

Derivadas de orden superior. Polinomios de Taylor. Máximos y mínimos

1.- Definamos la función

$$f(x, y) = \begin{cases} y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Estudiar la existencia de las siguientes derivadas parciales y, en su caso, calcular sus valores:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0).$$

Solución:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0).$$

Desarrollo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^3}{h^3} = -1. \end{aligned}$$

Por otro lado si $(x, y) \neq (0, 0)$ entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{4xy^3}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{x^4 - y^4 - 4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Gracias a esto ya podemos calcular lo que nos falta

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) (0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) (0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{h} \nexists \end{aligned}$$

2.- Sea

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0.$$

Compruébese que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$.

¿Qué se puede decir acerca de la continuidad de las derivadas de segundo orden en el origen?

Solución: f no es C^2 en un entorno del origen.**Desarrollo:**

Para calcular las derivadas parciales mixtas primero tenemos que calcular lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = 0. \end{aligned}$$

y si $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{yx^4 - y^5 + 4x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{x^5 - xy^4 - 4x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Con esto obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) (0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^5}{h^5} = -1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) (0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^5}{h^5} = 1. \end{aligned}$$

Lo único que podemos decir es que la función f no es C^2 en un entorno del origen, porque si lo fuera las derivadas parciales mixtas deberían coincidir.

3.- El cambio de variable $x = u + v$, $y = uv^2$ transforma $f(x, y)$ en $g(u, v)$. Calcular $\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(1, 1)$, sabiendo que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2, 1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2, 1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2, 1) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2, 1) = 1$$

Solución: $\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(1, 1) = 8$.

Desarrollo:

Viendo x e y como una función de u y v , podemos escribir $x(u, v) = u + v$ e $y(u, v) = uv^2$. Con esto, usando la regla de la cadena, tenemos que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(1, 1) = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) \right) (1, 1) = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \right) (1, 1)$$

Pero sabemos que $\frac{\partial x}{\partial u}(u, v) = 1$ y $\frac{\partial y}{\partial u}(u, v) = v^2$, así (usando también $\frac{\partial x}{\partial v}(u, v) = 1$ y $\frac{\partial y}{\partial v}(u, v) = 2uv$ y los datos que nos da el problema)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(1, 1) &= \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) \right) (1, 1) = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) + v^2 \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \right) (1, 1) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x(1, 1), y(1, 1)) \frac{\partial x}{\partial v}(1, 1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x(1, 1), y(1, 1)) \frac{\partial y}{\partial v}(1, 1) + 2 \frac{\partial f}{\partial y}(x(1, 1), y(1, 1)) + \\ &\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x(1, 1), y(1, 1)) \frac{\partial x}{\partial v}(1, 1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x(1, 1), y(1, 1)) \frac{\partial y}{\partial v}(1, 1) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2, 1) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2, 1) + 2 \frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2, 1) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2, 1) \\ &= 1 + 2 + 2 + 1 + 2 \\ &= 8. \end{aligned}$$

4.- Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en $(0, 0)$ de las siguientes funciones:

$$(a) \quad f(x, y) = x e^{x+y}. \quad (b) \quad f(x, y) = \sin x y + \cos x y. \quad (c) \quad f(x, y) = e^{x^2+y^2}.$$

Solución:

$$(a) \quad f(x, y) = x + x^2 + xy + o((x^2 + y^2)) \quad (b) \quad f(x, y) = 1 + xy + o((x^2 + y^2)) \quad (c) \quad f(x, y) = 1 + x^2 + y^2 + o((x^2 + y^2))$$

cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

Desarrollo:

Para calcular el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en $(0, 0)$ de la función f necesitamos calcular el valor de la función en el origen así como el valor de todas las derivadas parciales de orden 1 y 2 en el origen. Recordar que la fórmula de Taylor para una función f que va de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R} se escribe del siguiente modo

$$f(x, y) = f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)y^2 \right) + R_2$$

(a) Primero $f(0, 0) = 0$, además

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= (1+x)e^{x+y} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= xe^{x+y} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= (2+x)e^{x+y} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= (1+x)e^{x+y} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= (1+x)e^{x+y} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= xe^{x+y} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 0. \end{aligned}$$

(Fijaos que como f es C^2 ya sabíamos de antemano que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$) Por lo tanto la fórmula de Taylor de grado 2 en el $(0, 0)$ de la función f será

$$f(x, y) = x + \frac{1}{2} (2x^2 + 2xy) + R_2 = x + x^2 + xy + R_2.$$

(b) Primero $f(0,0) = 1$, además

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= y \cos(xy) - y \sin(xy) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x \cos(xy) - x \sin(xy) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= -y^2 \sin(xy) - y^2 \cos(xy) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= \cos(xy) - \sin(xy) - xy \sin(xy) - xy \cos(xy) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \cos(xy) - \sin(xy) - xy \sin(xy) - xy \cos(xy) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= -x^2 \sin(xy) - x^2 \cos(xy) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0.\end{aligned}$$

(Fijaos que como f es C^2 ya sabíamos de antemano que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$) Por lo tanto la fórmula de Taylor de grado 2 en el $(0,0)$ de la función f será

$$f(x,y) = 1 + \frac{1}{2}(2xy) + R_2 = 1 + xy + R_2.$$

(c) Primero $f(0,0) = 1$, además

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2xe^{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2ye^{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= 2(1+2x^2)e^{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= 4xye^{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= 4xye^{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= 2(1+2y^2)e^{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 2.\end{aligned}$$

(Fijaos que como f es C^2 ya sabíamos de antemano que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$) Por lo tanto la fórmula de Taylor de grado 2 en el $(0,0)$ de la función f será

$$f(x,y) = 1 + \frac{1}{2}(2x^2 + 2y^2) + R_2 = 1 + x^2 + y^2 + R_2.$$

5.- Comprobar que la función $f(x,y) = e^y \cos x$ no tiene puntos críticos en \mathbb{R}^2 .

Desarrollo:

Recordemos que un punto (x_0, y_0) tal que $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$, se denomina punto crítico. Por tanto lo que haremos será calcular el gradiente de f e igualarlo al vector cero.

$$\nabla f(x,y) = (-e^y \sin(x), e^y \cos(x)),$$

Así

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} -e^y \sin(x) = 0 \\ e^y \cos(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x) = 0 \\ \cos(x) = 0 \end{cases}$$

y no existe ningún número real que cumpla estas dos condiciones.

6.- Hallar los puntos críticos y determinar cuáles son máximos locales, mínimos locales o puntos silla:

$$\begin{aligned}(a) f(x,y) &= x^2 + y^2 + xy - 2x - 4y + 10. & (b) f(x,y) &= 3x^2 - 4y^2 + xy. \\ (c) f(x,y) &= x^3 + y^3 - 3xy. & (d) f(x,y) &= 3 - x^2 - y^2 - x^4 y^2. \\ (e) f(x,y) &= x \log(x^2 + y^2). & (f) f(x,y) &= xy e^{x-y}. \\ (g) f(x,y) &= xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}. & (h) f(x,y) &= e^{xy} + x^2.\end{aligned}$$

Solución:

- | | |
|--|--|
| (a) $(0,2)$ mínimo local | (b) $(0,0)$ punto de silla |
| (c) $(0,0)$ punto de silla y $(1,1)$ mínimo local | (d) $(0,0)$ máximo absoluto |
| (e) $(0, \pm 1)$ puntos de silla, $(e^{-1}, 0)$ mínimo local y $(-e^{-1}, 0)$ máximo local | (f) $(0,0)$ punto de silla y $(-1,1)$ mínimo local |
| (g) $(1,1)$ mínimo local | (h) $(0,0)$ punto de silla |

Desarrollo:

- (a) Primero calculemos los puntos críticos de la función f

$$\nabla f(x, y) = (2x + y - 2, 2y + x - 4),$$

así

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ 2y + x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

Por consiguiente el único punto crítico es el punto $(0, 2)$. Ahora como la función es de clase C^2 en \mathbb{R}^2 podemos aplicar el criterio de Sylvester para intentar clasificar los puntos críticos. Para ello debemos calcular la matriz Hessiana de f en los puntos críticos,

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Hf(0, 2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ahora sus menores principales son $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 2) = 2 > 0$ y $\det(Hf(0, 2)) = 3 > 0$. Por tanto el criterio de Sylvester nos dice que $(0, 2)$ es un mínimo local.

- (b) Primero calculemos los puntos críticos de la función f

$$\nabla f(x, y) = (6x + y, -8y + x),$$

así

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + y = 0 \\ x - 8y = 0 \end{cases}$$

Por consiguiente el único punto crítico es el punto $(0, 0)$. Ahora como la función es de clase C^2 en \mathbb{R}^2 podemos aplicar el criterio de Sylvester para intentar clasificar los puntos críticos. Para ello debemos calcular la matriz Hessiana de f en los puntos críticos,

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}.$$

Ahora el determinante de la matriz Hessiana en el punto $(0, 0)$ es $\det(Hf(0, 0)) = -49 < 0$. Por tanto el criterio de Sylvester nos dice que $(0, 0)$ es un punto de silla.

- (c) Primero calculemos los puntos críticos de la función f

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x),$$

así

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases}$$

Por consiguiente los puntos críticos de la función f serán $(0, 0)$ y $(1, 1)$. Ahora como la función es de clase C^2 en \mathbb{R}^2 podemos aplicar el criterio de Sylvester para intentar clasificar los puntos críticos. Para ello debemos calcular la matriz Hessiana de f en los puntos críticos,

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} Hf(0, 0) &= \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \\ Hf(1, 1) &= \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Empecemos por el punto $(0, 0)$, el determinante de la matriz Hessiana en el punto $(0, 0)$ es $\det(Hf(0, 0)) = -9 < 0$. Por tanto el criterio de Sylvester nos dice que $(0, 0)$ es un punto de silla.

Por otro lado, para el punto $(1, 1)$, los menores principales de la matriz Hessiana asociada son $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = 6 > 0$ y $\det(Hf(1, 1)) = 27 > 0$. Por tanto el criterio de Sylvester nos dice que $(1, 1)$ es un mínimo local.

- (d) Primero calculemos los puntos críticos de la función f

$$\nabla f(x, y) = (-2x - 4x^3y^2, -2y - 2x^4y),$$

así

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 4x^3y^2 = 0 \\ -2y - 2x^4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 2x^2y^2 \\ -1 = x^4 \end{cases} \quad \text{o} \quad x = y = 0.$$

Por consiguiente el único punto crítico de la función f será el $(0, 0)$. Ahora como la función es de clase C^2 en \mathbb{R}^2 podemos aplicar el criterio de Sylvester para intentar clasificar los puntos críticos. Para ello debemos calcular la matriz Hessiana de f en los puntos críticos,

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 12x^2y^2 & -8x^3y \\ -8x^3y & -2 - 2x^4 \end{pmatrix} \Rightarrow Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Como el determinante de la matriz Hessiana en el punto $(0, 0)$ es $\det(Hf(0, 0)) = 4 > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = -2 < 0$, el criterio de Sylvester nos dice que $(0, 0)$ es un máximo local. Además viendo la función se observa rápidamente que $f(x, y) \leq 3$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $f(0, 0) = 3$ por tanto $(0, 0)$ es en realidad un máximo global (absoluto).

(e) Primero calculemos los puntos críticos de la función f

$$\nabla f(x, y) = \left(\log(x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2}, \frac{2xy}{x^2 + y^2} \right).$$

Aquí vemos una cosa diferente, el gradiente de nuestra función no está definido en el punto $(0, 0)$, por tanto este punto lo tenemos que dejar fuera del análisis. Así

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \log(x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2} = 0 \\ \frac{2xy}{x^2 + y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = (x^2 + y^2) \log(x^2 + y^2) \\ 2xy = 0 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema (dejando fuera el punto $(0, 0)$) obtenemos que los puntos críticos son $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(e^{-1}, 0)$ y $(-e^{-1}, 0)$. Ahora como para cada punto crítico la función es de clase C^2 en un abierto (suficientemente pequeño) que contiene al punto, podemos aplicar el criterio de Sylvester para intentar clasificar los puntos críticos. Para ello debemos calcular la matriz Hessiana de f en los puntos críticos,

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x}{x^2 + y^2} + \frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2} & \frac{2y}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2y}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{2y}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2y}{(x^2 + y^2)^2} & \frac{2x}{x^2 + y^2} - \frac{4y^3x}{(x^2 + y^2)^2} \end{pmatrix}$$

$$Hf(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad Hf(0, -1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Hf(e^{-1}, 0) = \begin{pmatrix} 2e & 0 \\ 0 & 2e \end{pmatrix} \quad Hf(-e^{-1}, 0) = \begin{pmatrix} -2e & 0 \\ 0 & -2e \end{pmatrix}$$

Empecemos por los puntos $(0, 1)$ y $(0, -1)$ los determinantes de las matrices Hessianas en los puntos $(0, 1)$ y $(0, -1)$ son $\det(Hf(0, 1)) = \det(Hf(0, -1)) = -4 < 0$. Por tanto el criterio de Sylvester nos dice que $(0, 1)$ y $(0, -1)$ son puntos de silla.

Por otro lado, para el punto $(e^{-1}, 0)$, los menores principales de la matriz Hessiana asociada son $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(e^{-1}, 0) = 2e > 0$ y $\det(Hf(e^{-1}, 0)) = 4e^2 > 0$. Por tanto el criterio de Sylvester nos dice que $(e^{-1}, 0)$ es un mínimo local.

Por último, para el punto $(-e^{-1}, 0)$, los menores principales de la matriz Hessiana asociada son $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-e^{-1}, 0) = -2e < 0$ y $\det(Hf(-e^{-1}, 0)) = 4e^2 > 0$. Por tanto el criterio de Sylvester nos dice que $(-e^{-1}, 0)$ es un máximo local.

(f) Primero calculemos los puntos críticos de la función f

$$\nabla f(x, y) = (e^{x-y}(y + xy), e^{x-y}(x - xy)),$$

así

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x-y}(y + xy) = 0 \\ e^{x-y}(x - xy) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -xy \\ x = xy \end{cases}$$

Por consiguiente los puntos críticos de la función f serán $(0, 0)$ y $(-1, 1)$. Ahora como la función es de clase C^2 en \mathbb{R}^2 podemos aplicar el criterio de Sylvester para intentar clasificar los puntos críticos. Para ello debemos calcular la matriz Hessiana de f en los puntos críticos,

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x-y}(2y + xy) & e^{x-y}(1 + x)(1 - y) \\ e^{x-y}(1 + x)(1 - y) & -e^{x-y}x(2 - y) \end{pmatrix}$$

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Hf(-1, 1) = \begin{pmatrix} e^{-2} & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{pmatrix}$$

Empecemos por el punto $(0, 0)$, el determinante de la matriz Hessiana en el punto $(0, 0)$ es $\det(Hf(0, 0)) = -1 < 0$. Por tanto el criterio de Sylvester nos dice que $(0, 0)$ es un punto de silla.

Por otro lado, para el punto $(1, 1)$, los menores principales de la matriz Hessiana asociada son $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, 1) = e^{-2} > 0$ y $\det(Hf(-1, 1)) = e^{-4} > 0$. Por tanto el criterio de Sylvester nos dice que $(-1, 1)$ es un mínimo local.

(g) Como nuestra función f no está definida en los puntos (x, y) tales que $x = 0$ o bien $y = 0$, no consideraremos dichos puntos en nuestro análisis. Primero calculemos los puntos críticos de la función f

$$\nabla f(x, y) = \left(y - \frac{1}{x^2}, x - \frac{1}{y^2} \right).$$

Aquí vemos una cosa diferente, el gradiente de nuestra función no está definido en el punto $(0, 0)$, por tanto este punto lo tenemos que dejar fuera del análisis. Así

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} y - \frac{1}{x^2} = 0 \\ x - \frac{1}{y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x^2} \\ x = \frac{1}{y^2} \end{cases}$$

Resolviendo este sistema obtenemos que el único punto crítico es el punto $(1, 1)$. Ahora como la función es de clase C^2 en un abierto (suficientemente pequeño) que contiene al punto $(1, 1)$, podemos aplicar el criterio de Sylvester para intentar clasificar el punto crítico. Para ello debemos calcular la matriz Hessiana de f en el $(1, 1)$,

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{2}{y^3} \end{pmatrix} \Rightarrow Hf(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Los menores principales de la matriz Hessiana de f en el punto $(1, 1)$ son $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = 2 > 0$ y $\det(Hf(1, 1)) = 3 > 0$. Por tanto el criterio de Sylvester nos dice que $(1, 1)$ es un mínimo local.

(h) Primero calculemos los puntos críticos de la función f

$$\nabla f(x, y) = (ye^{xy} + 2x, xe^{xy}),$$

así

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} ye^{xy} + 2x = 0 \\ xe^{xy} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-2x}{e^{xy}} \\ x = 0 \end{cases}$$

Por consiguiente el único punto crítico de la función f será el $(0, 0)$. Ahora como la función es de clase C^2 en \mathbb{R}^2 podemos aplicar el criterio de Sylvester para intentar clasificar el punto crítico. Para ello debemos calcular la matriz Hessiana de f en el $(0, 0)$,

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 e^{xy} + 2 & e^{xy}(1 + xy) \\ e^{xy}(1 + xy) & x^2 e^{xy} \end{pmatrix} \Rightarrow Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz Hessiana en el punto $(0, 0)$ es $\det(Hf(0, 0)) = -1 < 0$. Por tanto el criterio de Sylvester nos dice que $(0, 0)$ es un punto de silla.

7.- Hallar los posibles puntos de máximo, mínimo y de silla de las siguientes funciones:

$$(a) \quad f(x, y) = (x + y)^2. \quad (b) \quad f(x, y) = \log(2 + \sin xy). \quad (c) \quad f(x, y) = x^2 y^2.$$

Solución: (a) $(x, -x)$ mínimos absolutos (b) $(0, 0)$ punto de silla, (x, y) con $xy = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ máximos absolutos, (x, y) con $xy = \frac{\pi}{2} + (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ mínimos absolutos (c) (x, y) con $xy = 0$ mínimos absolutos

Desarrollo:

(a) Primero calculemos los puntos críticos de la función f

$$\nabla f(x, y) = (2(x + y), 2(x + y)),$$

así

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x + y) = 0 \\ 2(x + y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \end{cases}$$

Por consiguiente serán puntos críticos todos los puntos de la forma $(x, -x)$, con $x \in \mathbb{R}$. Ahora como la función es de clase C^2 en \mathbb{R}^2 podemos aplicar el criterio de Sylvester para intentar clasificar los puntos críticos. Para ello debemos calcular la matriz Hessiana de f en los puntos críticos,

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Hf(x, -x) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto para cualquier punto crítico $\det(Hf(x, -x)) = 0$. Así el criterio de Sylvester no nos permite concluir nada. Pero no tenemos que rendirnos aquí, ya que observando la función se aprecia que $f(x, y) \geq 0$ para todo punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, y como $f(x, -x) = 0$ ya tenemos probado que todos los puntos críticos son en realidad mínimos globales (absolutos). (Sin duda esto hubiéramos podido hacerlo antes de calcular la matriz Hessiana).

(b) Primero calculemos los puntos críticos de la función f

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{y \cos(xy)}{2 + \sin(xy)}, \frac{x \cos(xy)}{2 + \sin(xy)} \right),$$

así

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y \cos(xy)}{2 + \sin(xy)} = 0 \\ \frac{x \cos(xy)}{2 + \sin(xy)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \cos(xy) = 0 \\ x \cos(xy) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0 \quad \text{o} \quad \cos(xy) = 0.$$

Por consiguiente serán puntos críticos el $(0, 0)$ y todos los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, con $xy = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Ahora observemos lo siguiente $0 \leq f(x, y) \leq \log(3)$ y además

$$\begin{cases} f(x, y) = \log(3) & \text{si } xy = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ f(x, y) = 0 & \text{si } xy = \frac{\pi}{2} + (2k + 1)\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Con esto ya hemos probado que los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, con $xy = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) son máximos absolutos (globales) y los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, con $xy = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) son mínimos absolutos (globales).

Nos queda ver que pasa con el punto $(0, 0)$, como la función f es de clase C^2 en \mathbb{R}^2 podemos aplicar el criterio de Sylvester para intentar clasificar el punto $(0, 0)$. Para ello debemos calcular la matriz Hessiana de f en el $(0, 0)$,

$$\begin{aligned} Hf(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{y^2(\sin(xy)(\sin(xy)+2) + \cos^2(xy))}{(\sin(xy)+2)^2} & \frac{-xy \sin(xy) + \cos(xy)}{\sin(xy)+2} - \frac{xy \cos^2(xy)}{(\sin(xy)+2)^2} \\ \frac{-xy \sin(xy) + \cos(xy)}{\sin(xy)+2} - \frac{xy \cos^2(xy)}{(\sin(xy)+2)^2} & -\frac{x^2(\sin(xy)(\sin(xy)+2) + \cos^2(xy))}{(\sin(xy)+2)^2} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow Hf(0, 0) &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por tanto como $\det(Hf(0, 0)) = -1/4 < 0$ el criterio de Sylvester nos permite concluir que $(0, 0)$ es un punto de silla.

(c) Primero calculemos los puntos críticos de la función f

$$\nabla f(x, y) = (2xy^2, 2x^2y),$$

así

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy^2 = 0 \\ 2x^2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \text{ o } y = 0$$

Por consiguiente serán puntos críticos todos los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, con $xy = 0$. Ahora observemos lo siguiente $f(x, y) \geq 0$ y además

$$f(x, y) = 0 \quad \text{si } xy = 0$$

Por consiguiente los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, con $xy = 0$ son mínimos absolutos (globales).

8.- Considérese el polinomio $f(x, y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$ y la función $g(t) = f(t, ct)$ de $t \in \mathbb{R}$ con $c \in \mathbb{R}$. Demostrar que g tiene un mínimo en $t = 0$, pero el punto $(0, 0)$ no es un mínimo local de f .

Desarrollo: Veamos primero que $(0, 0)$ no es un mínimo local de f . $f(0, 0) = 0$ si conseguimos encontrar una sucesión de puntos $x_n = (a_n, b_n)$ de modo que $x_n \rightarrow (0, 0)$ y $f(x_n) < 0$, $\forall n \geq 1$ ya lo tenemos.

Consideramos $x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n^2}\right)$ claramente $x_n \rightarrow (0, 0)$ y además $f(x_n) = \frac{-1}{n^4} < 0$, por tanto $(0, 0)$ no es un mínimo local de f .

Veamos ahora que la función g tiene un mínimo en el 0.

$$g(t) = f(t, ct) = (ct - 3t^2)(ct - t^2) = 3t^4 - 4ct^3 + c^2t^2.$$

$g(t)$ es un polinomio con $g'(0) = 0$ y $g''(0) = c^2 > 0$, así $g(t)$ tiene un mínimo en el 0.

9.- (a) Demostrar que, para dos números no negativos arbitrarios, a y b , se cumple la desigualdad

$$\frac{a+b+1}{3} \geq \sqrt[3]{ab}$$

y que la igualdad es posible si y sólo si $a = b = 1$.

(b) Deducir del apartado anterior que las medias aritmética y geométrica de tres números no negativos x , y y z satisfacen la desigualdad

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$$

y que la igualdad se cumple si y sólo si $x = y = z$.

Desarrollo:

(a) Consideremos el conjunto $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$ y la función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(a, b) = \frac{a+b+1}{3} - \sqrt[3]{ab}.$$

Nuestro objetivo es demostrar que esta función tiene único mínimo absoluto(global) en el punto $(1, 1)$ (En este punto la función vale 0).

Primero calculemos los puntos críticos de f en el interior de Ω .

$$\nabla f(a, b) = \left(\frac{1}{3} \left(1 - a^{-\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{3}} \right), \frac{1}{3} \left(1 - a^{\frac{1}{3}} b^{-\frac{2}{3}} \right) \right),$$

así

$$\nabla f(a, b) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} \left(1 - a^{-\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{3}} \right) = 0 \\ \frac{1}{3} \left(1 - a^{\frac{1}{3}} b^{-\frac{2}{3}} \right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a^2 \\ a = b^2 \end{cases}$$

Por consiguiente el único punto crítico será el $(1, 1)$. Ahora como la función es de clase C^2 en $\text{int}(\Omega)$ podemos aplicar el criterio de Sylvester para intentar clasificar el punto crítico. Para ello debemos calcular la matriz Hessiana de f en el $(1, 1)$,

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial b \partial a}(a, b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial b^2}(a, b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} a^{-\frac{5}{3}} b^{\frac{1}{3}} & -\frac{1}{9} a^{-\frac{2}{3}} b^{-\frac{2}{3}} \\ -\frac{1}{9} a^{-\frac{2}{3}} b^{-\frac{2}{3}} & \frac{2}{9} a^{\frac{1}{3}} b^{-\frac{5}{3}} \end{pmatrix} \Rightarrow Hf(1, 1) = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}.$$

Los menores principales de la matriz Hessiana de f en el punto $(1, 1)$ son $\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(1, 1) = \frac{2}{9} > 0$ y $\det(Hf(1, 1)) = \frac{1}{27} > 0$. Por tanto el criterio de Sylvester nos dice que $(1, 1)$ es un mínimo local (Recordemos aquí que el criterio nos dice más ya que nos dice que este mínimo local es estricto). Para convencernos de que es absoluto (en Ω) podemos pensar en el siguiente argumento:

Fijamos $N > 0$ (Suficientemente grande, digamos $N > 27$) y estudiamos f restringida al rectángulo $R_N = [0, N] \times [0, N]$, es decir, $f|_{R_N}$, y como R_N es compacto y f continua sabemos que tiene mínimo absoluto. Comprobemos que $(1, 1)$ es el único mínimo absoluto de $f|_{R_N}$ para todo $N > 27$.

Por lo que ya hemos visto el único punto crítico en el interior de R_N es el $(1, 1)$, comprobemos que el valor de f en la frontera de R_N es mayor que $f(1, 1) = 0$.

Para $b = 0$ y $0 \leq a \leq N$ (frontera horizontal inferior) :

$$f(a, 0) = \frac{a+1}{3} > 0.$$

Para $a = 0$ y $0 \leq b \leq N$ (frontera vertical izquierda) :

$$f(0, b) = \frac{b+1}{3} > 0.$$

Para $y = N$ y $0 \leq a \leq N$ (frontera horizontal superior) :

$$f(a, N) = \frac{a+N+1}{3} - \sqrt[3]{Na} \geq \frac{N}{3} - N^{\frac{2}{3}} > 0$$

Esto ocurre ya que $N > 27$ (Como es de esperar el N lo he elegido una vez he llegado hasta este paso en mis cálculos)

Para $a = N$ y $0 \leq b \leq N$ (frontera vertical derecha) :

$$f(N, b) = \frac{N+b+1}{3} - \sqrt[3]{Nb} \geq \frac{N}{3} - N^{\frac{2}{3}} > 0.$$

Por tanto

$$f(a, b) > f(1, 1) \quad \text{para todo} \quad (x, y) \in R_N = [0, N] \times [0, N]$$

pero cuando $N \rightarrow +\infty$ los R_N tienden a Ω .

- (b) Si uno de los tres números es igual a 0 entonces la desigualdad es obvia. Supongamos que ninguno de los tres números es 0, entonces consideramos $a = \frac{x}{z}$ y $b = \frac{y}{z}$ y aplicando el apartado anterior obtenemos que

$$\frac{a+b+1}{3} \geq \sqrt[3]{ab} \Leftrightarrow \frac{\frac{x}{z} + \frac{y}{z} + 1}{3} \geq \sqrt[3]{x y z^{-2}} \Leftrightarrow \frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{x y z}$$

y la igualdad solo se alcanza en $\frac{x}{z} = \frac{y}{z} = 1$ es decir en $x = y = z$.

- 10.- Escribir un número dado $a > 0$ como producto de cuatro factores positivos, cuya suma sea mínima.

Solución: $a = a^{1/4} a^{1/4} a^{1/4} a^{1/4}$

Desarrollo: El método de resolución es análogo al del Ejercicio 17, también se podría hacer demostrando la desigualdad aritmético-geométrica para 4 números.

- 11.- Calcular las distancias máxima y mínima del origen a la elipse dada por la ecuación $x^2 + 2xy + 3y^2 = 9$.

Solución:

$$\text{distancia mínima } \frac{3}{\sqrt{2}} \left(2 - \sqrt{2} \right)^{1/2} \text{ en los puntos } \pm \frac{3}{2} (1 - \sqrt{2}, -1)$$

$$\text{distancia máxima } \frac{3}{\sqrt{2}} \left(2 + \sqrt{2} \right)^{1/2} \text{ en los puntos } \pm \frac{3}{2} (1 + \sqrt{2}, -1)$$

Desarrollo: La función a minimizar sería la distancia al origen pero tiene los mismos mínimos que la distancia al cuadrado así que consideramos $f(x, y) = x^2 + y^2$,

$$X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\} \quad \text{con} \quad g(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2 - 9,$$

y usamos el método de los multiplicadores de Lagrange para estudiar $f|_X$. Tenemos

$$\nabla g(x, y) = 2(x + y, x + 3y) \quad \text{y} \quad \nabla f(x, y) = 2(x, y)$$

Comprobamos $\nabla g(x, y) = 2(x + y, x + 3y) = (0, 0) \iff (x, y) = (0, 0)$ y por tanto $\nabla g(x, y) \neq (0, 0)$ en X . También tenemos que $\nabla f(x, y) \neq (0, 0)$ en X .

Tenemos que resolver $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ y por esto el sistema que nos dará los puntos críticos es:

$$\begin{cases} x = \lambda(x + y) \iff (1 - \lambda)x = \lambda y \\ y = \lambda(x + 3y) \iff (1 - 3\lambda)y = \lambda x \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Como sabemos que $\lambda \neq 0$, ya que $\nabla f(x, y) \neq (0, 0)$ en X , obtenemos de las dos primeras ecuaciones

$$y = \left(\frac{1 - \lambda}{\lambda}\right)x \quad y \quad x = \left(\frac{1 - 3\lambda}{\lambda}\right)y \implies y = \left(\frac{1 - \lambda}{\lambda}\right)\left(\frac{1 - 3\lambda}{\lambda}\right)y$$

Es fácil comprobar que si $y = 0$ el sistema no tiene solución, así que $y \neq 0$ y obtenemos la ecuación $\lambda^2 = (1 - \lambda)(1 - 3\lambda)$, es decir, $2\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$, que tiene raíces $\lambda = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Los sistemas quedan

$$\begin{cases} y = (1 - \sqrt{2})x \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \quad \text{para } \lambda = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{cases} y = (1 + \sqrt{2})x \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \quad \text{para } \lambda = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Los puntos críticos son: $\pm \frac{3}{2}(1 + \sqrt{2}, -1)$ (soluciones del sistema para $\lambda = 1 + \sqrt{2}/2$) y $\pm \frac{3}{2}(1 - \sqrt{2}, -1)$ (soluciones del sistema para $\lambda = 1 - \sqrt{2}/2$). Evaluando f en esos puntos tenemos

$$f\left(\frac{3(1 - \sqrt{2})}{2}, -\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{-3(1 - \sqrt{2})}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2}(2 - \sqrt{2})$$

$$f\left(\frac{3(1 + \sqrt{2})}{2}, -\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{-3(1 + \sqrt{2})}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2}(2 + \sqrt{2})$$

y llegamos a la solución. Sabemos que se alcanzan máximos y mínimos absolutos pues f es continua en X compacto.

12.- Encontrar los valores máximo y mínimo (absolutos) de $f(x, y) = x^3 + 3xy^2$ en la región

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \leq y\}.$$

Solución: mínimo absoluto en $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1, \pm 1)$ con valor $-\sqrt{2}$ y máximo absoluto en $\frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1)$ con valor $\sqrt{2}$

Desarrollo: Como f es continua en Ω compacto sabemos que se alcanzan los mínimos y máximos absolutos. Debemos encontrar todos los puntos críticos y entre ellos estarán los mínimos y máximos absolutos, sabremos cuales son al evaluar la f . Lo hacemos por partes.

1. Puntos críticos de f en el interior de Ω : no hay

$$\nabla f(x, y) = 3(x^2 + y^2, 2xy) \text{ y } \nabla f(x, y) = (0, 0) \iff (x, y) = (0, 0) \notin \text{int}(\Omega)$$

2. Puntos críticos de f en segmento de recta $X_1 = \Omega \cap \{(x, y) : g_1(x, y) = 0\}$ con $g_1(x, y) = x - y$:

$\nabla g_1(x, y) = (1, -1)$ y si buscamos solución para $\nabla f(x, y)$ y $\nabla g_1(x, y)$ proporcionales y $g_1(x, y) = 0$ nos queda el sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \lambda \\ 2xy = -\lambda \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \text{que tiene solución } x = y = \lambda = 0$$

Por tanto $(0, 0)$ es punto crítico, pero también lo son los extremos del segmento de recta X_1 , es decir, las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \text{que son } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ y } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

3. Puntos críticos de f en arco de circunferencia $X_2 = \Omega \cap \{(x, y) : g_2(x, y) = 0\}$ con $g_2(x, y) = x^2 + y^2 - 1$:

$\nabla g_2(x, y) = 2(x, y) \neq (0, 0)$ en X_2 y si buscamos solución para $\nabla f(x, y)$ y $\nabla g_2(x, y)$ proporcionales y $g_2(x, y) = 0$ nos queda el sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \lambda x \\ 2xy = \lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Las soluciones (x, y, λ) de este sistema son:

$$\pm(1, 0, 1), \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$$

Los puntos críticos (x, y) en X_2 son

$$(-1, 0), \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Los últimos dos son también los extremos del arco de circunferencia X_2 .

Evaluando en los puntos críticos tenemos: $f(0,0) = 0$, $f(-1,0) = -1$, $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$ y

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}.$$

Por tanto, máximo absoluto en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y mínimos absolutos en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

- 13.- Hallar los extremos de la función $f(x,y) = x^2 - 3xy + y^2$ bajo la restricción $x^2 + y^2 \leq 2$.

Solución: mínimo absoluto en $\pm(1,1)$ con valor -1 y máximo absoluto en $\pm(1,-1)$ con valor 5

- 14.- Hallar los extremos de la función $f(x,y) = x^4 + x^2 + 2y^2$ en $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 25\}$.

Solución: mínimo absoluto en $(0,0)$ con valor 0 y máximo absoluto en $(0,\pm 5)$ con valor 50

- 15.- Hallar los máximos y mínimos de la función

$$f(x,y) = \frac{1}{1 + (x-2)^2 + y^2} \quad \text{en} \quad K = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

Solución: mínimo absoluto en $(-3,0)$ con valor $1/26$ y máximo absoluto en $(2,0)$ con valor 1 .

(Sugerencia: Estudiar $h(x,y) = 1 + (x-2)^2 + y^2$)

- 16.- Para la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x,y) = x^4 + y^4 + a(2x^2 + y^2)$, se pide:

(a) Hallar sus máximos y mínimos relativos (locales) según los distintos valores del parámetro a .

(b) Hallar los valores máximo y mínimo de la función sobre el recinto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ en los casos $a = -1$ y $a = 5$.

Solución: (a) Para $a \geq 0$: $(0,0)$ mínimo absoluto. Para $a < 0$: $(0,0)$ máximo local, $(0, \pm(|a|/2)^{1/2}), (\pm(|a|)^{1/2}, 0)$, puntos de silla y $\pm(|a|)^{1/2}, \pm(|a|/2)^{1/2}$ mínimos locales.

(b) Para $a = -1$ mínimo absoluto en $\pm \frac{1}{2}(\sqrt{3}, \pm 1)$ con valor $-9/8$ y máximo absoluto en $(0,0)$ y $(0, \pm 1)$ mínimo absoluto con valor 0 . Para $a = 5$ mínimo absoluto en $(0,0)$ con valor 0 y máximo absoluto en $(\pm 1, 0)$ con valor 11 .

- 17.- Queremos construir una caja de cartón con volumen fijo V_0 . Hallar las dimensiones que minimizan la cantidad de cartón utilizada. ¿Que tipo de caja obtenemos?

Solución: largo = ancho = alto = $V_0^{1/3}$

Desarrollo: Sean x = largo, y = ancho, z = alto de la caja. Tenemos $V_0 = xyz$ y además $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ (para que realmente sea una caja). La superficie S de la caja con tapa verifica:

$$S = 2(xy + yz + xz) = 2\left(xy + y\frac{V_0}{xy} + x\frac{V_0}{xy}\right) = 2\left(xy + \frac{V_0}{x} + \frac{V_0}{y}\right)$$

Sea $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la función $f(x,y) = 2\left(xy + \frac{V_0}{x} + \frac{V_0}{y}\right)$. Queremos buscar mínimo absoluto de f .

Como el conjunto Ω es abierto así que buscamos los puntos críticos como siempre.

$\nabla f(x,y) = 2\left(y - \frac{V_0}{x^2}, x - \frac{V_0}{y^2}\right)$ y Ω es abierto, los puntos críticos son las soluciones de $\nabla f(x,y) = (0,0)$, es decir la solución del sistema

$$\begin{cases} y = \frac{V_0}{x^2} \\ x = \frac{V_0}{y^2} \end{cases} \quad \text{que es } x = y = V_0^{1/3} \quad (\text{Igualar } V_0 \text{ y recordar que } xy \neq 0)$$

El único punto crítico es $(V_0^{1/3}, V_0^{1/3})$ y la matriz Hessiana es

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{4}{x^3}V_0 & 2 \\ 2 & \frac{4}{y^3}V_0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad H(V_0^{1/3}, V_0^{1/3}) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Como $\det H(V_0^{1/3}, V_0^{1/3}) = 12 > 0$ y $4 > 0$, sabemos que $(V_0^{1/3}, V_0^{1/3})$ es un mínimo local. Para convencernos de que es absoluto podemos pensar en el siguiente argumento:

Fijamos $\epsilon > 0$ (pequeño) y estudiamos f restringida al rectángulo $R_\epsilon = \left[\epsilon, \frac{1}{\epsilon^2}\right] \times \left[\epsilon, \frac{1}{\epsilon^2}\right]$, es decir, $f|_{R_\epsilon}$, y como R_ϵ es compacto y f continua sabemos que tiene mínimo absoluto. Comprobemos que $(V_0^{1/3}, V_0^{1/3})$ es un mínimo absoluto de $f|_{R_\epsilon}$ para todo $\epsilon > 0$ tal que $3\epsilon < V_0^{1/3} < 1/(3\epsilon)^{\frac{1}{2}}$

Por lo que ya hemos visto el único punto crítico en el interior de R_ϵ es $(V_0^{1/3}, V_0^{1/3})$, comprobemos que el valor de f en la frontera de R_ϵ es mayor que $f(V_0^{1/3}, V_0^{1/3}) = 6V_0^{2/3}$.

Para $y = \epsilon$ y $\epsilon \leq x \leq 1/\epsilon^2$ (frontera horizontal inferior) :

$$f(x, \epsilon) = 2x\epsilon + \frac{2V_0}{\epsilon} + \frac{2V_0}{x} > \frac{2V_0}{\epsilon} > 6V_0^{2/3} \quad \text{pues } 3\epsilon < V_0^{1/3}$$

Para $y = 1/\epsilon^2$ y $\epsilon \leq x \leq 1/\epsilon^2$ (frontera horizontal superior) :

$$f(x, 1/\epsilon^2) = \frac{2x}{\epsilon^2} + 2V_0\epsilon^2 + \frac{2V_0}{x} > \frac{2x}{\epsilon^2} > \frac{2\epsilon}{\epsilon^2} = \frac{2}{\epsilon} > 6V_0^{2/3} \quad \text{pues } V_0^{1/3} < 1/(3\epsilon)^{\frac{1}{2}}$$

Para $x = \epsilon$ y $\epsilon \leq y \leq 1/\epsilon^2$ (frontera vertical izquierda) :

$$f(\epsilon, y) = 2\epsilon y + \frac{2V_0}{y} + \frac{2V_0}{\epsilon} > \frac{2V_0}{\epsilon} > 6V_0^{2/3} \quad \text{pues } 3\epsilon < V_0^{1/3}$$

Para $x = 1/\epsilon^2$ y $\epsilon \leq y \leq 1/\epsilon^2$ (frontera vertical derecha) :

$$f(1/\epsilon^2, y) = \frac{2y}{\epsilon^2} + \frac{2V_0}{y} + 2V_0\epsilon^2 > \frac{2y}{\epsilon^2} > \frac{2\epsilon}{\epsilon^2} = \frac{2}{\epsilon} > 6V_0^{2/3} \quad \text{pues } V_0^{1/3} < 1/(3\epsilon)^{\frac{1}{2}}$$

Por tanto

$$f(x, y) \geq f(V_0^{1/3}, V_0^{1/3}) \quad \text{para todo } (x, y) \in R_\epsilon = \left[\epsilon, \frac{1}{\epsilon^2} \right] \times \left[\epsilon, \frac{1}{\epsilon^2} \right]$$

pero cuando $\epsilon \rightarrow 0$ los R_ϵ tienden a Ω .

- 18.- Se quiere construir una lata metálica con forma cilíndrica, sin la tapa superior y con una capacidad de 1 litro. ¿Cuales son las dimensiones que minimizan la cantidad de metal empleada?

Solución: radio base = altura = $\pi^{-1/3}$

Desarrollo: Sean r = radio de la base, h = altura del cilindro. Tenemos $\pi r^2 h = 1$ y además $r, h > 0$. La superficie S de metal empleada verifica

$$S = \pi r^2 + 2\pi r h = \frac{1}{h} + 2\pi h \left(\frac{1}{\pi h} \right)^{1/2} = \frac{1}{h} + 2\sqrt{\pi h}$$

El problema ahora sería encontrar el mínimo absoluto de la función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(h) = \frac{1}{h} + 2\sqrt{\pi h}$ y esto lo sabéis hacer por Cálculo 1.

- 19.- Se dispone de 12 decímetros cuadrados de metal para fabricar una lata cilíndrica con las dos tapas. ¿Qué dimensiones maximizan el volumen de dicha lata?

Solución: radio base = $\left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2}$ altura = $2 \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2}$