2^a Prova - SEDO

Nome/RA:

1. (3.5 Pontos) **Sequências**

   (0.25) a) Defina sequência de números reais e diga quando este tipo de sequência é ou não convergente. Diga as condições para que a sequência $\left\{\dfrac{1}{n^r}\right\}_{n=0}^{\infty}$ seja convergente.

   (0.25) b) Explique o porquê da sequência $\{(-1)^n\}_{n=0}^{\infty}$, ser ou não convergente.

   (0.5) c) Explique o porquê da sequência $\left\{\dfrac{\ln n}{n}\right\}_{n=0}^{\infty}$ ser ou não convergente.

   (0.25) d) Demonstre ou apresente um contra exemplo para a proposição: *Toda sequência limitada e convergente é monótona.*

   (1.25) e) Seja a_n a sequência de números reais que associa a cada número natural n o número real correspondente recorde mundial da prova de natação 50m nado livre, feminino, no ano $2000 + n$. Mostre que esta sequência é convergente e diga se é possível estivar o valor do limite.

2. (3.5 Pontos) **Séries**

   (0.5) a) Defina série de números reais e diga quando este tipo de série é ou não convergente.

   (0.75) b) Demonstre ou apresente um contra exemplo para a proposição: *Toda série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *convergente é tal que* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

   (0.5) c) Demonstre ou apresente um contra exemplo para a proposição: *Toda série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *tal que* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *é convergente.*

   (1.75) d) Determine se as séries a seguir são ou não convergentes, dizendo o teorema (teste) que utilizou para chegar a tal conclusão e o eventual intervalo de convergência:

   $$i)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{3^n} \qquad ii)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n^n} \qquad iii)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

3. (3 Pontos)

   a) Sendo $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-8)^n}{n^2}$, determine o intervalo de convergência de $f(x), f'(x)$ e $f''(x)$

   b) Determine a representação em série de potências de $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^4}$.

   c) Utilize a série de Taylor para representar a função $g(x) = \operatorname{sen} x$ em série de potências e calcule o limite fundamental $\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$.