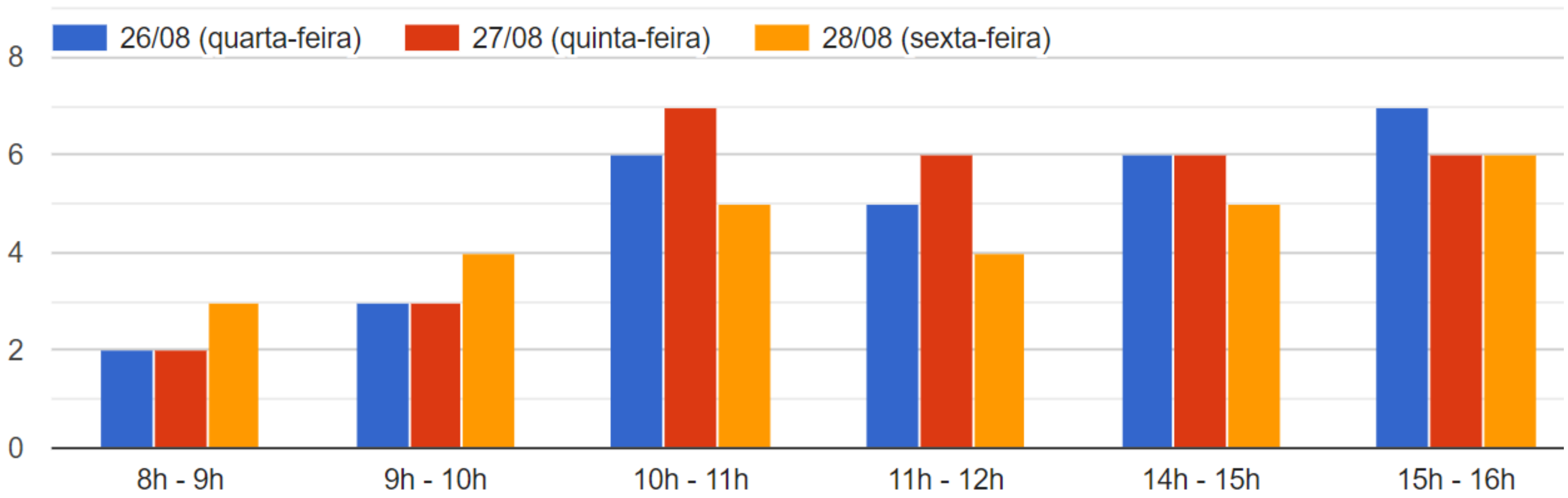
4616 – Métodos Numéricos Computacionais

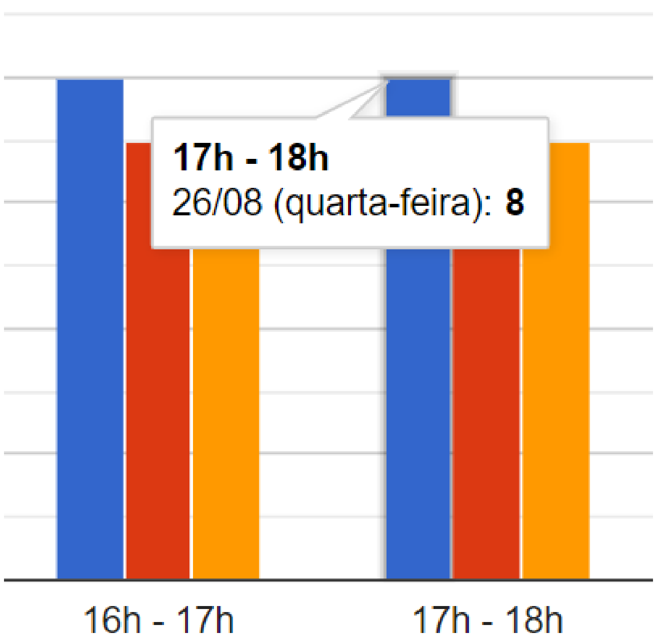
Larissa Oliveira
oliveira.t.larissa@gmail.com

unesp

Datas…

11 pessoas responderam...



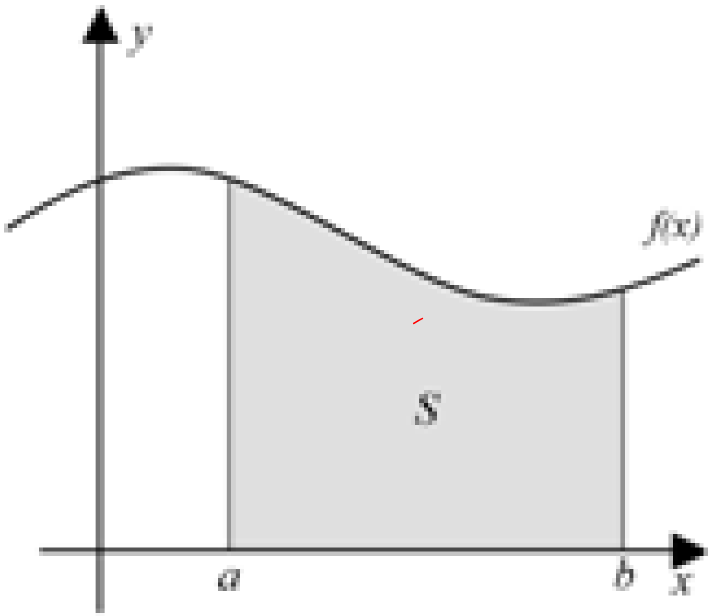


Domingo	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
09	10 Ajuste (Lista 4 e trab 3)	11 Ajuste	12	13	14	15
16	17 Integração	18 Integração **Trab 2**	19	20	21	22
23	24 Integração (Lista 5)	25 SNL **Lista 4**	26 **Reposição SNL** **16h – 18h**	27	28	29
30	31 EDO	01 EDO **Trab 3**	02	03	04 **Notas parciais**	05
06	07 Repor 26/08!	08 30 **P2** **Lista 5**	09	10	11 **Médias**	12
13	14	15 **Exame**	16	17	18	19

Hoje...

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

No cálculo, a integral de uma função foi criada originalmente para determinar a área sob uma curva no plano cartesiano.



Também surge naturalmente em problemas de física.

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

- ✓ $f(x)$: função contínua no intervalo [a,b] e primitiva F(x) conhecida. A integral definida de pode ser calculada pela fórmula de Newton-Leibniz:

$$\int_a^b f(x)dx = f\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Esta técnica não pode ser aplicada quando:

- ✓ apenas alguns pontos tabelados da função são conhecidos

- ✓ $f(x)$ não pode ser integrada

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Ideia Básica

Substituir a função por um polinômio que aproxime $f(x)$ razoavelmente no intervalo [a,b].

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_a^b P_n(x)\,dx$$

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Fórmulas de Newton – Cotes

Considere uma função definida em x_0, x_1, ..., x_n (n + 1) pontos distintos e equidistantes no intervalo [a, b]. Para a determinação das fórmulas de Newton-Cotes utiliza-se o polinômio interpolador de Newton-Gregory para pontos equidistantes:

$$P_n(s) = f(x_0) + s\,\Delta f\left(x_0\right) + s(s-1)\frac{\Delta^2 f\left(x_0\right)}{2!} + \ldots + s(s-1)\ldots(s-n+1)\,\frac{\Delta^n f\left(x_0\right)}{n!}$$

em que $s = \dfrac{x - x_0}{h}$.

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Aproximando a função $f(x)$ pelo polinômio de Newton-Gregory $p_n(s)$ e integrando-o, obtém-se as fórmulas de Newton-Cotes.

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \cong \frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)]+\frac{h}{2}[f(x_1)+f(x_2)]+\ldots+\frac{h}{2}[f(x_{x-1})+f(x_n)]=$$

$$=\frac{h}{2}[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\ldots+2f(x_{x-1})+f(x_n)]$$

$$\frac{h}{2}\left[f(x_0)+2\left(f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})\right)+f(x_n)\right]$$

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Erro na Integração Numérica quando n é ímpar

$$E_n = \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_0^n (u-1)\ldots(u-n)\,du \quad \text{para algum ponto } \xi \in [x_0, x_n]$$

A

$n = p$

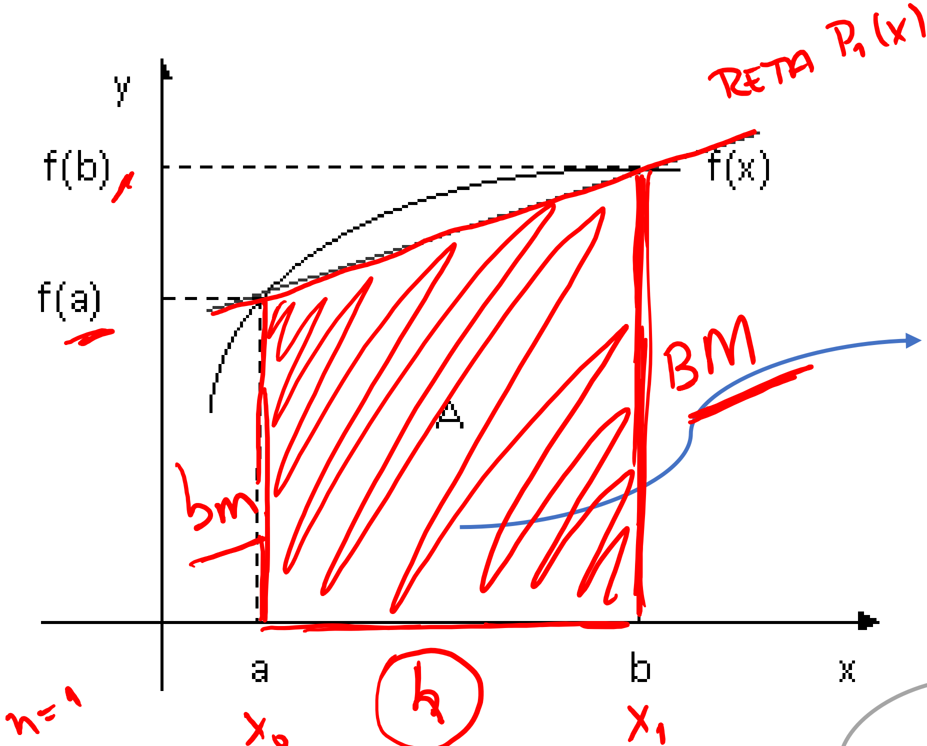
Erro na Integração Numérica quando n é par

$$E_n = \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_0^n \left(u-\frac{n}{2}\right)u(u-1)\ldots(u-n)\,du$$

para algum ponto $\xi \in [x_0, x_n]$

REGRA DOS TRAPÉZIOS

Considere uma função $f(x)$ contínua e definida em dois pontos x_0 e x_1 no intervalo [a,b]. Queremos calcular a área A formada por $f(x)$ e o eixo dos x:



Regra dos Trapézios

Geometricamente

$$\int_a^b f(x)dx \cong A$$

$$A = (Base\ maior + Base\ menor)\frac{h}{2}$$

$$\boxed{A = (f(b) + f(a))\frac{b-a}{2}}$$

$$\int_a^b f(x)dx \cong (f(b) + f(a))\frac{b-a}{2}$$

REGRA DOS TRAPÉZIOS

Considere uma função $f(x)$ contínua e definida em dois pontos x_0 e x_1 no intervalo [a,b]. Para a determinação da Regra dos Trapézios utiliza-se o polinômio de Newton-Gregory do 1º grau, que é dado por:

$$P_1(x) = f(x_0) + (x - x_0)\,\frac{\Delta f(x_0)}{h}$$

e assim, para a $= x_0$ e b $= x_1$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_1} p_1(x)dx = h\int_0^1 P_1(s)ds$$

$$s = \frac{x - x_0}{h}$$

$$x_1 - x_0$$

REGRA DOS TRAPÉZIOS

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \cong h\int_0^1 [f(x_0) + s\Delta f(x_0)]ds = h\int_0^1 f(x_0)\,ds + h\int_0^1 \Delta f(x_0)s\,ds =$$

$$= h\int_0^1 f(x_0)\,ds + h\int_0^1 [f(x_1) - f(x_0)]s\,ds \quad = h\,f(x_0)\,s\,\big|_0^1 + h[f(x_1) - f(x_0)]\frac{s^2}{2}\big|_0^1 \;=$$

$$= h\,f(x_0) + \frac{h}{2}[f(x_1) - f(x_0)] = \frac{1}{2}(2hf(x_0) + hf(x_1) - hf(x_0)) = \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_0)]$$

$\frac{h}{2}[f(b) + f(a)] = A$

Portanto:

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_0)]}$$

REGRA DOS TRAPÉZIOS

$\int_0^1 (u^2 - u)\,du$

$\left.\frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2}\right|_0^1 = \frac{-1}{6}$

Erro na regra dos trapézios

O intervalo n = 1 é ímpar e, portanto:

$u = s$

$$E_1 = \frac{h^3 f^{(2)}(\xi)}{2!}\underbrace{\int_0^1 u(u-1)du}_{-\frac{1}{6}},\ x_0 \le \xi \le x_1 \Rightarrow \boxed{E_1 = \frac{-h^3 f^{(2)}(\xi)}{12}}$$

Limitante superior para o erro

$$|E_1| \le \frac{h^3}{12}\max\{|f^{(2)}(x)|\ x_0 \le x \le x_1\}$$

REGRA DOS TRAPÉZIOS

Exemplo:

Dada a tabela

x	0.5	1
f(x)	-0.1931	1

Calcule o valor aproximado de $\int_{0,5}^{1} (\ln(x) + x)dx$

usando a regra dos trapézios e um Limitante Superior para o erro.

$$\int_{0,5}^{1} (\ln(x) + x)\,dx \simeq \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1) \right]$$

$$\simeq \frac{0.5}{2}\left[-0,1931 + 1 \right]$$

$$\simeq 0,2017$$

L.S p/ ERRO:

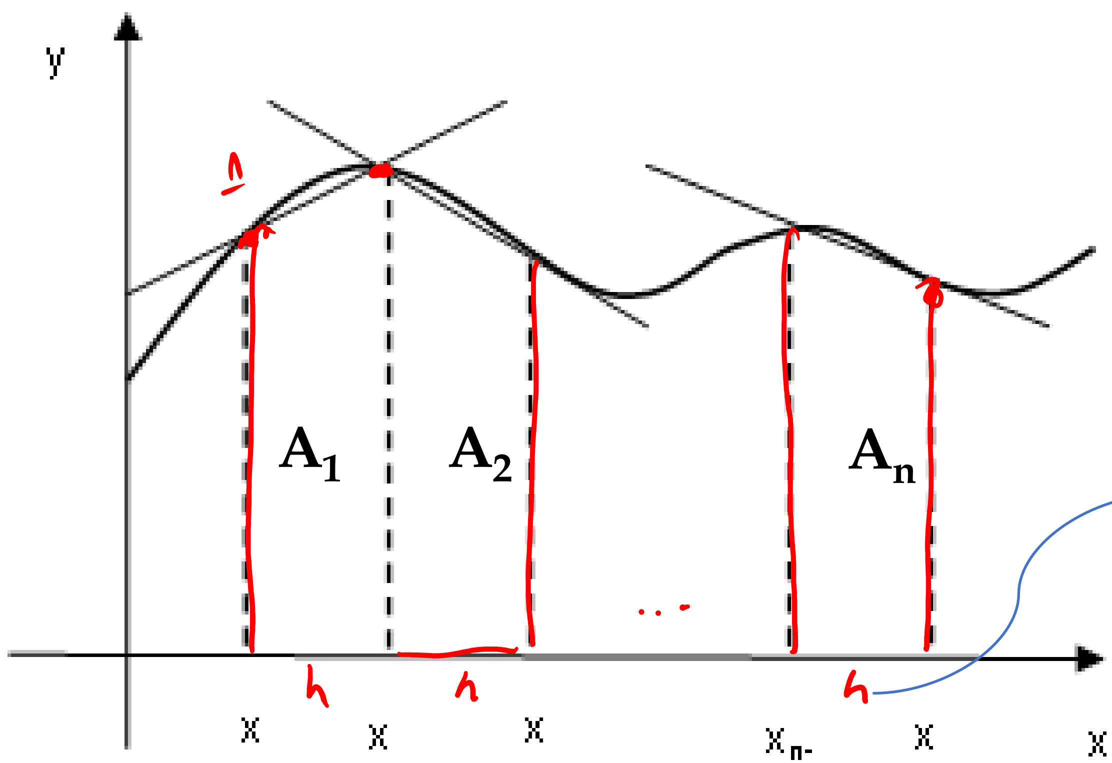
$$|E_1| \leq \frac{h^3}{12} \max\{ |f^{(2)}(x)|, \; 0,5 \leq x \leq 1 \} \rightarrow |E_1| \leq \frac{(0,5)^3}{12} 4 = 0,0417$$

$f^{(2)}(x) = -\frac{1}{x^2}$ DECRESCENTE $[0,5, 1]$

$$\max\left\{ \left|\frac{-1}{(0,5)^2}\right|, \left|\frac{-1}{1^2}\right| \right\} = \max\{4, 1\} = 4$$

REGRA DOS TRAPÉZIOS GENERALIZADA

A regra dos trapézios generalizada consiste na subdivisão do intervalo de integração em n subintervalos iguais, cada qual de amplitude h, e a aplicação da Regra dos Trapézios em cada subintervalo, isto é, a cada 2 pontos consecutivos.



$$h = \frac{x_n - x_0}{n}$$

$$n = \frac{x_n - x_0}{h}$$

REGRA DOS TRAPÉZIOS GENERALIZADA

Para a regra generalizada:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \cong \frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)]+\frac{h}{2}[f(x_1)+f(x_2)]+\ldots+\frac{h}{2}[f(x_{x-1})+f(x_n)]=$$

$$\boxed{=\frac{h}{2}[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\ldots+2f(x_{x-1})+f(x_n)]}$$

Erro na regra dos trapézios generalizada

$$E_t = \frac{h^2}{12}(x_n - x_0)f^{(2)}(\xi), \xi \in [x_{0,} x_1]$$

Limitante superior para o erro

$$|E_t| \leq \frac{h^2}{12}(x_n - x_0)\max\{|f^{(2)}(x)| \quad x_0 \leq x \leq x_n\}$$

REGRA DOS TRAPÉZIOS GENERALIZADA

Exemplo:
Calcule o valor aproximado da integral

$$\int_1^4 \sqrt{x}dx$$

usando a regra dos trapézios generalizada para 2, 4 e 6 subintervalos e um limitante superior para o erro.

I) 2 subintervalos:

$$h = \frac{(x_n - x_0)}{n} = \frac{(4-1)}{2} = 1,5$$

x_i	1	2,5	4
$f(x_i)$	1	1,5811	2

$$\int_1^4 \sqrt{x}\,dx \simeq \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + f(x_2)\right] =$$

$$= \frac{1,5}{2}\left[1 + 2(1,5811) + 2\right] = 4,6217$$

$$\therefore \int_1^4 \sqrt{x}\,dx \simeq 4,6217$$

LS p/ ERRO:

$$|E_t| \leq \frac{h^2}{12}(x_n - x_0)\max\left\{|f^{(2)}(x)|,\ x_0 \leq x \leq x_n\right\}$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{-1}{4}x^{-3/2}$$ DECRESCENTE $[1,4]$

$$\boxed{\max = 0,25 = \frac{1}{4}}$$

$$|E_t| \le \frac{(1,5)^2}{12}(4-1)\frac{1}{4} = \underline{0,1406}$$

III) 4 SUBINT.

$$h = \frac{(x_n - x_0)}{n} = \frac{(4-1)}{4} = 0,75$$

x_i	1	1,75	2,5	3,25	4
$f(x_i)$	1	1,3229	1,5811	1,8028	2

$$\int_1^4 \sqrt{x}\,dx \simeq \frac{0,75}{2}\left[1 + 2(1,3229 + 1,5811 + 1,8028) + 2\right] = 4,6551$$

$$\int_1^4 \sqrt{x}\,dx \simeq \underline{4,6551}$$

$$|E_t| \leq \frac{(0,75)^2}{12}(4-1)\frac{1}{4} = 0,0352$$

III) $\underline{6 \text{ SUBINT.:}}$

$$h = \frac{(4-1)}{6} = 0,5$$

x_i	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x_i)$	1	1,2247	1,4142	1,5811	1,7321	1,8708	2

$$\int_1^4 \sqrt{x}\,dx \simeq \frac{0,5}{2}\left[1 + 2(1,2247 + 1,4142 + 1,5811 + 1,7321 + 1,8708) + 2\right] =$$

$$= 4,6615$$

$$\int_1^4 \sqrt{x}\,dx \simeq 4,6615$$

$$|E_t| \leq \frac{(0,5)^2}{12}(4-1)\frac{1}{4} = \underline{0,0156}$$

	2	4	6
$\int$	4,6217	4,6551	4,6615
E	0,1406	0,0352	0,0156

REGRA DOS TRAPÉZIOS GENERALIZADA

Atividade para presença – 17/08/2020.

Calcular pela regra dos Trapézios $\int_0^4 \ln(1+x)\,dx$ usando 5 pontos, sabendo-se que:

4 SUBINT

x_i	0	1	2	3	4
$ln(1+x_i)$	0	1,693	1,1	1,387	1,61

$n=4$

$h=1$

Calcule também um limitante superior para o erro.