4616 – Métodos Numéricos Computacionais

Larissa Oliveira
oliveira.t.larissa@gmail.com

Na última aula...

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Ideia Básica

Substituir a função por um polinômio que aproxime $f(x)$ razoavelmente no intervalo [a,b].

Hoje…

QUADRATURA GAUSSIANA

Na Fórmula de Gauss para o cálculo de integral numérica, mais conhecido como Fórmula de Quadratura Gaussiana, os pontos não são mais escolhidos pela pessoa que utiliza o método, mas seguem um critério bem definido.

O problema continua sendo calcular

$$I = \int_a^b f(x).dx$$

Desejamos desenvolver uma fórmula de integração na forma:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \underbrace{A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \cdots + A_n f(x_n)}$$

QUADRATURA GAUSSIANA

- ✓ Dedução do Método de Gauss para *dois pontos* (para mais pontos, o procedimento é análogo):

Mudar o intervalo de integração de [a,b] para [-1,1]. Isto pode ser conseguido mediante uma troca de variável

troca de variável

$$\begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & & t \end{array}$$

QUADRATURA GAUSSIANA

$x: [a, b]$

$t: [-1, 1]$

$t = -1 : \frac{1}{2}[-\cancel{b} + a + \cancel{b} + a]$

$t = 1 : \frac{1}{2}[b - \cancel{a} + b + \cancel{a}]$

(*)
$$\boxed{x = \frac{1}{2}.[(b-a).t + (b+a)]}$$

$$1.dx = \frac{1}{2}.(b-a).dt \Rightarrow \boxed{dx = \frac{1}{2}.(b-a).dt}$$

Então,

$$I = \int_a^b f(x).dx = \int_{-1}^{1} \underbrace{f\left(\frac{1}{2}.[(b-a).t + (b+a)]\right).\frac{1}{2}(b-a)}.dt$$

$$\therefore I = \int_{-1}^{1} F(t).dt \text{ onde, } F(t) = \frac{1}{2}(b-a).f\left(\frac{1}{2}.(b-a).t + \frac{b+a}{2}\right)$$

QUADRATURA GAUSSIANA

Para dois pontos de Gauss tem-se:

$$I = \int_{-1}^{1} F(t).dt \cong A_o.F(t_0).A_1.F(t_1)$$

pesos de Gauss pontos de Gauss

onde A_o, A_1, t_o e t_1 são incógnitas a serem determinadas e independem da função F escolhida.

Para a determinação destas quatro incógnitas, são necessárias quatro equações, as quais podem ser facilmente obtidas se considerarmos $F(t) = t^k$, $k = 0,1,2,3$.

$t^0 = 1$ t^2

$t^1 = t$ t^3

QUADRATURA GAUSSIANA

Então,

$$\int_{-1}^{1} t^k.dt = \underbrace{A_o.t_o^k + A_1.t_1^k}, \quad \underline{k = 0,1,2,3}$$

k = 0 $\quad \int_{-1}^{1} \cancel{t^0}\,dt = A_0 \cancel{t_0^0} + A_1 \cancel{t_1^0} \qquad 2 = A_0 + A_1$

k = 1 $\quad \int_{-1}^{1} t^1\,dt = A_0 t_0^1 + A_1 t_1^1 \Rightarrow 0 = A_0 t_0 + A_1 t_1 \qquad \left(\frac{t^2}{2}\right)$

k = 2 $\quad \int_{-1}^{1} t^2\,dt = A_0 t_0^2 + A_1 t_1^2 \qquad \frac{2}{3} = A_0 t_0^2 + A_1 t_1^2 \qquad \left(\frac{t^3}{3}\right)$

k = 3 $\quad \int_{-1}^{1} t^3\,dt = A_0 t_0^3 + A_1 t_1^3 \qquad 0 = A_0 t_0^3 + A_1 t_1^3 \qquad \left(\frac{t^4}{4}\right)$

QUADRATURA GAUSSIANA

Assim, obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 2 \\ A_0.t_0 + A_1.t_1 = 0 \\ A_0.t_0^2 + A_1.t_1^2 = \dfrac{2}{3} \\ A_0.t_0^3 + A_1.t_1^3 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{t_0 = -t_1}$$

cuja solução é:

$$* \begin{cases} A_0 = A_1 = 1 \\ t_0 = \dfrac{-\sqrt{3}}{3} \\ t_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

QUADRATURA GAUSSIANA

Então,

$$I = \int_a^b f(x).dx = \int_{-1}^{1} F(t).dt \simeq 1.F\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) + 1.F\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

com,

$$\boxed{F(t) = \frac{1}{2}(b-a).f\left(\frac{1}{2}.(b-a).t + \frac{b+a}{2}\right)}$$

<u>Observação:</u> Essa fórmula é *exata* para o cálculo com polinômios até grau 3.

QUADRATURA GAUSSIANA

Exemplo:

Calcule o valor de $\int_{-1}^{1} (x^3+1)\,dx$ pela Quadratura Gaussiana usando 2 pontos.

b, a, $f(x)$

1) MUDANÇA DE VARIÁVEL

$$x = \frac{1}{2}\left[(b-a)t + (b+a)\right] = \frac{1}{2}\left[(1+1)t + \cancel{1-1}\right] = t$$

$$dx = dt$$

$$\int_{-1}^{1} (x^3+1)\,dx = \int_{-1}^{1} \underbrace{t^3+1}_{F(t)}\,dt$$

$$\underbrace{F(t)}=\frac{1}{2}(b-a)\,f\left(\frac{1}{2}(b-a)t+\frac{1}{2}(b+a)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\,f\left(\frac{1}{2}2t+0\right)$$

$$=\underbrace{f(t)}$$

2) $$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} F(t)\,dt \simeq A_0 F(t_0) + A_1 F(t_1) =$$

$$= 1\,F\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) + 1\,F\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) =$$

$$= \left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)^3 + 1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 + 1 = 2$$

$$\therefore \int_{-1}^{1} (x^3+1)\,dx \simeq 2$$

QUADRATURA GAUSSIANA

Exemplo:

Calcule o valor de $\int_{0}^{10} e^{-x} dx$ pela Quadratura Gaussiana usando 2 pontos.

b

a

1) $x \longrightarrow t$

$$x = \frac{1}{2}\left[(b-a)t + (b+a)\right] = \frac{1}{2}\left[10t + 10\right] = 5t + 5$$ A

$dx = 5dt$

$$2)\ \int_{0}^{10} e^{-x} dx = \int_{-1}^{1} e^{-(5t+5)} 5dt = 5\int_{-1}^{1} e^{-5t-5} dt \simeq$$

$$\simeq A_0 f(t_0) + A_1 f(t_1)$$

$$I_G = F\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + F\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$= e^{-5\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-5} + e^{-5\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-5} = 0,1212$$

$$\int_0^{10} e^{-x}\,dx \simeq 5(0,1212) = 0,606$$

QUADRATURA GAUSSIANA GENERALIZADA

A Fórmula de Quadratura Gaussiana para *n* pontos é dado por:

$$I = \int_{-1}^{1} F(t).dt = \sum_{i=0}^{n-1} A_i.F(t_i)$$

sendo A_i e t_i, pesos e pontos de Gauss respectivamente, que variam dependendo do número de pontos n. +1

QUADRATURA GAUSSIANA GENERALIZADA

Assim,

$$\int_a^b f(x).dx = \int_{-1}^{1} F(t).dt \approx \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} A_i.F(t_i)}$$

com

$$F(t) = \frac{1}{2}(b-a).f\left(\frac{1}{2}.(b-a).t + \frac{b+a}{2}\right)$$

Pontos

n	i	t_i	A_i
1	0	0	2
2	0;1	±0.57735027	1
3	0;2	±0.77459667	0.55555556
	1	0	0.88888889
4	0;3	±0.86113631	0.34785484
	1;2	±0.33998104	0.65214516
5	0;4	±0.90617985	0.23692688
	1;3	±0.53846931	0.47862868
	2	0	0.56888889
6	0;5	±0.93246951	0.17132450
	1;4	±0.66120939	0.36076158
	2;3	±0.23861919	0.46791394
7	0;6	±0.94910791	0.12948496
	1;5	±0.74153119	0.27970540
	2;4	±0.40584515	0.38183006
	3	0	0.41795918
8	0;7	±0.96028986	0.10122854
	1;6	±0.79666648	0.22238104
	2;5	±0.52553242	0.31370664
	3;4	±0.18343464	0.36268378

QUADRATURA GAUSSIANA GENERALIZADA

A Fórmula de Quadratura de Gauss oferece boa precisão, com vantagem de n não muito grande.

Sempre que possível, é aconselhável a sua utilização.

Entretanto, em situações práticas em que a forma analítica da função não é conhecida, ela não pode ser utilizada.

QUADRATURA GAUSSIANA GENERALIZADA

Exemplo:

Calcule o valor de $\int_{-1}^{1}(x^3+1)\,dx$ pela Quadratura Gaussiana usando 4 pontos.

$n=3$

1) JÁ VISTO $\quad x=t \quad F(t)=(t^3+1)$

2) $\int_{-1}^{1}(x^3+1)\,dx=\int_{-1}^{1}(t^3+1)\,dt \cong A_0F(t_0)+A_1F(t_1)+A_2F(t_2)+A_3F(t_3)=$

$=0{,}3479F(-0{,}8611)+0{,}6521F(-0{,}3400)+$

$+0{,}6521F(0{,}3400)+0{,}3479F(0{,}8611)=$

$$f(t) = t^3 + 1$$

$$= 0{,}3479\left((-0{,}8611)^3 + 1\right) + 0{,}6521\left((-0{,}34)^3 + 1\right) +$$

$$+ 0{,}6521\left((0{,}34)^3 + 1\right) + 0{,}3479\left((0{,}8611)^3 + 1\right) = 2$$

$$\therefore \int_{-1}^{1} (x^3 + 1)\, dx \simeq 2$$

QUADRATURA GAUSSIANA GENERALIZADA

Atividade para presença - Aula sobre Integração – 25/08/2020.

Calcular $\int_1^3 3e^x dx$ usando a quadratura gaussiana para n=1 (2 pontos) e n=2 (3 pontos).

$A_0 \quad A_1$

$t_0 \quad t_1$

$A_0 \quad A_1 \quad A_2$

$t_0 \quad t_1 \quad t_2$