4616 – Métodos Numéricos Computacionais

Larissa Oliveira
oliveira.t.larissa@gmail.com

unesp

Na última aula...

MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{1,(n-1)}^{(1)} + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ \qquad a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{2,(n-1)}^{(2)} + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ \qquad\qquad a_{33}^{(3)}x_3 + \cdots + a_{3,(n-1)}^{(3)} + a_{3n}^{(3)}x_n = b_3^{(3)} \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad a_{(n-1),(n-1)}^{(n-1)}x_{n-1} + a_{(n-1),n}^{(n-1)}x_n = b_{n-1}^{(n-1)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n)}x_n = b_n^{(n)} \end{cases}$$

MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS

Seja o sistema linear Ax = b, em que A possui todas as submatrizes principais não singulares. O método de eliminação de Gauss consiste em transformar o sistema dado num sistema triangular superior equivalente pela aplicação repetida da operação.

"subtrair de uma equação outra equação multiplicada por uma constante diferente de zero".

$L_2 = L_2 - m L_1$

MÉTODO DE GAUSS COM PIVOTEAMENTO PARCIAL

O Método de Gauss com Pivoteamento Parcial consiste em transformar o sistema dado, através de operações elementares sobre as linhas, em sistema triangular superior, tomando como **pivô** em cada passo, **o elemento de maior valor absoluto** abaixo da diagonal de cada coluna da matriz **A**

MÉTODO DE GAUSS COM PIVOTEAMENTO TOTAL

O Método de Gauss com Pivoteamento Total consiste em transformar o sistema dado, em sistema triangular superior equivalente, tomando como **pivô**, em cada passo, o elemento de **maior valor absoluto entre todos os elementos da submatriz** abaixo da k-ésima linha e a partir da k-ésima coluna

Hoje...

MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO LU

O objetivo é fatorar a matriz dos coeficientes A em um produto de duas matrizes L e U

$$[L]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \qquad [U]=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO LU

Dada a matriz coeficiente:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$\det(A_1) = a_{11}$

$\det(A_2) =$

$$[A] = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn} \end{bmatrix}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}}_{U}$$

MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO LU

Teorema (Decomposição LU)

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem n, e A_k o menor principal, constituído das k primeiras linhas e k primeiras colunas de A.

Assumimos que $\det(A_k) \neq 0$, $k = 1, 2, ..., n - 1$. Então, existe uma única matriz triangular inferior $L = (l_{ij})$, com $l_{11} = l_{22} = \ ... = l_{nn} = 1$, e uma única matriz triangular superior $U = (u_{ij})$ tal que $LU = A$. Além disso, $\det(A) = u_{11}\, u_{22} \ldots u_{nn}$.

MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO LU

- ✓ Para se obter os elementos da matriz L e da matriz U, deve-se calcular os elementos das linhas de U e os elementos da colunas de L alternadamente;

- ✓ Para obter os fatores l_{ij} e u_{ij} das matrizes L e U podemos aplicar a definição de produto e igualdade de matrizes, ou seja, A=LU

MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO LU

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \underset{a_{42}}{\vdots} & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \overset{l_{41}}{\vdots} & \overset{l_{42}}{\vdots} & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

1ª linha de U: Faze-se o produto da 1ª linha de L por todas as colunas de U e a iguala com todos os elementos da 1ª linha de A:

$$\begin{cases} 1 \cdot u_{11} = a_{11} \Rightarrow u_{11} = a_{11}, \\ 1 \cdot u_{12} = a_{12} \Rightarrow u_{12} = a_{12}, \\ \vdots \\ 1 \cdot u_{1n} = a_{1n} \Rightarrow u_{1n} = a_{1n}, \\ \boxed{u_{1j} = a_{1j},\ j = 1, 2, \ldots, n.} \end{cases}$$

MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO LU

1ª coluna de L: Faz-se o produto de todas as linhas de L, (da 2ª a até a nª), pela 1ª coluna de U e a iguala com os elementos da 1ª coluna de A, (abaixo da diagonal principal)

$$\begin{cases} l_{21} \cdot u_{11} = a_{21} \Rightarrow l_{21} = \dfrac{a_{21}}{u_{11}}, \\ l_{31} \cdot u_{11} = a_{31} \Rightarrow l_{31} = \dfrac{a_{31}}{u_{11}}, \\ \vdots \\ l_{l1} \cdot u_{11} = a_{l1} \Rightarrow l_{l1} = \dfrac{a_{l1}}{u_{11}}, \\ \boxed{l_{l1} = \dfrac{a_{l1}}{u_{11}}, l = 1, 2, \ldots, n.} \end{cases}$$

MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO LU

2ª linha de U: Faz-se o produto da 2ª linha de L por todas as colunas de U, (da 2ª até a nª), e igualando com os elementos da 2ª linha de A, (da diagonal principal em diante)

$$\begin{cases} l_{21} \cdot u_{12} + u_{22} = a_{22} \Rightarrow \boxed{u_{22} = a_{22} - l_{21} \cdot u_{12}}, \\ l_{21} \cdot u_{13} + u_{23} = a_{23} \Rightarrow \underline{u_{23} = a_{23} - l_{21} \cdot u_{13}}, \\ \vdots \\ l_{21} \cdot u_{1n} + u_{2n} = a_{2n} \Rightarrow u_{2n} = a_{2n} - l_{21} \cdot u_{1n}, \\ \boxed{u_{2j} = a_{2j} - l_{21} \cdot u_{1j},\ j = 3, \ldots, n.} \end{cases}$$

MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO LU

2ª coluna de L: Faz-se o produto de todas as linhas de L (da 3ª até a nª) pela 2ª coluna de U e a iguala com os elementos da 2ª coluna de A, (abaixo da diagonal principal)

$$\begin{cases} l_{31} \times u_{12} + l_{32} \times u_{22} = a_{32} & \boxed{l_{32} = \dfrac{a_{32} - l_{31} \times u_{12}}{u_{22}},} \\ l_{41} \times u_{12} + l_{42} \times u_{22} = a_{42} & l_{42} = \dfrac{a_{42} - l_{41} \times u_{12}}{u_{22}}, \\ \vdots & \\ l_{l1} \times u_{12} + l_{l2} \times u_{22} = a_{l2} & l_{l2} = \dfrac{a_{l2} - l_{l1} \times u_{12}}{u_{22}}, \end{cases}$$

$$\boxed{l_{l2} = \frac{a_{l2} - l_{l1} \times u_{12}}{u_{22}}, l = 3, \ldots, n.}$$

MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO LU

Fórmula geral:

$$\begin{cases} u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} & i \leq j \\ l_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}) / u_{jj} & i > j \end{cases}$$

MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO LU

Solução do Sistema $Ax=b$ A=LU

Seja um sistema $Ax = b$ de ordem n, onde A satisfaz as condições da fatoração LU. Então, o sistema $Ax = b$ pode ser escrito como:

$$(LU)x = b$$

$$Ly = b \qquad\qquad Ux = y$$

x^*

MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO LU

Exemplo

Utilizando o método de decomposição LU, resolver o sistema Ax = b e calcular o det(A):

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\det(A_1) = 5 \neq 0$ ✓

$\det(A_2) = -1 \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

1º LINHA U

$u_{11} = a_{11} = 5$

$u_{12} = a_{12} = 2$

$u_{13} = a_{13} = 1$

1º COLUNA L

$l_{21} = \frac{3}{5}$

$l_{31} = \frac{1}{5}$

2º LINHA U

$u_{22} = a_{22} - l_{21} u_{12} = 1 - \frac{3}{5}(2) = \frac{5}{5} - \frac{6}{5} = -\frac{1}{5}$

$u_{23} = a_{23} - l_{21} u_{13} = 4 - \frac{3}{5}(1) = \frac{20}{5} - \frac{3}{5} = \frac{17}{5}$

2º COLUNA L

$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31} u_{12}}{u_{22}} = \frac{1 - \frac{1}{5}(2)}{\left(-\frac{1}{5}\right)} = \frac{\frac{5}{5} - \frac{2}{5}}{\left(-\frac{1}{5}\right)} = \frac{\frac{3}{5}}{\left(-\frac{1}{5}\right)} = -3$

3º LINHA U

$$u_{33} = a_{33} - l_{31} u_{13} - l_{32} u_{23}$$

$$= 3 - \left(\frac{1}{5}\right) 1 - (-3) \frac{17}{5}$$

$$= \frac{15}{5} - \frac{1}{5} + \frac{51}{5} = \frac{65}{5} = 13$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/5 & 1 & 0 \\ 1/5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -1/5 & 17/5 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

$Ly = b$

$Ux = y$

$Ly=b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/5 & 1 & 0 \\ 1/5 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -26 \end{pmatrix}$$

$Ux=y$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -1/5 & 17/5 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -26 \end{pmatrix} \longrightarrow \quad x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = u_{11}u_{22}u_{33} = 5\left(-\frac{1}{5}\right)(13) = -13$$

OBSERVAÇÃO 1

Se det A ≠ 0 e se tivermos det(A_k) = 0 é possível trocar a linha k por uma linha abaixo dela e se det(A_k) ≠ 0 pode-se efetuar a decomposição.

✓ Lembre-se de trocar também o termo independente. b

Exemplo:

Resolver o sistema utilizando a decomposição LU

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$\det(A_2) = 0 \qquad L_2 \leftrightarrow L_3$

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(A'_1) = 2 \neq 1$

$\det(A'_2) = -4 \neq 0$

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} b' = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 11/2 \\ 0 & 0 & 5/2 \end{pmatrix}$$

$Ly = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow \qquad y = \begin{pmatrix} 3 \\ 7/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$$

$Ux = y$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 11/2 \\ 0 & 0 & 5/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7/2 \\ 5/2 \end{pmatrix} \longrightarrow \qquad x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

OBSERVAÇÃO 2

O método de Eliminação de Gauss também pode ser utilizado para a obtenção dos coeficientes l_{ij} e u_{ij} das matrizes da decomposição LU.

Matriz L: $l_{ij} = m_{ij}$ do método de Eliminação de Gauss e $l_{ii} = 1$ e $l_{ij} = 0$ se i < j.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} = L$$

Matriz U: é a matriz resultante do processo de Eliminação de Gauss (matriz escalonada) .

OBSERVAÇÃO 2

Exemplo:

Determinar a solução do sistema pelo utilizando o método de Gauss e a decomposição LU:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

GAUSS

$$A^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right) \qquad m_{21} = \frac{1}{3} \qquad m_{31} = \frac{4}{3}$$

$$A^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 1/3 & -10/3 & 5/3 \end{array}\right)$$

$$A^{(3)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \qquad m_{32} = 1$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5/3 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow X^* = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

LU

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 4/3 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}}_{U}$$

$Ly = b$

$Ux = y$

x^*

MÉTODO DE GAUSS COMPACTO

Seja o sistema linear $Ax = b$, de ordem n, em que A possui todas as submatrizes não singulares. O Método de Gauss Compacto é uma maneira prática de se obter as matrizes L e U da de decomposição LU, armazenando-a de forma compacta. Os termos independentes b_i, $i = 1, \ldots, n$ são obtidos da mesma maneira que os elementos u_{ij} e serão chamados de $u_{i,n+1}$, $i = 1, \ldots, n$.

MÉTODO DE GAUSS COMPACTO

Construção do método

Seja o sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

MÉTODO DE GAUSS COMPACTO

Primeiramente, montamos a matriz de ordem n × (n+1):

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{array}\right)}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,n+1} \\ a_{2,n+1} \\ \vdots \\ a_{n,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

MÉTODO DE GAUSS COMPACTO

Em seguida, construímos a matriz n × (n+1), em que os termos independentes b_i, i = 1, 2, ..., n, por serem obtidos da mesma maneira que os elementos u_{ij}, serão chamados de $u_{i,n+1}$, i = 1, 2, ..., n. Assim, sobre a matriz original armazenamos a matriz:

$$\left(\begin{array}{cccc:c} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} & u_{1,n+1} \\ l_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} & u_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & u_{nn} & u_{n,n+1} \end{array}\right)$$

Para determinar os termos u_{ij} e l_{ij}, utilizamos as mesmas expressões da decomposição LU, entretanto, i = 1, 2, ..., n e j = 1, 2, ..., n, (n+1):

MÉTODO DE GAUSS COMPACTO

Para determinar os termos u_{ij} e l_{ij}, utilizamos as mesmas expressões da decomposição LU, entretanto, i = 1, 2, ..., n e j = 1, 2, ..., n, (n+1):

$$\begin{cases} u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} & i \leq j \\ l_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}) / u_{jj} & i > j \end{cases}$$

Determinados os elementos u_{ij} e l_{ij}, resolvemos o sistema $\boxed{Ux = b'}$, em que $b_i' = u_{i,n+1}$, i = 1, 2, ..., n.

MÉTODO DE GAUSS COMPACTO

Observação:

No caso em que y é determinado pelo Gauss Compacto, não é necessário resolver o sistema Ly = b, basta resolver diretamente Ux = y, em que

$$y = \begin{pmatrix} u_{1,n+1} \\ u_{2,n+2} \\ \vdots \\ u_{n,n+1} \end{pmatrix}$$

Uma das vantagens do método de Gauss Compacto, é que podemos resolver de uma só vez vários sistemas associados.

MÉTODO DE GAUSS COMPACTO

Exemplo:

Utilizando o método de Gauss-Compacto, resolver o sistema matricial:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & -1 & 2 & 7 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & u_{15} \\ l_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & u_{25} \\ l_{31} & l_{32} & u_{33} & u_{34} & u_{35} \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\phantom{l_{31} \quad l_{32} \quad u_{33}}}_{A} \qquad \underbrace{\phantom{u_{34} \quad u_{35}}}_{b'}$$

1° LINHA U

$u_{11} = a_{11} = 2$

$u_{12} = a_{12} = 1$

$u_{13} = a_{13} = -1$

$u_{14} = a_{14} = 0$

$u_{15} = a_{15} = 3$

1° COLUNA L

$l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} = \frac{1}{2}$

$l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}} = \frac{4}{2} = 2$

2° LINHA U

$u_{22} = a_{22} - l_{21} u_{12} = 0 - \frac{1}{2}(1) = -1/2$

$u_{23} = a_{23} - l_{21} u_{13} = 2 - \frac{1}{2}(-1) = 5/2$

$u_{24} = a_{24} - l_{21} u_{14} = 3 - \frac{1}{2}(0) = 3$

$u_{25} = a_{25} - l_{21} u_{15} = 4 - \frac{1}{2}(3) = 5/2$

2° COLUNA L

$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31} u_{12}}{u_{22}}$

$= \frac{1 - 2(1)}{(-1/2)} = 2$

3º LINHA U

$$u_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} = -1 - 2(-1) - 2\left(\tfrac{5}{2}\right) = -4$$

$$u_{34} = a_{34} - l_{31}u_{14} - l_{32}u_{24} = 2 - 2(0) - 2(3) = -4$$

$$u_{35} = a_{35} - l_{31}u_{15} - l_{32}u_{25} = 7 - 2(3) - 2\left(\tfrac{5}{2}\right) = -4$$

U

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ \tfrac{1}{2} & -\tfrac{1}{2} & \tfrac{5}{2} & 3 & \tfrac{5}{2} \\ 2 & 2 & -4 & -4 & -4 \end{array}\right)$$

L

b'

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -\tfrac{1}{2} & \tfrac{5}{2} \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & \tfrac{5}{2} \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO LU

Atividade para contabilizar presença - método de decomposição LU – 13/07/2020

Usando o método de decomposição LU, resolva o sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$