4616 – Métodos Numéricos Computacionais

Larissa Oliveira
oliveira.t.larissa@gmail.com

unesp

Prova 1 – 28/07

Lista 3 SL – 03/08

Trabalho 2 – 11/08

Na última aula…

SISTEMAS LINEARES

Sistema de Equações Lineares

Um **sistema de equações lineares** ou simplesmente **sistema linear** é um conjunto de *n* equações lineares:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

a_{ij} e b_k são constantes reais, para $i, k = 1,\ldots, m$ e $j = 1,\ldots, n$.

SISTEMAS LINEARES

Forma Matricial: Ax = b

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m
\end{pmatrix}
$$

A **x** **b**

Solução do sistema linear: $x^* = (x_1, x_2, \ldots x_n)^T$

SISTEMAS LINEARES

Classificação dos sistemas lineares

Métodos diretos: são aqueles que fornecem solução exata do sistema linear, caso ela exista, após um número finito de operações.

Métodos iterativos: geram uma sequência de vetores $\{x^{(k)}\}$ a partir de uma aproximação inicial $x^{(0)}$. Sob certas condições, esta sequência converge para a solução x^*, caso ela exista.

Hoje...

Métodos iterativos para solução de sistemas lineares

Normas de vetores

- ✓ Notação: $\|x\|$
- ✓ É qualquer função definida em um espaço vetorial E, com valores em $\mathbb{R}$, satisfazendo as condições:

N$_1$) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ e $\|\mathbf{x}\| = 0$ se e somente se x = 0.

N$_2$) $\|\boldsymbol{\lambda}\mathbf{x}\| = |\lambda| \, \|\mathbf{x}\|$ para todo escalar λ.

N$_3$) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (desigualdade triangular).

Como exemplos de normas no $\mathbb{R}^n$ temos:

a) $\|x\|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$, b) $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, c) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

Métodos iterativos para solução de sistemas lineares

Exemplo

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 3 \\ 4 \\ -20 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\| x \|_\infty} = \max\{|-1|, |10|, |3|, |4|, |-20|\} = 20$$

$$\| x \|_1 = |-1| + |10| + |3| + |4| + |-20| = 38$$

$$\| x \|_E = \sqrt{(-1)^2 + 10^2 + 3^2 + 4^2 + (-20)^2} = \sqrt{526}$$

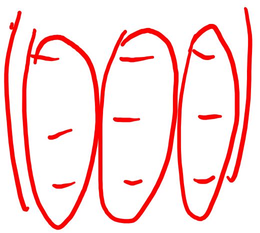
Métodos iterativos para solução de sistemas lineares

Norma de matrizes

O conjunto das matrizes (n × n), com as operações de soma de matrizes e produto de um escalar por uma matriz forma um espaço vetorial E de dimensão n^2. Algumas normas de matrizes:

a) $\|A\|_\infty = \max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ (norma linha)

b) $\|A\|_1 = \max\limits_{1 \le j \le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ (norma coluna)



c) $\|A\|_E = \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}$ (norma euclidiana)

Métodos iterativos para solução de sistemas lineares

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_\infty = \max\{6, 13, 4\} = 13$$

$$\|A\|_1 = \max\{10, 7, 6\} = 10$$

$$\|A\|_E = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2 + 6^2 + 3^2 + 4^2 + (-1)^2 + 2^2 + 1^2} =$$

$$= \sqrt{9 + 4 + 1 + 36 + 9 + 16 + 1 + 4 + 1} = \sqrt{81} = 9$$

Métodos iterativos

- ✓ Um método iterativo para calcular a solução de um sistema $Ax = b$ ($\det(A) \neq 0$) é denominado iterativo quando fornece uma sequência de soluções aproximadas, sendo que cada solução aproximada é obtida pela anterior.

A partir de uma solução inicial x_0 gera-se uma sequência de aproximações x_1, x_2, x_3, x_4, ... cada uma das quais obtidas das anteriores pela repetição do mesmo tipo de processo.

$Ax = b \rightarrow x = Bx + g$ $\qquad x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g \qquad k = 0, 1, 2 \ldots$

Métodos iterativos

Método de Jacobi-Richardson

$\det(A) \neq 0$

$a_{ii} \neq 0$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

O Método de Jacobi consiste na determinação de uma sequência de aproximantes de índice k:

$$x^{(k)}: \quad x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

a partir de valores iniciais

$$x^{(0)}: \quad x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$$

Métodos iterativos

$X = BX + g$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a_{12}/a_{11} & \cdots \\ a_{21}/a_{22} & 0 & \\ & & \ddots \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Método de Jacobi-Richardson

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (b_1 \,|\, a_{11} - a_{12}.x_2^{(k)} - \ldots - a_{1n}.x_n^{(k)})/a_{11} \\ x_2^{(k+1)} = (b_2 \,|\, a_{22} - a_{21}.x_1^{(k)} - \cdots - a_{1n}.x_n^{(k)})/a_{22} \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ x_n^{(k+1)} = (b_n \,|\, a_{nn} - a_{n1}.x_1^{(k)} - \cdots - a_{n,n-1}.x_{n-1}^{(k)})/a_{nn} \end{cases}$$

Critério de parada:

$\max\{|x_i|\}$

$1 \leq i \leq n$

$$\frac{||x^{(k+1)} - x^{(k)}||_\infty}{||x^{(k+1)}||_\infty} < \varepsilon$$

Valor pré-estabelecido

Computacionalmente usamos também como teste de parada o número máximo de iterações.

Métodos iterativos

Observação

A convergência ou não de um método iterativo para a solução de um sistema linear é independente da aproximação inicial escolhida.

$\|B\| << 1$

Critérios de convergência

- $$\max_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1 \quad \text{(Critério das Linhas)}$$

OU

- $$\max_j \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}} \left| \frac{a_{ij}}{a_{jj}} \right| < 1 \quad \text{(Critério das Colunas)}$$

Métodos iterativos

Observações

- ✓ No método de Jacobi-Richardson todos os valores de x da iteração (k+1) dependem dos valores de x da iteração (k), por isso o método é também chamado de **Método dos deslocamentos simultâneos**.

- ✓ Se a matriz A for estritamente diagonal dominante (em cada linha, o elemento da diagonal é estritamente maior que a soma de todos os outros elementos da linha), então o critério de convergência é automaticamente atendido.

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| \qquad i = 1, \dots, n$$

$$\|B\|_\infty < 1$$

Métodos iterativos

$$x_1 = (7 - 2x_2 - x_3)/10$$
$$x_2 = (-8 - x_1 - x_3)/5$$
$$x_3 = (6 - 2x_1 - 3x_2)/10$$

Exemplo

Resolva o sistema linear:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

com $x^{(0)} = (0.7, -1.6, 0.6)^T$ e precisão $\varepsilon = 10^{-2}$.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2/10 & -1/10 \\ -1/5 & 0 & -1/5 \\ -2/10 & -3/10 & 0 \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} 7/10 \\ -8/5 \\ 6/10 \end{pmatrix}$$

CONVERGENCIA

- LINHA:

$$\left|-\tfrac{2}{10}\right| + \left|-\tfrac{1}{10}\right| = \tfrac{3}{10}$$

$$\left|-\tfrac{1}{5}\right| + \left|-\tfrac{1}{5}\right| = \tfrac{2}{5}$$

$$\left|-\tfrac{2}{10}\right| + \left|-\tfrac{3}{10}\right| = \tfrac{1}{2}$$

$$\max\left\{\tfrac{3}{10}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{1}{2}\right\} = \underline{\tfrac{1}{2}} < 1$$

$\therefore$ CONVERGE

- COLUNA

$$\left|-\tfrac{1}{5}\right| + \left|-\tfrac{2}{10}\right| = \tfrac{4}{10}$$

$$\left|-\tfrac{2}{10}\right| + \left|-\tfrac{3}{10}\right| = \tfrac{1}{2}$$

$$\left|-\tfrac{1}{10}\right| + \left|-\tfrac{1}{5}\right| = \tfrac{3}{10}$$

$$\max\left\{\tfrac{4}{10}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{10}\right\} = \tfrac{1}{2} < 1$$

$$x_1^{(k+1)} = 7/10 - 2/10\, x_2^{(k)} - 1/10\, x_3^{(k)}$$

$$x_2^{(k+1)} = -8/5 - 1/5\, x_1^{(k)} - 1/5\, x_3^{(k)}$$

$$x_3^{(k+1)} = 6/10 - 2/10\, x_1^{(k)} - 3/10\, x_2^{(k)}$$

$$\boxed{x^{(0)} = (\underset{x_1^{(0)}}{0.7},\ \underset{x_2^{(0)}}{-1.6},\ \underset{x_3^{(0)}}{0.6})^T}$$

$$\boxed{x^{(1)} = (0.96,\ -1.86,\ 0.94)^T}$$

$$\text{erro} = \frac{\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty}{\|x^{(1)}\|_\infty}$$

$$\text{erro} = \frac{\max\{|0.96-0.7|,\ |-1.86+1.6|,\ |0.94-0.6|\}}{\max\{|0.96|,\ |-1.86|,\ |0.94|\}} = \frac{0,34}{1,86} = 0,1828$$

$$\boxed{x^{(2)} = (0.978,\ -1.98,\ 0.966)^T}$$

$$\text{erro} = \frac{\|x^{(2)} - x^{(1)}\|_\infty}{\|x^{(2)}\|_\infty}$$

$$erro = \frac{\max\{|0.978 - 0.96|, |-1{,}98 + 1.86|, |0.966 - 0.94|\}}{\max\{|0.978|, |-1{,}98|, |0.966|\}} = \frac{0.12}{1.98}$$

$$= 0{,}0606 > 10^{-2}$$

$$x^{(3)} = (0.9994, -1{,}9888, 0.9984)^T$$

$$erro = \frac{\| x^{(3)} - x^{(2)} \|_\infty}{\| x^{(3)} \|_\infty} = \frac{\max\{|0.9994 - 0.978|, |-1{,}9888 + 1{,}98|, |0{,}9984 - 0{,}966|\}}{\max\{|0{,}9994|, |-1{,}9888|, |0{,}9984|\}}$$

$$= \frac{0{,}0324}{1{,}9888} = 0{,}0163 > 10^{-2}$$

$$x^{(4)} = (0.9979, -1{,}9996, 0{,}9968)^T$$

$$\text{erro} = \frac{\| x^{(4)} - x^{(3)} \|_\infty}{\| x^{(4)} \|_\infty} =$$

$$= \frac{\max\{ |0.9979 - 0.9994|, |-1,9996 + 1,9888|, |0.9768 - 0.9784| \}}{\max\{ |0.9979|, |-1,9996|, |0.9968| \}}$$

$$= \frac{0,0108}{1,9996} = 0,0054 < \varepsilon$$

$$\therefore x^* \cong (0.9979, -1,9996, 0,9968)^T$$

Método de Jacobi-Richardson

Atividade para contabilizar presença

Usando o método iterativo de Jacobi-Richardson, determine uma solução aproximada para o seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 11 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Considere $x^{(0)} = (0,0,0)^T$ e precisão $\varepsilon = 0,01$. Verifique a condição de convergência.