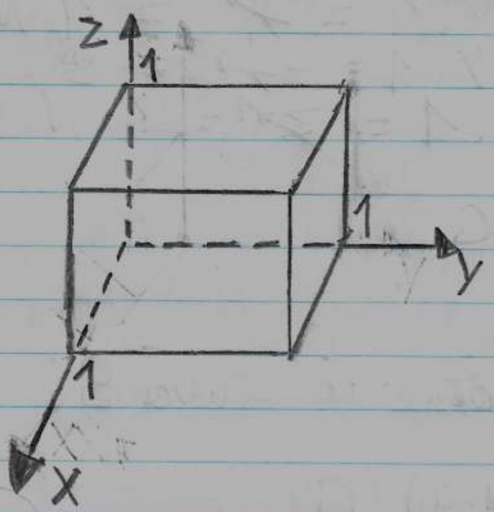
22 12 20

Nome: Davi Augusto Neves Leite RA: 191027383

Atividade Avaliativa de 17/12/2020

(1)



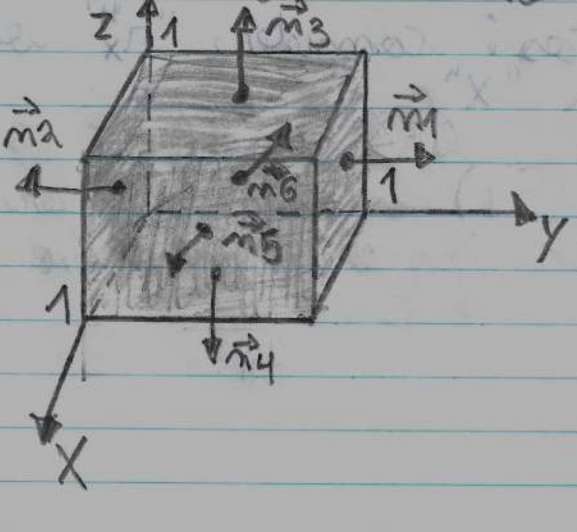
$\vec{E} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$S: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq x, y, z \leq 1\}$

- Área de uma face do Cubo: $A_F = 1^2 = 1$ u.a.
- Fórmula do Fluxo elétrico de uma face "F":

$$\Phi_F = \iint_{S_F} \vec{E} \cdot \vec{n}_F \, dS \Leftrightarrow \Phi_F = \langle \vec{E} ; \vec{n}_F \rangle \cdot A_F$$

- Encontrando os versores de cada face:



$\vec{n}_1 = 0\vec{i} + \vec{j} + 0\vec{k}$

$\vec{n}_2 = 0\vec{i} - \vec{j} + 0\vec{k}$

$\vec{n}_3 = 0\vec{i} + 0\vec{j} + \vec{k}$

$\vec{n}_4 = 0\vec{i} + 0\vec{j} - \vec{k}$

$\vec{n}_5 = \vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$

$\vec{n}_6 = -\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$

a) Fluxo elétrico de cada face:

$\Phi_1 = \langle \vec{E}, \vec{n_1} \rangle . A_1 = y . 1 = \cancel{y}^{1} = 1 \ N.(u.a.)/C$

$\Phi_2 = \langle \vec{E}, \vec{n_2} \rangle . A_2 = -y . 1 = -\cancel{y}^{0} = 0$

$\Phi_3 = \langle \vec{E}, \vec{n_3} \rangle . A_3 = z . 1 = \cancel{z}^{1} = 1 \ N.(u.a.)/C$

$\Phi_4 = 0$

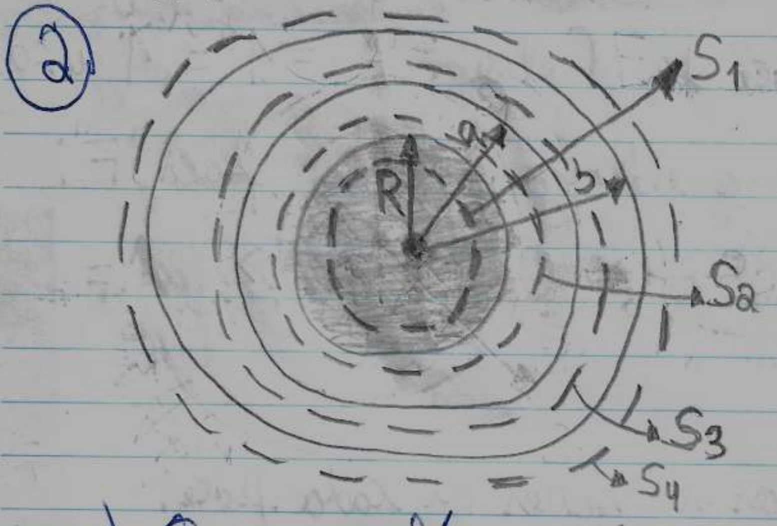
$\Phi_5 = \cancel{x}^{1} = 1 \ N.(u.a.)/C$

$\Phi_6 = 0$

b) Fluxo elétrico total do cubo S:

$\Phi_T = \sum_{i=1}^{6} \Phi_i = 3 \ N.(u.a.)/C$

2



* Em que: $R < a < b$

↳ S_x: Superfície Gaussiana "X"

a) Campos elétricos: considere "r_x" o raio da Gaussiana "X"

• $0 < r_1 < R$ (S_1): como a esfera é condutora, o campo elétrico interno é nulo. Logo: $\vec{E_1} = 0$

• $R < r_2 < a$ (S_2): a carga $+Q$ está disposta na superfície da esfera, atraindo os elétrons da casca esférica. Ou seja, existe campo elétrico:

$$\oiint \vec{E_2} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{env}}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E_2} = \frac{+Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_2^2}\,\hat{r}$$

• $a < r_3 < b$ (S_3): semelhante ao S_1, a casca esférica por ser condutora possui o campo elétrico interno nulo.

Logo: $\vec{E_3} = 0$

• $r_4 \geq b$ (S_4): como a casca esférica está neutra, os elétrons da esfera interna vão migrar para a superfície exterior à casca. Dessa forma:

$$\oiint \vec{E_4} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{ENV}}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E_4} = \frac{+Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_4^2}\,\hat{r}$$

b) Potenciais: considere "r_x" o raio da gaussiana "X"

- $0 < r_1 < R$ (S_1): como $\vec{E_1} = 0$, o potencial é dado por:

$$\underbrace{V_R - V_0}_{V_{r1}} = -\int_0^R \vec{E_1} \cdot d\vec{s}$$

$\Rightarrow V_R = V_0 \rightarrow V_{r1} = \text{constante}$

- $R < r_2 < a$ (S_2): o potencial é dado por:

$$\underbrace{V_a - V_R}_{V_{r2}} = -\int_R^a \vec{E_2} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left[\frac{1}{r_2}\right]\Bigg|_R^a$$

$$\Rightarrow V_{r2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{R}\right] \quad V$$

- $a < r_3 < b$ (S_3): como $\vec{E_3} = 0$, o potencial é dado por:

$$\underbrace{V_b - V_a}_{V_{r3}} = -\int_a^b \vec{E_3} \cdot d\vec{s} \Rightarrow V_b = V_a$$

$\Rightarrow V_{r3} = \text{constante}$

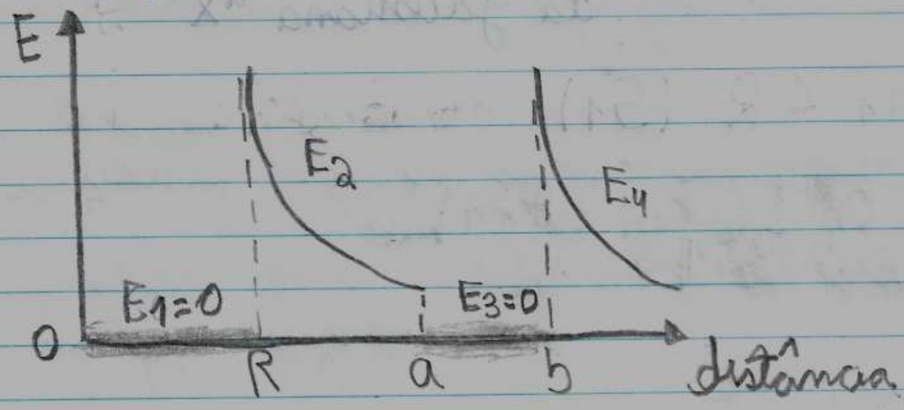
• $r_4 \geq b$ (S_4): o potencial é dado por:

$$\underbrace{V_\infty}_{} - \underbrace{V_b}_{V_{r_4}} = -\int_b^\infty \vec{E_4} \cdot d\vec{r}$$

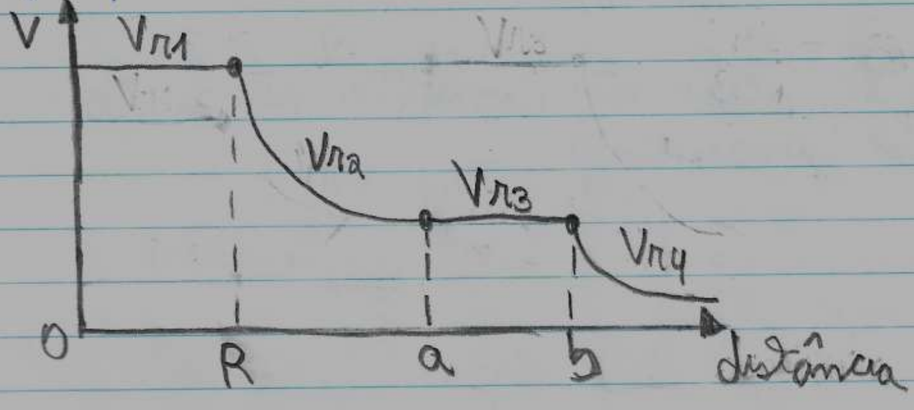
$$\Rightarrow 0 - V_{r_4} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_b^\infty \frac{1}{r_4^2}\, dr_4$$

$$\Rightarrow V_{r_4} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{r_4}\right]\Bigg|_b^\infty = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{b} \quad V$$

c) • Gráfico do Campo Elétrico



• Gráfico do Potencial Elétrico



Caso aja uma inserção de um material dielétrico (isolante), de permissividade dielétrica K, entre as duas esferas ocasionará a dificuldade de formação da corrente elétrica $\vec{E_2}$.

d) Dielétrico: cargas distribuídas uniformemente

I) Campos elétricos: considere "rx" o raio da gaussiana "x"

- $0 < r_1 < R$ (S_1): mesmo caso anterior

$E_1 = 0$ (condutor)

• $R < r_2 < a$ (S_2): considerar toda carga da esfera. Logo:

$$\oint\!\!\oint \vec{E_2} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{ENV}}{\varepsilon_0}$$

* $\varepsilon_0 = K$ (dielétrico)

$$\Rightarrow \vec{E_2} = \frac{Q}{4\pi K} \cdot \frac{1}{r_2^2}\,\hat{r}$$

• $a < r_3 < b$ (S_3): mesmo caso de S_1.

$$\Rightarrow \frac{Q_{ENV}}{V_{S3}} = \frac{Q_{CASCA}}{V_{CASCA}} \Rightarrow Q_{ENV} = Q_{CASCA} \cdot \frac{r_3^3}{b^3}$$

$\Rightarrow Q_{ENV} = 0$ (casca neutra)

Logo: $\vec{E_3} = 0$

• $r_4 \geq b$ (S_4): considerar toda carga como se estivesse no centro. Logo:

$$\oint\!\!\oint \vec{E_4} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{total}}{\varepsilon_0}$$

* $Q_{total} = 0$ (capacitor)

$\Rightarrow \vec{E_4} = 0$

II) Potenciais elétricos: considere "r_X" o raio da gaussiana "X"

• $0 < r_1 < R$ (S_1):

$V_{r1} = cte$

- $R < r_2 < a$ (S_2):

$$\Rightarrow \underbrace{V_a - V_R}_{V_{r2}} = -\int_R^a \vec{E}_2 \cdot d\vec{r}$$

$$\Rightarrow V_{r2} = \frac{Q}{4\pi k}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{R}\right] \quad V$$

- $a < r_3 < b$ (S_3):

$$\underbrace{V_b - V_a}_{V_{r3}} = -\int_a^b \vec{E}_3 \cdot d\vec{r} \quad \Rightarrow V_b = V_a$$

$$\Rightarrow V_{r3} = cte$$

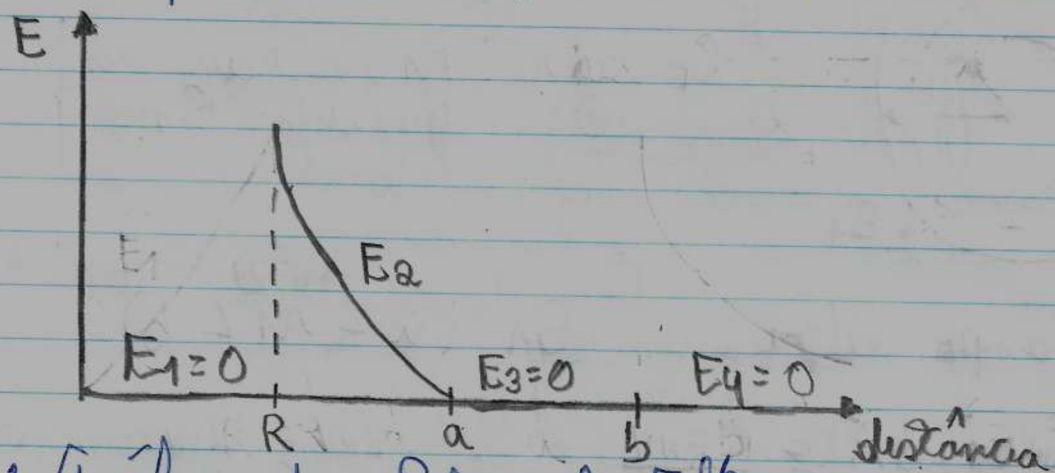
- $r_4 \geq b$ (S_4):

$$V_\infty - V_b = -\int_b^\infty \vec{E}_4 \cdot d\vec{r}$$

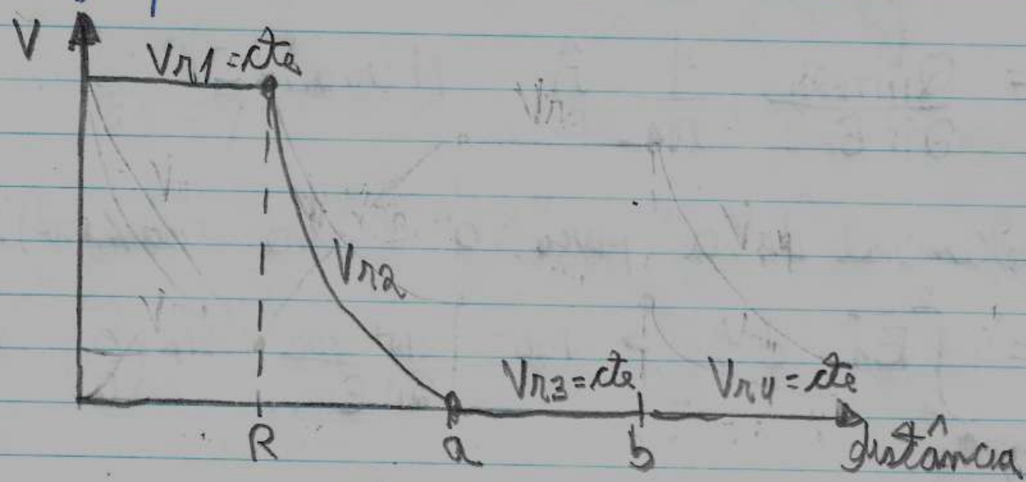
$$\Rightarrow V_{r4} = cte$$

III) Gráficos

• Gráfico do Campo Elétrico

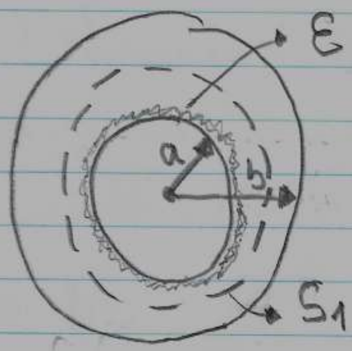


• Gráfico do Potencial Elétrico



3 Considere: ε, a permissividade do isolante branco;
L, o comprimento do cabo coaxial

a) Para encontrar a capacitância, é necessário encontrar o campo elétrico e o potencial entre os condutores. Ou seja:



Considere: r_1, o raio da gaussiana S_1

I) Campo elétrico em S_1 $(a < r_1 < b)$:

$$\oint \vec{E_1} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{ENV}}{\varepsilon_0} \qquad * \; Q_{ENV} = Q_{INTERNO}, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \vec{E_1} = \frac{Q_{INTERNO}}{2\pi \varepsilon . L} \cdot \frac{1}{r_1} \, \hat{r}$$

II) Potencial de "a" para "b" (cabo coaxial):

$$V_{ab} = \int_a^b \vec{E_1} \cdot d\vec{r} \Rightarrow V_{ab} = \frac{Q_{INTERNO}}{2\pi \varepsilon L} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) \; V$$

III) Capacitância do cabo coaxial:

$$C = \frac{Q_C}{V_{ab}} \qquad * \; Q_C = Q_{INTERNO}.$$

$$\Rightarrow C = \frac{2\pi . \varepsilon . L}{\ln(b/a)} \; F$$

b) A energia elétrica total no interior do cabo coaxial pode ser encontrada por:

$$E_{pot} = \frac{Q_C \cdot V}{2} = \frac{C \cdot V^2}{2}$$

$$\Rightarrow E_{pot} = \left(\frac{2\pi \cdot \varepsilon \cdot L}{\ln(b/a)}\right) \cdot \left(\frac{Q_{INTERNO}}{2\pi\varepsilon L} \cdot \ln(b/a)\right)^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow E_{pot} = \frac{(Q_{INTERNO})^2 \cdot \ln(b/a)}{4\pi\varepsilon L} \quad J$$

c) Para encontrar o potencial elétrico, basta:

* Campo elétrico em S_2 ($r_2 \geq b$):

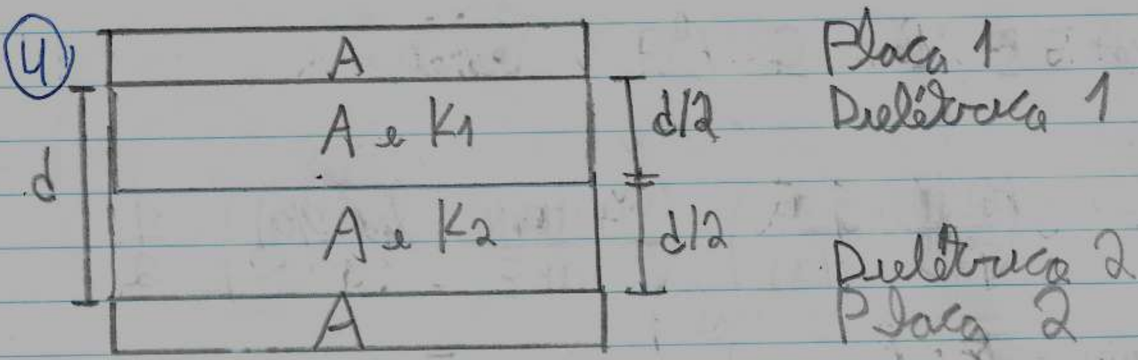
$$\oiint \vec{E_2} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{TOTAL}}{\varepsilon_0} \qquad * \; Q_{TOTAL} = 0 \; (\text{capacitor}), \; \varepsilon_0 = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \vec{E_2} = 0$$

$$\Rightarrow V_{0\infty} = V_+ = \int_0^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_0^a \vec{E_0} \cdot d\vec{r} + \int_a^b \vec{E_1} \cdot d\vec{r} + \int_b^\infty \vec{E_2} \cdot d\vec{r}$$

$$\Rightarrow V_+ = 0 + \left[\frac{Q_{INT}}{2\pi\varepsilon L} \cdot \ln(b/a)\right] + 0$$

$$\Rightarrow V_+ = \frac{Q_{INT} \cdot \ln(b/a)}{2\pi\varepsilon L} \quad V$$



$* \; Q_{PLACA2} = -Q \Rightarrow Q_{PLACA1} = +Q$

a) O campo em cada dielétrico é dado por:

* Campo entre as placas, sem dielétricos:

$$E_0 = \frac{Q_{ENV}}{\varepsilon_0 . A} = \frac{+Q}{\varepsilon_0 . A} \quad N.(u.a.)/C$$

• Dielétrico 1: $E_1 = \frac{E_0}{K_1} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A K_1} \quad N.(u.a.)/C$

• Dielétrico 2: $E_2 = \frac{E_0}{K_2} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A K_2} \quad N.(u.a.)/C$

b) A ddp entre as placas é dada por:

$$V_T = V_1 + V_2 = E_1 . \frac{d}{2} + E_2 . \frac{d}{2}$$

$$\Rightarrow V_T = \frac{Q . d}{2 \varepsilon_0 A} . \left[\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}\right] \quad V$$

c) A capacitância, com os dielétricos, é dada por:

$$C_D = \frac{Q}{V_T} = \frac{Q}{Q \cdot d} \cdot 2\varepsilon_0 A \left[\frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}\right]$$

$$\Rightarrow C_D = \frac{2\varepsilon_0 A}{d}\left[\frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}\right] \quad F$$

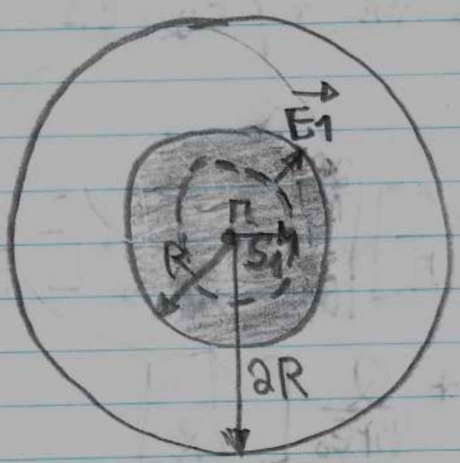
A capacitância, sem os dielétricos, é dada por:

$$C_{SD} = \frac{Q}{V_{SD}}$$

$$* \; V_{SD} = E_0 \cdot d = \frac{Q \cdot d}{\varepsilon_0 \cdot A} \quad V$$

$$\Rightarrow C_{SD} = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \quad F$$

5) a)

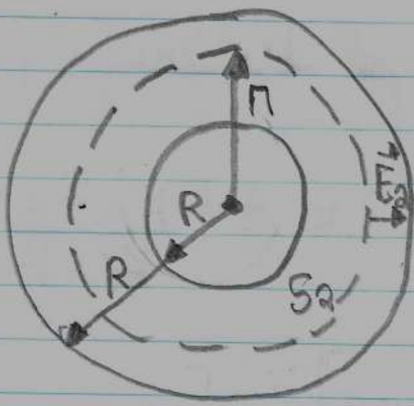


$S_1: 0 < r < R$

$$\Rightarrow \oiint \vec{E_1} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{ENV}}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E_1 = 0 \quad \text{(condutora)}$$

b)

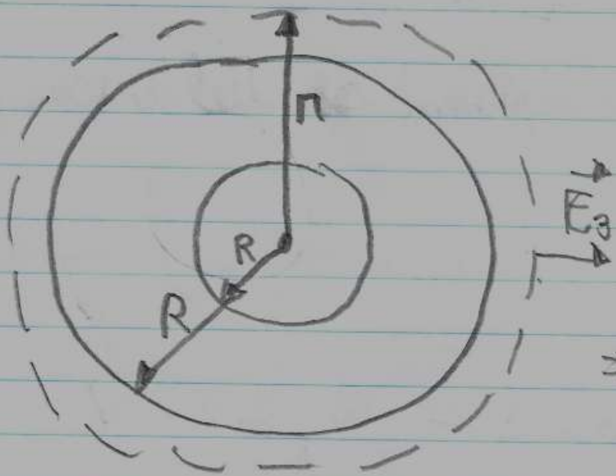


S_2: $R \leq r < 2R$

$$\oiint \vec{E_2} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{ENV}}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E_2 = \frac{Q}{4\pi K} \cdot \frac{1}{r^2} \quad Nm^2/C$$

c)



S_3: $r \geq 2R$

$$\oiint \vec{E_3} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{ENV}}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E_3 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \quad \frac{Nm^2}{C}$$

d) $V_t = V_{S1} + V_{S2} + V_{S3}$

$$\Rightarrow V_t = \int_0^R \vec{E_1} \cdot d\vec{r} + \int_R^{2R} \vec{E_2} \cdot d\vec{r} + \int_{2R}^{\infty} \vec{E_3} \cdot d\vec{A}$$

$$\Rightarrow V_t = 0 + \frac{Q}{4\pi K} \cdot \left[-\frac{1}{r}\right]\Big|_R^{2R} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left[-\frac{1}{r}\right]\Big|_{2R}^{\infty}$$

$$\Rightarrow V_t = \frac{Q}{4\pi K}\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{2R}\right] + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{2R}\right]$$

$$\Rightarrow V_t = \frac{Q}{8\pi R}\left[\frac{K + \varepsilon_0}{K \cdot \varepsilon_0}\right] \quad V$$

e) No dielétrico:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$$

$* \chi = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 \qquad * \varepsilon = K$

$$\Rightarrow \vec{P} = \varepsilon_0 \left(\frac{K}{\varepsilon_0} - 1\right) \vec{E}_2 = \vec{E}_2 (K - \varepsilon_0)$$

$$* \vec{E}_2 = \frac{Q}{4\pi K} \cdot \frac{1}{r^2} \hat{r}$$

$$\Rightarrow \vec{P} = \frac{Q}{4\pi K r^2} \cdot (K - \varepsilon_0) \hat{r}$$