CAMBIO DE VARIABLES EN LA INTEGRAL DOBLE.

17. Sea $D^* = [0,1] \times [0,1]$ y se define $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ como $T(u,v) = (-u^2 + 4u, v)$. Encontrar $D = T(D^*)$. ¿Es T inyectiva?

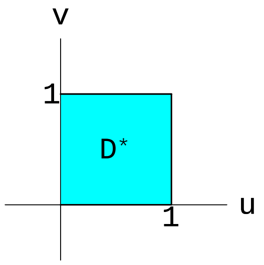
Solución

Cada una de las componentes $x = -u^2 + 4u$, $y = v$, es función de una sola variable. Para ver que T es inyectiva, basta comprobar que lo son cada una de las componentes.

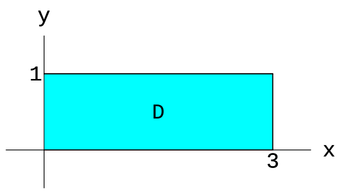
Ahora bien, la función $y = v$ es la identidad, que es evidentemente inyectiva. Además, si $0 \leq v \leq 1$, entonces $0 \leq y \leq 1$.

Por otra parte, la función $x = -u^2 + 4u = -u(u-4)$ corresponde a una parábola de vértice el punto $(2,4)$ y que corta al eje u en los puntos $(0,0)$ y $(4,0)$. Como el dominio está restringido al intervalo $u \in [0,1]$, la función es inyectiva y la imagen del intervalo $[0,1]$ es el intervalo $x \in [0,3]$.

En la figura siguiente se ilustra el comportamiento de la función T.



$\xrightarrow{T}$

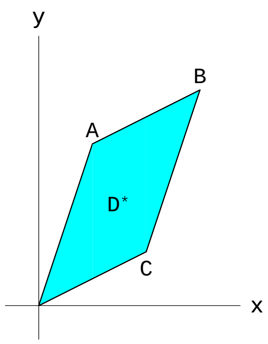


---

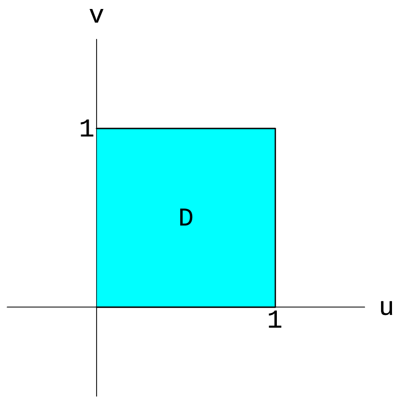
18. Sea D^* el paralelogramo limitado por las rectas $y = 3x - 4$, $y = 3x$, $y = x/2$, $y = x/2 + 2$. Sea $D = [0,1] \times [0,1]$. Encontrar $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(D^*) = D$.

Solución

En la figura se muestran los paralelogramos D^* y D (donde $A = (4/5, 12/5), B = (12/5, 16/5), C = (8/5, 4/5)$):



$\xrightarrow{T}$



Como la aplicación buscada transforma un paralelogramo en otro, debe ser una transformación lineal, del tipo

$$\begin{aligned} u &= ax + by + m \\ v &= cx + dy + n. \end{aligned}$$

Debido a que ambos paralelogramos pasan por el origen, podemos hacer $T(0,0) = (0,0)$, de modo que $m = n = 0$.

Teniendo en cuenta que los vértices de un paralelogramo se aplican en los vértices del otro, podemos establecer las relaciones:

$$T(8/5, 4/5) = (1,0) \implies \begin{cases} 8a/5 + 4b/5 = 1 \\ 8c/5 + 4d/5 = 0 \end{cases}$$

$$T(12/5, 16/5) = (1,1) \implies \begin{cases} 12a/5 + 16b/5 = 1 \\ 12c/5 + 16d/5 = 1 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema resultante, se obtienen los valores $a = 3/4$, $b = -1/4$, $c = -1/4$ y $d = 1/2$. La transformación buscada tiene por ecuaciones

$$u = \frac{3x - y}{4}, \quad v = \frac{-x + 2y}{4}.$$

---

19. Una región R del plano XY está limitada por las rectas $x + y = 6$, $x - y = 2$ e $y = 0$.

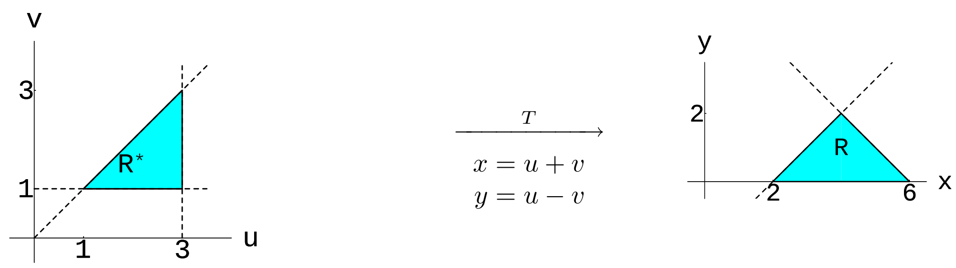
a) Determinar la región R^* del plano UV en que se aplica R por la transformación $x = u + v$, $y = u - v$.

b) Calcular el jacobiano de la transformación $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

c) Comparar el resultado de b) con la relación entre las áreas de R y R^*.

Solución

La gráfica siguiente muestra las regiones R y R^*:



a) La región R sombreada en la parte derecha de la figura es un triángulo limitado por las rectas dadas. Mediante la transformación dada, la recta $x + y = 6$ se transforma en $(u + v) + (u - v) = 6$, es decir la recta $u = 3$. Análogamente, la recta $x - y = 2$ se transforma en $(u + v) - (u - v) = 2$ o bien la recta $v = 1$. De la misma manera el eje $y = 0$ se convierte en la recta $u = v$. La región transformada R^* es el triángulo de la izquierda en el plano UV.

b) Calculando las derivadas parciales obtenemos directamente

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2.$$

c) El área de la región triangular R es 4, en tanto que la de la región R^* es 2. Luego la relación entre ambas es $4/2 = 2$ que coincide con el valor absoluto del jacobiano. Como el jacobiano es constante (lo que ocurre con las transformaciones lineales), las áreas de cualesquiera regiones R del plano XY son el doble de las áreas de las regiones correspondientes transformadas R^* del plano UV.

---

20. *Una región R del plano XY está limitada por las curvas*

$$x^2 + y^2 = a^2, \;\; x^2 + y^2 = b^2, \;\; x = 0, \;\; y = 0,$$

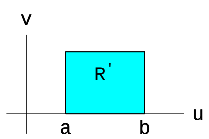
con $0 < a < b$, en el primer cuadrante.

a) Determinar la región R' en la cual se transforma R por la transformación $x = u\cos v, \; y = r \operatorname{sen} v$.

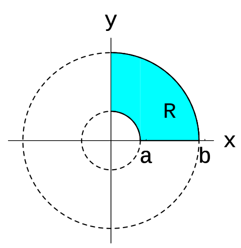
b) Estudiar lo que ocurre si $a = 0$.

c) Calcular $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

Solución



$$\xrightarrow{T} \qquad \begin{array}{l} x = u\cos v \\ y = u \operatorname{sen} v \end{array}$$



a) La región R es la indicada en la figura. Por la transformación dada, las circunferencias $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = b^2$ se convierten en las rectas $u = a$, $u = b$, respectivamente. Asimismo, el segmento $x = 0$ comprendido entre $a \le y \le b$ se convierte en $v = \pi/2$, con $a \le u \le b$ y el segmento $y = 0$, $a \le x \le b$ se transforma en $v = 0$, $a \le u \le b$. En definitiva, la región R' buscada es el rectángulo mostrado en la figura.
Se podía haber razonado también diciendo que, por ser u la distancia desde el origen del plano XY y v el ángulo medido a partir del eje positivo de abscisas, es claro que la región que se busca estará dada por $a \le u \le b$, $0 \le v \le \pi/2$, como se indica en la figura.

b) Si $a = 0$, la región R se convierte en un cuadrante de un región circular de radio b y R' sigue siendo un rectángulo. La razón para esto es que el punto $x = 0$, $y = 0$ se aplica en $u = 0$, $v =$ indeterminada y la transformación no es biunívoca en este punto, llamado por esta razón punto singular.

c) Sustituyendo las derivadas parciales en la matriz obtenemos:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \cos v & -u \operatorname{sen} v \\ \operatorname{sen} v & u \cos v \end{vmatrix} = u(\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v) = u.$$

---

21. Sea $T(u,v) = \big(u, v(1+u)\big)$ y $D^* = [0,1] \times [1,2]$. Encontrar $D = T(D^*)$ y calcular $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$.

Solución

Busquemos las imágenes de los segmentos que forman la frontera de D^*:

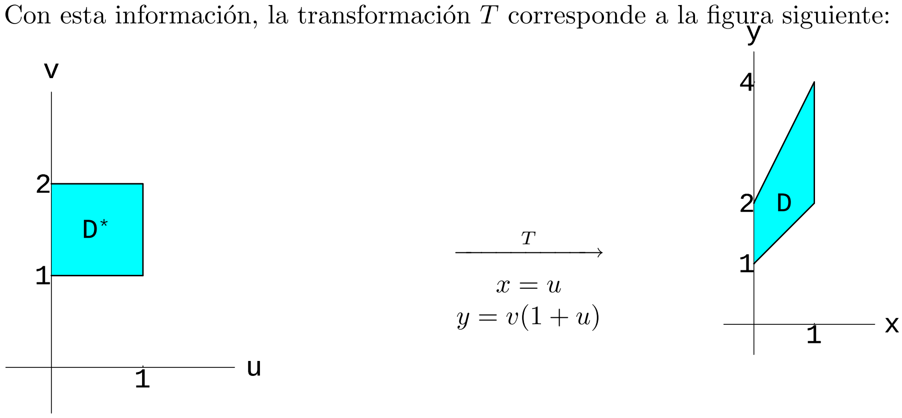
$$\left.\begin{array}{l} v=1 \\ 0 \le u \le 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} x=u \\ y=1+u \\ 0\le x\le 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} y=1+x \\ 0\le x\le 1 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} u=1 \\ 1 \le v \le 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=2v \\ 1\le v\le 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} x=1 \\ 2\le y\le 4 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} v=2 \\ 0 \le u \le 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} x=u \\ y=2(1+u) \\ 0\le x\le 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} y=2+2x \\ 0\le x\le 1 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} u=0 \\ 1 \le v \le 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=v \\ 1\le v\le 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} x=0 \\ 1\le y\le 2 \end{array}\right\}$$

Con esta información, la transformación T corresponde a la figura siguiente:



Para calcular la integral propuesta, podemos aplicar dos métodos:

a) Directamente:

$$\iint_D xy\,dxdy = \int_0^1 x\,dx \int_{x+1}^{2x+2} y\,dy = \int_0^1 x\left(\frac{(2x+2)^2}{2} - \frac{(x+1)^2}{2}\right)dx = \frac{17}{8}.$$

b) Con la fórmula del cambio de variables:

Como $J\left(\dfrac{x,y}{u,v}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & 1+u \end{vmatrix} = 1+u$, entonces

$$I = \int_0^1 du \int_1^2 uv(1+u)^2\,dv = \int_0^1 (u+2u^2+u^3)\,du \cdot \int_1^2 v\,dv = \frac{17}{8}.$$

---

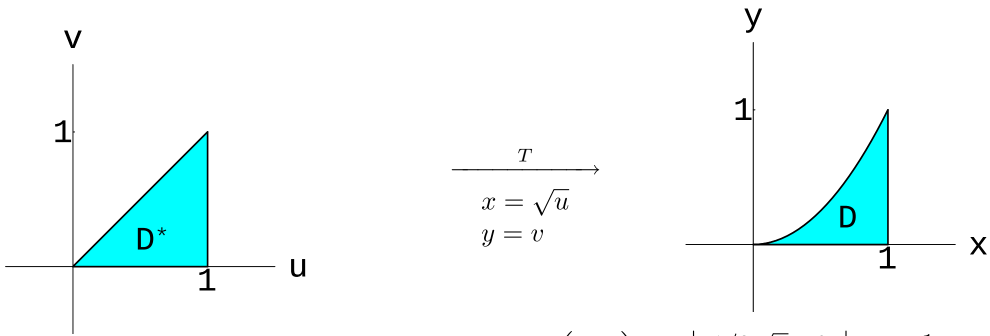
22. *Expresar* $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^{x^2} xy\,dy$ *como una integral sobre el triángulo* $D^* = \{(u,v) : 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le u\}$ *y calcular la integral de las dos formas.*

Solución

Podemos calcular la integral directamente, aplicando el teorema de Fubini:

$$\int_0^1 x\,dx \int_0^{x^2} y\,dy = \int_0^1 x \cdot \frac{x^4}{2}\,dx = \frac{x^6}{12}\Big|_0^1 = \frac{1}{12}.$$

Otro método consiste en hacer el cambio de variables $T(u,v) = (\sqrt{u}, v)$ que transforma el triángulo D^* en la región D, indicada en la figura.



Como el jacobiano de la transformación es $J\left(\dfrac{x,y}{u,v}\right) = \begin{vmatrix} 1/2\sqrt{u} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$, por la fórmula del cambio de variable, tenemos:

$$I = \int_0^1 du \int_0^u \sqrt{u} \cdot v \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}}\,du = \int_0^1 \frac{v^2}{4}\Big|_0^u du = \int_0^1 \frac{u^2}{4}\,du = \frac{1}{12}.$$

---

23. *Cambiar a coordenadas polares la integral* $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$ *en los siguientes casos:*

   i) D *es el círculo:* $x^2+y^2 \le ax,\ a>0$.

   ii) D *es el recinto del primer cuadrante limitado por las curvas:* $x+y=1$ *y* $x^2+y^2 = 1$.

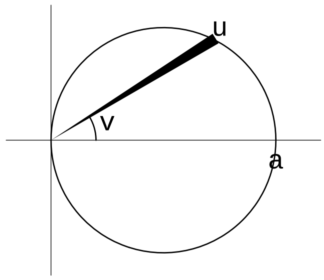
   iii) D *es el cuadrado* $[0,1] \times [0,1]$.

iv) D *es el recinto del primer cuadrante limitado por la curva* $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$.

v) $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le x\}$.

Solución

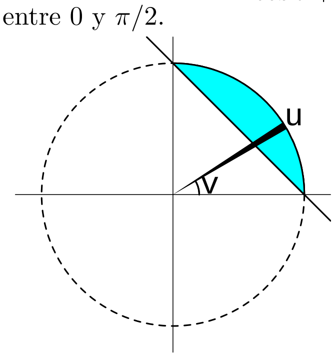
i) Si escribimos la ecuación de la circunferencia en coordenadas polares (haciendo el cambio $x = u\cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$), obtenemos $u^2 = au\cos v$, es decir $u = 0$ ó $u = a\cos v$.



De la gráfica adjunta deducimos que, en coordenadas polares, la región verifica las condiciones $-\pi/2 \le v \le \pi/2$, $0 \le u \le a\cos v$. Así pues, la integral se escribe (teniendo en cuenta el jacobiano de la transformación) como:

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dv \int_0^{a\cos v} u \cdot f(u\cos v, u\operatorname{sen} v)\, du.$$

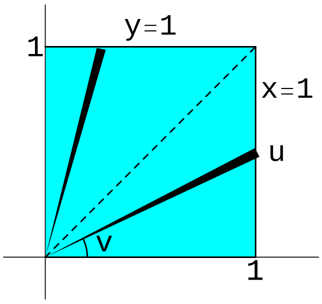
ii) La circunferencia $x^2+y^2 = 1$ se escribe en coordenadas polares como $u = 1$, mientras que la recta $x+y = 1$ tiene por ecuación $u = \dfrac{1}{\cos v + \operatorname{sen} v}$. En el primer cuadrante, el ángulo v está comprendido entre 0 y $\pi/2$.



Con estos datos, la integral se escribe como:

$$I = \int_0^{\pi/2} dv \int_{\frac{1}{\cos v + \operatorname{sen} v}}^{1} u \cdot f(u\cos v, u\operatorname{sen} v)\, du.$$

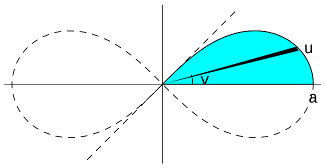
iii) En este caso debemos dividir la región en dos triángulos: el primero de ellos limitado por las rectas $x = y$, $x = 1$ e $y = 0$, lo que en coordenadas polares corresponde a $0 \le v \le \pi/4$, $0 \le u \le 1/\cos v$; el segundo triángulo está limitado por las rectas $x = y$, $y = 1$ y $x = 0$, y su expresión en coordenadas polares está dada por $\pi/4 \le v \le \pi/2$, $0 \le u \le 1/\operatorname{sen} v$.



La integral doble se escribe entonces como:

$$I = \int_0^{\pi/4} dv \int_0^{\frac{1}{\cos v}} u \cdot f(u\cos v, u \operatorname{sen} v)\, du + \int_{\pi/4}^{\pi/2} dv \int_0^{\frac{1}{\operatorname{sen} v}} u \cdot f(u\cos v, u \operatorname{sen} v)\, du.$$

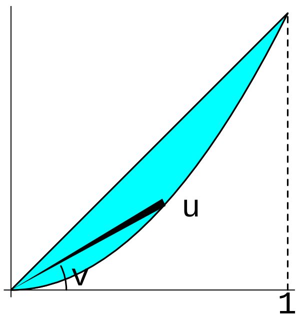
iv) La curva dada es la lemniscata de la figura que, en coordenadas polares, se expresa por la ecuación $u^2 = a^2 \cos 2v$.



En el primer cuadrante, la región está comprendida entre los valores $0 \le v \le \pi/4$, así que la integral se expresa como:

$$I = \int_0^{\pi/4} dv \int_0^{a\sqrt{\cos 2v}} u \cdot f(u\cos v, u \operatorname{sen} v)\, du.$$

v) La ecuación de la parábola $y = x^2$ se expresa en coordenadas polares por $u \operatorname{sen} v = u^2 \cos^2 v$, o bien $u = \operatorname{sen} v / \cos^2 v$.



La región de integración está comprendida entre los valores $v = 0$ y $v = \pi/4$ (correspondiente a la recta $y = x$). Así pues, la integral se expresa así:

$$I = \int_0^{\pi/4} dv \int_0^{\operatorname{sen} v/\cos^2 v} u \cdot f(u\cos v, u \operatorname{sen} v)\, du.$$

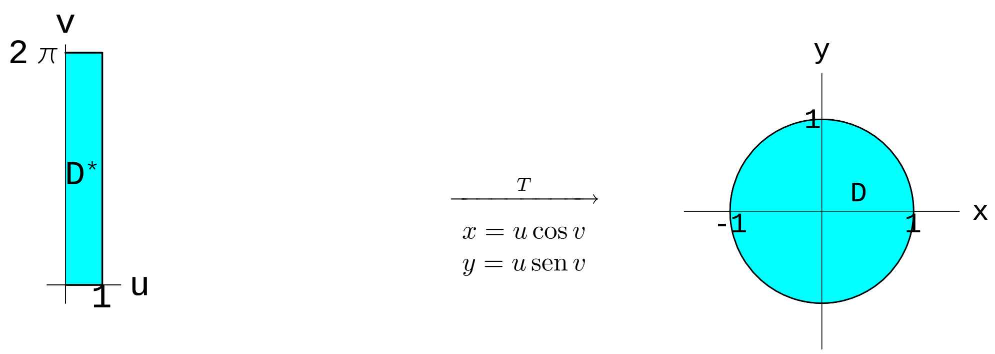
---

24. Sea D el círculo unidad. Expresar $\iint_D (1+x^2+y^2)^{3/2}\,dxdy$ como una integral sobre el rectángulo $[0,1]\times[0,2\pi]$ y calcularla.

Solución

Si aplicamos el cambio a coordenadas polares, dado por las ecuaciones $x = u\cos v$, $y = u\operatorname{sen} v$ (ver figura), y teniendo en cuenta que el jacobiano de la transformación es $J\left(\dfrac{x,y}{u,v}\right) = u$, la integral se puede calcular del modo siguiente:

$$\begin{aligned}\iint_D (1+x^2+y^2)^{3/2}\,dxdy &= \iint_{D^*} u\cdot(1+u^2)^{3/2}\,dudv\\ &= \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 u\cdot(1+u^2)^{3/2}\,du\\ &= \pi\cdot\frac{(1+u^2)^{5/2}}{5/2}\Big|_0^1 = \frac{8\pi\sqrt{2}}{5}.\end{aligned}$$



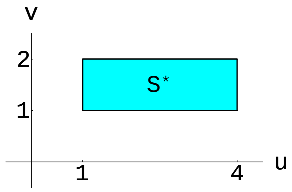
---

25. Si S es la región del primer cuadrante limitada por las curvas $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 4x$, probar que

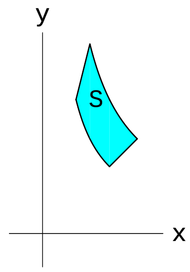
$$\iint_S f(x\cdot y)\,dxdy = \ln 2\int_1^2 f(u)\,du.$$

Solución

La frontera de la región S sugiere realizar el cambio $u = y/x$, $v = yx$, cuya inversa es la transformación $T(u,v) = (\sqrt{v/u}, \sqrt{uv})$, la cual tiene como dominio la región S^* de la figura adjunta.



$$\xrightarrow{T} \qquad \begin{array}{l} x = \sqrt{v/u} \\ y = \sqrt{uv} \end{array}$$



El jacobiano de esta transformación es

$$J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}\cdot u^{-3/2}v^{1/2} & \frac{1}{2}\cdot u^{-1/2}v^{-1/2} \\ \frac{1}{2}\cdot u^{-1/2}v^{1/2} & \frac{1}{2}\cdot u^{1/2}v^{-1/2} \end{vmatrix} = \frac{-1}{2u}.$$

Por la fórmula del cambio de variable, la integral dada se puede escribir como:

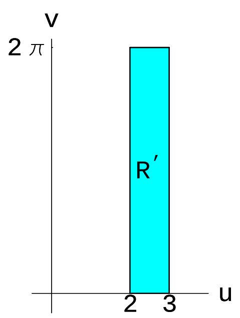
$$\iint_S f(x\cdot y)\,dxdy = \int_1^4 du \int_1^2 \frac{1}{2u}\cdot f(v)\,dv = \frac{1}{2}\ln u\Big|_1^4 \int_1^2 f(v)\,dv = \ln 2\int_1^2 f(v)\,dv.$$

---

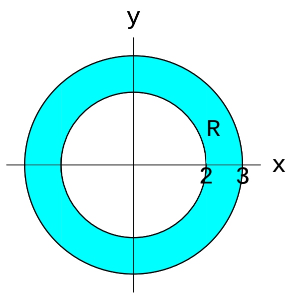
26. Calcular $\iint_R \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ siendo R la región del plano XY limitada por $x^2+y^2=4$ y $x^2+y^2=9$.

Solución

La presencia de x^2+y^2 sugiere el empleo de coordenadas polares (r,ϑ), con $x = r\cos\vartheta$, $y = r\operatorname{sen}\vartheta$. Mediante esta transformación la corona circular R se transforma en el rectángulo R' como se indica en la figura.



$$\xrightarrow{T} \qquad \begin{array}{l} x = u\cos v \\ y = u\operatorname{sen} v \end{array}$$



Debido a que $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\vartheta)} = r$, se tiene:

$$\begin{aligned} A &= \iint_R \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_{R'} r\cdot r\,drd\vartheta = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_2^3 r^2 dr \\ &= \int_0^{2\pi} r^3/3\Big|_2^3 d\vartheta = \frac{38\pi}{3}. \end{aligned}$$

También se podían haber obtenido los límites de integración para R' observando la región R pues, para ϑ fijo, r varía desde $r = 2$ hasta $r = 3$ dentro del sector destacado en la figura. Integrando entonces con respecto a ϑ desde $\vartheta = 0$ hasta $\vartheta = 2\pi$ se obtiene la suma de todos los sectores citados.

---

27. *Calcular* $\displaystyle\iint_D \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$ *sobre la región* D *del primer cuadrante limitada por* $x^2 + y^2 = 9$.

Solución

Pasando la integral a coordenadas polares $\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho \operatorname{sen}\vartheta \end{cases}$, como $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\vartheta)} = \rho$, la integral queda:

$$\iint_D \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy = \int_0^3 \rho^3\,d\rho \int_0^{\pi/2} \cos^3\vartheta\,d\vartheta = \frac{2}{3}\int_0^3 \rho^3\,d\rho = \frac{27}{2}.$$

---

28. *Calcular las siguientes integrales:*

i) $\displaystyle\iint_{\pi^2 \le x^2+y^2 \le 4\pi^2} \operatorname{sen}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy.$

ii) $\displaystyle\iint_D |xy|\,dxdy,$ *donde D es un círculo de radio* a *y con centro en el origen de coordenadas.*

Solución

i) Si escribimos la integral en coordenadas polares, queda de la forma:

$$I = \int_0^{2\pi} dv \int_\pi^{2\pi} u \operatorname{sen} u\,du = -6\pi^2.$$

[Mediante integración por partes se obtiene que $\displaystyle\int u \operatorname{sen} u\,du = \operatorname{sen} u - u\cos u$.]

ii) Escribimos también la integral en coordenadas polares, y resulta:

$$I = \int_0^{2\pi} dv \int_0^a u|u^2 \operatorname{sen} v\cos v|\,du = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |\operatorname{sen} 2v|\,dv \cdot \int_0^a u^3\,du = \frac{a^4}{2}.$$

---

29. *Transformar la siguiente integral doble a coordenadas polares y resolverla:*

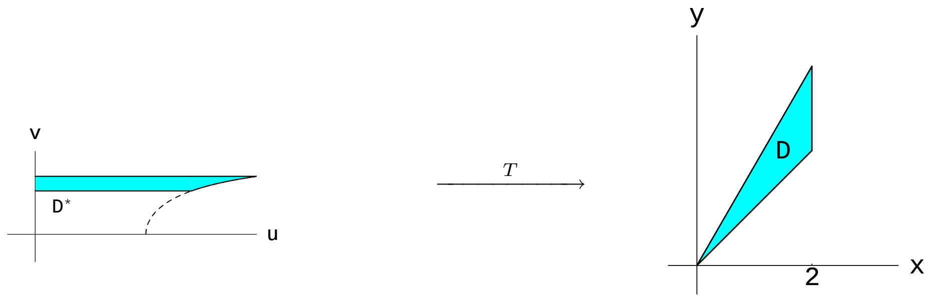
$$\int_0^2 dx \int_x^{x\sqrt{3}} x\,dy.$$

Solución

Calculemos en primer lugar la imagen de cada uno de los lados del triángulo dado mediante la transformación $x = u\cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$:

$$\begin{aligned}
y = x,\ 0 \le x \le 2 &\implies \operatorname{sen} v = \cos v,\ 0 \le u\cos v \le 2 \\
&\implies v = \pi/4,\ 0 \le u \le 2\sqrt{2}; \\
y = x\sqrt{3},\ 0 \le x \le 2 &\implies \operatorname{sen} v = \sqrt{3}\cos v,\ 0 \le u\cos v \le 2 \\
&\implies v = \pi/3,\ 0 \le u \le 4; \\
x = 2,\ 2 \le y \le 2\sqrt{3} &\implies u\cos v = 2,\ 2 \le u \operatorname{sen} v \le 2\sqrt{3} \\
&\implies u = 2\sec v,\ \pi/4 \le v \le \pi/3.
\end{aligned}$$

La representación gráfica de la transformación anterior es la siguiente:



La integral propuesta se resuelve entonces como sigue:

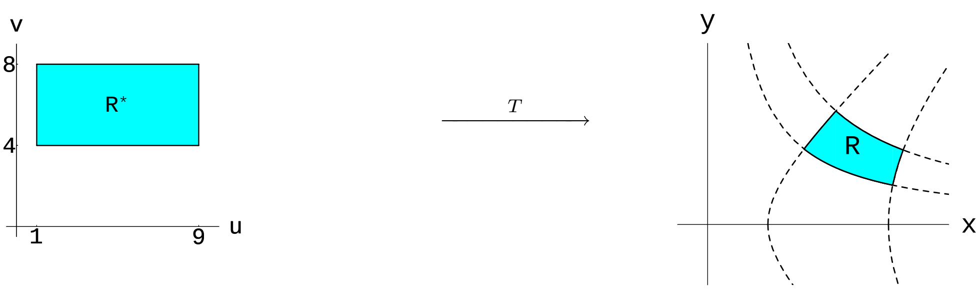
$$I = \int_{\pi/4}^{\pi/3} dv \int_0^{2\sec v} u^2 \cos v \, du = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cos v}{3} \cdot 8\sec^3 v \, dv = \frac{8}{3} \operatorname{tg} v \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{8}{3}(\sqrt{3} - 1).$$

Se deja como ejercicio comprobar que el mismo resultado se obtiene calculando directamente la integral propuesta.

---

30. Hallar $\iint_R (x^2 + y^2)\, dxdy$, donde R es la región del plano XY limitada por las hipérbolas $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 9$, $xy = 2$, $xy = 4$ en el primer cuadrante.

Solución



Aplicando la transformación $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$, la región R del plano XY de la derecha de la figura se transforma en la región R' del plano UV representada en la izquierda de la figura. Vamos a comprobar que dicha transformación es regular.

Debido a que $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2$, es decir $x^2 + y^2 = \sqrt{u^2 + v^2}$, y como $x^2 - y^2 = u$, resulta que $x^2 = \frac{u+\sqrt{u^2+v^2}}{2}$. Al ser $x > 0$, tenemos que $x = \sqrt{\frac{u+\sqrt{u^2+v^2}}{2}}$. Análogamente, tenemos también que $y = \sqrt{\frac{\sqrt{u^2+v^2}-u}{2}}$, lo que prueba que la transformación es inyectiva.

Trivialmente, la transformación es de clase C^1 y además

$$J_T(u,v) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4(x^2 + y^2) \neq 0$$

si $(x, y) \neq (0, 0)$.

Hecha esta comprobación la integral vale entonces

$$\begin{aligned} \iint_R (x^2 + y^2)\, dxdy &= \iint_{R'} (x(u,v)^2 + y(u,v)^2) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv \\ &= \iint_{R'} \sqrt{u^2 + v^2} \frac{dudv}{4\sqrt{u^2 + v^2}} = \frac{1}{4} \int_1^9 du \int_4^8 dv = 8. \end{aligned}$$

Nota. Las coordenadas curvilíneas (u, v) definidas de la forma anterior son las llamadas coordenadas hiperbólicas.

---

31. Calcular $I = \iint_D \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dxdy$ extendida al dominio D interior a la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Solución

Haremos el cambio de variable $\begin{cases} x/a = \rho \cos \vartheta \\ y/b = \rho \operatorname{sen} \vartheta \end{cases}$, con lo que

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\vartheta)} = \begin{vmatrix} a\cos\vartheta & -a\rho \operatorname{sen}\vartheta \\ b \operatorname{sen}\vartheta & b\rho\cos\vartheta \end{vmatrix} = ab\rho.$$

En las nuevas coordenadas, la elipse se escribe como $\rho = 1$. Así pues,

$$I = \iint_{D^*} (1 - \rho^2) ab\rho \, d\rho d\vartheta = ab \int_0^1 (\rho - \rho^3)\, d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta = \frac{\pi ab}{2}.$$

---

32. Hallar $N = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx$.

Solución

Como $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^\infty e^{-y^2} dy$, entonces

$$N^2 = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \cdot \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dxdy.$$

Pasando a coordenadas polares, $x^2 + y^2 = \rho^2$, $dxdy = \rho\, d\rho d\vartheta$, el primer cuadrante $(x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ se transforma en la región $(\rho, \vartheta) \in (0, \infty) \times (0, \pi/2)$. La integral queda entonces:

$$N^2 = \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^\infty e^{-\rho^2} \rho\, d\rho = \int_0^{\pi/2} \left[\lim_{a\to\infty} -\frac{1}{2} e^{-\rho^2} \Big|_0^a \right] d\vartheta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} d\vartheta = \frac{\pi}{4}.$$

En definitiva, $N = \sqrt{\pi}/2$.

---

33. Hallar el área de la región limitada por:

a) Las curvas $y^2 = 2px,\ y^2 = 2qx,\ x^2 = 2ry,\ x^2 = 2sy,\ 0 < p < q,\ 0 < r < s$.

b) La curva $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a\left(x^3 - 3xy^2\right),\ a > 0$.

c) Las curvas $\sqrt{x/a} + \sqrt{y/b} = 1,\ \sqrt{x/a} + \sqrt{y/b} = 2,\ x/a = y/b,\ 4x/a = y/b,\ a, b > 0$.

Solución

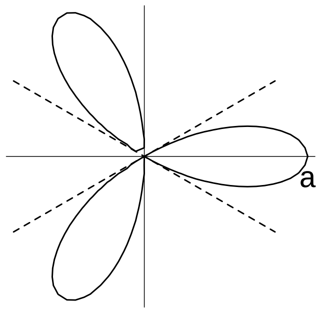
a) La forma de las ecuaciones que limitan la región sugiere realizar el cambio de variables $u = \dfrac{y^2}{2x}$, $v = \dfrac{x^2}{2y}$. De este modo, la región de integración es ahora $D = \{(u, v) : p \le u \le q,\ r \le v \le s\}$. Como

$$J\Big(\frac{u, v}{x, y}\Big) = \begin{vmatrix} -y^2/2x^2 & y/x \\ x/y & -x^2/2y^2 \end{vmatrix} = \frac{-3}{4},$$

entonces $\left|J\Big(\dfrac{x, y}{u, v}\Big)\right| = \dfrac{4}{3}$. El área buscada viene dada por la fórmula

$$A = \int_p^q du \int_r^s \frac{4}{3}\, dv = \frac{4}{3}\,(s - r) \cdot (q - p).$$

b) Debido a la simetría de la región (ver figura), bastará multiplicar por 6 el área de la parte comprendida en el primer cuadrante.



En coordenadas polares, la curva dada tiene por ecuación

$$u = a \cos v(\cos^2 v - 3 \operatorname{sen}^2 v),$$

de modo que el área buscada se calcula por la integral doble

$$\begin{aligned} A &= 6 \int_0^{\pi/6} dv \int_0^{a \cos v(\cos^2 v - 3 \operatorname{sen}^2 v)} u \, du \\ &= 3a^2 \int_0^{\pi/6} \cos^2 v(\cos^2 v - 3 \operatorname{sen}^2 v)^2 \, dv = \frac{a^2 \pi}{4}. \end{aligned}$$

c) Realizaremos la transformación de coordenadas siguiente:

$$u = \frac{\sqrt{y/b}}{\sqrt{x/a}}, \quad v = \sqrt{x/a} + \sqrt{y/b}$$

(dicha transformación es biyectiva porque la región está contenida en el primer cuadrante).

Con esta transformación los nuevos límites de la región son $1 \le u \le 2$, $1 \le v \le 2$. Como la inversa de la transformación es $x = \dfrac{av^2}{(u+1)^2}$, $y = \dfrac{bu^2v^2}{(u+1)^2}$, entonces

$$J\Big(\frac{x, y}{u, v}\Big) = \frac{-4abuv^3}{(u+1)^4},$$

y el área se calcula mediante la integral doble

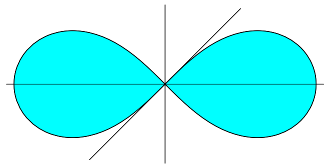
$$A = \int_1^2 du \int_1^2 \frac{4abuv^3}{(u+1)^4} \, dv = \frac{65ab}{108}.$$

---

34. *Hallar el área de la región del plano XY encerrada por la lemniscata $r^2 = a^2 \cos 2\vartheta$.*

Solución

La curva está dada directamente en coordenadas polares (r, ϑ). Dando diferentes valores a ϑ y hallando los correspondientes valores de r se obtiene la gráfica de la figura.



El área buscada (teniendo en cuenta la simetría) se puede calcular así:

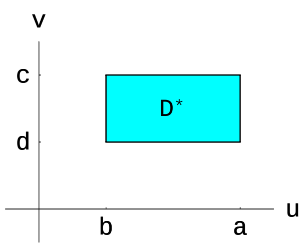
$$\begin{aligned} A &= 4\int_0^{\pi/4} d\vartheta \int_0^{a\sqrt{\cos 2\vartheta}} r\,dr = 4\int_0^{\pi/4} \frac{r^2}{2}\bigg|_0^{a\sqrt{\cos 2\vartheta}} d\vartheta \\ &= 2\int_0^{\pi/4} a^2 \cos 2\vartheta\, d\vartheta = a^2 \operatorname{sen} 2\vartheta\Big|_0^{\pi/4} = a^2. \end{aligned}$$

---

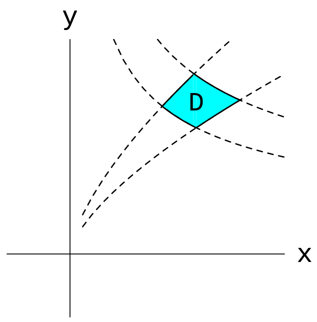
35. Calcular el área del recinto situado en el primer cuadrante limitado por las curvas $y^3 = ax^2$, $y^3 = bx^2$ $(a > b > 0)$, $xy^2 = c$, $xy^2 = d$ $(c > d > 0)$.

Solución

Vamos a efectuar un cambio de variable que transforme la región dada en un rectángulo. Para ello hacemos $u = y^3/x^2$ y $v = xy^2$.



$\xrightarrow{T}$



De este modo,

$$A = \iint_R \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv.$$

Ahora bien, de las ecuaciones $u = y^3/x^2$, $v = xy^2$, resulta:

$$\begin{aligned} x^2 = y^3/u,\ x^2 = v^2/y^4 &\implies y^3/u = v^2/y^4,\ x^2 = v^2/y^4 \\ &\implies y = u^{1/7}v^{2/7},\ x = v/y^2 = u^{-2/7}v^{3/7}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} -\frac{2}{7}u^{-9/7}v^{3/7} & \frac{3}{7}u^{-2/7}v^{-4/7} \\ \frac{1}{7}u^{-6/7}v^{2/7} & \frac{2}{7}u^{1/7}v^{-5/7} \end{vmatrix} = -\frac{1}{7}u^{-8/7}v^{-2/7}.$$

El área pedida se calcula entonces como

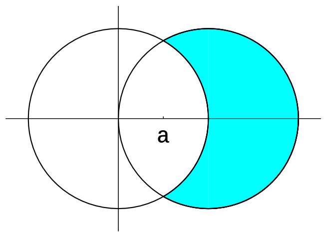
$$\begin{aligned} A &= \int_b^a u^{-8/7}\,du \int_d^c \frac{1}{7} v^{-2/7}\,dv = \frac{1}{7}\left(\frac{u^{-1/7}}{-1/7}\Big|_b^a\right)\cdot\left(\frac{v^{5/7}}{5/7}\Big|_d^c\right) \\ &= -\frac{7}{5}(a^{-1/7}-b^{-1/7})\cdot(c^{5/7}-d^{5/7}). \end{aligned}$$

---

36. *Hallar el área de la región exterior a la circunferencia $\rho = 2a$ e interior a la circunferencia $\rho = 4a\cos\vartheta$.*

Solución

Los puntos de intersección de ambas circunferencias son aquellos en que $\cos\vartheta = 1/2$, es decir $\vartheta = \pm\pi/3$.



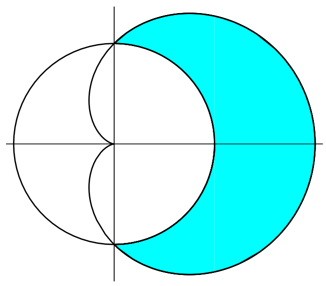
Teniendo en cuenta la simetría de la región, el área viene dada por

$$A = 2\int_0^{\pi/3} d\vartheta \int_{2a}^{4a\cos\vartheta} \rho\,d\rho = \int_0^{\pi/3} [(4a\cos\vartheta)^2 - (2a)^2]\,d\vartheta = \frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{3}\,a^2.$$

---

37. *Hallar el área exterior a la circunferencia $\rho = 2$ e interior a la cardioide $\rho = 2(1 + \cos\vartheta)$.*

Solución



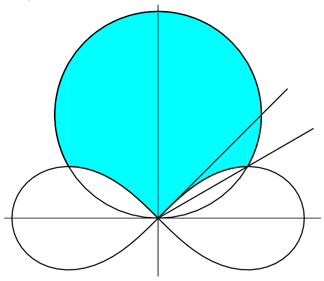
Dada la simetría, el área pedida es igual al doble del área barrida al variar ϑ desde $\vartheta = 0$ hasta $\vartheta = \pi/2$. Así pues,

$$\begin{aligned} A &= 2\int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_2^{2(1+\cos\vartheta)} \rho\,d\rho = 2\int_0^{\pi/2} \frac{\rho^2}{2}\Big|_2^{2(1+\cos\vartheta)} d\vartheta \\ &= 4\int_0^{\pi/2} (2\cos\vartheta + \cos^2\vartheta)d\vartheta = 4(2\operatorname{sen}\vartheta + \vartheta/2 + \operatorname{sen}(2\vartheta)/4)\Big|_0^{\pi/2} = \pi + 8. \end{aligned}$$

38. *Hallar el área interior a la circunferencia* $\rho = 4 \operatorname{sen} \vartheta$ *y exterior a la lemniscata* $\rho^2 = 8 \cos 2\vartheta$.

Solución

El área pedida es igual al doble de la correspondiente en el primer cuadrante limitada por las dos curvas y la recta $\vartheta = \pi/2$.



Los puntos de intersección de ambas curvas se encuentran en la recta $\vartheta = \pi/6$, que se obtiene al resolver la ecuación

$$16 \operatorname{sen}^2 \vartheta = 8 \cos 2\vartheta.$$

Observamos que el arco AO de la lemniscata se genera al variar ϑ desde $\vartheta = \pi/6$ hasta $\vartheta = \pi/4$, mientras que el arco AB de la circunferencia lo hace al variar ϑ desde $\vartheta = \pi/6$ hasta $\vartheta = \pi/2$. Si descomponemos la figura en dos partes, una por debajo y otra por encima de la recta $\vartheta = \pi/4$, el área queda de la forma:

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_{\pi/6}^{\pi/4} d\vartheta \int_{2\sqrt{2\cos 2\vartheta}}^{4 \operatorname{sen} \vartheta} \rho \, d\rho + 2 \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{4 \operatorname{sen} \vartheta} \rho \, d\rho \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/4} (16 \operatorname{sen}^2 \vartheta - 8 \cos 2\vartheta) \, d\vartheta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} 16 \operatorname{sen}^2 \vartheta \, d\vartheta = \frac{8\pi}{3} + 4\sqrt{3} - 4. \end{aligned}$$

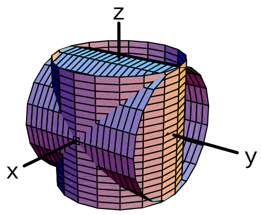
Otro método de resolución consiste en efectuar la diferencia

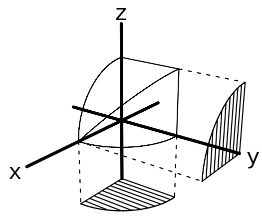
$$A = 2 \int_{\pi/6}^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{4 \operatorname{sen} \vartheta} \rho \, d\rho - \int_{\pi/6}^{\pi/4} d\vartheta \int_0^{\sqrt{8 \cos 2\vartheta}} \rho \, d\rho.$$

39. *Hallar el volumen de la región común a los cilindros* $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + z^2 = a^2$.

Solución

En la figura adjunta se muestran los dos cilindros y la parte de la región correspondiente al primer octante.





De modo que el volumen será

$$V = 8 \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2 - x^2}\, dy = 8 \int_0^a (a^2 - x^2)\, dx = \frac{16a^3}{3}.$$

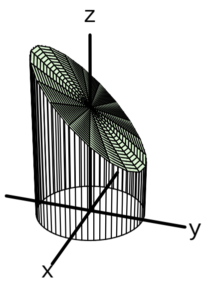
---

40. Hallar el volumen del sólido limitado por el cilindro $x^2+y^2 = 4$ y los planos $y+z = 4$, $z = 0$.

Solución

La proyección del cilindro sobre el plano $z = 0$ es la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, de modo que el volumen viene dado por la fórmula

$$V = \int_{-2}^{2} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (4 - y)\, dx.$$



Nuevamente escribimos la integral en coordenadas polares. Resulta:

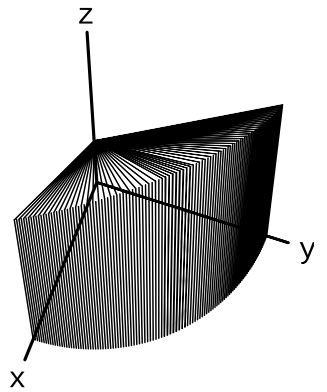
$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} dv \int_0^2 u(4 - u \operatorname{sen} v)\, du \\ &= \int_0^{2\pi} \left(2u^2 - \frac{u^3}{3} \operatorname{sen} v\right)\Big|_0^2 dv = \int_0^{2\pi} \left(8 - \frac{8}{3} \operatorname{sen} v\right) dv = 16\pi. \end{aligned}$$

---

41. Calcular el volumen de la sección situada en el primer octante del sólido limitado por los planos $z = 0$ y $z = x + y + 2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 16$.

Solución

La base del sólido es la región R del plano comprendida en el primer cuadrante y limitado por la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 16$. El plano $z = x + y + 2$ limita dicho sólido en su parte superior.



Así pues, el volumen vendrá dado por:

$$\begin{aligned} V &= \iint_R z(x,y)\,dxdy = \int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{16-x^2}} (x+y+2)\,dy \\ &= \int_0^4 (x\sqrt{16-x^2} + 8 - \frac{x^2}{2} + 2\sqrt{16-x^2})\,dx. \end{aligned}$$

Para evitar resolver la integral de la función irracional $\sqrt{16-x^2}$, podemos escribir la integral doble en coordenadas polares. Así,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} dv \int_0^4 u(u\cos v + u \operatorname{sen} v + 2)\,du \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{u^3}{3}(\cos v + \operatorname{sen} v) + u^2 \Big|_0^4 dv = \frac{64}{3}(\operatorname{sen} v - \cos v) + 16v \Big|_0^{2\pi} = \frac{128}{3} + 8\pi. \end{aligned}$$

---

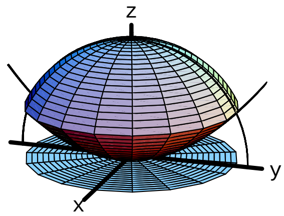
42. Calcular el volumen del sólido limitado superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ e inferiormente por el paraboloide $x^2 + y^2 = 4z$.

Solución

Calculamos en primer lugar los puntos de intersección de la esfera con el paraboloide. Tenemos:

$$\left.\begin{array}{c} x^2+y^2+z^2=5 \\ x^2+y^2=4z \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} z^2+4z-5=0 \\ x^2+y^2=4z \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c} z=1 \\ x^2+y^2=4 \end{array}$$

Tenemos pues la situación de la figura adjunta.



El volumen pedido se halla mediante la fórmula

$$V=\iint_D\Big(\sqrt{5-x^2-y^2}-\frac{x^2+y^2}{4}\Big)\,dxdy,$$

donde D es el círculo $x^2+y^2<4$, que se obtiene como proyección del sólido en el plano XY.

Para resolver la integral, la transformamos a coordenadas polares; en este caso, $D=\{(\rho,\vartheta): 0<\rho<2,\ 0\le\vartheta<2\pi\}$. Entonces:

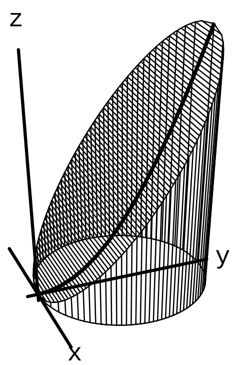
$$V=\int_0^{2\pi}d\vartheta\int_0^2\Big(\sqrt{5-\rho^2}-\frac{\rho^2}{4}\Big)\rho\,d\rho=2\pi\int_0^2\Big(\rho\sqrt{5-\rho^2}-\frac{\rho^3}{4}\Big)\,d\rho=\frac{2\pi(5\sqrt{5}-4)}{3}.$$

---

43. Hallar el volumen limitado por el paraboloide $x^2+y^2=4z$, el cilindro $x^2+y^2=8y$ y el plano $z=0$.

Solución

El volumen pedido se obtiene integrando la función $z=(x^2+y^2)/4$ en el interior del círculo $x^2+y^2=8y$.



En coordenadas cilíndricas, $x = \rho\cos\vartheta$, $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta$, $z = z$, y el volumen se obtiene al integrar $z = \rho^2/4$ en el círculo $\rho = 8\,\mathrm{sen}\,\vartheta$. Por tanto,

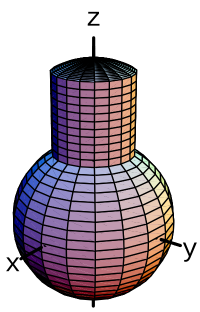
$$V = \iint_R z\,dA = \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{8\,\mathrm{sen}\,\vartheta} z(\rho,\vartheta)\rho\,d\rho = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{8\,\mathrm{sen}\,\vartheta} \rho^3\,d\rho = 96\pi.$$

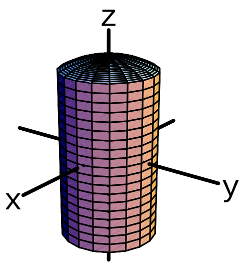
---

44. *Hallar el volumen que se elimina cuando a una esfera de radio $2a$ se le practica un orificio circular de radio a de forma que el eje del orificio sea un diámetro de la esfera.*

Solución

En la primera figura se muestra, desplazada verticalmente, la región que se extrae de la esfera y en la segunda figura la propia región sin la esfera.





De la figura se deduce que el volumen pedido es ocho veces el correspondiente al del primer octante limitado (en coordenadas cilíndricas) por el cilindro $\rho^2 = a^2$, la esfera $\rho^2 + z^2 = 4a^2$ y el plano $z = 0$. Esto se obtiene integrando $z = \sqrt{4a^2 - \rho^2}$ en un cuadrante del círculo $\rho = a$, es decir:

$$V = 8\int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{a} \rho\sqrt{4a^2 - \rho^2}\,d\rho = \frac{4}{3}(8 - 3\sqrt{3})a^3\pi.$$

---

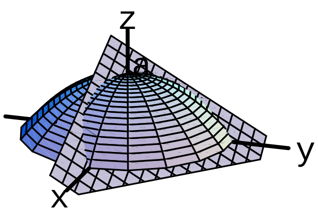
45. *Calcular los volúmenes de los cuerpos limitados por las siguientes superficies:*

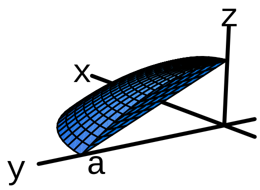
i) $az = a^2 - x^2 - y^2$, $z = a - x - y$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ $(a > 0)$.

ii) $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$.

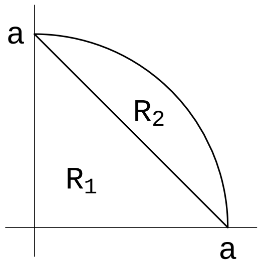
Solución

i) El sólido consiste en la región del primer octante limitada por el paraboloide $az = a^2 - x^2 - y^2$ y el plano $z = a - x - y$. En la figura de la derecha se muestra una vista lateral del sólido limitado exclusivamente al primer octante.





Observemos que la región de integración, el cuadrante del círculo con centro el origen y radio a, debe dividirse en dos regiones R_1 y R_2, pues en R_1 el sólido está limitado por el paraboloide y el plano $z = a - x - y$, y en R_2 el sólido está limitado por el paraboloide y el plano $z = 0$.



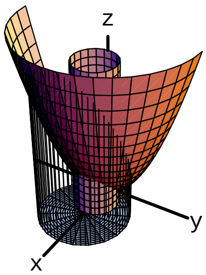
De este modo, el volumen se expresa por la integral:

$$\begin{aligned} V &= \iint_{R_1} \left[\frac{a^2 - x^2 - y^2}{a} - (a - x - y) \right] dxdy + \iint_{R_2} \frac{a^2 - x^2 - y^2}{a} \, dxdy \\ &= \iint_{R_1 \cup R_2} \frac{a^2 - x^2 - y^2}{a} \, dxdy - \iint_{R_1} (a - x - y) \, dxdy. \end{aligned}$$

Para resolver la primera integral hacemos el cambio a coordenadas polares mientras que la segunda integral la resolvemos directamente (como región de tipo I):

$$V = \int_0^{\pi/2} dv \int_0^a u \cdot \frac{a^2 - u^2}{a} \, du - \int_0^a dx \int_0^{a-x} (a - x - y) \, dy = \frac{\pi a^3}{8} - \frac{a^3}{6}.$$

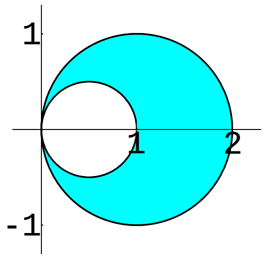
ii) El sólido es la figura comprendida entre el plano $z = 0$ y el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y cuya base es región R exterior a la circunferencia $x^2 + y^2 = x$ e interior a la circunferencia $x^2 + y^2 = 2x$.



De este modo,

$$V = \iint_R (x^2 + y^2)\, dxdy,$$

que escribimos en coordenadas polares para simplificar la región de integración, que se ilustra en la figura.



Así pues,

$$V = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dv \int_{\cos v}^{2\cos v} u^3\, du = \frac{1}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 15 \cos^4 v\, dv = \frac{45\pi}{32}.$$