

Métodos Numéricos: Simulação de Carro Passando por Obstáculo

Universidade Federal de Santa Maria
Dinâmica de Estruturas e Aeroelasticidade - UFSM00228
Davi Lima Mendes dos Santos - 202012282
Professor: Dr. Marcos Daniel de Freitas Awruch

20 de novembro de 2024

Sumário

1	Introdução	2
2	Metodologia	2
2.1	Método Numérico	2
2.2	Simulação do Carro	3
2.3	Modificação do Cenário	4
3	Resultados e Análises	5
3.1	Parte 2	5
3.2	Parte 3	8
4	Conclusão	12

1 Introdução

Este relatório apresenta o estudo realizado no âmbito da disciplina de Dinâmica de Estruturas e Aeroelasticidade, cujo objetivo foi modelar e analisar o comportamento dinâmico de um veículo ao passar por diferentes obstáculos. As etapas incluem a validação de métodos numéricos, simulação do sistema dinâmico, e análise de um cenário modificado. Existem dois obstáculos de formato senoidal representados pela imagem abaixo.

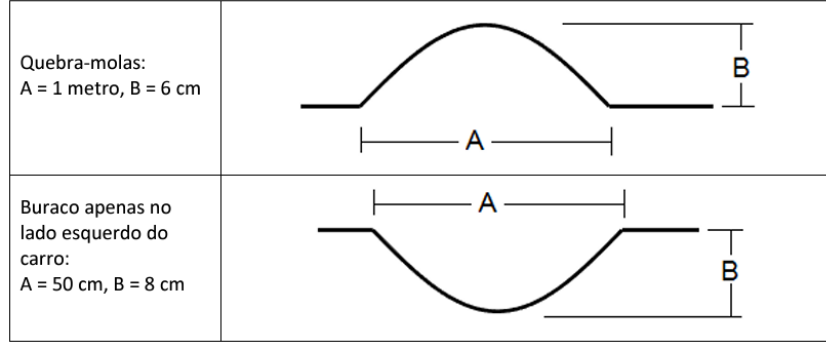


Figura 1: Obstáculos

A seguir, podemos ver o modelo de carro a ser simulado.

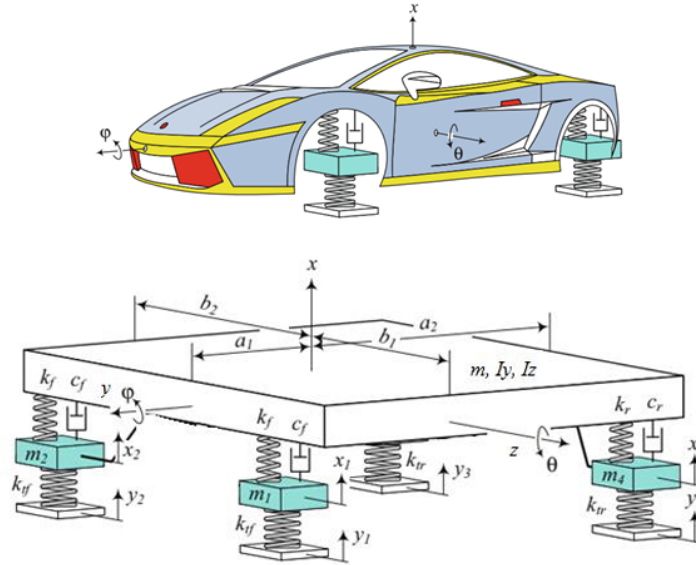


Figura 2: Modelo completo de carro

2 Metodologia

2.1 Método Numérico

Para a realização desse trabalho, foi utilizado o método numérico de Diferenças Finitas Centrais (DFC) para a obtenção do vetor dos graus de liberdade $\mathbf{q} = \{x, \phi, \theta, x_1, x_2, x_3, x_4\}^T$ em diferentes instantes t .

Para empregar o método numérico é necessário ter as matrizes \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} e \mathbf{F} , da equação do movimento:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (1)$$

Em seguida, por meio de um \mathbf{q}_0 , $\dot{\mathbf{q}}_0$ e Δt , é possível seguir a metodologia do método DFC, descrito abaixo.

$$\ddot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{M}^{-1}[\mathbf{F}_0 - \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_0 - \mathbf{K}\mathbf{q}_0] \quad (2)$$

$$\mathbf{q}_{-1} = \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{\mathbf{q}}_0 - \Delta t\dot{\mathbf{q}}_0 + \mathbf{q}_0 \quad (3)$$

$$\mathbf{q}_{i+1} = \left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t}\mathbf{C} \right)^{-1} \left(\mathbf{F}_i - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2}\mathbf{M} \right) \mathbf{q}_i - \left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t}\mathbf{C} \right) \mathbf{q}_{i-1} \right) \quad (4)$$

2.2 Simulação do Carro

Por meio da análise da figura 2, foram equacionadas as expressões das energias cinética (T), potencial (V) e dissipativa (D).

$$T = \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_Y\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}I_Z\dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2 + \frac{1}{2}m_4\dot{x}_4^2$$

$$V = \frac{1}{2}k_{tf}(x_1 - y_1)^2 + \frac{1}{2}k_{tf}(x_2 - y_2)^2 + \frac{1}{2}k_{tr}(x_3 - y_3)^2 + \frac{1}{2}k_{tr}(x_4 - y_4)^2 +$$

$$\frac{1}{2}k_f(x - x_1 + b_1\varphi - a_1\theta)^2 + \frac{1}{2}k_f(x - x_2 - b_2\varphi - a_1\theta)^2 +$$

$$\frac{1}{2}k_r(x - x_3 - b_2\varphi + a_2\theta)^2 + \frac{1}{2}k_r(x - x_4 + b_1\varphi + a_2\theta)^2$$

$$D = \frac{1}{2}c_f(-\dot{x}_1 + \dot{x} + b_1\dot{\varphi} - a_1\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}c_f(-\dot{x}_2 + \dot{x} - b_2\dot{\varphi} - a_1\dot{\theta})^2 +$$

$$\frac{1}{2}c_r(-\dot{x}_3 + \dot{x} - b_2\dot{\varphi} + a_2\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}c_r(-\dot{x}_4 + \dot{x} + b_1\dot{\varphi} + a_2\dot{\theta})^2$$

Aplicando essas expressões de T , V e D na equação de Lagrange, foram derivadas as matrizes \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} e \mathbf{F} , da equação 1.

```

1  M = [m, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
2      0, Iy, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
3      0, 0, Iz, 0, 0, 0, 0, 0;
4      0, 0, 0, m1, 0, 0, 0, 0;
5      0, 0, 0, 0, m2, 0, 0, 0;
6      0, 0, 0, 0, 0, m3, 0, 0;
7      0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, m4]
8
9  C = [2*cf+2*cr, b1*cf-b2*cf-b2*cr+b1*cr, -a1*cf-a1*cf+a2*cr+a2*cr, -cf, -cf,
10     ↪ -cr, -cr;
11     cf*b1-cf*b2-cr*b2+cr*b1, b1^2*cf+b2^2*cf+b2^2*cr+b1^2*cr,
12     ↪ -a1*b1*cf+a1*b2*cf-a2*b2*cr+a2*b1*cr, -b1*cf, b2*cf, b2*cr, -b1*cr;
13     -cf*a1-cf*a1+cr*a2+cr*a2, -a1*b1*cf+a1*b2*cf-a2*b2*cr+a2*b1*cr,
14     ↪ 2*a1^2*cf+2*a2^2*cr, a1*cf, a1*cf, -a2*cr, -a2*cr;
15     -cf, -b1*cf, a1*cf, cf, 0, 0, 0, 0;
16     -cf, b2*cf, a1*cf, 0, cf, 0, 0, 0;

```

```

14      -cr, b2*cr, -a2*cr, 0, 0, cr, 0;
15      -cr, -b1*cr, -a2*cr, 0, 0, 0, cr]
16
17      K = [2*kf+2*kr, b1*kf-b2*kf-b2*kr+b1*kr, -2*a1*kf+2*a2*kr, -kf, -kf, -kr,
18      ↪ -kr;
19      b1*kf-b2*kf-b2*kr+b1*kr, b1^2*(kf+kr)+b2^2*(kf+kr),
20      ↪ kf*(-a1*b1+a1*b2)+kr*(-a2*b2+a2*b1), -b1*kf, b2*kf, b2*kr, -b1*kr;
21      -a1*kf-a1*kf+a2*kr+a2*kr, kf*(-a1*b1+a1*b2)+kr*(-a2*b2+a2*b1),
22      ↪ 2*a1^2*kf+2*a2^2*kr, a1*kf, a1*kf, -a2*kr, -a2*kr;
23      -kf, -b1*kf, a1*kf, ktf+kf, 0, 0, 0;
24      -kf, b2*kf, a1*kf, 0, ktf+kf, 0, 0;
25      -kr, b2*kr, -a2*kr, 0, 0, ktr+kr, 0;
26      -kr, -b1*kr, -a2*kr, 0, 0, 0, ktr+kr]
27
28      F = [0;
29      0;
30      0;
31      y1*ktf;
32      y2*ktf;
33      y3*ktr;
34      y4*ktr];

```

Em relação aos obstáculos da figura 2, o quebra molas é aplicado a todas as rodas e o buraco é considerado somente do lado esquerdo do carro, levando em conta que a velocidade de deslocamento é de 30km/h, a_1 vale 1,4m e a_2 vale 1,47m. Além disso, a distância D ao obstáculo considerada é fixa em 10m em relação às rodas dianteiras. Outros importantes parâmetros do sistema para a realização da análise estão declarado em Freitas Awruch 2024.

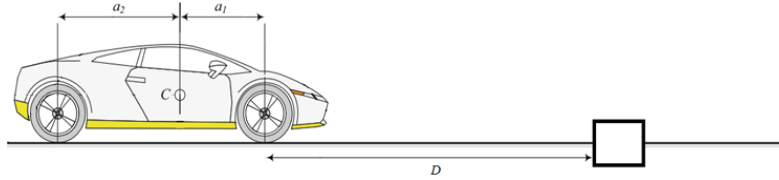


Figura 3: Visão lateral direita do sistema

2.3 Modificação do Cenário

Na parte 3, explicada em Freitas Awruch 2024, uma situação diferente da parte 2 foi simulada, em que os seguintes parâmetros foram modificados:

- $A1 = 3m$;
- $A2 = 2m$.

Nota-se que o tamanho horizontal dos obstáculos foram aumentados, pois o autor considerou que a função seno para representar o formato dos obstáculos na parte 2 se aproximava muito de um impulso. Isso porque os obstáculos eram muito curtos para a velocidade com a qual o carro translada. Além disso, outros parâmetros foram modificados:

- $\zeta = 0,1$;
- $m = 1000kg$.

Na parte 2, o autor considerou que a resposta transitória dos graus de liberdade estava muito rápida. Em consequência, o coeficiente ζ foi diminuído visando ter uma dissipação menor de forças nos amortecedores. Com isso, a resposta transitória se alonga permitindo uma melhor visualização dos graus de liberdade $\mathbf{q} = \{x, \phi, \theta, x_1, x_2, x_3, x_4\}^T$ no tempo. Além disso, a massa da plataforma do carro foi aumentada para 1000kg visando uma maior inércia dos movimentos da plataforma, que também poderia aumentar o tempo da resposta transitória de \mathbf{q} .

3 Resultados e Análises

3.1 Parte 2

Abaixo estão os resultados das simulações da Parte 2, apenas para fins de comparação com os resultados apresentados no tópico da Parte 3. As figuras abaixo não serão discutidas.

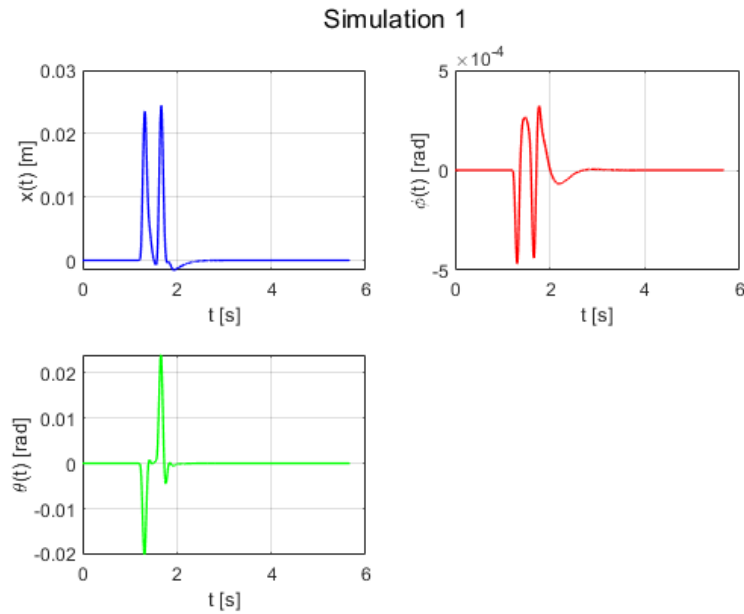


Figura 4: Simulação 1: x , φ e θ .

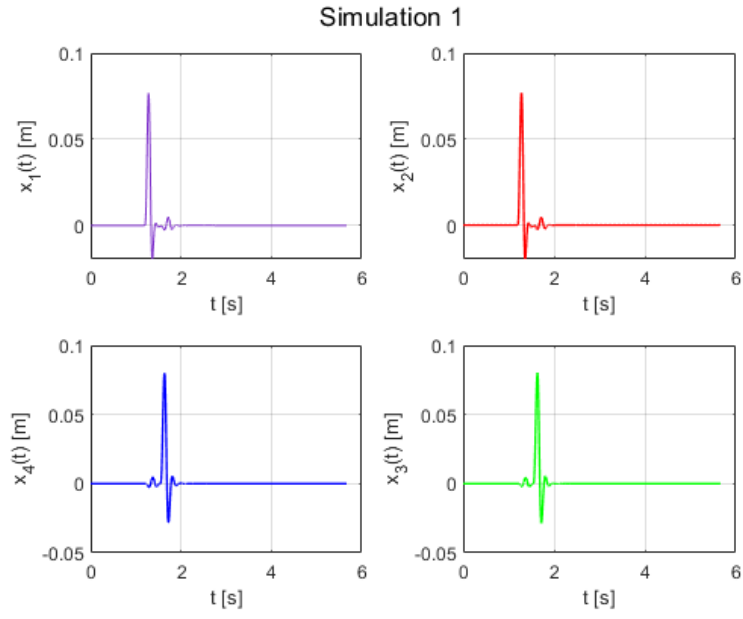


Figura 5: Simulação 1: x_1 , x_2 , x_3 e x_4 .

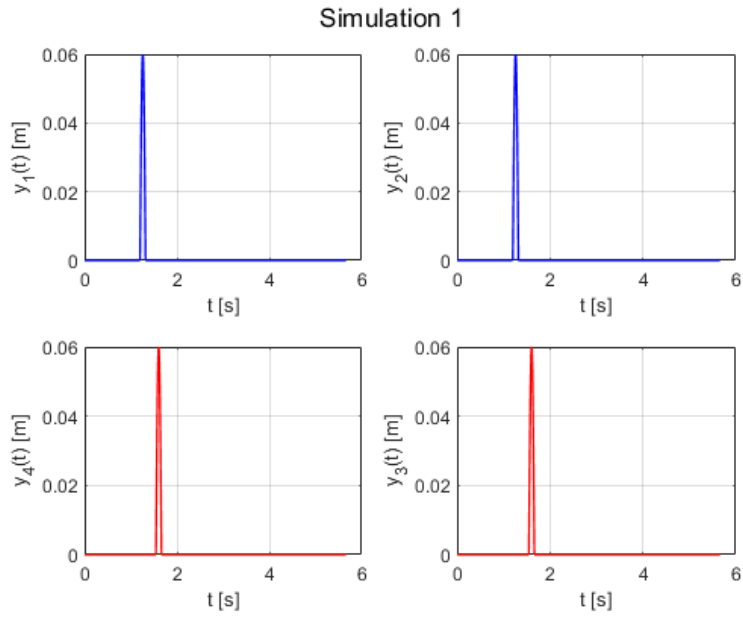


Figura 6: Simulação 1: y_1 , y_2 , y_3 e y_4 .

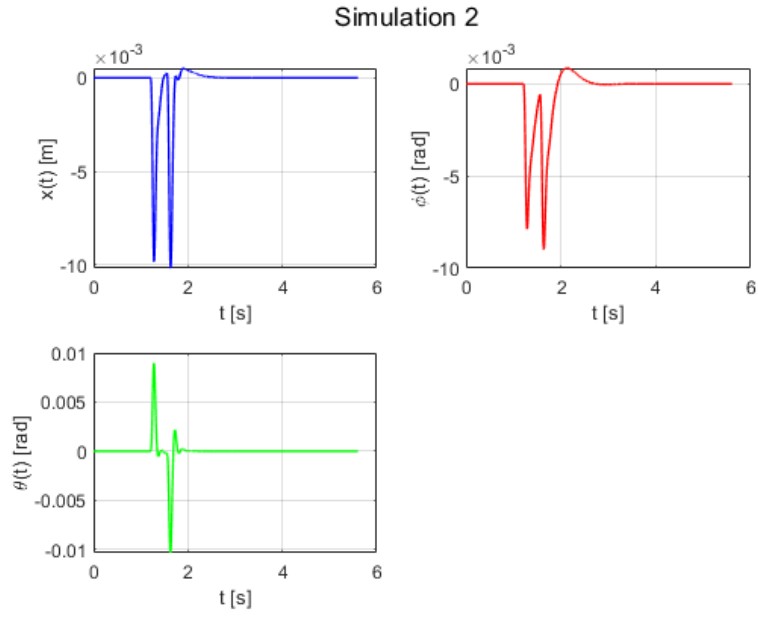


Figura 7: Simulação 2: x , φ e θ .

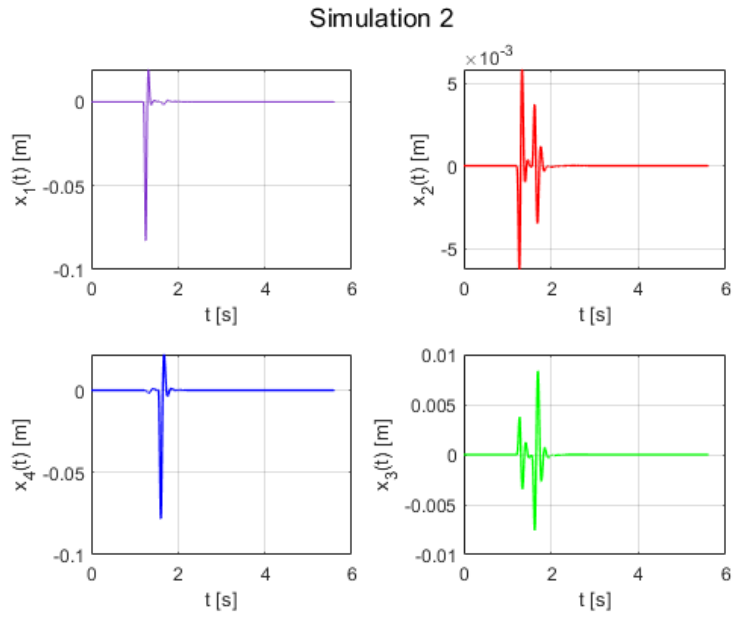


Figura 8: Simulação 2: x_1 , x_2 , x_3 e x_4 .

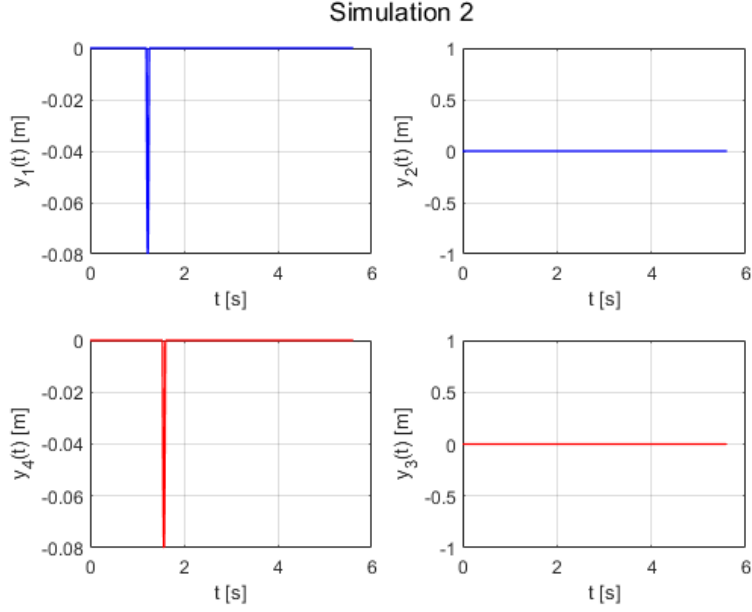


Figura 9: Simulação 2: y_1 , y_2 , y_3 e y_4 .

3.2 Parte 3

Abaixo estão os gráficos da resposta do carro ao quebra-molas (simulação 1) gerados após a modificação de $A1$, $A2$, ζ e m .

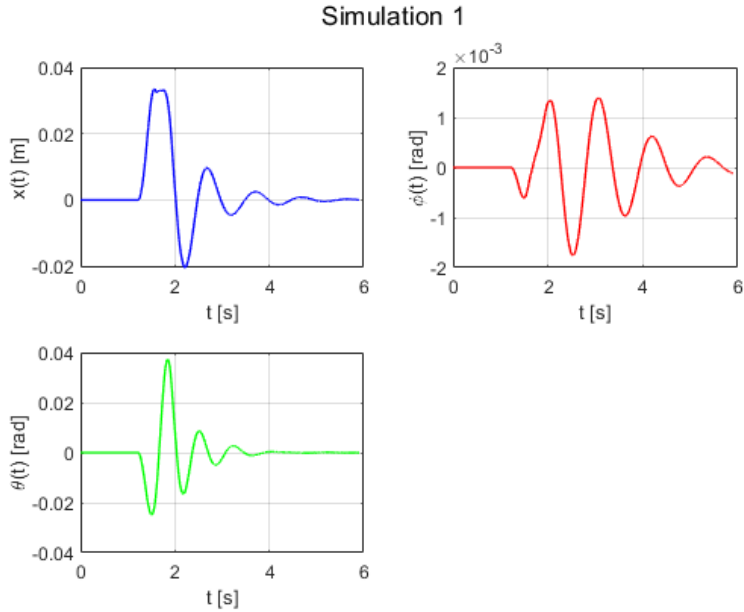


Figura 10: Simulação 1: x , φ e θ .

A figura 10 tem muitas diferenças em relação ao resultado da figura 4. A resposta antiga de x apresenta dois picos, enquanto a nova resposta apresenta um único pico alongado seguido de oscilações configurando uma resposta transitória até convergir a zero. A nova resposta de x não tem mais dois picos porque o obstáculo aumentou de tamanho. Nesse sentido, a roda dianteira provoca uma elevação em x ao passar pelo obstáculo, que tem $A1 = 3$ m de comprimento. Como a distância entre as rodas é de $a1 + a2 = 2,87$ m, a roda traseira também eleva x antes da roda dianteira voltar a altura nula, pois a distância

entre as rodas é menor que o comprimento do obstáculo. Isso provoca uma variação mais lenta em x e também gera um "platô" no pico da primeira oscilação. Em seguida, x entra em uma resposta oscilatória que leva mais de 2 segundos até convergir a zero. Isso se deve ao fato de que o amortecimento do carro foi reduzido, provocando uma estabilização mais demorada do movimento da plataforma. Além disso, a massa da plataforma também foi aumentada, contribuindo à inércia do movimento da plataforma. Isso pode alongar o movimento oscilatório no tempo e também diminuir a amplitude das oscilações. Analisando as figuras 10 e 4, percebe-se que após o aumento de massa, a amplitude máxima de x de fato diminuiu.

O ângulo φ na figura 10 deveria ser nulo em todo o instante de tempo, pois há equilíbrio de momentum entre as rodas esquerdas e direitas. Entretanto, vemos que rigorosamente isso não ocorre na simulação. Na realidade, as oscilações de φ obtidas são aproximadamente zero. O autor entende que este comportamento se deve a erros impostos pelo método numérico DFC.

O ângulo θ na figura 10 tem variação mais demorada e mais oscilatória. A resposta é mais demorada pois a distância entre os eixos do carro é menor que o comprimento do obstáculo, isso gera uma variação lenta do ângulo θ . Além disso, a resposta é mais oscilatória por conta do amortecimento reduzido.

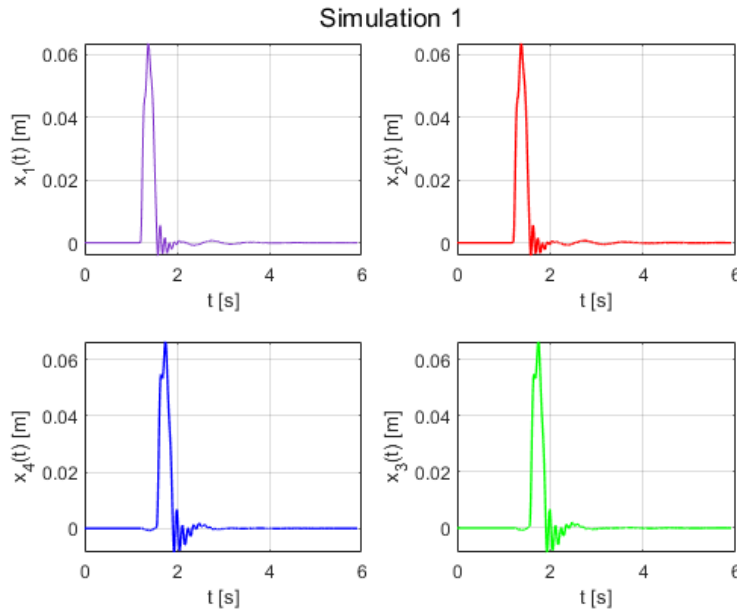


Figura 11: Simulação 1: x_1 , x_2 , x_3 e x_4 .

A figura 11 se difere da 5, uma vez que a resposta transitória de x_1 , x_2 , x_3 e x_4 é mais lenta já que houve redução de ζ , que diminuiu a capacidade de amortecimento do carro. Com essa redução de amortecimento, x_1 , x_2 , x_3 e x_4 passam a oscilar mais. Além disso, nota-se que o tempo para se chegar na máxima amplitude do movimento é maior que antes e isso se deve à ampliação horizontal do obstáculo. x_1 e x_2 variam ao mesmo tempo pois estão localizados na parte frontal do carro, enquanto x_3 e x_4 estão na parte traseira. Nesse sentido, x_3 e x_4 têm resposta atrasada. Um outro ponto visível é que x_1 e x_2 são ligeiramente mais oscilatórios que x_3 e x_4 . Isso se deve ao fato de que o amortecimento frontal é um pouco menor que o amortecimento traseiro.

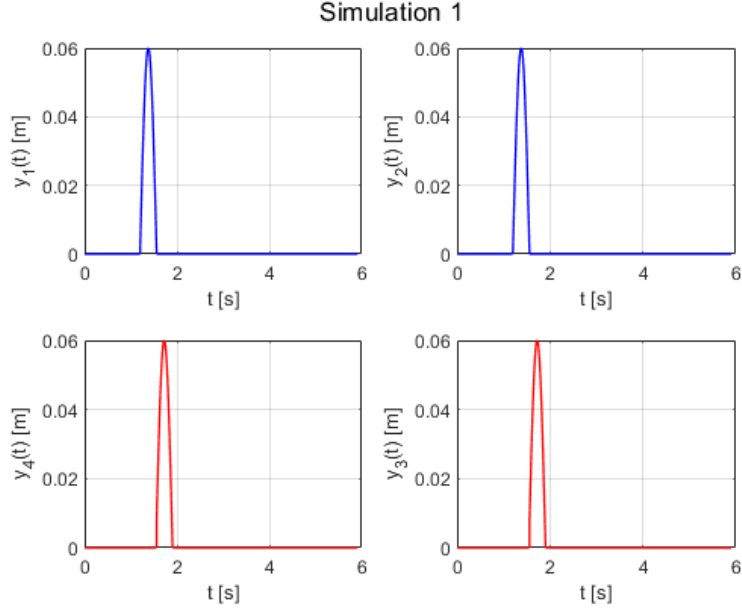


Figura 12: Simulação 1: y_1 , y_2 , y_3 e y_4 .

A figura 12 difere da figura 6 pois tem uma largura maior, já que $A1$ foi aumentado. Isso acaba gerando uma senoide mais longa para a representação do obstáculo, fator que contribuiu para a variação mais lenta de $\mathbf{q} = \{x, \phi, \theta, x_1, x_2, x_3, x_4\}^T$. Além disso, vale ressaltar que y_1 e y_2 variam exatamente ao mesmo tempo, já que são a representação do movimento vertical das rodas frontais. Enquanto isso y_3 e y_4 também variam no mesmo instante de tempo, embora com certo atraso à variação de y_1 e y_2 pois representam as rodas traseiras.

Abaixo estão os gráficos da resposta do carro ao buraco que atua somente nas rodas esquerdas (simulação 2) gerados após a modificação de $A1$, $A2$, ζ e m .

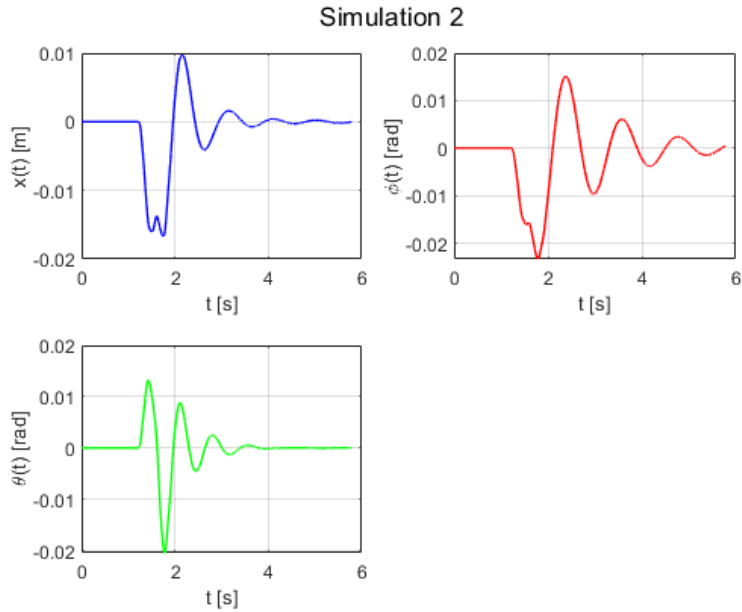


Figura 13: Simulação 2: x , φ e θ .

A figura 13 apresenta um movimento de x diferente da figura 7. Temos uma resposta mais lenta e mais oscilatória por conta do aumento do comprimento do obstáculo e por

conta da redução do amortecimento do sistema. Não temos mais um platô como na figura 10 pois a distância entre os eixos do carro é maior que o tamanho do obstáculo, mas ocorre uma pequena oscilação próxima à amplitude máxima do movimento. A amplitude máxima de oscilação é negativa pois o obstáculo é um buraco.

Em relação a φ , percebe-se bastante variação já que o obstáculo desestabiliza um lado do carro. O fato das rodas do lado esquerdo sempre estarem em um nível constante faz com que o carro role em torno do eixo y e quando uma das rodas esquerdas passa por dentro do buraco. Novamente vemos uma resposta oscilatória demorada por conta do baixo amortecimento.

θ tem amplitude de oscilação menor já que somente uma das rodas passa pelo obstáculo por vez. Vemos que a maior amplitude de oscilação ocorre no segundo pico pois a primeira roda voltou a $y_1=0$ mas a plataforma segue a inércia do movimento angular, que tende a levar θ a valores negativos. Quando θ se torna negativo, a roda esquerda traseira passa por dentro do buraco, tornando θ ainda mais negativo. Após isso, ocorre uma resposta oscilatória lenta por conta do baixo amortecimento.

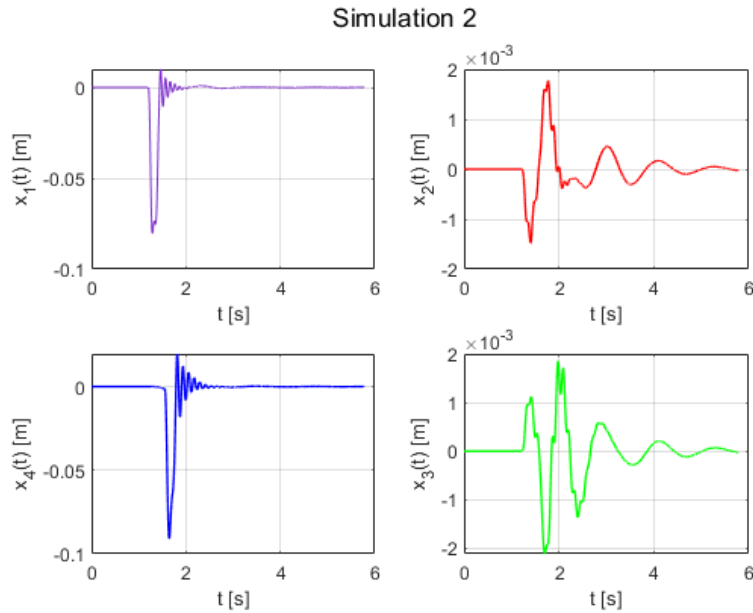


Figura 14: Simulação 2: x_1 , x_2 , x_3 e x_4 .

A figura 14 mostra que x_2 e x_3 são aproximadamente nulos, pois não passam pelo obstáculo, mas sofrem com a variação φ . Por isso, eles têm gráficos parecidos ao gráfico de φ após 3 segundos. Já x_1 e x_4 passam pelo obstáculo em intervalos de tempo diferentes. Essas variáveis possuem uma resposta transitória mais lenta que a resposta da figura 8 por conta do baixo amortecimento.

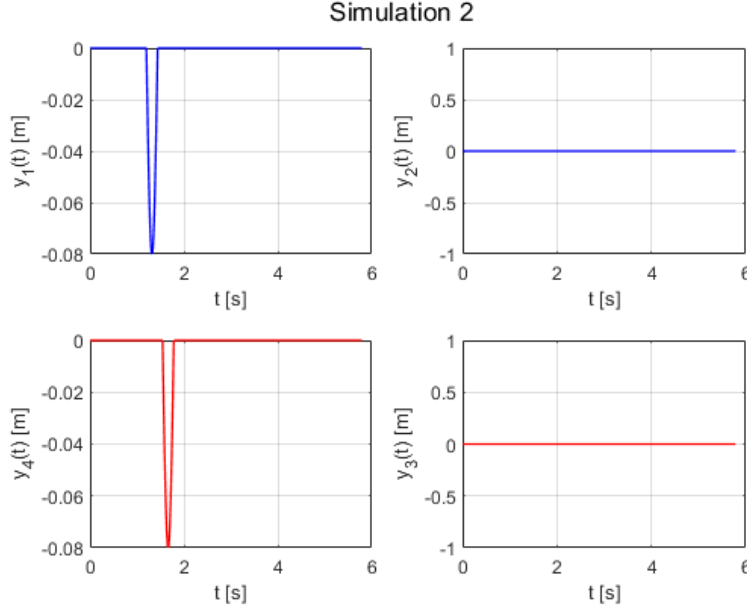


Figura 15: Simulação 2: y_1 , y_2 , y_3 e y_4 .

A figura 15 mostra o movimento induzido nas rodas esquerdas dianteira (y_1) e traseira (y_4). Similarmente à simulação 1, como o tamanho do obstáculo foi aumentado, a largura da senoide também aumenta e acaba contribuindo a uma resposta mais lenta de $\mathbf{q} = \{x, \phi, \theta, x_1, x_2, x_3, x_4\}^T$. Vale ressaltar que y_4 está atrasado em relação a y_1 já que existe uma distância não nula entre as rodas dianteira e traseira. y_2 e y_3 permanecem inalterados porque as rodas do lado direito do carro não passam pelo obstáculo.

4 Conclusão

Neste trabalho, foi analisado o comportamento dinâmico de um veículo ao atravessar diferentes tipos de obstáculos, utilizando o método numérico de Diferenças Finitas Centrais (DFC). A simulação demonstrou a eficácia do modelo em prever a resposta dos graus de liberdade do sistema, permitindo observar os efeitos das modificações nos parâmetros, como o amortecimento, a massa e o comprimento do obstáculo.

Ao modificar parâmetros como o amortecimento (ζ) e a massa (m), verificou-se uma resposta mais lenta e oscilatória do sistema, o que evidenciou a importância dessas variáveis na dinâmica do veículo. A ampliação dos obstáculos também alterou o comportamento do sistema, destacando o impacto do comprimento do obstáculo na forma da resposta.

Referências

Freitas Awruch, Marcos Daniel de (2024). *Trabalho – Métodos Numéricos: simulação de carro passando por obstáculo*. Nota de Aula. Disponível apenas para estudantes da disciplina.