Nome: Davi Augusto Neves Leite

RA: 191027383

Data de Entrega: 22/02/2021

Trabalho 2 – Sequências

1) Prova Olímpica: Salto em Comprimento.

Considerando as "Melhores marcas olímpicas femininas", presentes no Wikipédia (2021), tem-se a seguinte sequência, em metros, que será utilizada em todo este trabalho (desconsiderando repetições):

$$SC = \{7{,}11;\ 7{,}12;\ 7{,}14;\ 7{,}15;\ 7{,}17;\ 7{,}22;\ 7{,}27;\ 7{,}40, \dots\}$$

Dessa forma, analisando a sequência acima, tem-se o seguinte (considerar também valores futuros da sequência!):

$$a_1 = 7{,}11;\ a_2 = 7{,}12;\ a_3 = 7{,}14;\ \dots$$

Ou seja:

$$a_1 < a_2 < a_3 \equiv a_n \leq a_{n+1}\ (Crescente)$$

Portanto: a sequência acima é monótona! (Explicação detalhada no vídeo).

2)

Sabendo que a sequência acima é monótona; por teorema, para que a mesma seja convergente, é necessário que ela tenha um **limitante**. Esse limitante é definido como um valor **real** que simboliza ou o **máximo** que a sequência pode chegar ou não (superior), no caso das crescentes, ou o **mínimo** que a sequência pode chegar (inferior) ou não, no caso das decrescentes.

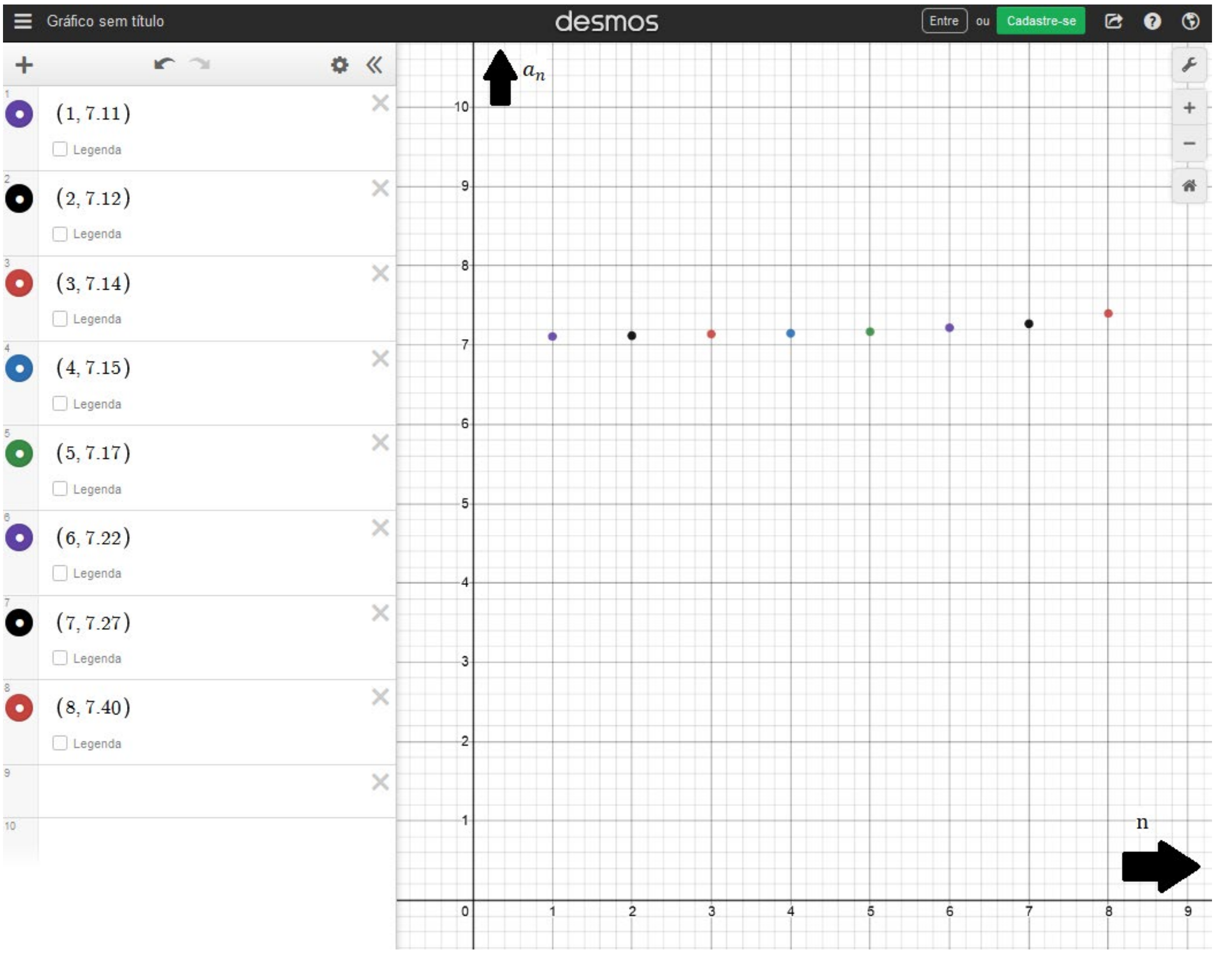
Dessa forma, como a sequência SC é **crescente** (visto no item anterior), pode-se definir um limitante **superior** de duas formas:

- Estimar um valor desejado que esteja relativamente acima dos da sequência. Por exemplo, um limitante superior poderia ser 10km (ou 10000m) para a sequência acima.
- Encontrar o **limite** da função $a_n(n)$ associada a sequência quando $n \to \infty$. Essa função nada mais simboliza do que encontrar o **termo geral** da sequência (quando possível!).

A partir da segunda forma tem-se que: se o limite existir e for um valor real L, então L será o seu limitante. Do contrário, ou seja, caso o limite não exista ou ser igual a ∞, então não há limitante real para função e, portanto, a sequência não será convergente neste caso.

Além disso, tem-se o seguinte gráfico da sequência SC:

Gráfico 1 – Sequência SC no plano cartesiano



Utilizando a primeira forma e, com base no gráfico acima, tem-se o seguinte limitante superior estipulado:

$$LS = 10$$

Portanto, a sequência é limitada e, junto a informação do item anterior (monótona), é **convergente**.

3)

Analisando os itens anteriores, é natural supor que o recorde vai aumentando a cada competição olímpica. Ou seja, pode-se afirmar que vai chegar algum momento (algum n da sequência) em que esse recorde (a_n) seja imbatível para qualquer ser humano.

Contudo, como levantado no item anterior, existe um **limite** para essa sequência **convergente**, de tal modo que ela naturalmente não chegará neste valor. Em outras palavras, utilizando o gráfico do item anterior, suponha que uma mulher atualmente tente conseguir o recorde de 10 metros para o salto. Contudo, como 10 metros para o salto é o limite superior da sequência dita convergente, significa que essa mulher nunca irá conseguir esse recorde.

Agora, vamos supor que o recorde vai aumentando 0,1 metro a cada competição. É natural supor que, em algum momento, o recorde mundial irá ser o próprio limitante superior, de valor 10 metros. Mas sabe-se que, por teorema matemático, isso não irá acontecer, pois existe um limite superior para essa sequência em que ela **não é obrigada** a valer!

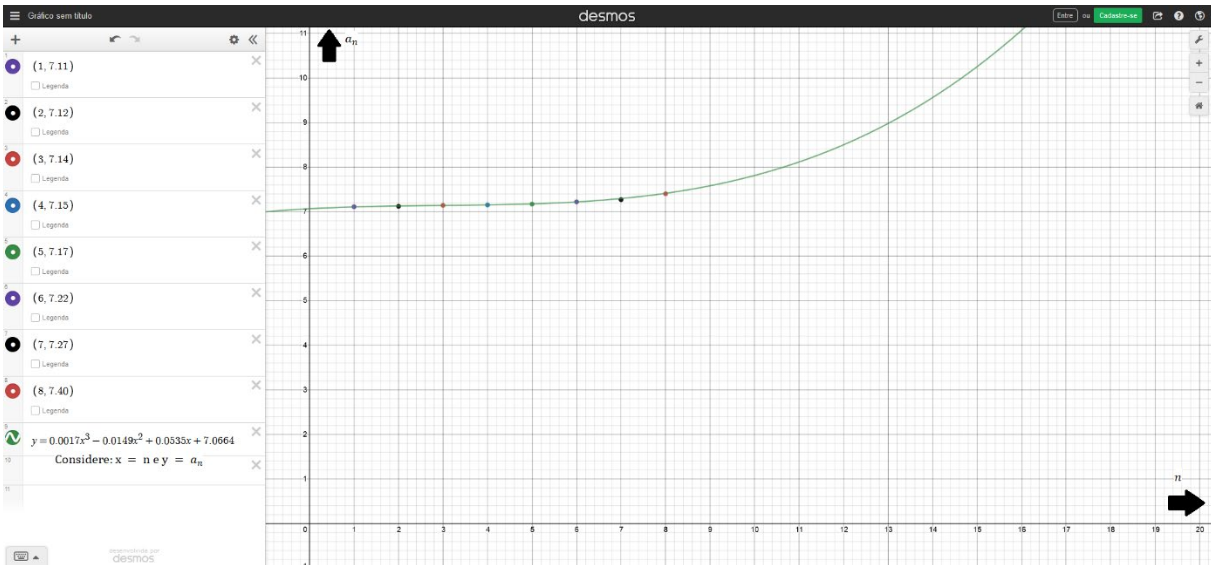
Contudo, o paradoxo vem exatamente se levado em conta a questão biológica: será que é possível que, em algum momento futuro, exista uma “super atleta” capaz de alcançar esses 10 metros na competição? Ora, se levarmos em conta os fatores como genética e mutação celular, pode-se afirmar que existirá um ser humano capaz de bater os recordes atualmente e seguindo a ideia do parágrafo anterior. Contudo, como o limitante superior tem a função de justamente ser um parâmetro para algo “inatingível”, não é possível afirmar se existirá ou não um “super atleta” capaz de atingir e superar esse limite.

4)

Utilizando o software Excel, foi estipulado uma função polinomial de grau 3 para a sequência. A função obtida e o gráfico respectivo são:

$$a_n(n) = 0{,}0017n^3 - 0{,}0149n^2 + 0{,}0535n + 7{,}0664$$

Gráfico 2 – Função polinomial estipulada para a sequência SC



Encontrando o limite da função acima, quando $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n(n) \leftrightarrow \lim_{n\to\infty} 0{,}0017n^3 - 0{,}0149n^2 + 0{,}0535n + 7{,}0664$$

$$Pela\ regra\ do\ polinômio\colon \lim_{n\to\infty} 0{,}0017\,n^3 = \infty$$

Dessa forma, surge uma incoerência se observado com a resposta encontrada no item 2: como a função pode ser convergente se o limite com $n \to \infty$ deu ∞? A resposta é simples: essa função, como colocado no início deste exercício, é uma **estipulação** da sequência SC, e não o **próprio termo geral**. Dessa forma, não é possível afirmar se esse resultado encontrado pela função estipulada é, de fato, encontrado no termo geral da sequência.

Além disso, levando em conta que se trata de uma competição olímpica e, portanto, do ser humano, sabe-se que é impossível para um humano pular uma distância suficientemente grande e "inimaginável", como encontrado no limite acima. Dessa forma, o limitante superior encontrado no item 2 continua valendo, até encontrar o limite quando $n \to \infty$ do termo geral da sequência SC, o qual deve dar um valor real (pelo critério de convergência).

Referências Bibliográficas

Salto em comprimento: melhores marcas mundiais e olímpicas: https://pt.wikipedia.org/wiki/Salto_em_comprimento.

Calculadora Gráfica utilizada na confecção dos gráficos da sequência: https://www.desmos.com/calculator?lang=pt-BR.