = k_3 = 100000 \text{ N/m}$ (para os pneus), $k_2 = k_4 = 30000 \text{ N/m}$ (para a suspensão), $k_5 = 10000 \text{ N/m}$ (para as poltronas). Como cada elemento tem rigidez diferente de 1 N/m , o cálculo da matriz rigidez K precisou ser levemente modificado no código do *listing* 5 (linhas 34 a 57).

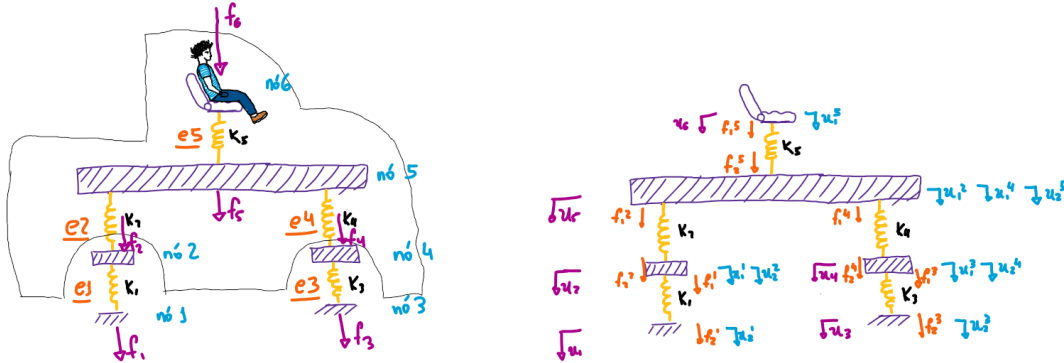


Figura 8: Exemplo de aplicação criado pelo autor, com elementos e nós declarados.

O resultado da simulação está disposto na tabela 5, em que os deslocamentos e forças globais são mostrados em função de um dos 6 nós. A força externa de 1000 N no nó 6 resultou em duas forças de reação com sentido contrário nos nós 1 e 3, com magnitude de 500 N . Esse resultado já era esperado, já que o sistema é simétrico e os nós 1 e 3 são os únicos nós fixos. Por conta dessa limitação de movimento, eles possuem deslocamento nulo. O nó que possui maior deslocamento é o 6, sendo transladado $12,17 \text{ cm}$. Na prática, isso representa uma compressão do material da poltrona quando alguém se senta. Em seguida, o nó 5, que é a plataforma do carro, foi transladado $2,17 \text{ cm}$ para baixo. Por fim, o centro das rodas (representado pelos nós 2 e 4) foi rebaixado 5 mm . Vale ressaltar

que esses componentes foram todos rebaixados por conta da inserção de um passageiro no veículo. Além disso, as magnitudes de deslocamento não são exorbitantes e se aproximam bastante de um caso real.

Nós	Deslocamentos (m)	Forças (N)
1	0	-500 (reação)
2	0.0050	0
3	0	-500 (reação)
4	0.0050	0
5	0.0217	0
6	0.1217	1000 (externo)

Tabela 5: Deslocamentos e forças no exemplo de aplicação criado pelo autor.

Finalmente, ao comparar as matrizes geradas na execução do algoritmo (*listing* 5 no Apêndice D) e no resultado dos cálculos manuais do método da rigidez para o problema (figura 13), percebe-se que elas são idênticas, pois $k_1 = k_3 = 100000 \text{ N/m}$, $k_2 = k_4 = 30000 \text{ N/m}$ e $k_5 = 10000 \text{ N/m}$. Assim, isso é um fator que corrobora à confiabilidade da simulação.

$$\mathbf{K}_{\text{algo.}} = \begin{bmatrix} 100000 & -100000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -100000 & 130000 & 0 & 0 & -30000 & 0 \\ 0 & 0 & 100000 & -100000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -100000 & 130000 & -30000 & 0 \\ 0 & -30000 & 0 & -30000 & 70000 & -10000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10000 & 10000 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{\text{calc.}} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & 0 & 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & -k_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & -k_4 & k_2 + k_4 + k_5 & -k_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_5 & k_5 \end{bmatrix}$$

4 Conclusão

Portanto, partir da análise dos resultados das simulações usando o algoritmo de (Ferreira e Fantuzzi 2020) e dos resultados dos cálculos manuais usando a metodologia do método da rigidez para os diferentes problemas e exemplos abordados no trabalho, fica evidente a importância do MEF como uma ferramenta poderosa na modelagem e solução de problemas estruturais e físicos. Além disso, a aproximação de estruturas complexas a elementos de barra, que são aproximados por molas ideais, mostrou-se ser uma técnica versátil e simples para a análise rápida e de boa estimativa inicial para diversos sistemas. Como prova disso, os resultados da simulação do exemplo criado pelo autor fortificam essa conclusão, já que apresentam uma estimativa de deslocamento de elementos de automóveis muito próxima ao experienciado no cotidiano.

Referências

Ferreira, Antonio J. M. e Nicholas Fantuzzi (2020). *MATLAB Codes for Finite Element Analysis: Solids and Structures*. 2^a ed. Springer.

Fish, Jacob e Ted Belytscho (2007). *A First Course in Finite Elements*. 1^a ed. John Wiley Sons, Ltd.

Santos, Tiago dos (2025). *Método da Rigidez: Teoria de Barras*. Notas de Aula, UFSM00233 – Elementos Finitos em Mecânica dos Sólidos. Disponível apenas para estudantes da disciplina.

A Apêndice do problema 2.1 de (Fish e Belytscho 2007).

Listing 2: Código MATLAB de (Ferreira e Fantuzzi 2020) modificado para o problema 2.1 de (Fish e Belytscho 2007).

```
1 % .....
2 % MATLAB codesfor FiniteElement Analysis
3 % problem1.m
4 % A.J.M. Ferreira,N. Fantuzzi2019
5 %%
6
7 % clear memory
8 clear
9 % elementNodes:connectionsat elements
10 elementNodes= [1 4; 4 5; 2 3; 3 4];
11 % numberElements:numberof Elements
12 numberElements= size(elementNodes,1);
13 % numberNodes:number ofnodes
14 numberNodes= 5;
15 % for structure:
16 % displacements:displacementvector
17 % force: forcevector
18 % stiffness:stiffnessmatrix
19 displacements= zeros(numberNodes,1);
20 force = zeros(numberNodes,1);
21 stiffness =zeros(numberNodes);
22
23 % applied loadat node 4
24 force(4) = 50.0
25
26 % computation of the system stiffness matrix
27 for e = 1:numberElements
28 % elementDof: element degrees of freedom (Dof)
29 elementDof = elementNodes(e,:);
30 if e == 1
31 stiffness(elementDof,elementDof) = ...
32 stiffness(elementDof,elementDof) + [3 -3;-3 3];
33 end
34 if e == 2
35 stiffness(elementDof,elementDof) = ...
36 stiffness(elementDof,elementDof) + [1 -1;-1 1];
37 end
38 if e == 3
39 stiffness(elementDof,elementDof) = ...
40 stiffness(elementDof,elementDof) + [2 -2;-2 2];
41 end
42 if e == 4
43 stiffness(elementDof,elementDof) = ...
44 stiffness(elementDof,elementDof) + [1 -1;-1 1];
45 end
46 end
47
```

```

48 stiffness
49
50 % boundary conditions and solution
51 % prescribed dofs
52 prescribedDof = [1;2;5];
53 % free Dof: activeDof
54 activeDof = setdiff((1:numberNodes)',prescribedDof);
55 % solution
56 displacements(activeDof) = ...
57 stiffness(activeDof,activeDof)\force(activeDof);
58 % output displacements/reactions
59 outputDisplacementsReactions(displacements,stiffness,...
60 numberNodes,prescribedDof)
61
62 function outputDisplacementsReactions...
63 (displacements,stiffness,GDof,prescribedDof)
64 % output of displacements and reactions in tabular form
65 % GDof: total number of degrees of freedom of the problem
66 % displacements
67 disp('Displacements')
68 jj = 1:GDof; format
69 [jj' displacements]
70 % reactions
71 F = stiffness*displacements;
72 reactions = F(prescribedDof);
73 disp('reactions')
74 [prescribedDof reactions]
75 end

```

$$\underline{f} = \underline{K} \underline{a}$$

$$F_1 = f_1^{(1)}, \quad F_2 = f_1^{(3)}, \quad F_3 = f_2^{(2)} + f_3^{(4)}, \quad P = f_2^{(1)} + f_1^{(2)} + f_2^{(4)}, \quad F_5 = f_2^{(2)}$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ P \\ F_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_3^{(3)} \\ f_1^{(3)} \\ f_2^{(2)} + f_3^{(4)} \\ f_2^{(1)} + f_1^{(2)} + f_2^{(4)} \\ f_2^{(2)} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_1^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ f_2^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix}}_{e_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_1^{(2)} \\ f_1^{(1)} \end{bmatrix}}_{e_2} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ f_1^{(1)} \\ f_2^{(2)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{e_3} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_1^{(4)} \\ f_2^{(4)} \\ 0 \end{bmatrix}}_{e_4}$$

$$\begin{bmatrix} f_1^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ f_2^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{K}^{(1)} \begin{bmatrix} u_1^{(1)} \\ 0 \\ u_1^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \end{bmatrix} = \underline{K}^{(2)} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{K}^{(3)} \begin{bmatrix} 0 \\ u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_1^{(4)} \\ f_2^{(4)} \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{K}^{(4)} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_1^{(4)} \\ u_2^{(4)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Figura 9: Cálculos do método da rigidez atribuídos ao problema 2.1 de (Fish e Belytscho 2007).

$$\begin{aligned}
u_1 &= u_1^{(1)} \quad u_2 = u_1^{(3)} \quad u_3 = u_2^{(3)} = u_1^{(4)} \quad u_4 = u_2^{(1)} = u_1^{(2)} = u_2^{(4)} \quad u_5 = u_1^{(2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ P \\ F_5 \end{bmatrix} = K^{(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \\ 0 \\ u_2^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} + K^{(2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_2^{(1)} \\ u_5 \end{bmatrix} + K^{(3)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_2^{(3)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + K^{(4)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1^{(4)} \\ u_2^{(4)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ P \\ F_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K^{(1)} & 0 & 0 & -K^{(1)} & 0 \\ 0 & K^{(2)} & -K^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & -K^{(3)} & K^{(3)} + K^{(4)} & -K^{(4)} & 0 \\ -K^{(1)} & 0 & -K^{(4)} & K^{(1)} + K^{(4)} + K^{(2)} & -K^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & -K^{(2)} & K^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_2^{(3)} + u_1^{(4)} = u_3 \\ u_2^{(1)} + u_1^{(2)} + u_2^{(4)} = u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ P \\ F_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3K & 0 & 0 & -3K & 0 \\ 0 & K & -K & 0 & 0 \\ 0 & -K & K + 2K & -2K & 0 \\ -3K & 0 & -2K & 3K + 2K + K & -K \\ 0 & 0 & 0 & -K & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ P \\ F_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_1^{(3)} \\ f_2^{(3)} + f_1^{(4)} \\ f_2^{(1)} + f_1^{(2)} + f_2^{(4)} \\ f_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3K & 0 & 0 & -3K & 0 \\ 0 & K & -K & 0 & 0 \\ 0 & -K & 3K & -2K & 0 \\ -3K & 0 & -2K & 6K & -K \\ 0 & 0 & 0 & -K & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}$$

Figura 10: Continuação dos cálculos do método da rigidez atribuídos ao problema 2.1 de (Fish e Belytscho 2007).

B Apêndice do problema 2.5 a) de (Fish e Belytscho 2007).

Listing 3: Código MATLAB de (Ferreira e Fantuzzi 2020) modificado para o problema 2.5 a) de (Fish e Belytscho 2007).

```

1
2 % .....
3 % MATLAB codesfor FiniteElement Analysis
4 % problem1.m
5 % A.J.M. Ferreira,N. Fantuzzi2019
6 %%
7
8 % clear memory
9 clear
10 % elementNodes:connectionsat elements
11 elementNodes= [1 4; 5 3; 1 3; 1 2];
12 % numberElements:numberof Elements
13 numberElements= size(elementNodes,1);
14 % numberNodes:number ofnodes
15 numberNodes= 5;
16 % for structure:
17 % displacements:displacementvector
18 % force: forcevector
19 % stiffness:stiffnessmatrix

```

```

20 displacements= zeros(numberNodes,1);
21 force = zeros(numberNodes,1);
22 stiffness =zeros(numberNodes);
23 % applied load at node 1
24 force(1) = 10.0
25
26 % computation of the system stiffness matrix
27 for e = 1:numberElements
28 % elementDof: element degrees of freedom (Dof)
29 elementDof = elementNodes(e,:);
30 stiffness(elementDof,elementDof) = ...
31 stiffness(elementDof,elementDof) + [1 -1;-1 1];
32 end
33 stiffness
34
35 % boundary conditions and solution
36 % prescribed dofs
37 prescribedDof = [4;5];
38 % free Dof: activeDof
39 activeDof = setdiff((1:numberNodes)',prescribedDof);
40 % solution
41 displacements(activeDof) = ...
42 stiffness(activeDof,activeDof)\force(activeDof);
43 % output displacements/reactions
44 outputDisplacementsReactions(displacements,stiffness,...
45 numberNodes,prescribedDof)
46
47 function outputDisplacementsReactions...
48 (displacements,stiffness,GDof,prescribedDof)
49 % output of displacements and reactions in tabular form
50 % GDof: total number of degrees of freedom of the problem
51 % displacements
52 disp('Displacements')
53 jj = 1:GDof; format
54 [jj' displacements]
55 % reactions
56 F = stiffness*displacements;
57 reactions = F(prescribedDof);
58 disp('reactions')
59 [prescribedDof reactions]
60 end

```


$$\begin{aligned}
f_1 &= f_1^1 + f_1^2 + f_1^3 + f_1^4 \\
f_2 &= f_2^4 \\
f_3 &= f_3^2 + f_3^3 \\
f_4 &= f_4^1 \\
f_5 &= f_5^2
\end{aligned}
\quad
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f_1^1 \\ 0 \\ 0 \\ f_2^1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_2^2 \\ 0 \\ f_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1^3 \\ 0 \\ f_3^3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1^4 \\ f_2^4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\quad
\begin{aligned}
f_2^2 &= K^2(u_2^2 - u_1^2) \\
f_1^2 &= K^2(u_1^2 - u_2^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{bmatrix} = K^1 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ 0 \end{bmatrix} + K^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \\ u_4^2 \\ u_1^3 \end{bmatrix} + K^3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^3 \\ u_2^3 \\ u_3^3 \\ u_4^3 \\ u_5^3 \end{bmatrix} + K^4 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^4 \\ u_2^4 \\ u_3^4 \\ u_4^4 \\ u_5^4 \end{bmatrix}$$

$$u_1 = u_1^1 = u_1^2 = u_1^3 = u_1^4 \quad u_2 = u_2^1 = u_2^2 = u_2^3 = u_2^4 \quad u_3 = u_3^1 = u_3^2 = u_3^3 = u_3^4 \quad u_4 = u_4^1 = u_4^2 = u_4^3 = u_4^4 \quad u_5 = u_5^1 = u_5^2 = u_5^3 = u_5^4$$

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K^1 + K^2 + K^3 & -K^4 & -K^3 & -K^1 & 0 \\ -K^4 & K^4 & 0 & 0 & 0 \\ -K^3 & 0 & K^2 + K^3 & 0 & -K^2 \\ -K^1 & 0 & 0 & K^1 & 0 \\ 0 & 0 & -K^2 & 0 & K^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 = 0 \\ u_5 = 0 \end{bmatrix}$$

$$f_1 = 10, \quad K^1 = K^2 = K^3 = K^4 = 1$$

$$\begin{bmatrix} 10 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 = 0 \\ u_5 = 0 \end{bmatrix}$$

Figura 11: Cálculos do método da rigidez atribuídos ao problema 2.5 a) de (Fish e Belytscho 2007).

C Apêndice do problema 2.5 b) de (Fish e Belytscho 2007).

Listing 4: Código MATLAB de (Ferreira e Fantuzzi 2020) modificado para o problema 2.5 b) de (Fish e Belytscho 2007).

```

1
2 % .....
3 % MATLAB codes for Finite Element Analysis
4 % problem1.m
5 % A.J.M. Ferreira, N. Fantuzzi 2019
6 %%
7
8 % clear memory
9 clear
10 % elementNodes: connections at elements
11 elementNodes = [2 4; 1 2; 2 3; 3 4; 5 1; 1 3];
12 % numberElements: number of Elements
13 numberElements = size(elementNodes, 1);
14 % numberNodes: number of nodes
15 numberNodes = 5;
16 % for structure:
17 % displacements: displacement vector
18 % force: force vector

```

```

19 % stiffness:stiffnessmatrix
20 displacements= zeros(numberNodes,1);
21 force = zeros(numberNodes,1);
22 stiffness =zeros(numberNodes);
23 %k = 1;
24
25 % applied loadat node 4
26 force(4) = 10.0
27
28 % computation of the system stiffness matrix
29 for e = 1:numberElements
30 % elementDof: element degrees of freedom (Dof)
31 elementDof = elementNodes(e,:);
32 stiffness(elementDof,elementDof) = ...
33 stiffness(elementDof,elementDof) + [1 -1;-1 1];
34 end
35 stiffness
36
37 % boundary conditions and solution
38 % prescribed dofs: u5 = 0
39 prescribedDof = [5];
40 % free Dof: activeDof
41 activeDof = setdiff((1:numberNodes)',prescribedDof);
42 % solution
43 displacements(activeDof) = ...
44 stiffness(activeDof,activeDof)\force(activeDof);
45 % output displacements/reactions
46 outputDisplacementsReactions(displacements,stiffness,...
47 numberNodes,prescribedDof)
48
49 function outputDisplacementsReactions...
50 (displacements,stiffness,GDof,prescribedDof)
51 % output of displacements and reactions in tabular form
52 % GDof: total number of degrees of freedom of the problem
53 % displacements
54 disp('Displacements')
55 jj = 1:GDof; format
56 [jj' displacements]
57 % reactions
58 F = stiffness*displacements;
59 reactions = F(prescribedDof);
60 disp('reactions')
61 [prescribedDof reactions]
62 end

```

$$\begin{aligned}
f_1 &= f_1^2 + f_2^5 + f_1^6 \\
f_2 &= f_1^4 + f_2^3 + f_1^3 \\
f_3 &= f_2^3 + f_1^4 + f_2^6 \\
f_4 &= f_2^4 + f_2^4 \\
f_5 &= f_1^5
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_1^1 \\ 0 \\ f_1^1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1^2 \\ f_2^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f_1^3 \\ f_2^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_2^4 \\ f_1^4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_2^5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_1^5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1^6 \\ f_1^6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix} = K_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} + K_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} + K_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} + K_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} + K_5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} + K_6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = u_1^2 = u_2^5 = u_1^6 \quad u_2 = u_1^4 = u_2^3 = u_1^3 \quad u_3 = u_2^3 = u_1^4 = u_2^6 \quad u_4 = u_1^4 = u_2^4 \quad u_5 = u_1^5$$

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_2 + K_5 + K_6 & -K_2 & -K_6 & 0 & -K_5 \\ -K_2 & K_1 + K_2 + K_3 & -K_3 & -K_1 & 0 \\ -K_6 & -K_3 & K_2 + K_4 + K_6 & -K_4 & 0 \\ 0 & -K_1 & K_2 + K_4 + K_6 & K_1 + K_4 & 0 \\ -K_5 & 0 & -K_4 & 0 & K_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = K_5 = K = 1$$

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix}$$

Figura 12: Cálculos do método da rigidez atribuídos ao problema 2.5 b) de (Fish e Belytscho 2007).

D Apêndice do exemplo de aplicação criado pelo autor.

Listing 5: Código MATLAB de (Ferreira e Fantuzzi 2020) modificado para o exemplo de aplicação criado pelo autor.

```

1
2 % .....
3 % MATLAB codesfor FiniteElement Analysis
4 % problem1.m
5 % A.J.M. Ferreira,N. Fantuzzi2019
6 %%
7
8 % clear memory
9 clear
10 % elementNodes:connectionsat elements
11 elementNodes= [2 1; 5 2; 4 3; 5 4; 6 5];
12 % numberElements:numberof Elements
13 numberElements= size(elementNodes,1);
14 % numberNodes:number ofnodes
15 numberNodes= 6;
16 % for structure:
17 % displacements:displacementvector
18 % force: forcevector
19 % stiffness:stiffnessmatrix
20 displacements= zeros(numberNodes,1);

```

```

21 force = zeros(numberNodes,1);
22 stiffness =zeros(numberNodes);
23
24 k1 = 100000;
25 k2 = 30000;
26 k3 = k1;
27 k4 = k2;
28 k5 = 10000;
29
30 % applied load at node 6
31 force(6) = 1000.0
32
33 % computation of the system stiffness matrix
34 for e = 1:numberElements
35 % elementDof: element degrees of freedom (Dof)
36 elementDof = elementNodes(e,:);
37 if e == 1
38 stiffness(elementDof,elementDof) = ...
39 stiffness(elementDof,elementDof) + [k1 -k1;-k1 k1];
40 end
41 if e == 2
42 stiffness(elementDof,elementDof) = ...
43 stiffness(elementDof,elementDof) + [k2 -k2;-k2 k2];
44 end
45 if e == 3
46 stiffness(elementDof,elementDof) = ...
47 stiffness(elementDof,elementDof) + [k3 -k3;-k3 k3];
48 end
49 if e == 4
50 stiffness(elementDof,elementDof) = ...
51 stiffness(elementDof,elementDof) + [k4 -k4;-k4 k4];
52 end
53 if e == 5
54 stiffness(elementDof,elementDof) = ...
55 stiffness(elementDof,elementDof) + [k5 -k5;-k5 k5];
56 end
57 end
58 stiffness
59
60 % boundary conditions and solution
61 % prescribed dofs: u1 = u3 = 0
62 prescribedDof = [1; 3];
63 % free Dof: activeDof
64 activeDof = setdiff((1:numberNodes)',prescribedDof);
65 % solution
66 displacements(activeDof) = ...
67 stiffness(activeDof,activeDof)\force(activeDof);
68 % output displacements/reactions
69 outputDisplacementsReactions(displacements,stiffness,...
70 numberNodes,prescribedDof)
71
72 function outputDisplacementsReactions...
73 (displacements,stiffness,GDof,prescribedDof)
74 % output of displacements and reactions in tabular form
75 % GDof: total number of degrees of freedom of the problem
76 % displacements
77 disp('Displacements')
78 jj = 1:GDof; format
79 [jj' displacements]
80 % reactions

```

```

81 F = stiffness*displacements;
82 reactions = F(prescribedDof);
83 disp('reactions')
84 [prescribedDof reactions]
85 end

```

$$f_1 = f_1^1 \quad f_2 = f_1^1 + f_2^2 \quad f_3 = f_1^3 \quad f_4 = f_1^3 + f_2^4 \quad f_5 = f_1^3 + f_1^4 + f_2^5 \quad f_6 = f_1^5$$

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_1^1 + f_2^2 \\ f_1^3 \\ f_1^3 + f_2^4 \\ f_1^3 + f_1^4 + f_2^5 \\ f_1^5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_1^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ f_2^2 \\ 0 \\ 0 \\ f_1^2 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_1^3 \\ f_2^4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_1^4 \\ f_1^4 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_2^5 \\ f_1^5 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix} = K_1 \begin{Bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + K_2 \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} + K_3 \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + K_4 \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_2 \\ u_4 \\ u_4 \\ 0 \end{Bmatrix} + K_5 \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_5 \\ u_5 \\ u_5 \end{Bmatrix}$$

$$u_1 = u_1^1, \quad u_2 = u_1^1 = u_2^2, \quad u_3 = u_2^2, \quad u_4 = u_1^3 = u_2^4, \quad u_5 = u_1^3 = u_1^4 = u_2^5, \quad u_6 = u_1^5$$

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_1 & K_1 + K_2 & 0 & 0 & -K_2 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 & -K_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K_3 & K_3 + K_4 & -K_4 & 0 \\ 0 & -K_2 & 0 & -K_4 & K_2 + K_4 + K_5 & -K_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -K_5 & K_5 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix}$$

$$K_1 = K_3 = 100.000 \text{ N/m} \quad K_2 = K_4 = 30.000 \text{ N/m} \quad K_5 = 10.000 \text{ N/m} \quad f_0 = 1000 \text{ N}$$

Figura 13: Cálculos do método da rigidez atribuídos ao exemplo de aplicação criado pelo autor.