4616 – Métodos Numéricos Computacionais

Larissa Oliveira
oliveira.t.larissa@gmail.com

unesp

Na última aula...

Métodos iterativos

$a_{ii} \neq 0$

✓ Um método iterativo para calcular a solução de um sistema $Ax = b$ ($\det(A) \neq 0$) é denominado iterativo quando fornece uma sequência de soluções aproximadas, sendo que cada solução aproximada é obtida pela anterior.

A partir de uma solução inicial x_0 gera-se uma sequência de aproximações x_1, x_2, x_3, x_4, ... cada uma das quais obtidas das anteriores pela repetição do mesmo tipo de processo.

Métodos iterativos

Método de Jacobi-Richardson

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}
$$

2

1

3

$Ax = b$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{cases}
x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n) \\
x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n) \\
\vdots \\
x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1})
\end{cases}
$$

Métodos iterativos

Método de Jacobi-Richardson

$$
\begin{cases}
x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n) \\[2ex]
x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n) \\[2ex]
\vdots \\[2ex]
x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1})
\end{cases}
$$

Forma matricial

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 & \dfrac{-a_{12}}{a_{11}} & \dfrac{-a_{13}}{a_{11}} & \cdots & \dfrac{-a_{1n}}{a_{11}} \\[2ex]
\dfrac{-a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dfrac{-a_{23}}{a_{22}} & \cdots & \dfrac{-a_{2n}}{a_{22}} \\[2ex]
\vdots & & & & \\[2ex]
\dfrac{-a_{n1}}{a_{nn}} & \dfrac{-a_{n2}}{a_{nn}} & & \cdots & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} \dfrac{b_1}{a_{11}} \\[2ex] \dfrac{b_2}{a_{22}} \\[2ex] \vdots \\[2ex] \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}
$$

$X = B X + g$

Métodos iterativos

Método de Jacobi-Richardson

$$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2^{(k)} - \dfrac{a_{13}}{a_{11}} x_3^{(k)} - \cdots - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} x_n^{(k)} + \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} = -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(k)} - \dfrac{a_{23}}{a_{22}} x_3^{(k)} - \cdots - \dfrac{a_{2n}}{a_{22}} x_n^{(k)} + \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1^{(k)} - \dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} x_2^{(k)} - \cdots - \dfrac{a_{nn-1}}{a_{nn}} x_{n-1}^{(k)} + \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{cases}$$

Forma matricial

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{-a_{12}}{a_{11}} & \dfrac{-a_{13}}{a_{11}} & \cdots & \dfrac{-a_{1n}}{a_{11}} \\ \dfrac{-a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dfrac{-a_{23}}{a_{22}} & \cdots & \dfrac{-a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & & & & \\ \dfrac{-a_{n1}}{a_{nn}} & \dfrac{-a_{n2}}{a_{nn}} & & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

Métodos iterativos

Método de Jacobi-Richardson

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (b_1 - a_{12}.x_2^{(k)} - \dots - a_{1n}.x_n^{(k)})/a_{11} \\ x_2^{(k+1)} = (b_2 - a_{21}.x_1^{(k)} - \cdots - a_{1n}.x_n^{(k)})/a_{22} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ x_n^{(k+1)} = (b_n - a_{n1}.x_1^{(k)} - \cdots - a_{n,n-1}.x_{n-1}^{(k)})/a_{nn} \end{cases}$$

x_3 $a_{31}x_1 + a_{32}x_2$ $+ a_{34}x_4 \dots$

Critério de parada:

$$\frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty}{\|x^{(k+1)}\|_\infty} < \varepsilon$$

Valor pré-estabelecido

Computacionalmente usamos também como teste de parada o número máximo de iterações.

Métodos iterativos

Método de Jacobi-Richardson

De forma geral, pode ser escrito como:

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \overbrace{\underbrace{\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)}}_{1 \ldots i-1}}^{\mathrm{I}} - \overbrace{\underbrace{\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}}_{i+1 \ldots n}}^{\mathrm{II}}\right) \Big/ a_{ii} \qquad i = 1, \ldots, n$$

Critério de parada:

$$\frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty}{\|x^{(k+1)}\|_\infty} < \varepsilon$$

Valor pré-estabelecido

Computacionalmente usamos também como teste de parada o número máximo de iterações.

Hoje...

Métodos iterativos

Método de Gauss - Seidel

O método de Gauss – Seidel é uma variante do método de Jacobi – Richardson que acelera a busca da solução para o sistema. Em Jacobi-Richardson temos:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - \dots - a_{1n}\, x_n^{(k)})/a_{11} \\ x_2^{(k+1)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - \dots - a_{2n}\, x_n^{(k)})/a_{22} \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ x_n^{(k+1)} = (b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - \dots - a_{n,n-1}\, x_{n-1}^{(k)})/a_{nn} \end{cases}$$

Quando calculamos $x_2^{(k+1)}$, já sabemos o valor de $x_1^{(k+1)}$ e,
quando calculamos $x_3^{(k+1)}$, já sabemos $x_2^{(k+1)}$ e $x_1^{(k+1)}$
e assim sucessivamente.

Métodos iterativos

Método de Gauss - Seidel

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - \ldots - a_{1n}\,x_n^{(k)})/a_{11} \\
x_2^{(k+1)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - \ldots - a_{2n}\,x_n^{(k)})/a_{22} \\
\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
x_n^{(k+1)} = (b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - \ldots - a_{n,n-1}\,x_{n-1}^{(k+1)})/a_{nn}
\end{cases}
$$

Métodos iterativos

Método de Gauss – Seidel

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = (b_1 - a_{12} x_2^{(k)} - \ldots - a_{1n} x_n^{(k)})/a_{11} \\
x_2^{(k+1)} = (b_2 - a_{21} x_1^{(k+1)} - \ldots - a_{2n} x_n^{(k)})/a_{22} \\
\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
x_n^{(k+1)} = (b_n - a_{n1} x_1^{(k+1)} - \ldots - a_{n,n-1} x_{n-1}^{(k+1)})/a_{nn}
\end{cases}
$$

De modo geral, pode ser escrito como:

$$
x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \Big/ a_{ii} \qquad i = 1, \ldots, n
$$

Métodos iterativos

$$
\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix}
=
\overbrace{\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
-\dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & \\
-\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & -\dfrac{a_{nn-1}}{a_{nn}} & 0
\end{bmatrix}}^{L}
\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix}
+
$$

$$
+
\underbrace{\begin{bmatrix}
0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & -\dfrac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & -\dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\
0 & 0 & -\dfrac{a_{23}}{a_{22}} & \cdots & -\dfrac{a_{2n}}{a_{22}} \\
\vdots & & & & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix}}_{R}
\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}
$$

Métodos iterativos

Método de Gauss - Seidel

$$\left\{\begin{array}{l} x_1^{(k+1)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - \ldots - a_{1n}\, x_n^{(k)})/a_{11} \\ x_2^{(k+1)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - \ldots - a_{2n}\, x_n^{(k)})/a_{22} \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ x_n^{(k+1)} = (b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - \ldots - a_{n,n-1}\, x_{n-1}^{(k+1)})/a_{nn} \end{array}\right.$$

Critério de parada:

$$\frac{\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|_\infty}{\left\|x^{(k+1)}\right\|_\infty} < \varepsilon$$

Valor pré-estabelecido

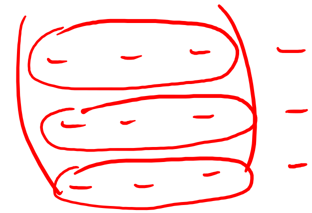
Computacionalmente usamos também como teste de parada o número máximo de iterações.

Métodos iterativos

Critérios de convergência

SUFICIENTE

$$\max_{i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1 \text{ (Critério das Linhas)}$$



B

OU

Critério de Sassenfeld for satisfeito ($\max_{i} \beta_i < 1$), em que os valores β_i são calculados por recorrência através de:

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| . \beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right|$$

$\beta = \max\{\beta_i\} < 1$

Métodos iterativos

Observações

✓ Dado um sistema linear $Ax = b$ pode acontecer que o método de Jacobi-Richardson seja convergente enquanto que o método de Gauss-Seidel seja divergente e vice-versa.

✓ A convergência para os métodos Jacobi-Richardson e Gauss-Seidel não depende do valor inicial $x^{(0)}$.

✓ Basta um critério de convergência ser satisfeito para o método convergir.

$Ax = b$

$\to$ B

✓ Se os critérios não forem satisfeitos o método pode ou não convergir. Neste caso deve ser feita uma análise cuidadosa da sequência de aproximações obtidas.

Métodos iterativos

Exemplo

Resolva o sistema linear:

$Ax = b$

$$x = Bx + g$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

$x_1 = (5 - x_2 - x_3)/5$

$x_2 = (6 - 3x_1 - x_3)/4$

$x_3 = (0 - 3x_1 - 3x_2)/6$

com $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$ e precisão $\varepsilon = 10^{-2}$.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1/5 & -1/5 \\ -3/4 & 0 & -1/4 \\ -3/6 & -3/6 & 0 \end{pmatrix}$$

$-0.2 \quad -0.2 \quad -0.75 \quad -0.25 \quad 0.5 \quad -0.5$

$$g = \begin{pmatrix} 1 \\ 6/4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.5

CONVERGÊNCIA:

LINHA:

$\left|-\frac{1}{5}\right| + \left|-\frac{1}{5}\right| = \frac{2}{5}$

$\left|-\frac{3}{4}\right| + \left|-\frac{1}{4}\right| = 1$

$\left|-\frac{3}{6}\right| + \left|-\frac{3}{6}\right| = 1$

$\max\left\{\frac{2}{5}, 1, 1\right\} = 1$

$\bar{N}$ POSSO AFIRMAR QUE CONVERGE

SASSENFELD:

$\beta_1 = \left|-\frac{1}{5}\right| + \left|-\frac{1}{5}\right| = \frac{2}{5}$

$\beta_2 = \left|-\frac{3}{4}\right| \frac{2}{5} + \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{3}{10} + \frac{1}{4} = \frac{11}{20}$

$\beta_3 = \left|\frac{-3}{6}\right| \frac{2}{5} + \left|\frac{-3}{6}\right| \frac{11}{20} = \frac{1}{5} + \frac{11}{40} = \frac{19}{40}$

$\beta = \max\left\{\frac{2}{5}, \frac{11}{20}, \frac{19}{40}\right\} = \frac{11}{20} < 1$

$\therefore$ SEQ. CONVERGE

$$x_1^{(k+1)} = 1 - 0.2x_2^{(k)} - 0.2x_3^{(k)}$$

$$x_2^{(k+1)} = 1.5 - 0.75x_1^{(k+1)} - 0.25x_3^{(k)}$$

$$x_3^{(k+1)} = 0 - 0.5x_1^{(k+1)} - 0.5x_2^{(k+1)}$$

$$x^{(0)} = (0, 0, 0)$$

$$x_1^{(1)} = 1 - 0.2(0) - 0.2(0) = 1$$

$$x_2^{(1)} = 1.5 - 0.75(1) - 0.25(0) = 0.75$$

$$x_3^{(1)} = 0 - 0.5(1) - 0.5(0.75) = -0.875$$

$$\text{ERRO} = \frac{\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty}{\|x^{(1)}\|_\infty} = \frac{\max\{|1-0|, |0{,}75-0|, |-0{,}875-0|\}}{\max\{|1|, |0{,}75|, |-0.875|\}} = \frac{1}{1} = 1 > \varepsilon$$

$$x_1^{(2)} = 1 - 0.2(0.75) - 0.2(-0.875) = 1.025$$

$$x_2^{(2)} = 1.5 - 0.75(1.025) - 0.25(-0.875) = \;\longrightarrow\; = 0.95$$

$$x_3^{(2)} = -0.5(1.025) - 0.5(0.95) = -0.9875$$

$$\text{ERRO} = \frac{\|x^{(2)} - x^{(1)}\|_\infty}{\|x^{(2)}\|_\infty} = \frac{\max\{|1.025-1|, |0.95-0.75|, |-0.9875+0.875|\}}{\max\{|1.025|, |0.95|, |-0.9875|\}} = \frac{0.2}{1.025} = 0.1951$$

$$x_1^{(3)} = 1 - 0.2(0.95) - 0.2(-0.9875) = 1.0075$$

$$x_2^{(3)} = 1.5 - 0.75(1.0075) - 0.25(-0.9875) = 0.9913$$

$$x_3^{(3)} = -0.5(1.0075) - 0.5(0.9913) = -0.9994$$

$$\text{ERRO} = \frac{\|x^{(3)} - x^{(2)}\|_\infty}{\|x^{(3)}\|_\infty} = \frac{\max\{|1.0075-1.025|, |0.9913-0.95|, |-0.9994+0.9875|\}}{\max\{|1.0075|, |0.9913|, |-0.9994|\}}$$

$$= \frac{0.0413}{1.0075} = 0.0410 > \varepsilon$$

$$x_1^{(4)} = 1 - 0.2(0.9913) - 0.2(-0.9994) = \longrightarrow = 1.0016$$

$$x_2^{(4)} = 1.5 - 0.75(1.0016) - 0.25(-0.9994) = 0.9986$$

$$x_3^{(4)} = -0.5(1.0016) - 0.5(0.9986) = -1,0001$$

$$\text{ERRO} = \frac{\|x^{(4)} - x^{(3)}\|_\infty}{\|x^{(4)}\|_\infty} = \frac{\max\{|1.0016 - 1.0075|, |0.9986 - 0.9913|, |-1.0001 + 0.9994|\}}{\max\{|1.0016|, |0.9986|, |-1.0001|\}} =$$

$$= \frac{0.0074}{1.0016} = 0.0074 < 10^{-2}$$

$$\bar{X} \cong \begin{pmatrix} 1.0016 \\ 0.9986 \\ -1.0001 \end{pmatrix} //$$

Comparação

	DIRETOS	ITERATIVOS
CONVERGÊNCIA	Finitos, obtém a solução de qualquer sistema não singular de equações.	Convergência assegurada sob determinadas condições.
ESPARSIDADE	Não Preservam esparsidade.	Preservam esparsidade.
ERROS DE ARREDONDAMENTO	Sérios problemas, para amenizar adotam-se técnicas de pivoteamento.	Tem menos erros de arredondamento, isto porque a convergência uma vez assegurada independe da aproximação inicial.

Método de Gauss - Seidel

Atividade para contabilizar presença

Usando o método iterativo de Gauss-Seidel, determine uma solução aproximada para o seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 11 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Considere $x^{(0)} = (0,0,0)^T$ e precisão $\varepsilon = 0{,}01$. Verifique a condição de convergência.