4616 – Métodos Numéricos Computacionais

Larissa Oliveira
oliveira.t.larissa@gmail.com

Recados

Cronograma

Aula 01	17/fev	Recepção
Aula 02	18/fev	Recepção
Aula 03	02/mar	Introdução
Aula 04	03/mar	Erros
Aula 05	09/mar	Diferenciação
Aula 06	10/mar	Diferenciação
Aula 07	22/jun	ZF
Aula 08	23/jun	ZF
Aula 09	29/jun	ZF
Aula 10	30/jun	ZF
Aula 11	06/jul	SL
Aula 12	**07/jul**	**SL**
Aula 13	13/jul	SL
Aula 14	14/jul	SL
Aula 15	20/jul	SL
Aula 16	21/jul	SL
Aula 17	**27/jul**	**Prova 1**

Aula 18	28/jul	Interpolação
Aula 19	03/ago	Interpolação
Aula 20	04/ago	Interpolação
Aula 21	10/ago	Ajuste
Aula 22	11/ago	Ajuste
Aula 23	17/ago	Integração
Aula 24	18/ago	Integração
Aula 25	24/ago	Integração
Aula 26	25/ago	SNL
Aula 27	31/ago	SNL
Aula 28	01/set	EDO
Aula 29	07/set	EDO
Aula 30	**08/set**	**Prova 2**

Listas e trabalhos

Lista de zero de funções: 20/07 às 23h59

À mão

Trabalho computacional sobre zero de funções: ~~27~~ 28/07 às 23h59 (prova)

Grupo de até 4 pessoas

Haverá também lista e trabalho sobre sistemas lineares.

Critério de Avaliação Atualizados

Provas: Serão realizadas DUAS provas - P1 e P2.
A média de provas (MP) será calculada pela média aritmética:

$$MP = (P1 + P2)/2.$$

Trabalhos e Listas: MT será calculada pela média aritmética dos trabalhos e listas desenvolvidos durante o semestre.

Média Final: Será calculada da seguinte forma:

$$MF = \cancel{0,8}MP + \cancel{0,2}MT.$$

$$MF = 0,6MP + 0,4MT.$$

Exame: única prova contemplando o conteúdo do semestre
data a confirmar...

Na última aula...

SISTEMAS LINEARES

Sistema de Equações Lineares

Um **sistema de equações lineares** ou simplesmente **sistema linear** é um conjunto de $\cancel{n}$ m equações lineares:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

a_{ij} e $b_{\cancel{k}\,i}$ são constantes reais, para i, k = 1,..., m e j = 1,..., n.

SISTEMAS LINEARES

Forma Matricial: Ax = b

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\mathbf{A} \qquad\qquad \mathbf{x} \qquad\qquad \mathbf{b}$$

Solução do sistema linear: $x^* = (x_1, x_2, \ldots x_n)^T$

SISTEMAS LINEARES

Matriz Triangula Inferior

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matriz Triangula Superior

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

SISTEMAS LINEARES

Sistemas Equivalentes

Sejam P e P′ dois sistemas lineares (quadrados ou retangulares).
O sistema P′ é equivalente a P (notação: P ~ P′) se P′ é obtido de P a partir das seguintes operações elementares:

- ✓ Troca da posição de linhas ou de colunas de P;
- ✓ Multiplicação de uma linha de P por um escalar $\alpha \neq 0$;
- ✓ Multiplicação uma linha de P por um escalar $\alpha \neq 0$ e adição a uma outra linha de ~~S~~P.

OBS: Se P e P′ são equivalentes, então a solução de P′ é solução de P.

SISTEMAS LINEARES

Sistemas Equivalentes

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & = & 0 \end{cases}$$

multiplicando a 1º. linha de P por α = – 1 e adicionando à 2º linha de P, obtemos o sistema equivalente P' dado por:

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ 0x_1 & - & 2x_2 & = & -2 \end{cases}$$

Na forma matricial: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

SISTEMAS LINEARES

Classificação dos sistemas lineares

Métodos diretos: são aqueles que fornecem solução exata do sistema linear, caso ela exista, após um número finito de operações.

Métodos iterativos: geram uma sequência de vetores $\{x^{(k)}\}$ a partir de uma aproximação inicial $x^{(0)}$. Sob certas condições, esta sequência converge para a solução x^*, caso ela exista.

$$\mathbf{x = A^{-1}b} \longrightarrow \text{Técnicas mais avançadas}$$

SISTEMA TRIANGULAR SUPERIOR

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

em que $a_{ii} \neq 0$; i = 1, 2,..., n.

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$x_i = \left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j \right) \Big/ a_{ii}, i = (n-1), \ldots, 1$$

SISTEMA TRIANGULAR INFERIOR

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

em que $a_{ii} \neq 0$; i = 1, 2,..., n.

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

$$x_i = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j \right) \Big/ a_{ii}, i = 2, \ldots, n$$

Hoje...

MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS

det(A) ≠ 0

Seja o sistema linear $Ax = b$, em que A possui todas as submatrizes principais não singulares. O método de eliminação de Gauss consiste em transformar o sistema dado num sistema triangular superior equivalente pela aplicação repetida da operação.

"subtrair de uma equação outra equação multiplicada por uma constante diferente de zero".

MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS

Considere o sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

HP.

$a_{11}^{(1)} \neq 0$
$\det(A_1) \neq 0$
pivô

Matriz dos Coeficientes

MATRIZ AUMENTADA

$$A^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right)$$

A b

MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS

Passo 1:

Eliminar a incógnita x_1 da 2ª , 3ª , ..., nª equações (isto é, zerar os elementos da primeira coluna abaixo da diagonal).

✓ Subtraímos da 2ª equação a 1ª equação multiplicada por:

$$\boxed{m_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}}$$

multiplicadores

MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS

✓ Subtraímos da 3ª equação a 1ª equação multiplicada por:

$$\boxed{m_{31} = \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}}$$

.

.

.

✓ Subtraímos da nª equação a 1ª equação multiplicada por:

$$\boxed{m_{n1} = \frac{a_{n1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}}$$

MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS

Matriz resultante

$$A^{(2)} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array}\right)$$

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, i = 2, .., n$$

$$\underline{a_{ij}^{(2)}} = a_{ij}^{(1)} - m_{i1} a_{1j}^{(1)} i = 2, .., n, j = 1, 2, ..., n$$

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i1} b_1^{(1)} i = 2, .., n$$

MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS

Hip

$a_{22}^{(2)} \neq 0$
det(A_2) $\neq 0$
pivô

Matriz resultante

$$A^{(2)} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array}\right)$$

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, i = 2,..,n$$

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i1} a_{1j}^{(1)} i = 2,..,n, j = 1,2,...,n$$

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i1} b_1^{(1)} i = 2,..,n$$

MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS

Passo 2:

Eliminar a incógnita x_2 da 3ª , 4ª , ..., nª equações (isto é, zerar os elementos da segunda coluna abaixo da diagonal).

✓ Subtraímos da 3ª equação a 2ª equação multiplicada por:

$$\boxed{m_{32} = \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}}$$

MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS

- ✓ Subtraímos da 4ª equação a 2ª equação multiplicada por:

$$m_{42} = \frac{a_{42}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$$

.
.
.

- ✓ Subtraímos da nª equação a 2ª equação multiplicada por:

$$m_{n2} = \frac{a_{n2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$$

MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS

Matriz resultante

$$A^{(3)} = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & a_{3n}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} & b_n^{(3)} \end{array} \right)$$

$$m_{i2} = \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}, i = 3, .., n$$

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - m_{i2} a_{2j}^{(2)} i = 3, .., n, \; j = 2, 3, ..., n$$

$$b_i^{(3)} = b_i^{(2)} - m_{i2} b_2^{(2)} i = 3, .., n$$

MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS

$a_{33}^{(3)} \neq 0$
$\det(A_3) \neq 0$
pivô

Matriz resultante

$$A^{(3)} = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & a_{3n}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} & b_n^{(3)} \end{array}\right)$$

$$m_{i2} = \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}, i = 3,..,n$$

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - m_{i2}a_{2j}^{(2)} i = 3,..,n,\ j = 2,3,...,n$$

$$b_i^{(3)} = b_i^{(2)} - m_{i2}b_2^{(2)} i = 3,..,n$$

MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS

Seguindo raciocínio análogo, procede-se até a etapa (n – 1).

Passo (n – 1)

Por hipótese $a_{n-1,n-1}^{(n-1)} \neq 0$, pois, $\det(A_{(n-1)}) \neq 0$

✓ Subtraímos da nª equação, a (n – 1)ª equação multiplicada por

$$\boxed{m_{n,(n-1)} = \frac{a_{n,(n-1)}^{(n-1)}}{a_{(n-1),(n-1)}^{(n-1)}}}$$

MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS

Matriz final:

$$A^{(n)} = \left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & & b_3^{(3)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)} & & b_n^{(n)} \end{array}\right)$$

$$m_{n,(n-1)} = \frac{a_{n,(n-1)}^{(n-1)}}{a_{(n-1),(n-1)}^{(n-1)}} \qquad b_i^{(n)} = b_i^{(n-1)} - m_{n,(n-1)} b_{n-1}^{(n-1)}, i = n$$

$$a_{ij}^{(n)} = a_{ij}^{(n-1)} - m_{n,(n-1)} a_{(n-1),j}^{(n-1)}, i = n, j = (n-1), n$$

MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS

Sistema triangular equivalente ao original:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{1,(n-1)}^{(1)} + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\
\qquad a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{2,(n-1)}^{(2)} + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\
\qquad\qquad a_{33}^{(3)}x_3 + \cdots + a_{3,(n-1)}^{(3)} + a_{3n}^{(3)}x_n = b_3^{(3)} \\
\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad a_{(n-1),(n-1)}^{(n-1)}x_{n-1} + a_{(n-1),n}^{(n-1)}x_n = b_{n-1}^{(n-1)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n)}x_n = b_n^{(n)}
\end{array}
\right.
$$

MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS

Exemplo

Utilizando o método de Eliminação de Gauss, resolver o sistema:

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 - 1x_3 = 7 \\ 2x_1 + 4x_2 + 1x_3 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 13 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$A^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \\ \hline 3 & 2 & 8 & 13 \end{array}\right)$$

PASSO 1:

Pivô $= a_{11}^{(1)} = 6$

2° LINHA

$$m_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$a_{21}^{(2)} = a_{21}^{(1)} - m_{21}\, a_{11}^{(1)} = 2 - \frac{1}{3} \times 6 = 0$$

$$a_{22}^{(2)} = a_{22}^{(1)} - m_{21}\, a_{12}^{(1)} = 4 - \frac{1}{3} \times 2 = \frac{10}{3}$$

$$a_{23}^{(2)} = a_{23}^{(1)} - m_{21}\, a_{13}^{(1)} = 1 - \frac{1}{3} \times (-1) = \frac{4}{3}$$

$$b_{2}^{(2)} = b_{2}^{(1)} - m_{21}\, b_{1}^{(1)} = 7 - \frac{1}{3} \times 7 = \frac{14}{3}$$

3ª linha:

$$m_{31} = \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$a_{31}^{(2)} = a_{31}^{(1)} - m_{31}\, a_{11}^{(1)} = 3 - \frac{1}{2} \times 6 = 0$$

$$a_{32}^{(2)} = a_{32}^{(1)} - m_{31}\, a_{12}^{(1)} = 2 - \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

$$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - m_{31}\, a_{13}^{(1)} = 8 - \frac{1}{2} \times (-1) = \frac{17}{2}$$

$$b_{3}^{(2)} = b_{3}^{(1)} - m_{31}\, b_{1}^{(1)} = 13 - \frac{1}{2} \times 7 = \frac{19}{2}$$

Passo 2:

$$A^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 10/3 & 4/3 & 14/3 \\ 0 & 1 & 17/2 & 19/2 \end{array}\right)$$

Pivô: $a_{22}^{(2)} = 10/3$

3º LINHA:

$$m_{32} = \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} = \frac{3}{10}$$

$$a_{32}^{(3)} = a_{32}^{(2)} - m_{32}\, a_{22}^{(2)} = 1 - \frac{3}{10} \times \frac{10}{3} = 0$$

$$a_{33}^{(3)} = a_{33}^{(2)} - m_{32}\, a_{23}^{(2)} = \frac{17}{2} - \frac{3}{10} \times \frac{4}{3} = \frac{81}{10}$$

$$b_3^{(3)} = b_3^{(2)} - m_{31} b_2^{(2)} = \frac{19}{2} - \frac{3}{10} \times \frac{14}{3} = \frac{81}{10}$$

$$A^{(3)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 10/3 & 4/3 & 14/3 \\ 0 & 0 & 81/10 & 81/10 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 0 & 10/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 81/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14/3 \\ 81/10 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = 1$$

$$x_2 = \frac{\left(\frac{14}{3} - \frac{4}{3}(1)\right)}{\frac{10}{3}} = 1$$

$$x_1 = \frac{7 - 2(1) + 1}{6} = 1$$

$$x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

Se o pivô for nulo e também no caso do pivô estar muito próximo de zero, o método pode conduzir a resultados totalmente imprecisos. Isso porque em qualquer calculadora ou computador os cálculos são feitos com aritmética de precisão finita e, pivôs próximos de zero dão origem a multiplicadores bem maiores que a unidade, que por sua vez, originam uma ampliação dos erros de arredondamento.

Para contornarmos esse problema adotamos uma estratégia de pivoteamento!!!!!

MÉTODO DE GAUSS COM PIVOTEAMENTO PARCIAL

O Método de Gauss com Pivoteamento Parcial consiste em transformar o sistema dado, através de operações elementares sobre as linhas, em sistema triangular superior, tomando como **pivô** em cada passo, o elemento de maior valor absoluto abaixo da diagonal de cada coluna da matriz **A**

Se

$$\boxed{a_{kk}^{(k)} = 0} \Rightarrow \boxed{\det(A_k) = 0}$$

O sistema ainda pode ter solução determinada, basta que equações sejam permutadas de modo que o coeficiente da k^{a} incógnita seja $\neq 0$, ou seja, $\det(A) \neq 0$.

MÉTODO DE GAUSS COM PIVOTEAMENTO PARCIAL

Exemplo:

Utilizando o Método de Gauss com Pivoteamento Parcial, resolver o sistema:

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + 1x_2 = 4 \\ 3x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

$$A^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right) \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$a_{11}^{(1)}$$

$$A^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

$$A^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 5/3 & 3 & 5/3 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right) \quad L_2 \longleftrightarrow L_3$$

$$A^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 5/3 & 3 & 5/3 \end{array}\right)$$

$$\text{Pivô} = a_{22}^{(2)} = 3$$

$$m_{32} = \frac{\frac{5}{3}}{3} = \frac{5}{9}$$

$$A^{(3)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7/9 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow X^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

MÉTODO DE GAUSS COM PIVOTEAMENTO TOTAL

O Método de Gauss com Pivoteamento Total consiste em transformar o sistema dado, em sistema triangular superior equivalente, tomando como **pivô**, em cada passo, o elemento de **maior valor absoluto entre todos os elementos da submatriz** abaixo da k-ésima linha e a partir da k-ésima coluna

As trocas de colunas na matriz produzem trocas no vetor solução. Desta forma, as trocas devem ser armazenadas em um vetor $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$, em que q_j fornece a coluna na posição j.

Esta estratégia não é usualmente empregada, pois, envolve uma comparação entre os elementos envolvidos na troca de linhas e colunas, que acarreta um grande esforço computacional.

MÉTODO DE GAUSS COM PIVOTEAMENTO TOTAL

Exemplo:

Utilizando o Método de Gauss com Pivoteamento Total, resolver o sistema:

$$\begin{cases} 4x_1 & + & & + & x_3 & = & 0 \\ & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ & + & x_2 & + & 6x_3 & = & 1 \end{cases}$$

$$A^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \end{array}\right)$$

$Q = (1, 2, 3)$

$C_1 \longleftrightarrow C_3$

$Q = (3, 2, 1)$

$$A^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_1 \leftrightarrow L_3 \qquad A^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

Pivô $= a_{11}^{(1)} = 6 \rightarrow$ Eliminação Gauss

$$A^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 11/6 & 0 & 11/6 \\ 0 & -1/6 & 4 & -1/6 \end{array}\right)$$

$Q = (3,2,1)$

$C_2 \leftrightarrow C_3$

$Q = (3,1,2)$

$$A^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 11/6 & 11/6 \\ 0 & 4 & -1/6 & -1/6 \end{array}\right) \quad L_2 \leftrightarrow L_3 \qquad A^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1/6 & -1/6 \\ 0 & 0 & 11/6 & 11/6 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1/6 \\ 0 & 0 & 11/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/6 \\ 11/6 \end{pmatrix}$$

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Atividade para contabilizar presença

1. Usando o método de eliminação de Gauss, resolva o sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

2. Usando o método de eliminação de Gauss com pivoteamento parcial, resolva o sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$