

Integrales dobles y triples. Teorema de Fubini

1.- Sea f la función definida para $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ mediante

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(a) Demostrar que f no es integrable en el rectángulo $R = [0, 1] \times [0, 1]$.

(b) Estudiar la existencia de las integrales iteradas

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy \quad \text{y} \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx.$$

Solución: (a) $\sup\{L(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partición de } R\} = 0$ y $\sup\{U(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partición de } R\} = 1$. (b) No existen.

Desarrollo: (a) Sean $\mathcal{P}_1 = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ y $\mathcal{P}_2 = \{s_0, s_1, \dots, s_m\}$ particiones del intervalo $[0, 1]$. Tenemos que $\mathcal{P} := \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ es una partición del cuadrado $R = [0, 1] \times [0, 1]$ que lo descompone en mn rectángulos

$$Q_{ij} := [t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}] \quad \text{con} \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad \text{y} \quad j = 0, 1, \dots, m-1.$$

Recordamos $m_{ij} = \inf\{f(x, y) : (x, y) \in Q_{ij}\}$ y $M_{ij} = \sup\{f(x, y) : (x, y) \in Q_{ij}\}$, así que para nuestra $f(x, y)$ tenemos que $m_{ij} = 0$ y $M_{ij} = 1$. Además para la suma inferior nos queda

$$L(f, \mathcal{P}) := \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} m_{ij} \text{área}(Q_{ij}) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} 0 \cdot \text{área}(Q_{ij}) = 0$$

y para la superior

$$U(f, \mathcal{P}) := \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} M_{ij} \text{área}(Q_{ij}) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} 1 \cdot \text{área}(Q_{ij}) = \text{área}(R) = 1.$$

Por tanto

$$\sup\{L(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partición de } R\} = 0 \quad \text{y} \quad \inf\{U(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partición de } R\} = 1.$$

y concluimos que f no es integrable en R .

(b) Si $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es la función definida por

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 1 & \text{si } t \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

sabemos $\nexists \int_0^1 g(x) dx$. (Mismo argumento que en el apartado (a) pero en una variable). Para $y = y_0$ fijo

tenemos que $f(x, y_0) = g(x)$ y $\nexists \int_0^1 g(x) dx$. Para $x = x_0$ fijo tenemos $f(x_0, y) = 0$ si $x_0 \in \mathbb{Q}$ y $f(x_0, y) = 1$ si $x_0 \notin \mathbb{Q}$, por tanto

$$\int_0^1 f(x_0, y) dy = \begin{cases} 0 & \text{si } x_0 \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 1 & \text{si } x_0 \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} = g(x_0)$$

y $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 g(x) dx$, que no existe.

2.- Definimos $f(x, y)$ en el cuadrado $C = [0, 1] \times [0, 1]$ como sigue:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 2y & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(a) Probar que la integral iterada $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx$ existe y es igual a 1.

(b) Demostrar que, no obstante, f no es integrable en C .

Solución: (a) Para $x = x_0$ fijo tenemos que $f(x_0, y) = g(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_0 \in \mathbb{Q}, \\ 2y & \text{si } x_0 \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

Pero $\int_0^1 dy = \int_0^1 2y dy = 1$, así que

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 1 dx = 1$$

(b) Sean $\mathcal{P}_1 = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ y $\mathcal{P}_2 = \{s_0, s_1, \dots, s_m\}$ particiones del intervalo $[0, 1]$. Tenemos $\mathcal{P} := \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ una partición del cuadrado $R = [0, 1] \times [0, 1]$ que lo descompone en mn rectángulos $Q_{ij} = [t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]$. Supongamos primero que $1/2 \in \mathcal{P}_2$ y sea por ejemplo $s_{j_0} = 1/2$, entonces tenemos que

$$m_{ij} = \begin{cases} 2s_j & \text{para } j+1 \leq j_0, \\ 1 & \text{para } j+1 > j_0, \end{cases} \quad \text{y} \quad M_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{para } j+1 \leq j_0, \\ 2s_{j+1} & \text{para } j+1 > j_0, \end{cases}$$

(Se usa que $2y \leq 1$ para $0 \leq y \leq 1/2$ pero $1 \leq 2y$ para $1/2 \leq y \leq 1$).

Para la suma inferior

$$L(f, \mathcal{P}) = \sum_{j=0}^{j_0-1} \sum_{i=0}^{n-1} 2s_j \text{ área } (Q_{ij}) + \sum_{j=j_0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} \text{ área } (Q_{ij}),$$

y para la superior

$$U(f, \mathcal{P}) = \sum_{j=0}^{j_0-1} \sum_{i=0}^{n-1} \text{ área } (Q_{ij}) + \sum_{j=j_0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} 2s_{j+1} \text{ área } (Q_{ij}).$$

Usando

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} \text{ área } (Q_{ij}) &= \text{ área } ([0, 1] \times [s_j, s_{j+1}]) = s_{j+1} - s_j \\ \sum_{j=0}^{j_0-1} (s_{j+1} - s_j) &= \text{ longitud } ([0, 1/2]) = 1/2 \\ \sum_{j=j_0}^{m-1} (s_{j+1} - s_j) &= \text{ longitud } ([1/2, 1]) = 1/2 \end{aligned}$$

obtenemos que:

$$L(f, \mathcal{P}) = \sum_{j=0}^{j_0-1} 2s_j (s_{j+1} - s_j) + \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad U(f, \mathcal{P}) = \frac{1}{2} + \sum_{j=j_0}^{m-1} 2s_{j+1} (s_{j+1} - s_j)$$

Pero $\sum_{j=0}^{j_0-1} 2s_j (s_{j+1} - s_j)$ es menor que el área del triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1/2, 0)$ y $(1/2, 1)$, que es $1/4$.

Y la suma $\sum_{j=j_0}^{m-1} 2s_{j+1}(s_{j+1} - s_j)$ es mayor que el área del trapecio con vértices $(1/2, 0)$, $(1, 0)$, $(1/2, 1)$ y $(1, 2)$, que es $3/4$. Por tanto llegamos a que

$$U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) \geq \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Hemos supuesto que $\frac{1}{2} \in \mathcal{P}_2$ pero si no es el caso, definimos $\mathcal{P}_2^* = \mathcal{P}_2 \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$ y $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2^*$, y es fácil comprobar (ejercicio) que $L(f, \mathcal{P}) \leq L(f, \mathcal{P}^*)$ y $U(f, \mathcal{P}^*) \leq U(f, \mathcal{P})$ y como la desigualdad es válida para \mathcal{P}^* obtenemos

$$U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) \geq U(f, \mathcal{P}^*) - L(f, \mathcal{P}^*) \geq \frac{1}{2}.$$

Recordar que f es integrable en $R \iff$ para todo $\epsilon > 0$ existe una partición \mathcal{P} tal que $U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) < \epsilon$.

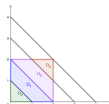
- 3.- Demostrar la existencia de la integral $\int_Q f(x+y) dx dy$, donde $Q = [0, 2] \times [0, 2]$ y $f(t) = [t]$ representa el mayor número entero $\leq t$. Hallar el valor de la integral.

Solución: El conjunto de discontinuidades de f tiene 2-medida cero. El valor de la integral es 6.

Desarrollo: Descomponemos $Q = [0, 2] \times [0, 2]$ en las siguientes regiones:

$$\begin{aligned}\Omega_0 &= \{(x, y) \in Q : x + y < 1\} \\ \Omega_1 &= \{(x, y) \in Q : 1 \leq x + y < 2\} \\ \Omega_2 &= \{(x, y) \in Q : 2 \leq x + y < 3\} \\ \Omega_3 &= \{(x, y) \in Q : 3 \leq x + y < 4\}\end{aligned}$$

y observamos que $f(x+y) = i$ para todo $(x, y) \in \Omega_i$ con $i = 0, 1, 2, 3$.



La función es discontinua en el punto $(2, 2)$ y en los segmentos de recta

$$\{x+y=3 : 1 \leq x \leq 2\}, \quad \{x+y=2 : 0 \leq x \leq 2\} \quad \text{y} \quad \{x+y=1 : 0 \leq x \leq 1\}.$$

Por tanto es continua salvo en un conjunto de 2-medida cero y en consecuencia es integrable. Además

$$\begin{aligned}\int_Q [x+y] dx dy &= \int_{\Omega_0} 0 dx dy + \int_{\Omega_1} 1 dx dy + \int_{\Omega_2} 2 dx dy + \int_{\Omega_3} 3 dx dy \\ &= \text{área}(\Omega_1) + 2 \text{área}(\Omega_2) + 3 \text{área}(\Omega_3) = 6\end{aligned}$$

- 4.- Hallar el valor de las siguientes integrales sobre los rectángulos indicados.

$$\begin{aligned}(a) \int_Q x^2 e^y dx dy, \quad Q &= [-1, 1] \times [0, \log 2]; & (b) \int_Q \sin(x+y) dx dy, \quad Q &= [0, \pi] \times [0, \pi]; \\ (c) \int_Q |xy| dx dy, \quad Q &= [-1, 2] \times [1, 3]; & (d) \int_Q \sin^2(3x-2y) dx dy, \quad Q &= [0, \pi] \times [0, \pi].\end{aligned}$$

Solución: (a) $\frac{2}{3}$ (b) 0 (c) 10 (d) $\frac{\pi^2}{2}$

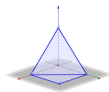
- 5.- Para cada una de las siguientes funciones f definidas en el rectángulo $Q = [0, 1] \times [0, 1]$, se pide representar el conjunto de los valores $f(x, y)$ sobre Q y calcular el volumen del sólido así obtenido. Determinar también en cada caso el conjunto

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in Q : f \text{ no es continua en } (x, y)\}.$$

$$(a) f(x, y) = \begin{cases} 1 - (x + y) & \text{si } x + y \leq 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (b) f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{si } x^2 \leq y \leq 2x^2, \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Solución: (a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{1}{8} + \frac{2}{5} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Desarrollo: (a) La función es continua en Q y por tanto integrable.



Además si denotamos por Ω el triángulo en el plano xy con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$, el volumen del sólido S es

$$\begin{aligned} \text{Volumen}(S) &= \int_{\Omega} (1 - x - y) dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} (1 - x - y) dy \right] dx = \int_0^1 \left((1-x)y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=0}^{y=1-x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x)^2 dx = -\frac{1}{2} \frac{(1-x)^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

(b) La función f es discontinua en

$$\{(x, x^2) : 0 < x \leq 1\} \cup \{(x, 2x^2) : 0 < x \leq 1/\sqrt{2}\}$$

pues $x + x^2 > 0$ para $0 < x \leq 1$, y $x + 2x^2 > 0$ para $0 < x \leq 1/\sqrt{2}$. Este conjunto tiene 2-medida cero y por tanto f es integrable en Q . Recuerda que si $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, usando continuidad uniforme, vimos que la gráfica de g tiene 2-medida cero. En este caso

$$\{(x, x^2) : 0 < x \leq 1\} \subset \text{gráfica}(g_1) \quad \text{y} \quad \{(x, 2x^2) : 0 < x \leq 1/\sqrt{2}\} \subset \text{gráfica}(g_2)$$

con $g_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g_1(x) = x^2$ y $g_2 : [0, 1/\sqrt{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g_2(x) = 2x^2$.

Sea $\Omega = \{(x, y) \in Q : x^2 \leq y \leq 2x^2\}$, como f vale 0 en $Q \setminus \Omega$ el volumen del sólido S es

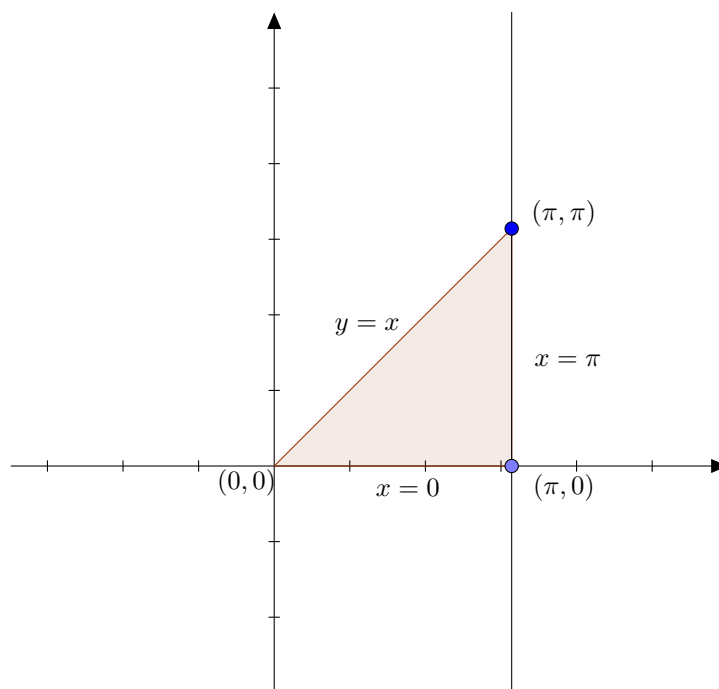
$$\begin{aligned} \text{Volumen}(S) &= \int_{\Omega} (x + y) dx dy = \int_0^1 \left[\int_{\sqrt{y}/\sqrt{2}}^{\sqrt{y}} (x + y) dx \right] dy = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + yx \right) \Big|_{x=\sqrt{y}/\sqrt{2}}^{x=\sqrt{y}} dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{y}{2} + y^{3/2} - \frac{y}{4} - \frac{y^{3/2}}{\sqrt{2}} \right) dy = \left(\frac{y^2}{8} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{2y^{5/2}}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{8} + \frac{2}{5} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

(Para escribir como integrales iteradas hemos usado que Ω es una región del tipo 2)

- 6.- Calcular el valor de la integral $\int_{\Omega} x \cos(x + y) dx dy$, siendo Ω el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(\pi, 0)$ y (π, π) .

Solución: $-\frac{3\pi}{2}$

Desarrollo: Primero tenemos que determinar los límites de integración para ello dibujamos el triángulo Ω .



Así ya podemos calcular nuestra integral

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} x \cos(x+y) dx dy, &= \int_0^{\pi} \left(\int_0^x x \cos(x+y) dy \right) dx = \int_0^{\pi} x \sin(x+y) \Big|_0^x dx \\ &= \int_0^{\pi} x \sin(2x) dx - \int_0^{\pi} x \sin(x+\pi) dx \end{aligned}$$

Calculamos por partes ambas integrales

$$\int_0^{\pi} x \sin(x+\pi) dx = - \int_0^{\pi} x \sin(x) dx = x \cos(x) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos(x) dx = -\pi \quad \left[\begin{array}{ll} u = x & du = 1 \\ dv = \sin(x) & v = -\cos(x) \end{array} \right]$$

$$\int_0^{\pi} x \sin(2x) dx = - \frac{x}{2} \cos(2x) \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos(2x) dx = -\frac{\pi}{2} \quad \left[\begin{array}{ll} u = x & du = 1 \\ dv = \sin(2x) & v = -\frac{1}{2} \cos(2x) \end{array} \right]$$

Por tanto

$$\int_{\Omega} x \cos(x+y) dx dy, = -\frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{3\pi}{2}.$$

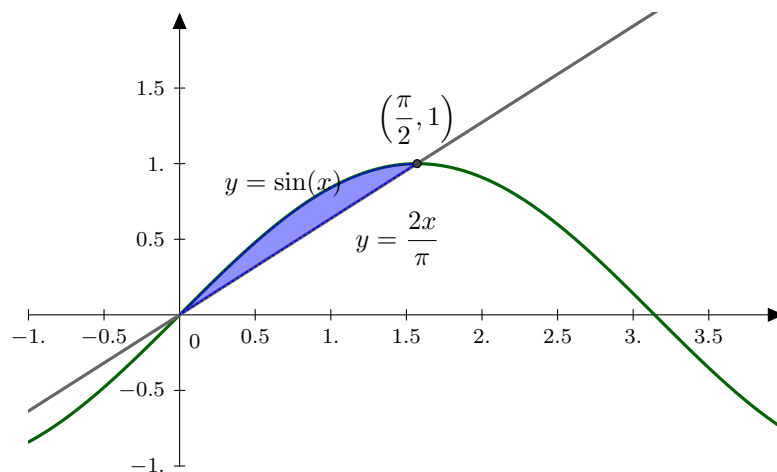
Si quisiéramos hacerlo con el orden de integración invertido sería calcular la integral

$$\int_{\Omega} x \cos(x+y) dx dy, = \int_0^{\pi} \left(\int_y^{\pi} x \cos(x+y) dx \right) dy.$$

7.- Calcular el valor de la integral $\int_D y dx dy$, donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, 2x/\pi \leq y \leq \sin x\}$.

Solución: $\frac{\pi}{24}$

Desarrollo: Primero debemos determinar los límites de integración para ello dibujamos la región D .



Para calcular el punto de corte de las curvas $y = \sin(x)$ y $y = \frac{2x}{\pi}$, simplemente igualamos y resolvemos la ecuación. Los puntos de corte que nos interesan son el $(0, 0)$ y el $(\frac{\pi}{2}, 1)$. Teniendo esto ya podemos calcular la integral

$$\begin{aligned} \int_D y dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{2x}{\pi}}^{\sin(x)} y dy \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{y^2}{2} \Big|_{\frac{2x}{\pi}}^{\sin(x)} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x^2}{\pi^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) dx - \frac{2x^3}{3\pi^2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) dx - \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

Calculemos por partes la integral que nos falta

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^2 dx = -\sin(x) \cos(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \sin^2(x) dx \quad \left[\begin{array}{ll} u = \sin(x) & du = \cos(x) \\ dv = \sin(x) & v = -\cos(x) \end{array} \right] \\ &= \frac{\pi}{2} - I \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\int_D y dx dy = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{24}.$$

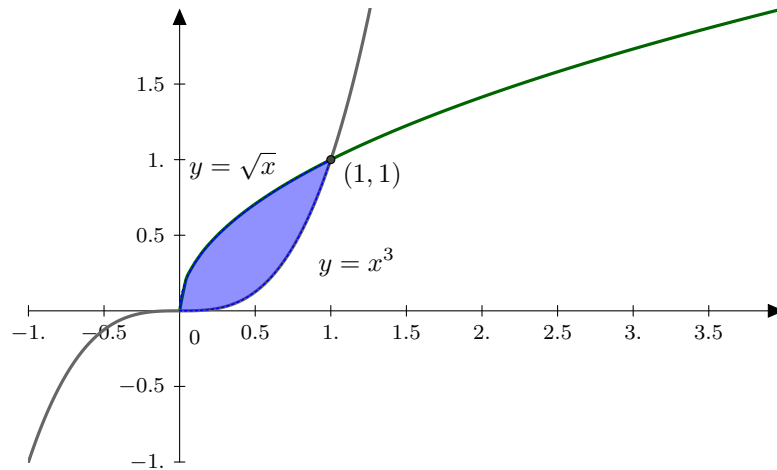
Si quisiéramos hacerlo con el orden de integración invertido sería calcular la integral (La cual es más complicada)

$$\int_D y dx dy = \int_0^1 \left(\int_{\arcsin(y)}^{\frac{\pi y}{2}} y dx \right) dy.$$

8.- Calcular el valor de la integral $\int_D x^3 y \sin \frac{\pi y^2}{x} dx dy$, donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 \leq y \leq \sqrt{x}\}$.

Solución: $\frac{1}{10\pi}$

Desarrollo: Primero debemos determinar los límites de integración para ello dibujamos la región D .



Ahora ya podemos calcular la integral:

$$\begin{aligned}\int_D x^3 y \sin \frac{\pi y^2}{x} dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{x^3}^{\sqrt{x}} x^3 y \sin \frac{\pi y^2}{x} dy \right) dx = \int_0^1 \frac{-x^4}{2\pi} \cos \frac{\pi y^2}{x} \Big|_{x^3}^{\sqrt{x}} dx \\ &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^1 x^4 \cos(\pi) dx - \frac{-1}{2\pi} \int_0^1 x^4 \cos \pi x^5 dx = \frac{1}{10\pi} + \frac{\sin(\pi x^5)}{10\pi^2} \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{10\pi}.\end{aligned}$$

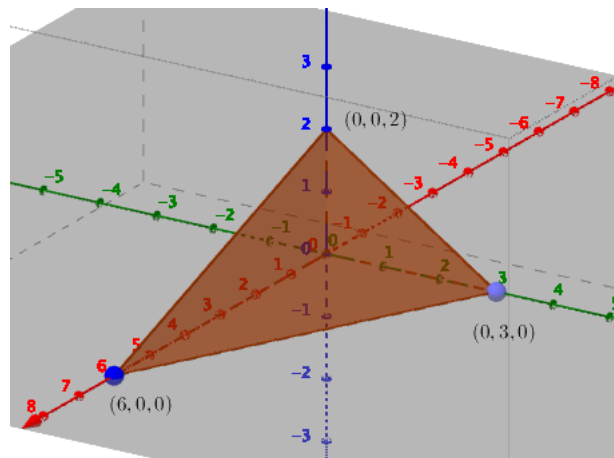
Si quisiéramos hacerlo con el orden de integración invertido sería calcular la integral, (Como veis esta es mucho más complicada)

$$\int_D x^3 y \sin \frac{\pi y^2}{x} dx dy = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} x^3 y \sin \frac{\pi y^2}{x} dx \right) dy.$$

- 9.- Una pirámide está limitada por los tres planos coordenados y el plano $x+2y+3z=6$. Dibujar esta pirámide y calcular su volumen: a) de manera elemental; b) integrando.

Solución: 6

Desarrollo: Primero dibujemos la pirámide en cuestión



Ahora si recordamos, el volumen de nuestra pirámide es simplemente un tercio del área de la base por la altura entonces

$$V = \frac{1}{3} \left(\frac{3 \cdot 6}{2} \right) \cdot 2 = 6.$$

Ahora calculemos el volumen mediante una integral, como sabemos si denotamos P a la pirámide

$$V = \int_P dx dy dz.$$

Gracias al dibujo deducimos los límites de integración y pasamos a calcular dicha integral (se puede cambiar el orden de integración yo solo pongo una de las posibilidades)

$$\begin{aligned} V &= \int_P dx dy dz = \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}z} \int_0^{6-3z-2y} dx dy dz = \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}z} 6-3z-2y dy dz \\ &= \int_0^2 6 \left(3 - \frac{3}{2}z\right) - 3z \left(3 - \frac{3}{2}z\right) - \left(3 - \frac{3}{2}z\right)^2 dz = \int_0^2 \frac{9}{4}z^2 - 9z + 9 dz \\ &= 6 - 18 + 18 = 6. \end{aligned}$$

También lo podemos pensar como el volumen entre las gráficas de $f(x, y) = \frac{1}{3}(6 - x - 2y)$ y $g(x, y) = 0$ en $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x + 2y < 6\}$ que es el interior del triángulo con vértices $(0, 0)$, $(6, 0)$ y $(0, 3)$. Es decir,

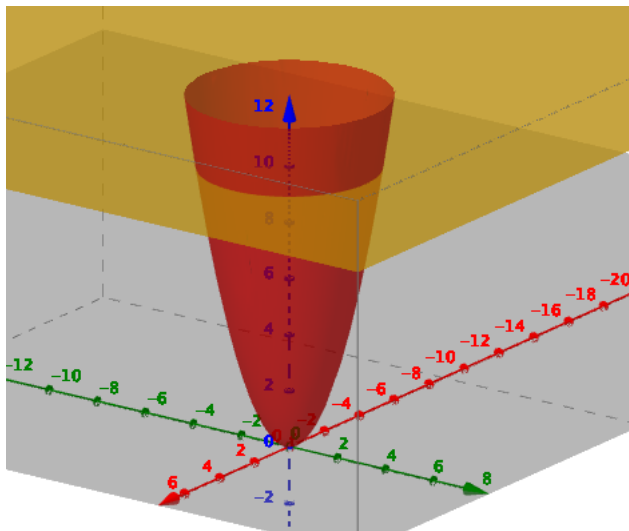
$$\begin{aligned} V &= \int_T (f(x, y) - g(x, y)) dx dy = \int_T \frac{1}{3}(6 - x - 2y) dx dy = \frac{1}{3} \int_0^6 \left[\int_0^{\frac{1}{2}(6-x)} (6 - x - 2y) dy \right] dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^6 \left[\frac{(6-x)^2}{2} - \left(\frac{6-x}{2}\right)^2 \right] dx = \frac{1}{12} \int_0^6 (6-x)^2 dx = \frac{1}{12} \frac{6^3}{3} = 6 \end{aligned}$$

- 10.- (a) Hallar el volumen de la región encerrada por la superficie $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 10$.
 (b) Lo mismo para la región acotada por la gráfica $z = e^{-x^2}$ y los planos $y = 0$, $z = 0$, $y = x$ y $x = 1$.

Solución: (a) 50π (b) $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right)$

Desarrollo:

- (a) Primero dibujamos la región



Entonces para calcular el volumen de esta región, que llamaremos Ω , deberemos calcular

$$\int_{\Omega} dx dy dz$$

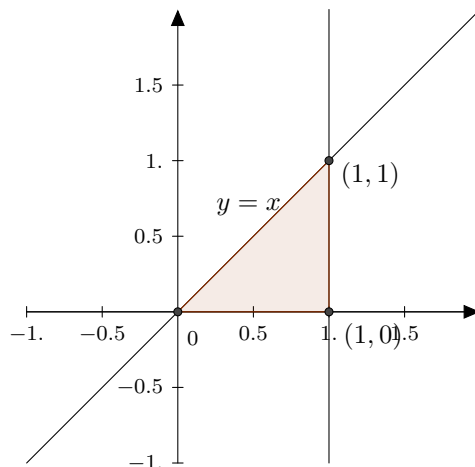
Aquí debemos darnos cuenta que la forma más fácil de hacer esto es pasar a coordenadas cilíndricas, con lo que nos quedaría

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} dx dy dz &= \int_{\Omega} r d\theta dr dz = \int_0^{10} \int_0^{\sqrt{z}} \int_0^{2\pi} r d\theta dr dz = \int_0^{10} \int_0^{\sqrt{z}} 2\pi r dr dz \\ &= \int_0^{10} \pi z dz = 50\pi.\end{aligned}$$

También lo podemos pensar como el volumen entre las gráficas de $f(x, y) = 10$ y $g(x, y) = x^2 + y^2$ en $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 10\}$. Es decir,

$$\begin{aligned}V &= \int_D (f(x, y) - g(x, y)) dx dy = \int_D (10 - x^2 - y^2) dx dy = \int_0^{\sqrt{10}} \int_0^{2\pi} r(10 - r^2) d\theta dr \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{10}} (10r - r^3) dr = 2\pi(5 \cdot 10 - \frac{100}{4}) = 50\pi\end{aligned}$$

(b) En este caso vamos a dibujar nuestra región, Ω , proyectada al plano $z = 0$ para que sea vea mejor.



Entonces para calcular el volumen de la región que nos interesa deberemos calcular

$$\int_{\Omega} dx dy dz = \int_0^1 \int_0^x \int_0^{e^{-x^2}} dz dy dx = \int_0^1 \int_0^x e^{-x^2} dy dx = \int_0^1 x e^{-x^2} dx = \left. -\frac{1}{2} e^{-x^2} \right|_0^1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right).$$

También lo podemos pensar como el volumen entre las gráficas de $f(x, y) = e^{-x^2}$ y $g(x, y) = 0$ en el interior T del triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(1, 1)$ (ver dibujo). Es decir,

$$\begin{aligned}V &= \int_T (f(x, y) - g(x, y)) dx dy = \int_T e^{-x^2} dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^x e^{-x^2} dy \right] dx \\ &= \int_0^1 x e^{-x^2} dx = \left. -\frac{1}{2} e^{-x^2} \right|_0^1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right).\end{aligned}$$

11.- En los siguientes apartados, se supone que la integral de una función positiva f sobre la región Ω se reduce a la integral iterada que se da. En cada caso, se pide determinar y dibujar la región Ω e invertir el orden de integración.

(a) $\int_0^2 \left(\int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx \right) dy.$

(b) $\int_1^4 \left(\int_{\sqrt{x}}^2 f(x, y) dy \right) dx,$

(c) $\int_1^e \left(\int_0^{\log x} f(x, y) dy \right) dx.$

(d) $\int_0^{\pi} \left(\int_{-\sin x/2}^{\sin x} f(x, y) dy \right) dx.$

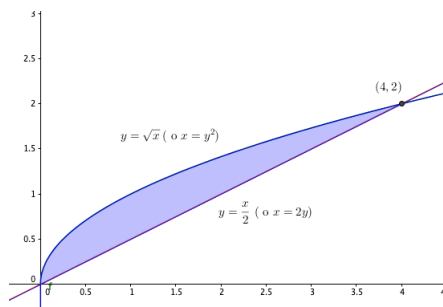
Solución:

$$(a) \int_0^4 \left[\int_{x/2}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy \right] dx \quad (b) \int_1^2 \left[\int_1^{y^2} f(x, y) dx \right] dy \quad (c) \int_0^1 \left[\int_{e^y}^e f(x, y) dx \right] dy$$

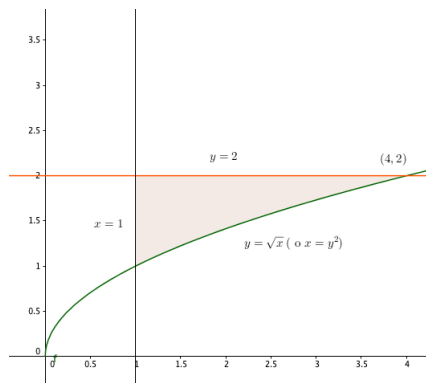
$$(d) \int_{-1}^0 \left[\int_{-2 \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx \right] dy + \int_0^1 \left[\int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx \right] dy$$

Regiones de integración:

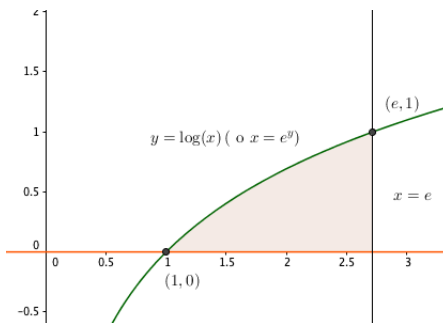
(a)



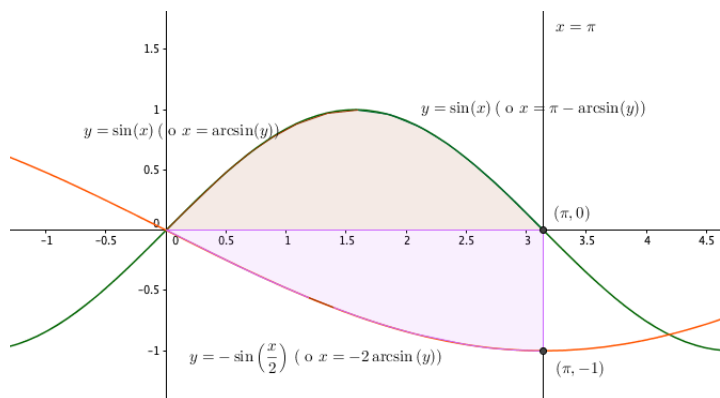
(b)



(c)



(d) Este apartado es un poco más complicado, lo primero que hacemos es representar nuestra región de integración y la dividimos en dos del siguiente modo



La parte de arriba de la región de integración sería la correspondiente a $\int_0^1 \left[\int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx \right] dy$,

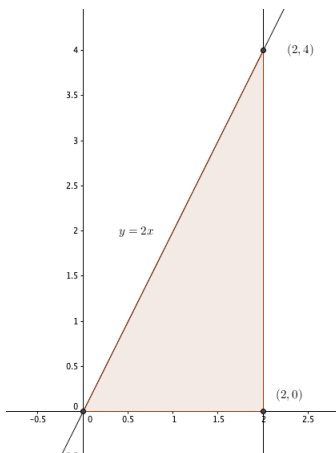
y la parte de abajo corresponde a $\int_{-1}^0 \left[\int_{-2 \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx \right] dy$

12.- Invertiendo el orden de integración si fuese necesario, calcúlese la integral

$$\int_0^4 \int_{y/2}^2 e^{x^2} dx dy.$$

Solución: $e^4 - 1$

Desarrollo: Primero dibujamos la región de integración:



Con esto ya podemos invertir el orden de integración, y la anterior integral nos quedaría

$$\int_0^4 \int_{y/2}^2 e^{x^2} dx dy = \int_0^2 \int_0^{2x} e^{x^2} dy dx = \int_0^2 2xe^{x^2} dx = e^{x^2} \Big|_0^2 = e^4 - 1.$$

13.- Si $D = [-1, 1] \times [-1, 2]$, probar que

$$1 \leq \int_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2 + 1} \leq 6.$$

Desarrollo: Primero definimos la función de dos variables $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$. Claramente la función f es continua en D y como D es un compacto, esta función alcanzará un máximo y un mínimo absoluto.

Como $f(x, y) \leq 1$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $f(0, 0) = 1$ (ya tenemos nuestro máximo absoluto). No es difícil ver que el mínimo absoluto se alcanza en los puntos $(1, 2)$ y en el $(-1, 2)$ y es $1/6$. Con esto ya tenemos que

$$\int_D f(x, y) dx dy \leq \max_{(x, y) \in D} \{f(x, y)\} \int_D dx dy = \max_{(x, y) \in D} \{f(x, y)\} A(D) = 6$$

y de igual modo

$$\int_D f(x, y) dx dy \geq \min_{(x, y) \in D} \{f(x, y)\} \int_D dx dy = \min_{(x, y) \in D} \{f(x, y)\} A(D) = 1.$$

14.- Hallar el valor de las siguientes integrales, determinando y dibujando en cada caso el recinto de integración.

(a) $\int_Q (2x + 3y + z) dx dy dz$, con $Q = [1, 2] \times [-1, 1] \times [0, 1]$.

(b) $\int_T x^2 \cos z dx dy dz$, siendo T la región limitada por los planos $z = 0, z = \pi, y = 0, y = 1, x = 0, x + y = 1$.

(c) $\int_\Omega x y^2 z^3 dx dy dz$, siendo Ω el sólido limitado por la superficie $z = xy$ y los planos $y = x, x = 1$ y $z = 0$.

Solución: (a) 7 (b) 0 (c) $\frac{1}{364}$

15.- En cada uno de los siguientes casos, la integral $\int_\Omega f(x, y, z) dx dy dz$ de la función f se reduce a la integral iterada dada. Dibujar la región de integración $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ y su proyección sobre el plano $z = 0$. Escribir entonces la integral como una o varias integrales iteradas en las que integración se hace en el orden $dz dx dy$.

(a) $\int_0^1 \left(\int_0^x \left(\int_0^y f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$

(b) $\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{x+y} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$

(c) $\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$

(d) $\int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$

Solución:

(a) $\int_0^1 \left[\int_y^1 \left[\int_0^y f(x, y, z) dz \right] dx \right] dy.$

(b) $\int_0^1 \left[\int_0^{1-y} \left[\int_0^{x+y} f(x, y, z) dz \right] dx \right] dy.$

(c) $\int_0^1 \left[\int_0^1 \left[\int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz \right] dx \right] dy.$

(d) $\int_{-1}^1 \left[\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \left[\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz \right] dx \right] dy.$