Nome: Davi Augusto Neves Leite
RA: 191027383
Data de Entrega: 26/01/2021

Trabalho 1 – Equações Diferenciais Ordinárias

1) **Como as equações diferenciais podem ajudar no entendimento da evolução da pandemia causada pelo Sars-CoV-2 (COVID19)?**

As equações diferenciais, em sua essência, exprimem uma **taxa de variação**. Ou seja: elas estão baseadas na **modelagem** de problemas e descrição da realidade em termos de equações matemáticas.

Dessa forma, por exemplo, se houvesse uma equação diferencial que exprimisse a quantidade de casos de COVID19 no Brasil, poderia se prever o número de casos em um determinado momento futuro, a fim de se obter soluções para sanar a doença ou não (a julgar pela curva da equação diferencial).

Exemplificando com casos de COVID19 no Brasil, segundo Onezimo Cardoso (2020): Com base nos gráficos e suas curvas (presentes em WorldOMeter), é natural supor quanto mais pessoas infectadas, maior será a taxa de crescimento da quantidade de casos de infectados. Ou seja, considerando a seguinte função:

$$N(t)$$

Em que simboliza o número de casos de **infectados** em um determinado dia. Para obter a equação associada aos **mortos**, vale lembrar que os mortos representam uma parte dos infectados (haja visto que existem os curados), ou seja, uma função composta do tipo: $N(t) = NM(t) * (N(t) - NM(t))$, com $NM(t)$ sendo o número de mortos.

Dessa forma, considerando a taxa de variação da quantidade de casos, tem-se a seguinte proporcionalidade:

$$\frac{dN}{dt} \sim N(t)$$

Ou seja, isso simboliza em um primeiro momento que, caso o número de casos em um determinado dia aumentar, a taxa de variação de casos também aumentará. Dessa forma, escrevendo em equação diferencial:

$$\frac{dN}{dt} = K * N(t)$$

Em que K simboliza uma constante de proporcionalidade que correlaciona a quantidade de casos com a taxa de variação de casos.

Aplicando o método separável das equações diferenciais, obtém-se:

$$\ln N = K * t + C <=> N(t) = C_2 * e^{K * t}$$

Considerando o instante $t = 0$:

$$N(0) = C_2$$

Dessa forma, considerando uma constante de proporcionalidade de valor $K = 2{,}63$ (apenas para **exemplificação**), tem-se a seguinte equação diferencial final:

$$N(t) = N(0) * e^{2{,}63t}$$

Contudo, a equação diferencial acima **não** exprime um padrão (neste caso, exponencial) para a **realidade** da COVID19 no Brasil. Isso é comprovado pelas **diversas** condições da realidade que não estão inseridas nesta equação, tais como: número de mortos e curados (não levados em conta na equação acima), existência de vacinas e tratamentos (promovendo um certo “controle” da humanidade sobre a doença), mutação da COVID19, uso de máscaras e promoção da higiene, isolamento social, dentre diversos outros fatores sociais e naturais.

Em síntese: é necessário **um sistema de equações diferenciais** que leva em conta os mais diversos tipos de fatores da realidade, haja visto que a realidade **não** é uma constante.

Um modelo para o entendimento da evolução da COVID19 no Brasil é o chamado Modelo SIR. Segundo a Indicium (2020) e a UFPEL (2020), esse modelo epidêmico **básico** é baseado em três compartimentos que podem interagir entre si: o S de Suscetível, ou seja, aqueles que nunca obtiveram a doença; o I de Infectados, ou seja, aqueles que estão infectados atualmente e podem transmiti-la; e o R de Recuperados, ou seja, aqueles que contraíram a doença uma vez e jamais a terão novamente.

A relação entre os três é demonstrada a seguir:

$$S -> I -> R$$

OBS: exemplificação e relação com COVID19 no vídeo

2) Revisão Teórica Sobre as Equações Diferenciais de Segunda Ordem Lineares.

Uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem tem a seguinte forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \; em \; que \; f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = g(x) - p(x)\frac{dy}{dx} - q(x)y$$

Ou seja (em forma geral):

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = g(x) <=> y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = g(x)$$

Em que, a princípio, as funções $p, q \; e \; g$ são contínuas.

Para ser uma equação homogênea, basta considerar que $g(x) = 0$. Do contrário, ou seja, caso $g(x) \neq 0$ a equação será não homogênea.

Primeiramente, para fins didáticos, será analisado e explicado sobre as **equações homogêneas**. Além disso, é necessário relembrar o conceito de um **espaço vetorial**: o conjunto de todas as possíveis soluções de uma equação.

Dessa forma, nas equações **homogêneas** de **segunda ordem** é natural supor que o conjunto de todas as possíveis soluções é um **espaço vetorial**. Ou seja, se tomarmos duas soluções $y_1 \; e \; y_2$, de certa forma, elas seriam encontradas integrando **duas** vezes a equação e isso nos resulta em **duas** constantes arbitrárias (por exemplo: $C1 \; relacionada \; a \; y_1 \; e \; C2 \; relacionada \; a \; y_2$), sendo implicado que o espaço vetorial da equação diferencial tem dimensão 2. O que pode-se concluir que esse espaço vetorial tem dimensão 2? Significa que, para gerar esse conjunto solução, são necessários **dois vetores linearmente independentes** (vamos tomar $y_1 \; e \; y_2$ novamente, bem como suas constantes associadas), implicando na seguinte combinação linear: $C1 * y_1 + C2 * y_2 = 0$

Portanto, a solução geral y_h (conjunto de todas as possíveis soluções) de um EDO linear e **homogênea** de **segunda ordem** é dada por:

$$y_h = C1 * y_1 + C2 * y_2$$

Além disso, existe uma função especial aplicada no estudo das equações diferenciais lineares **homogêneas** de **segunda ordem** denominada **Wronskiano**. O Wronskiano de duas soluções $y_1 \; e \; y_2$ de uma EDO de segunda ordem é dado por:

$$\boldsymbol{W}[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}$$

A partir do Wronskiano, pode-se analisar a **independência** e **dependência** linear com base no seguinte teorema: se $\boldsymbol{W}[y_1, y_2] = \boldsymbol{0}$, então as soluções são **linearmente dependentes**, do contrário são **linearmente independentes**.

Sabendo disso, existe um caso especial de EDO **homogênea** de **segunda ordem** que é a de **coeficientes constantes**, ou seja:

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

Neste tipo de EDO, é possível perceber que y, y' e y'' forma um conjunto **LI**. Dessa forma, é natural supor que as suas soluções terão relação com o **exponencial natural** (Euler - e), haja visto que ele é o **único** em que suas derivadas resultam em equivalente a si mesmo (por exemplo: supondo $y = e^x$ tem-se $y' = y'' = e^x$). Dessa forma, pode-se obter uma equação especial (denominada **equação característica**) que possui suas raízes simbolizando o conjunto $\{y_1, y_2\}$, e é dada por:

$$at^2 + bt + c = 0$$

Diante disso, tem-se três casos relacionados as raízes dessa equação e implicando nas soluções da **EDO original**:

1. Duas raízes reais e distintas ($b^2 - 4ac > 0$):
$$y_h = C1 * e^{t_1 x} + C2 * e^{t_2 x}$$
2. Duas raízes reais e iguais ($b^2 - 4ac = 0$):
$$y_h = C1 * e^{tx} + C2 * xe^{tx}$$
3. Duas raízes complexas conjugadas ($b^2 - 4ac = 0$): relação com identidade de Euler ($\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$) e supondo que as raízes sejam $t_1 = u + vi$ e $t_2 = u - vi$:
$$y_h = C1 * e^{ux}cos(vx) + C2 * e^{ux}sen(vx)$$

Visto isso, vamos analisar agora o caso em que **não** temos a EDO **homogênea** de **segunda ordem** com **coeficientes constantes**. Ou seja, relembrando a forma geral:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = g(x)$$

Suponha-se que exista uma solução conhecida y_1. Para encontrar uma y_2 de tal forma que o conjunto $\{y_1, y_2\}$ seja **LI** (solução da EDO), existe um método denominado **método da redução de ordem** em que se determina uma função $u(x)$ tal que

$$y_2(x) = u(x)y_1(x)$$

Ou seja, para encontrar a solução y_2, basta aplicar y_2 na equação original e encontrar $u(x)$ (levando a uma outra EDO, só que de **primeira ordem**). Após isso, basta retornar $u(x)$ em $y_2(x)$ e verificar se é válido (a partir do **Wronskiano** de $y_1\ e\ y_2$.

Exemplo (adaptado do material de Marcos Valle): suponha a seguinte EDO homogênea

$$y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 0$$

e, sabendo que uma de suas soluções é $y_1(x) = e^{-2x}$, encontre $y_2(x)$ e a solução geral y_h, verificando se $y_1\ e\ y_2$ são LI pelo Wronskiano (resolução em vídeo).

Terminado sobre as EDOs **homogêneas** de **segunda ordem**, resta abordar a respeito das EDOs **não homogêneas** de **segunda ordem**. Estas simbolizam, em termos de solução geral, um **deslocamento** do conjunto solução $\{y_1, y_2\}$ das homogêneas (haja visto que, neste caso, o conjunto solução está relacionado na **origem** do plano). Dessa forma, a solução geral de uma EDO **não homogênea** de **segunda ordem** será:

$$y_{nh} = y_h + y_p$$

Em que: y_{nh} representa a solução geral da EDO não homogênea; y_h representa a solução geral da EDO homogênea; y_p representa uma **solução particular** (representa o **deslocamento** do conjunto solução) da EDO não homogênea. Dessa forma, para encontrar uma solução geral de uma EDO **não homogênea** basta seguir os dois passos:

1. encontrar a solução geral da EDO em **forma homogênea**
2. encontrar uma **solução particular** por meio de um método.

Tendo em vista isso, vamos abordar a respeito das EDOs **não homogêneas** de **segunda ordem** com **coeficientes constantes**. Ou seja, uma equação diferencial ordinária de segunda ordem com coeficientes constantes tem a seguinte forma:

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = g(x)$$

Para encontrar a solução geral da EDO **não homogênea**, seguindo os dois passos descritos anteriormente, teremos:

1. Solução geral para: $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$ (visto anteriormente)
2. Solução particular por meio de um dos dois seguintes métodos (a depender do tipo de $g(x)$): **Coeficientes a Determinar** ou **Variação dos Parâmetros**.

O **Método dos Coeficientes a Determinar** é utilizado no caso de $g(x)$ estar escrito em uma das seguintes formas e terá a seguinte solução particular:

1) Polinômio de grau N na variável independente: $y_p = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_{n0}$
2) Múltiplo de uma função exponencial: $y_p = ke^{tx}$
3) Combinação linear das funções $cos(kx)$ ***e*** $sen(kx)$: $y_p = Acos(kx) + Bsen(kx)$
4) Soma das formas anteriores (1, 2 e 3): $y_p = y_1 + y_2$, com y_1 sendo uma solução obtida em uma forma e y_2 uma solução obtida em outra forma.
5) Produto das formas anteriores (1, 2 e 3): $y_p = y_1 * y_2$, com y_1 sendo uma solução obtida em uma forma e y_2 uma solução obtida em outra forma.

O **Método da Variação dos Parâmetros** é utilizado no caso do método anterior não puder ser utilizado, o que o torna mais poderoso e complexo. Neste caso, é levado em consideração o conjunto $\{y_1, y_2\}$ obtidos na y_h. Diante disso, esse método consiste em definir a solução particular como sendo:

$$y_p(x) = u(x) * y_1(x) + v(x) * y_2(x),$$

em que $u(x)\ e\ v(x)$ são funções a determinar de tal forma que satisfaça a seguinte **condição de variação de parâmetros**: $u'(x) * y_1(x) + v'(x) * y_2(x) = 0.$

Para obter $u(x)\ e\ v(x)$, basta realizar os seguintes passos:

1. Encontrar y'_p e y''_p

2. Substituir y_p, y'_p e y''_p na EDO, simplificando o máximo que puder
3. Perceber que, como y_1 e y_2 são soluções da EDO **homogênea**, é possível simplificar a expressão obtendo: $u'(x) * y_1(x) + v'(x) * y_2(x) = g(x)$
4. Realizar um sistema linear entre a **condição de variação de parâmetros** e o resultado obtido no **item 3**
5. Obter as funções $u(x)\ e\ v(x)$ e encontrar a y_p em definitivo

Aplicação: Determinação da Catenária

A catenária, segundo Fernanda Teixeira (2012), simboliza a “forma exata da curva assumida por um cabo flexível e inextensível, suspenso em ambas as extremidades na mesma altura e sujeito a ação do seu próprio peso”. Em outras palavras e em termos matemáticos, a catenária se assemelha a um arco de parábola, ainda que não seja de fato um. (Exemplos de Catenária no vídeo).

Contexto histórico: problema proposto por Leonardo da Vinci; tentado ser solucionado por Galileu Galilei pela representação em parábola; resolvido por Johann Bernoulli, Gottfried Leibniz e Christiaan Huygens por meio de uma equação diferencial de segunda ordem.

Primeiramente, para se analisar a solução do problema da catenária, é necessário considerar o seguinte gráfico de sua curva (retirado e adaptado do material de Fernanda Teixeira):

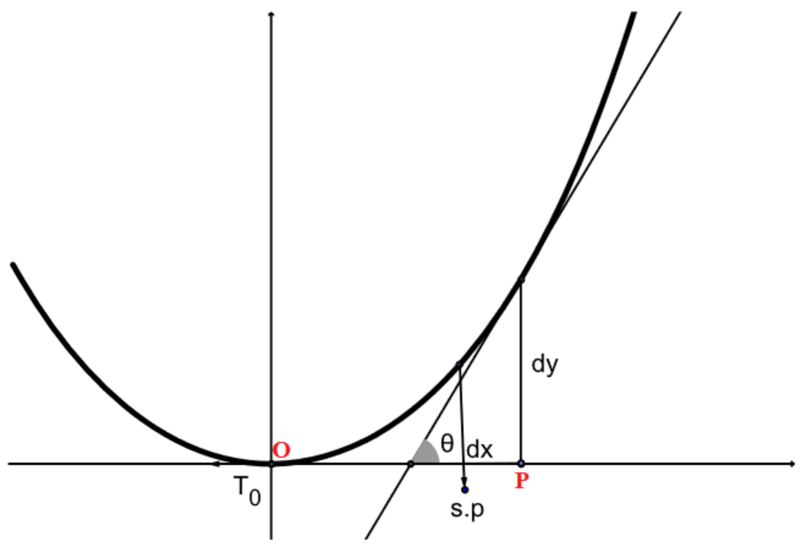

Figura 1 – Curva da Catenária em Eixos Cartesianos

Diante disso, vamos considerar a situação de **equilíbrio** entre o intervalo OP do gráfico:

$$TB + TP + POP = 0,$$

em que: TB é a tensão do cabo no ponto mais baixo; TP é a tensão do cabo no ponto $P = (x, y)$; POP é o peso do cabo no trecho OP de tal forma que $POP = \alpha s$ com α sendo o peso por unidade de comprimento e s o comprimento do arco OP.

Aplicando trigonometria com o ângulo θ, obtém-se:

$$\begin{cases} TB = TP * cos\theta \\ POP = TP * sen\theta \end{cases} <=> tg\theta = \frac{POP}{TB} = \frac{\alpha s}{TB} = C * s$$

Além disso:

$$tg\theta = y'(x) = C * s$$

Derivando y':

$$y''(x) = C * s' = C * \frac{ds}{dx}$$

Ainda:

$$cos\theta = \frac{dx}{ds} => sec\theta = \frac{ds}{dx} => \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + tg^2\theta} => \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (y'(x))^2}$$

Dessa forma:

$$y''(x) = C * \sqrt{1 + (y'(x))^2}$$

Assim, temos uma equação diferencial de **segunda ordem**. Neste caso, podemos obter a equação y integrando a equação acima a partir de uma mudança de variável do tipo $p = y'$. (Detalhes da conta no trabalho de Fernanda Teixeira).

Após a realização dos processos, obtém-se:

$$p = \frac{e^{Cx} - e^{-Cx}}{2} => y(x) = \frac{e^{Cx} + e^{-Cx}}{2C} + C$$

Como tem-se que $y(0) = 0$, obtém-se:

$$C0 = -\frac{1}{C}$$

Portanto, a equação da catenária, após aplicação das propriedades de funções hiperbólicas, é definida por:

$$y(x) = \frac{cosh(Cx) - 1}{C},$$

em que C é um parâmetro definido arbitrariamente (representa o “esticamento” da catenária).

A principal característica da catenária está em que uma força aplicada em qualquer ponto de sua curva é dividida igualmente por todo o material sendo, portanto, utilizada para fabricação de materiais como tuneis e fundo de latas de refrigerante.

Referências Bibliográficas

Casos de Coronavírus no Brasil (atualizado diariamente), por WorldOMeter em 2021: https://www.worldometers.info/coronavirus/country/brazil/

Modelagem de Casos de Coronavírus com Equações Diferenciais, pelo professor Onezimo Cardoso em 2020: https://www.youtube.com/watch?v=-m5Dl1yH5vA

A evolução epidêmica do COVID19 pelo Modelo SIR, pela UFPEL em 2020: https://wp.ufpel.edu.br/fentransporte/2020/04/09/a-evolucao-epidemica-do-covid-19-modelo-sir/

Entendendo a evolução do COVID19 com o Modelo SIR, pelo Indicium em 2020: https://blog.indicium.tech/entendendo-a-evolucao-do-covid-19-modelo-sir/

Equações Diferenciais Ordinárias (Capítulo 4), por Adiando Medeiros e Milton Oliveira (UFPB) em 2017: http://www.mat.ufpb.br/milton/disciplinas/edo/livro_edo.pdf

Equações Diferenciais Ordinárias (Capítulo 3), por Ulysses Sodré (UEL) em 2003: http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/pdfs/edo.pdf

Wronskiano: https://pt.wikipedia.org/wiki/Wronskiano

Método da Redução de Ordem: https://pt.wikipedia.org/wiki/Redu%C3%A7%C3%A3o_de_ordem

Método dos Coeficientes a Determinar: https://pt.wikipedia.org/wiki/Coeficientes_a_determinar

Método da Variação de Parâmetros: https://pt.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_da_varia%C3%A7%C3%A3o_de_par%C3%A2metros

Aula 6 – Método da Redução de Ordem, Raízes Repetidas da Equação Característica e a Equação de Euler, por Marcos Valle (UNICAMP) em 2016: https://www.ime.unicamp.br/~valle/Teaching/2016/MA311/Aula6.pdf

Transformada de Laplace (Capítulo 1), por Enio Romagnome (UFPB) em 2010: http://www.mat.ufpb.br/bienalsbm/arquivos/Conferencias/EnioCosta-topesp-conf2/TP-Completo.pdf (Resumo em: http://www.mat.ufpb.br/bienalsbm/arquivos/Conferencias/EnioCosta-topesp-conf2/TP.pdf)

Modelos Descritos por Equações Diferenciais Ordinárias (Capítulo 3), por Fernanda Luiz Teixeira (UNESP Rio Claro) em 2012: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/94355/teixeira_fl_me_rcla.pdf;jsessionid=94A73E68F81459ADEAB643DAE6C14DE1?sequence=1

Catenária: https://pt.wikipedia.org/wiki/Caten%C3%A1ria