4616 – Métodos Numéricos Computacionais

Larissa Oliveira
oliveira.t.larissa@gmail.com

Na última aula...

INTERPOLAÇÃO

Interpolar uma função $f(x)$ consiste em aproximar essa função por outra função $g(x)$, escolhida entre uma classe de funções definida a priori e que satisfaça algumas propriedades. A função $g(x)$ é então usada em substituição à função $f(x)$.

INTERPOLAÇÃO

A necessidade de se efetuar esta substituição surge em várias situações, como por exemplo:

- ✓ São conhecidos somente os valores numéricos da função para um conjunto de pontos e é necessário calcular o valor da função em um ponto não tabelado;

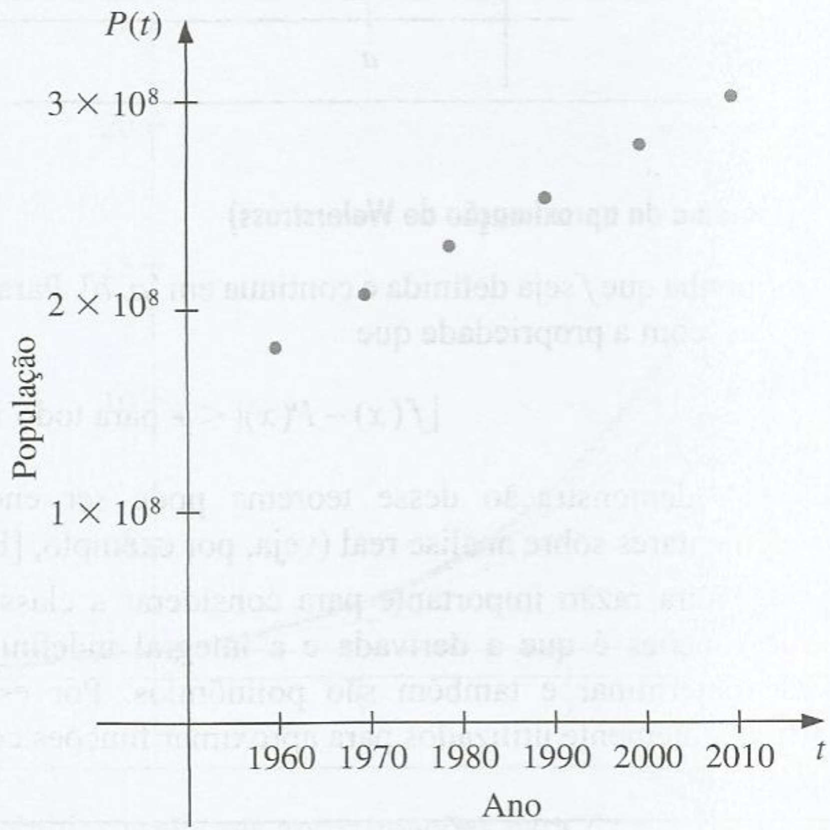
- ✓ A função em estudo tem uma expressão tal que operações como a diferenciação e a integração são difíceis (ou mesmo impossíveis) de serem realizadas.

INTERPOLAÇÃO

Exemplos:

Um censo da população norte-americana é realizado a cada dez anos. A tabela a seguir fornece a população, em milhares de pessoas, de 1960 a 2010 e os dados também são representados na figura.

Ano	1960	1970	1980	1990	2000	2010
População (em milhares)	179.323	203.302	226.542	249.633	281.422	308.746



INTERPOLAÇÃO

Exemplos:

Em um experimento de laboratório, observa-se o crescimento de uma pop
ção de um tipo de larva, em um tanque, de dois em dois dias, durante um peri
de tempo de 12 dias (número de larvas por cm^3), conforme a seguinte tabel

dias	0	2	4	6	8	10	12
larva (cm^3)	17	25	34	43	56	65	78

$g(x) = 0.0982x^2 + 3.9107x + 16.8571.$

$g(16) = 104.5675$ larvas por cm^3

condições para o crescimento da população preservadas.

INTERPOLAÇÃO

Exemplos:

A velocidade do som na água varia com a temperatura. Usando os valores obtidos na tabela abaixo, determinar o valor aproximado da velocidade do som na água a 100 °C usando o polinômio interpolador de Lagrange de grau 2.

Temp °C	86	93	98	104	110
Vel (m/s)	1552	1548	1544	1538	1532

$$P(x) = -0.0182x^2 + 2.6727x + 1456.6909$$

$$P(100) = 1542.1455$$

Portanto, a velocidade do som na água é de aproximadamente 1542 m/s.

INTERPOLAÇÃO

Considere (n +1) pontos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, chamamos *nós da interpolação,* e os valores de $f(x)$ nesses pontos:

$$\boxed{f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n).}$$

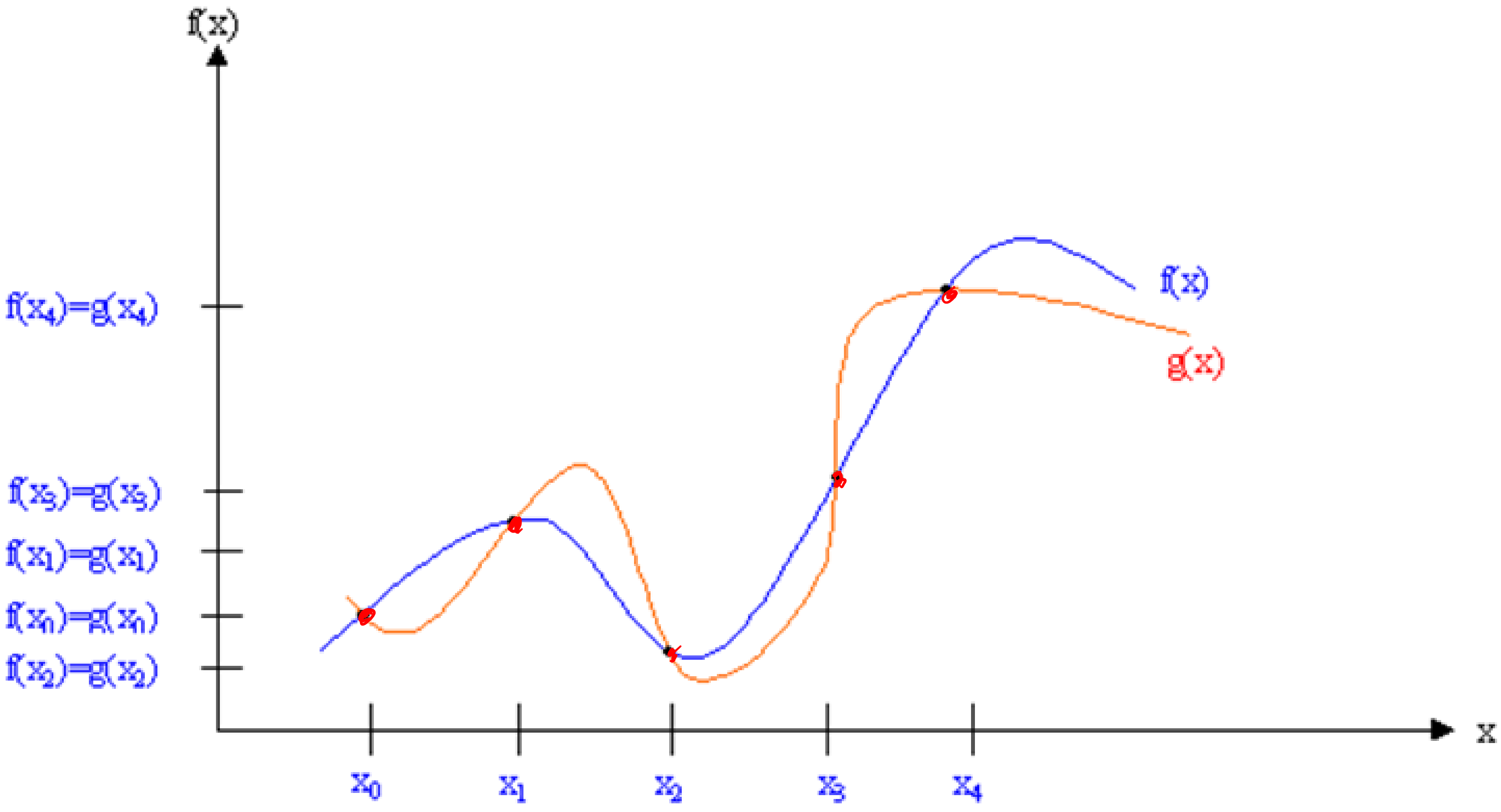
Interpolar $f(x)$ consiste em obter uma função $g(x)$ tal que:

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots a_n x^n$

$$\begin{cases} g(x_0) = f(x_0) \\ g(x_1) = f(x_1) \\ g(x_2) = f(x_2) \\ \quad . \qquad\quad . \\ \quad . \qquad\quad . \\ \quad . \qquad\quad . \\ g(x_n) = f(x_n) \end{cases}$$

INTERPOLAÇÃO

Para n = 4 (5 nós)



INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

A interpolação por meio de polinômios consiste em, dados (n+1) pontos distintos $(x_0,f(x_0))$, $(x_1,f(x_1))$, …, $(x_n,f(x_n))$, aproximar $f(x)$ por um polinômio de grau ≤ n:

$$f(x_i) = p_n(x_i), i = 0,\ldots,n$$

Representação de $p_n(x)$:

$$\boxed{p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n}$$

Obter $p_n(x)$ consiste em determinar os coeficientes

$$\boxed{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n}$$

INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

Determinando os coeficientes $a_{0,}$ a_1, a_2, ..., a_n

Da condição $p_n(x_k) = f(x_k)$, $\forall$ k = 0, 1, 2, ..., n, temos:

$$\begin{cases} a_0 & + & a_1 x_0 & + & a_2 x_0^2 & + & \cdots & + & a_n x_0^n & = & f(x_0) \\ a_0 & + & a_1 x_1 & + & a_2 x_1^2 & + & \cdots & + & a_n x_1^n & = & f(x_1) \\ . & & . & & . & & . & & . & & . \\ . & & . & & . & & . & & . & & . \\ . & & . & & . & & . & & . & & . \\ a_0 & + & a_1 x_n & + & a_2 x_n^2 & + & \cdots & + & a_n x_n^n & = & f(x_n) \end{cases}$$

$Ax=b$

com (n + 1) equações e (n + 1) variáveis: $\boxed{a_0, a_1, \ldots, a_n.}$

INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

A matriz dos coeficientes do sistema é dada por:

$$\begin{array}{c} x_0^0 \\ x_1^0 \\ \\ \\ \\ x_n^0 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

Matriz de Vandermonde!!!

Desde que $x_{0,}$ x_1, ..., x_n sejam pontos distintos, $\boxed{\det(A) \neq 0}$

INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

Teorema: *Existência e unicidade do Polinômio Interpolador*

Seja $f(x)$ definida em $x_0, x_1, \ldots, x_n$, (n + 1) pontos distintos de um intervalo [a, b]. Então existe um único polinômio $p(x)$ de grau menor ou igual a n tal que .

$$p(x_i) = f(x_i) = y_i, i = 0, \ldots, n$$

FORMA DE LAGRANGE DO POLINÔMIO DE INTERPOLAÇÃO

Seja $f(x)$ definida um intervalo [a, b] e sejam $x_0, x_1, \dots, x_n$, (n + 1) pontos distintos em [a, b] e $y_i = f(x_i)$, i = 0, ..., n.
Seja $p_n(x)$ o polinômio de grau $\leq n$ que interpola f em $x_0, \dots, x_n$.
Representamos $p_n(x)$ na forma:

$$\boxed{p_n(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \dots + y_n l_n(x)}$$

Polinômios de grau n.

Para cada *i*, a condição $p_n(x_i) = y_i$ deve ser satisfeita, ou seja:

$$p_n(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \dots + y_n l_n(x) = y_i$$

FORMA DE LAGRANGE DO POLINÔMIO DE INTERPOLAÇÃO

$$\underbrace{\ell_{\mathrm{k}}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)}}_{\textbf{Polinômio de grau } n}$$

FORMA DE LAGRANGE DO POLINÔMIO DE INTERPOLAÇÃO

A forma de Lagrange para o polinômio interpolador é dada por:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \ell_k(x) \text{ , em que } \ell_k(x) = \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (x_k - x_j)}$$

Hoje...

INTERPOLAÇÃO LINEAR

- ✓ caso particular de interpolação
- ✓ ocorre em apenas 2 pontos distintos.
- ✓ Usando a forma de Lagrange, o polinômio de grau ≤ 1 é dado por:

$$\boxed{p_1(x) = y_0\ell_0(x) + y_1\ell_1(x)}$$

Como: $l_0 = \dfrac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)}$ $\qquad l_1 = \dfrac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$

$$p_1(x) = y_0\frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1\frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} \Rightarrow p_1(x) = \frac{(x_1 - x)y_0 + (x - x_0)y_1}{(x_1 - x_0)}$$

INTERPOLAÇÃO LINEAR

Exemplo Considere a função $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ tabelada:

	x_0	x_1
x	1	2
f(x)	1/2	1/3

Determine o polinômio interpolador e avalie f(1.5).

$$P_1(x) = \frac{(x_1 - x)y_0 + (x - x_0)y_1}{(x_1 - x_0)} = \frac{(2-x)\frac{1}{2} + (x-1)\frac{1}{3}}{\cancel{2-1}\ 1} =$$

$$= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{3x}{6} + \frac{2x}{6} + \frac{3}{3} - \frac{1}{3} =$$

$$= -\frac{x}{6} + \frac{2}{3}$$

$$f(1.5) \cong P_1(1.5) = 0.4167$$

POLINÔMIO INTERPOLADOR DE NEWTON

Diferenças Divididas

Seja f(x) uma função contínua, (n + 1) vezes diferenciável e definida em x_0, x_1, ..., x_n pontos distintos de um intervalo [a, b].

$$f[x_0] = f(x_0) \longrightarrow \text{Ordem } 0$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \longrightarrow \text{Ordem } 1$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \longrightarrow \text{Ordem } 2$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} \longrightarrow \text{Ordem } 3$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$f[x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \cdots, x_n] - f[x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \longrightarrow \text{Ordem } n$$

POLINÔMIO INTERPOLADOR DE NEWTON

- ✓ Diferenças de ordem 1: calculadas a partir da diferenças divididas de ordem zero;

- ✓ Diferenças de ordem 2: calculadas a partir da diferença de ordem 1.

assim sucessivamente.

POLINÔMIO INTERPOLADOR DE NEWTON

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	...	Ordem n
x_0	$f[x_0]$					
		$f[x_0, x_1]$				
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$			
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$		
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$		.	
		$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	.	
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$	.	.	$f[x_0, x_1, x_2, ..., x_n]$
		$f[x_3,x_4]$	.	.	.	
			.	.		
x_4	$f[x_4]$	.	.	$f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		
.	.	.	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$			
.	.	.				
.	.	$f[x_{n-1}, x_n]$				
x_n	$f[x_n]$					

POLINÔMIO INTERPOLADOR DE NEWTON

Exemplo:

Seja f(x) tabelada:

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
x	-1	0	1	2	3
f(x)	-2	29	30	31	62

$f[x_0] = f(x_0)$

	x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	Ordem 4
x_0	-1	-2				
			31			
x_1	0	29		-15		
			1		5	
x_2	1	30		0		0
			1		5	
x_3	2	31		15		
			31			
x_4	3	62				

$$f[x_0,x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} = \frac{29+2}{0+1} = 31$$

$$f[x_1,x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1} = \frac{30-29}{1-0} = 1$$

$$f[x_2,x_3] = \frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2} = \frac{31-30}{2-1} = 1$$

$$f[x_3,x_4] = \frac{f[x_4]-f[x_3]}{x_3-x_4} = \frac{62-31}{3-2} = 31$$

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = \frac{1-31}{1+1} = -15$$

$$f[x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1} = \frac{1-1}{2-0} = 0$$

$$f[x_2,x_3,x_4] = \frac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2} = \frac{31-1}{3-1} = 15$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} = \frac{0 + 15}{2 + 1} = 5$$

$$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_2, x_3, x_4] - f[x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_1} = \frac{15 - 0}{3 - 0} = 5$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_1, x_2, x_3, x_4] - f[x_0, x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_0} = \frac{5 - 5}{3 + 1} = 0$$

POLINÔMIO INTERPOLADOR DE NEWTON

Propriedade:

✓ $f\,[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ é simétrica nos argumentos, ou seja, $f\,[x_0, x_1, \ldots, x_n] = f[x_{j0}, x_{j1}, \ldots, x_{jn}]$, em que $j_0, j_1, \ldots, j_n$ é qualquer permutação dos inteiros 0, 1, ..., n. Exemplo:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f[x_0] - f[x_1]}{x_0 - x_1} = f[x_1, x_0]$$

Para k = 2 teremos:

✓ $f\,[x_0, x_1, x_2] = f\,[x_0, x_2, x_1] = f\,[x_1, x_0, x_2] = f\,[x_1, x_2, x_0] =$
$= f\,[x_2, x_0, x_1] = f\,[x_2, x_1, x_0]$.

POLINÔMIO INTERPOLADOR DE NEWTON

Forma de Newton do Polinômio de Interpolação

- ✓ Seja $f(x)$ contínua, definida em $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (n + 1) pontos distintos de um intervalo [a, b].

Diferenças divididas de $f(x)$ nos pontos x_0 e x:

$$f[x_0, x] = \frac{f[x] - f[x_0]}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow (x - x_0) f[x_0, x] = \boxed{f(x)} - f(x_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{p_o(x)} + \underbrace{(x - x_0) f[x_0, x]}_{E_0(x)}$$

$$\Rightarrow E_0(x) = f(x) - p_0(x) = (x - x_0) f[x_0, x]$$

(erro cometido ao aproximar f(x) por p_0(x))

POLINÔMIO INTERPOLADOR DE NEWTON

- ✓ Para os pontos x_0, x_1 e x:

$$f[x_0,x_1,x] = f[x_1,x_0,x] = \frac{f[x_0,x] - f[x_1,x_0]}{x - x_1} =$$

$$= \frac{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f[x_1,x_0]}{(x - x_1)} = \frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0) f[x_1,x_0]}{(x - x_1)(x - x_0)}$$

$$\Rightarrow \boxed{f[x_0,x_1,x] = \frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0) f[x_1,x_0]}{(x - x_0)(x - x_1)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \underbrace{f(x_0) + (x - x_0) f[x_1,x_0]}_{p_1(x)} + \underbrace{(x - x_0)(x - x_1) f[x_0,x_1,x]}_{E_1(x)}$$

POLINÔMIO INTERPOLADOR DE NEWTON

✓ $p_1(x)$ interpola $f(x)$ em x_0 e em x_1?

$$p_1(x_0) = f(x_0)$$

$$p_1(x_1) = f(x_0) + \underbrace{\overset{1}{(x_1 - x_0)}} \boxed{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}} = f(x_1)$$

$x_0 \to x_0$

$$p(x) = f(x_0) + \underbrace{(x - x_0)\, f[x_1, x_0]}$$

POLINÔMIO INTERPOLADOR DE NEWTON

Para construir $p_2(x)$ que interpola $f(x)$ em $\underbrace{x_0, x_1, x_2,}$ temos:

$$f[x_0, x_1, x_2, x] = f[x_2, x_1, x_0, x] = \frac{f[x_1, x_0, x] - f[x_2, x_1, x_0]}{x - x_2} =$$

$$= \frac{\dfrac{f[x_0, x] - f[x_1, x_0]}{x - x_1} - f[x_2, x_1, x_0]}{(x - x_2)} = \frac{\dfrac{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} - f[x_1, x_0]}{(x - x_1)} - f[x_2, x_1, x_0]}{(x - x_2)} =$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0) f[x_1, x_0] - (x - x_0)(x - x_1) f[x_2, x_1, x_0]}{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)} \Rightarrow$$

POLINÔMIO INTERPOLADOR DE NEWTON

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] + \ldots +$$
$$+ (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f[x_0,x_1,x_2,x]$$

Então

$$p_2(x) = \underbrace{\underbrace{\underbrace{f(x_0)}_{p_0(x)} + (x-x_0)f[x_0,x_1]}_{p_1(x)} + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2]}_{p_2(x)}$$

$$E_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f[x_0, x_1, x_2, x].$$

POLINÔMIO INTERPOLADOR DE NEWTON

Aplicando sucessivamente o mesmo raciocínio para todos os pontos tabelados, temos a forma de Newton para o polinômio de grau $\leq$ n que interpola $f(x)$ em $x_0, \ldots, x_n$:

$$p_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \ldots + \\ + \ldots + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

e o erro é dado por: $E_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]$

POLINÔMIO INTERPOLADOR DE NEWTON

Teorema:

Seja $f(x)$ uma função contínua. Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $(n + 1)$ pontos distintos de [a, b], então:

$$p_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \ldots + \\ + \ldots + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

é o polinômio interpolador de Newton para a função $f(x)$ sobre os pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

POLINÔMIO INTERPOLADOR DE NEWTON

Exemplo:

Usando a forma de Newton, construir o polinômio que interpola f(x) nos pontos tabelados e calcular f(0.3).

x	0	0.2	0.4
f(x)	1	2	4

$$P_2(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2]$$

$$P_2(x) = 1 + (x - 0)5 + (x - 0)(x - 0.2)\frac{25}{2}$$

$$P_2(x) = \frac{25}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1$$

x	ORDEM 0	ORDEM 1	ORDEM 2
0	1		
		$f[x_0,x_1]$ 5	
0.2	2		$f[x_0,x_1,x_2]$ $\frac{25}{2}$
		10	
0.4	4		

$$f(0.3) \cong P_2(0.3) = 2{,}875$$

POLINÔMIO INTERPOLADOR DE NEWTON

Atividade para presença - 03/08/2020.

Considere a função $f(x) = e^x + sen(x)$ tabelada, como segue:

$\boldsymbol{x_i}$	0	0,5	1,0
$\boldsymbol{f(x_i)}$	1	2,1281	3,5598

Determine o polinômio interpolador usando a fórmula de Newton e estime $f(0{,}7)$.