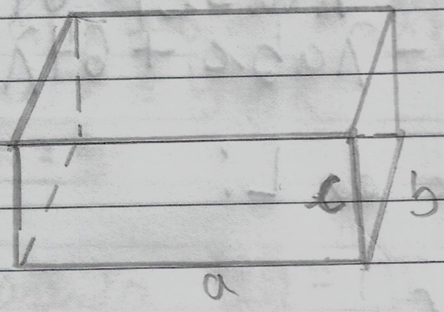
24.08.20

Nome: Davi A. Neves Leite RA: 191027383

12º Trabalho - Lista 7

(53) $V_R = 64 \text{ cm}^3$



* Obter custo mínimo para $V = 64 \text{ cm}^3$.

Considerando "x" como o custo da tampa e do fundo da caixa, tem-se o seguinte custo:

$$C(a \Rightarrow 2(abx) + \frac{1}{2}\left[2(bcx + acx)\right]$$

$$\hookrightarrow C(a,b,c,x) = 2abx + bcx + acx$$

Além disso, sabe-se que:

$$\Rightarrow V_R = 64 \text{ cm}^3$$
$$\Rightarrow abc = 64 \quad \rightarrow R(a,b,c) = abc = 64$$

Dessa forma, o sistema restrito é dado por:

$$\begin{cases} \text{MIN} & 2abx + bcx + acx \\ \text{s.a} & abc = 64 \end{cases}$$

FORONI

Sendo assim aplicando o multiplicador de Lagrange:

$$L = C(a,b,c,x) + \lambda\,(R(a,b,c))$$
$$\Rightarrow L = 2abx + acx + bcx - \lambda(abc - 64)$$
$$\Rightarrow L = 2abx + acx + bcx - \lambda abc + 64\lambda$$

Encontrando as derivadas de L:

$$L_a = 2bx + cx + - \lambda bc$$
$$L_b = 2ax + cx + \lambda ac$$
$$L_c = ax + bx - \lambda ab$$
$$L_x = 2ab + ac + bc -$$
$$L_\lambda = -abc + 64$$

Assim, tem-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2bx + cx - \lambda bc = 0 & (\mathrm{I}) \\ 2ax + cx - \lambda ac = 0 & (\mathrm{II}) \\ ax + bx - \lambda ab = 0 & (\mathrm{III}) \\ 2ab + ac + bc = 0 & \\ -abc + 64 = 0 & \rightarrow \text{garante: } a, b, c \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathrm{I}: \lambda = \frac{2bx + cx}{bc}$$

$$\mathrm{II}: \lambda = \frac{2ax + cx}{ac}$$

$$\mathrm{III}: \lambda = \frac{ax + bx}{ab}$$

Fazendo (I) = (II):

$$\frac{2bx + cx}{bc} = \frac{2ax + cx}{ac}$$

$$2abx + acx = 2abx + bcx$$

$$acx = bcx$$

$$\boxed{a = b}$$

Fazendo (II) = (III):

$$\frac{2ax + cx}{ac} = \frac{ax + bx}{ab}$$

$$2abx + bcx = acx + bcx$$

$$2abx = acx$$

$$\boxed{2b = c}$$

Desta forma, substituindo na última equação:

* $b = a$ e $c = 2a$: $a \cdot a \cdot 2a = 64$

$$2a^3 = 64$$

$$\boxed{a = \sqrt[3]{32} = 2\sqrt[3]{4}\ \text{cm}}$$

* $a = b$: $\boxed{b = 2\sqrt[3]{4}\ \text{cm}}$

* $c = 2a$ e $c = 2b$: $\boxed{c = 4\sqrt[3]{4}\ \text{cm}}$

∴ As medidas que minimizam o custo para um $V = 64\ \text{cm}^3$ são: $2\sqrt[3]{4}$ cm x $2\sqrt[3]{4}$ cm x $4\sqrt[3]{4}$ cm