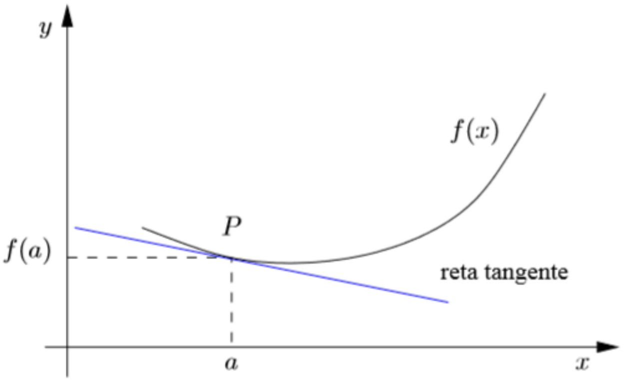
# DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA

Sabe-se do cálculo que :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

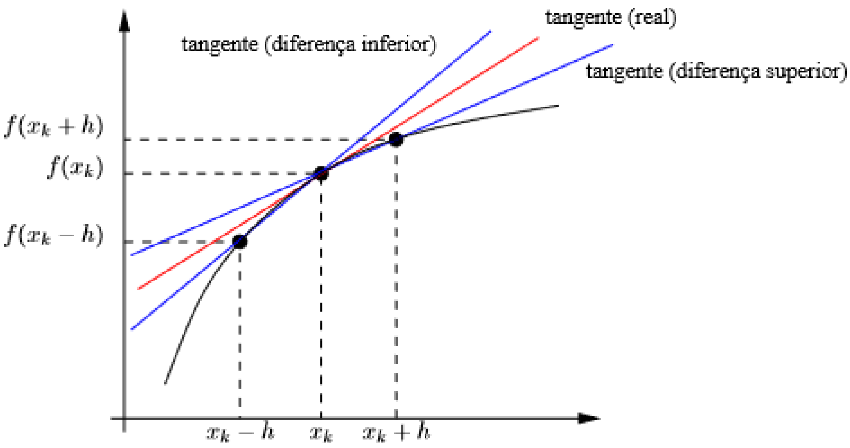
Assim, a derivada primeira pode ser interpretada geometricamente como a inclinação da reta tamgente a curva de *f* no ponto *(x,f(x))*.




Dado um intervalo [a, b], uma função *f*(x) derivável neste intervalo e uma abscissa $x_k$ pertence ao intervalo (a, b). Seja um incremento h de valor reduzido e diferente de 0. A aproximação da derivada da função *f*(x) é dada por:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

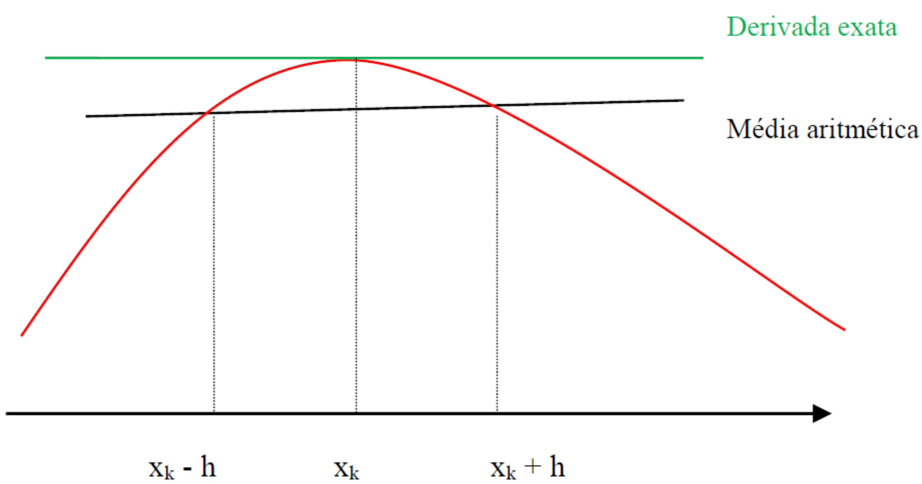
observando que se h > 0, esta fórmula é chamada de diferença superior e, caso h < 0, ela é a fórmula da diferença inferior.




Computacionalmente levamos em consideração o comportamento de *f*(x) em pontos simétricos a x, isto é, consideramos a derivada primeira sendo a média aritmética da derivada para h > 0 e para h < 0, o que nos dá a expressão

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

Graficamente:



## O Dilema do Passo h

Sabe-se que é possível melhorar o resultado de f'(x), tornando o h menor, mas deve-se observar que em um computador, quando espera-se um resultado pequeno de uma subtração de 2 números grandes, provavelmente tem-se um resultado "pouco aceitável" (erro de arredondamento).

Assim, dimunindo muito h, tem-se, tem-se o valor de f'(x) provavelmente impreciso.

Para a determinação do erro mínimo, pode-se de forma iterativa, comparar os valores de iterações sucessivas, considerando sempre o último resultado como o valor correto e como condição de término pode-se ter:

*<u>Sugestão 1</u>:*

$$erro_i = \left| \frac{f_i'(x) - f_{i-1}'(x)}{max\left(1, \left| f_i'(x) \right|\right)} \right| < \varepsilon$$

sendo $\varepsilon$ uma precisão pré-determinada.

*<u>Sugestão 2:</u>*

$$erro_i > erro_{i-1}$$

Sendo $erro_i$ o erro da iteração i e, $erro_{i-1}$ o erro da iteração anterior (i-1).

*Cálculo de f''(x), f'''(x), ...*

Sabe-se que

$$f''(x) \approx \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h}$$

Então, substituindo $f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$ tem-se

$$f''(x) = \frac{\frac{f(x+2h) - f(x)}{2h} - \frac{f(x) - f(x-2h)}{2h}}{2h}$$

$$\boxed{f''(x) = \frac{f(x+2h) - 2f(x) + f(x-2h)}{(2h)^2}}$$

Fazendo

$$f_i(x) = f(x + ih)$$

tem-se:

$$f'(x) = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} \quad = \frac{1}{2h}\left(-f_{-1} + f_1\right)$$

$$f''(x) = \frac{1}{(2h)^2}\left(f_{-2} - 2f_0 + f_2\right)$$

$$f'''(x) = \frac{1}{(2h)^3}\left(-f_{-3} + 3f_{-1} - 3f_1 + f_3\right)$$

$$f^{iv}(x) = \frac{1}{(2h)^4}\left(f_{-4} - 4f_{-2} + 6f_0 - 4f_2 + f_4\right)$$

**OBS:** Triangulo de Pascal:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
....

## Exemplos:

**1)** Dado $f(x) = x^5 - 2x^2 + 7x$ e $\varepsilon = 10^{-2}$, calcule a $f'(1)$ e $f''(-2)$.

a) $f'(1)$

| k | h | x+h | f(x+h) | x-h | f(x-h) | f´(x) | erro |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2,0000 | 38,0000 | 0,0000 | 0,0000 | **19,0000** | |
| 2 | 0,5000 | 1,5000 | 13,5938 | 0,5000 | 3,0313 | **10,5625** | 0,7988 |
| 3 | 0,2500 | 1,2500 | 8,6768 | 0,7500 | 4,3623 | **8,6289** | 0,2241 |
| 4 | 0,1250 | 1,1250 | 7,1458 | 0,8750 | 5,1067 | **8,1565** | 0,0579 |
| 5 | 0,0625 | 1,0625 | 6,5338 | 0,9375 | 5,5289 | **8,0391** | 0,0146 |
| 6 | 0,0313 | 1,0313 | 6,2581 | 0,9688 | 5,7575 | **8,0098** | **0,0037** |

b) $f''(-2)$.

| k | h | x+2h | f(x+2h) | x-2h | f(x-2h) | f ´´(x) | erro |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0,0000 | 0,0000 | -4,0000 | -1084,0000 | **-244,0000** | |
| 2 | 0,5000 | -1,0000 | -10,0000 | -3,0000 | -282,0000 | **-184,0000** | 0,3261 |
| 3 | 0,2500 | -1,5000 | -22,5938 | -2,5000 | -127,6563 | **-169,0000** | 0,0888 |
| 4 | 0,1250 | -1,7500 | -34,7881 | -2,2500 | -83,5400 | **-165,2500** | 0,0227 |
| 5 | 0,0625 | -1,8750 | -43,3305 | -2,1250 | -67,2368 | **-164,3125** | 0,0057 |
| 6 | 0,0313 | -1,9375 | -48,3732 | -2,0625 | -60,2677 | **-164,0781** | **0,0014** |

**2)** Dado $f(x) = x^4 - 3x^3$ e $\varepsilon = 10^{-2}$, calcule a $f'(4)$ e $f''(3)$.

*a)* $f'(4)$

| k | h | x+h | f(x+h) | x-h | f(x-h) | f´(x) | erro |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 5,0000 | 250,0000 | 3,0000 | 0,0000 | **125,0000** | |
| 2 | 0,5000 | 4,5000 | 136,6875 | 3,5000 | 21,4375 | **115,2500** | 0,0846 |
| 3 | 0,2500 | 4,2500 | 95,9570 | 3,7500 | 39,5508 | **112,8125** | 0,0216 |
| 4 | 0,1250 | 4,1250 | 78,9631 | 3,8750 | 50,9124 | **112,2031** | **0,0054** |

*b)* $f''(3)$.

| k | h | x+2h | f(x+2h) | x-2h | f(x-2h) | f ´´(x) | erro |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 5,0000 | 250,0000 | 1,0000 | -2,0000 | **62,0000** | |
| 2 | 0,5000 | 4,0000 | 64,0000 | 2,0000 | -8,0000 | **56,0000** | 0,1071 |
| 3 | 0,2500 | 3,5000 | 21,4375 | 2,5000 | -7,8125 | **54,5000** | 0,0275 |
| 4 | 0,1250 | 3,2500 | 8,5820 | 2,7500 | -5,1992 | **54,1250** | **0,0069** |