4616 – Métodos Numéricos Computacionais

Larissa Oliveira
oliveira.t.larissa@gmail.com

unesp

INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

Interpolar uma função $f(x)$ consiste em aproximar essa função por outra função $g(x)$, escolhida entre uma classe de funções definida a priori e que satisfaça algumas propriedades. A função $g(x)$ é então usada em substituição à função $f(x)$.

INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

A necessidade de se efetuar esta substituição surge em várias situações, como por exemplo:

- ✓ São conhecidos somente os valores numéricos da função para um conjunto de pontos e é necessário calcular o valor da função em um ponto não tabelado;

- ✓ A função em estudo tem uma expressão tal que operações como a diferenciação e a integração são difíceis (ou mesmo impossíveis) de serem realizadas.

INTERPOLAÇÃO GEOMÉTRICA

Considere (n +1) pontos distintos x_0, x_1, ... , x_n, chamamos *nós da interpolação,* e os valores de $f(x)$ nesses pontos:

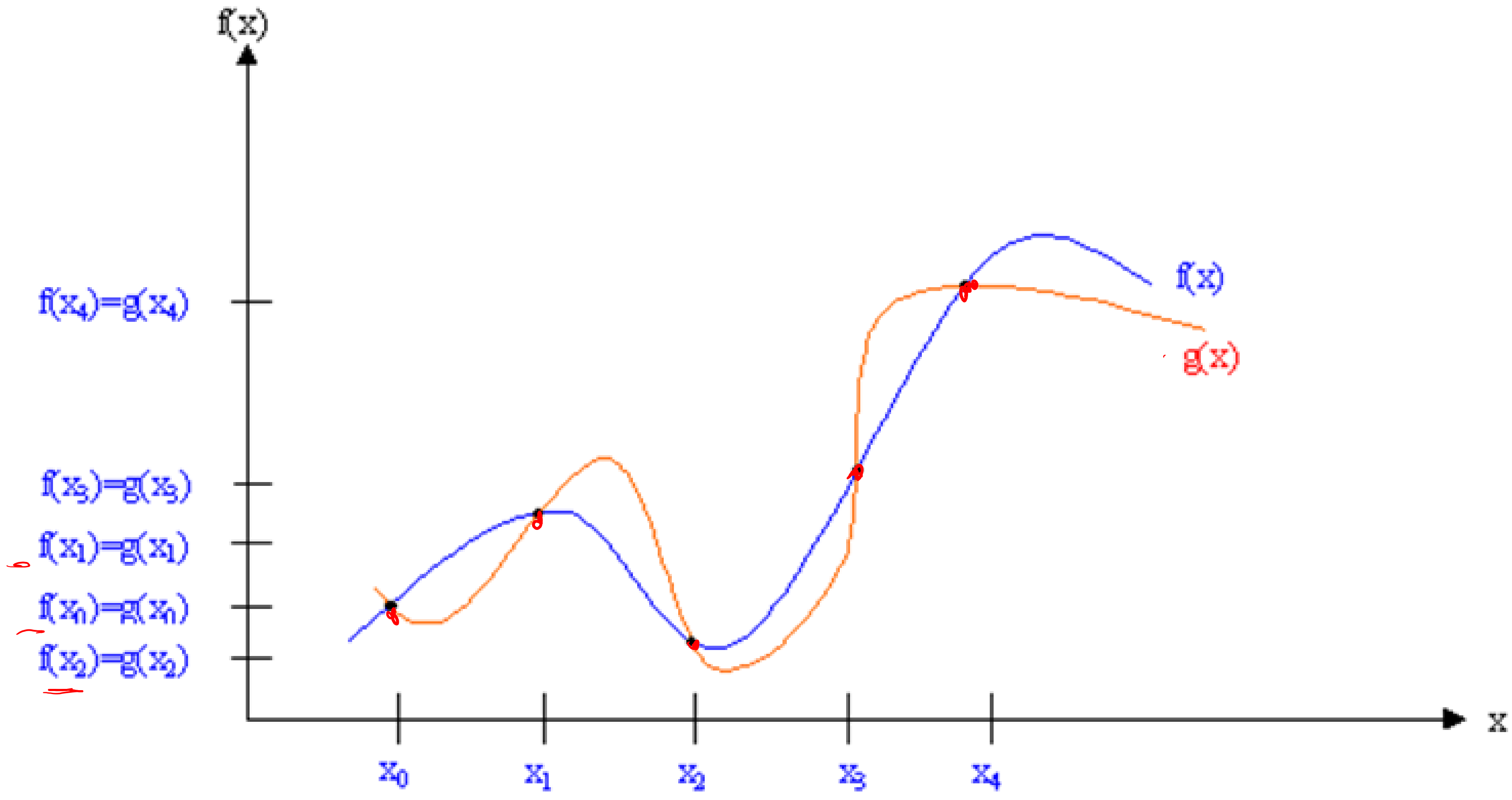
$$f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n).$$

Interpolar $f(x)$ consiste em obter uma função $g(x)$ tal que:

$$\begin{cases} g(x_0) = f(x_0) \\ g(x_1) = f(x_1) \\ g(x_2) = f(x_2) \\ \quad . \qquad\quad . \\ \quad . \qquad\quad . \\ \quad . \qquad\quad . \\ g(x_n) = f(x_n) \end{cases}$$

INTERPOLAÇÃO GEOMÉTRICA

Para n = 4 (5 nós)



INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

A interpolação por meio de polinômios consiste em, dados (n+1) pontos distintos $(x_0,f(x_0))$, $(x_1,f(x_1))$, ..., $(x_n,f(x_n))$, aproximar $f(x)$ por um polinômio de grau ≤ n:

$$f(x_i) = p_n(x_i), i = 0,\dots,n$$

Representação de $p_n(x)$:

$$\boxed{p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n} = f(x)$$

Obter $p_n(x)$ consiste em determinar os coeficientes

$$\boxed{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n}$$

INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

Teorema: *Existência e unicidade do Polinômio Interpolador*

Seja $f(x)$ definida em $x_0, x_1, \dots, x_n$, (n + 1) pontos distintos de um intervalo [a, b]. Então existe um único polinômio $p(x)$ de grau menor ou igual a n tal que .

$$p(x_i) = f(x_i) = y_i, i = 0, \dots, n$$

INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

Determinando os coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$

Da condição $p_n(x_k) = f(x_k)$, $\forall$ k = 0, 1, 2, ..., n, temos:

$$\begin{cases} a_0 & + & a_1 x_0 & + & a_2 x_0^2 & + & \cdots & + & a_n x_0^n & = & f(x_0) \\ a_0 & + & a_1 x_1 & + & a_2 x_1^2 & + & \cdots & + & a_n x_1^n & = & f(x_1) \\ . & & . & & . & & . & & . & & . \\ . & & . & & . & & . & & . & & . \\ . & & . & & . & & . & & . & & . \\ a_0 & + & a_1 x_n & + & a_2 x_n^2 & + & \cdots & + & a_n x_n^n & = & f(x_n) \end{cases}$$

com (n + 1) equações e (n + 1) variáveis: $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

A matriz dos coeficientes do sistema é dada por:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

Matriz de Vandermonde!!!

Desde que $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sejam pontos distintos, $\boxed{\det(A) \neq 0}$

INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

Exemplo: Encontrar o polinômio de grau ~~maior~~ MENOR ou igual a 2 que interpola os pontos da tabela

x_i	-1	0	2
$f(x_i)$	4	1	-1

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$P_2(-1) = a_0 - a_1 + a_2 = 4$$

$$P_2(0) = a_0 = 1$$

$$P_2(2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2 = -1$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$a_0 = 1$

$a_1 = -7/3$

$a_2 = 2/3$

$$\therefore P_2(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2$$

INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

Exemplo: Sistema mal condicionado

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.00001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2.00001 \end{bmatrix}$$

$\bar{x} = (1,1)^t.$

$$\rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.00001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1.99990 \end{bmatrix}$$

$\bar{x} = (12,-10)^t.$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 100001 & -100000 \\ -100000 & 100000 \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_\infty = 2.00001$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = 200001$$

nº CONDIÇÃO

$$\boxed{K(A)} = \|A\| \, \|A^{-1}\| = 400004.00001$$

FORMA DE LAGRANGE DO POLINÔMIO DE INTERPOLAÇÃO

Seja $f(x)$ definida um intervalo [a, b] e sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n$, (n + 1) pontos distintos em [a, b] e $\boxed{y_i = f(x_i)}$, i = 0, ..., n.
Seja $p_n(x)$ o polinômio de grau $\leq n$ que interpola f em $x_0, \ldots, x_n$.
Representamos $p_n(x)$ na forma:

$p_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$

$$\boxed{p_n(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \ldots + y_n l_n(x)}$$

Polinômios de grau n.

Para cada i, a condição $p_n(x_i) = y_i$ deve ser satisfeita, ou seja:

$$p_n(x_i) = y_0 \underbrace{l_0(x_i)} + y_1 \underbrace{l_1(x_i)} + \ldots + y_n l_n(x_i) = y_i$$

FORMA DE LAGRANGE DO POLINÔMIO DE INTERPOLAÇÃO

A forma mais simples de se satisfazer esta condição é impor:

$$\boxed{\ell_k(x_i) = \begin{cases} 0 & se\ k \neq i \\ 1 & se\ k = i \end{cases}}$$

$$\frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (x_k - x_j)}$$

Para satisfazer esta condição, definimos:

$$\boxed{\ell_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}}$$

Polinômio de grau n

FORMA DE LAGRANGE DO POLINÔMIO DE INTERPOLAÇÃO

A forma de Lagrange para o polinômio interpolador é dada por:

PRODUTÓRIO

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \ell_k(x) \text{, em que } \ell_k(x) = \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (x_k - x_j)}$$

FORMA DE LAGRANGE DO POLINÔMIO DE INTERPOLAÇÃO

Exemplo

	x_0	x_1	x_2
x	-1	0	3
f(x)	15	8	-1
	y_0	y_1	y_2

a) Determine o polinômio de interpolação de Lagrange.

b) Calcule $f(1)$.

a) $P_2(x) = y_0 \, \ell_0(x) + y_1 \, \ell_1(x) + y_2 \, \ell_2(x)$

$$\ell_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x-0)(x-3)}{(-1-0)(-1-3)} = \frac{x^2 - 3x}{4}$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-3)}{(0+1)(0-3)} =$$

$$= \frac{x^2-2x-3}{-3} = \frac{-x^2+2x+3}{3}$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)(x-0)}{(3+1)(3-0)} = \frac{x^2+x}{12}$$

$$P_2(x) = 15\left(\frac{x^2-3x}{4}\right) + 8\left(\frac{-x^2+2x+3}{3}\right) + (-1)\left(\frac{x^2+x}{12}\right)$$

$$P_2(x) = x^2 - 6x + 8$$

b) $f(1) \simeq g(1) = P_2(1) = 3$

$$1^2 - 6(1) + 8 = 9 - 6 = 3$$

INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

Atividade para contabilizar presença (upload até 29/07 às 15h59)

Considere a função $f(x)$ definida nos pontos, conforme tabela:

$\boldsymbol{x_i}$	0	0,5	1
$\boldsymbol{f(x_i)}$	1,3	2,5	0,9

Determine o polinômio interpolador, usando a fórmula de Lagrange, e estime $f(0,8)$.