12/08/20

Nome: Davi Augusto Neves Leite RA: 191027383

4ª Lista de Exercícios
(Interpolação e Ajuste de Curvas)

(1) • $F(1{,}27)$; polinômio de grau 3 e fórmula de Lagrange.

• Polinômio de Lagrange: necessário utilizar 4 pontos para obter um polinômio de grau 3. Ou seja, o ponto (3; 2,5) da tabela foi descartado nos cálculos abaixo.

$$P_3(X) = Y_0\, l_0(X) + Y_1\, l_1(X) + Y_2\, l_2(X) + Y_3\, l_3(X)$$

$$\Rightarrow l_0(X) = \frac{(X-X_1)(X-X_2)(X-X_3)}{(X_0-X_1)(X_0-X_2)(X_0-X_3)} = \frac{(X-0)(X-1)(X-2)}{(-2-0)(-2-1)(-2-2)}$$

$$l_0(X) = \frac{X^3-3X^2+2X}{-24}$$

$$\Rightarrow l_1(X) = \frac{(X-X_0)(X-X_2)(X-X_3)}{(X_1-X_0)(X_1-X_2)(X_1-X_3)} = \frac{X^3-X^2-4X+4}{4}$$

$$\Rightarrow l_2(X) = \frac{(X-X_0)(X-X_1)(X-X_3)}{(X_2-X_0)(X_2-X_1)(X_2-X_3)} = \frac{X^3-4X}{-3}$$

$$\Rightarrow l_3(X) = \frac{(X-X_0)(X-X_1)(X-X_2)}{(X_3-X_0)(X_3-X_1)(X_3-X_2)} = \frac{X^3+X^2-2X}{8}$$

$$\Rightarrow P_3(x) = (1,3)\left(\frac{x^3-3x^2+2x}{-24}\right) + (2)\left(\frac{x^3-x^2-4x+4}{4}\right) +$$
$$(-2,3)\left(\frac{x^3-4x}{-3}\right) + (-1,3)\left(\frac{x^3+x^2-2x}{8}\right)$$

$$\therefore P_3(x) = 1{,}05x^3 - 0{,}5x^2 - 4{,}85x + 2$$

- $F(1,27)$

$$\rightarrow F(1,27) \approx P_3(x) = -2{,}8151$$

2 • $F(x) = e^x$; polinômio de grau 2 ; fórmula de Newton-Gregory ; $F(3,12)$

- Polinômio de Newton-Gregory

x	$\Delta^0 f(x)$	$\Delta^1 f(x)$	$\Delta^2 f(x)$
3,0	20,08		
		4,45	
3,2	24,53		0,98
		5,43	
3,4	29,96		

$* h = 0{,}2$

$$\Rightarrow P_2(x) = F(x_0) + (x-x_0)\frac{\Delta^1 f(x_0)}{h^1 \cdot 1!} + (x-x_0)(x-x_1)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{h^2 \cdot 2!}$$

$$P_2(x) = 20{,}08 + (x-3)\left(\frac{4{,}45}{0{,}2}\right) + (x-3)(x-3{,}2)\left(\frac{0{,}98}{0{,}04 \cdot 2}\right)$$

$\therefore P_2(X) = 12{,}25X^2 - 53{,}7X + 70{,}93$

• $F(3{,}12)$

$\rightarrow F(3{,}12) \approx P_2(3{,}12) = 22{,}6324$

3) $T = 250°C$, polinômio de grau ≤ 2; fórmula de Newton

• Polinômio de Newton

X	F(X)	1ª ordem	2ª ordem
94	929		
		-0,2432	
205	902		0
		-0,2530	
371	860		

Fórmula:

$$\frac{F[X_1,\dots,X_n]-F[X_0,\dots,X_{n-1}]}{X_n-X_0}$$

$$\Rightarrow P_2(X) = F(X_0) + (X-X_0)F[X_0,X_1] + (X-X_0)(X-X_1)F[X_0,X_1,X_2]$$

$$P_2(X) = 929 + (X-94)(-0{,}2432) + (x-94)(x-205)(0)$$

$\therefore P_2(X) = -0{,}2432X + 951{,}8608$

• $F(250)$

$\rightarrow F(250) \approx P_2(250) = 891{,}0608$ kg/m³

$\therefore$ Valor aproximado da densidade para $T = 250°C$ é 891,0608 Kg/m³.

/ /

(4) $X = 1125m$; fórmula de Lagrange

• Polinômio de Lagrange

$$P_4(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + y_3 l_3(x) + y_4 l_4(x)$$

$$\Rightarrow l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)}$$

$$l_0(x) = \frac{x^4 - 3500x^3 + 4437500x^2 - 2406250000x + 468750000000}{93750000000}$$

$$\Rightarrow l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}$$

$$l_1(x) = \frac{x^4 - 3750x^3 + 5000000x^2 - 2812500000x + 562500000000}{-23437500000}$$

$$\Rightarrow l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}$$

$$l_2(x) = \frac{x^4 - 4000x^3 + 5687500x^2 - 3375000000x + 703125000000}{15625000000}$$

$$\Rightarrow l_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}$$

$$l_3(x) = \frac{x^4 - 4250x^3 + 6500000x^2 - 4187500000x + 937500000000}{-23437500000}$$

spiral

$$\Rightarrow l_4(X) = \frac{(X-X_0)(X-X_1)(X-X_2)(X-X_3)}{(X_4-X_0)(X_4-X_1)(X_4-X_2)(X_4-X_3)}$$

$$l_4(x) = \frac{X^4 - 4500X^3 + 7437500X^2 - 5343750000X + 1406250000000}{9375000000}$$

$$\therefore P_4(X) = -\frac{X^4}{1171875000000} + \frac{31X^3}{9375000000} - \frac{163X^2}{375000} + \frac{187X}{750} - 45$$

- $F(1125)$

$\rightarrow F(1125) \approx P_4(1125) = 19{,}5$ m

$\therefore$ A distância provável do paraquedista com relação ao alvo, num salto de 1125 m de altura, é próxima de 19,5 m.

(5) * Três dias = Três polinômios de grau ≤ 3; $F(9)$; fórmula de Newton; média das temperaturas

- Dia 1

↳ Polinômio de Newton

* Fórmula: $\frac{F[X_1, \ldots, X_n] - F[X_0, \ldots, X_{n-1}]}{X_n - X_0}$

spiral

X	F(X)	1ª ordem	2ª ordem	3ª ordem
6	18			
		1		
8	20		0,25	
		2		-0,0417
10	24		0	
		2		
12	28			

$$\Rightarrow P_3(X) = F(X_0) + (X - X_0)F[X_0, X_1] + (X - X_0)(X - X_1)F[X_0, X_1, X_2] + (X - X_0)(X - X_1)(X - X_2)F[X_0, X_1, X_2, X_3]$$

$$P_3(X) = 18 + (X-6).(1) + (X-6)(X-8)(0,25) + (X-6)(X-8)(X-10)(-0,0417)$$

$$\therefore P_3(X) = -0,0417X^3 + 1,2508X^2 - 10,3396X + 44,016$$

$$\hookrightarrow F(9) \approx P_3(9) = 21,8751 ºC$$

• Dia 2

↳ Polinômio de Newton

X	F(X)	1ª ordem	2ª ordem	3ª ordem
6	17			
		1,5		
8	20		0,25	
		2,5		-0,1042
10	25		-0,375	
		1		
12	27			

$\Rightarrow P_3(x) = 17 + (x-6)(1,5) + (x-6)(x-8)(0,25) +$
$(x-6)(x-8)(x-10)(-0,1042)$

$\therefore P_3(x) = -0,1042x^3 + 2,7508x^2 - 21,5896x + 70,016$

↳ $F(9) \approx P_3(9) = 22,5626\ °C$

• Dia 3

↳ <u>Polinômio de Newton</u>

X	$F(X)$	1ª ordem	2ª ordem	3ª ordem
6	18			
		1,5		
8	21		-0,25	
		0,5		0,0417
10	22		0	
		0,5		
12	23			

$\Rightarrow P_3(x) = 18 + (x-6)(1,5) + (x-6)(x-8)(-0,25) +$
$(x-6)(x-8)(x-10)(0,0417)$

$\therefore P_3(x) = 0,0417x^3 - 1,2508x^2 + 12,8396x - 23,016$

↳ $F(9) \approx P_3(9) = 21,6249\ °C$

/ /

• Média das Temperaturas

$$M = \frac{21,8751 + 22,5626 + 21,6249}{3}$$

$$\boxed{\therefore M \approx 22,0209\,°C}$$

6 $F(1,8)$; polinômio de grau 3; fórmula de Newton - Gregory

• Polinômio de Newton - Gregory

X	$\Delta^0 f(x)$	$\Delta^1 f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
1,25	128			
		-39,61		
1,5	88,39		16,52	
		-23,09		-8,73
1,75	65,30		7,79	
		-15,3		
2	50			

$* h = 0,25$

$$\Rightarrow P_3(x) = F(x_0) + (x-x_0)\frac{\Delta^1 F(x)}{h^1 . 1!} + (x-x_0)(x-x_1)\frac{\Delta^2 F(x)}{h^2 . 2!} + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\frac{\Delta^3 F(x)}{h^3 . 3!}$$

$$= P_3(x) = 128 + (x-1,25)\left(\frac{-39,61}{0,25}\right) + (x-1,25)(x-1,5)\left(\frac{16,52}{0,25^2 . 2}\right) + (x-1,25)(x-1,5)(x-1,75)\left(\frac{-8,73}{0,25^3 . 6}\right)$$

$\therefore P_3(X) = -93,12x^3 + 551,2x^2 - 1144,62X + 879,4$

• $F(1,8)$

$\rightarrow F(1,8) \approx P_3(1,8) = 61,8962$ lux

∴ O valor mais próximo da iluminação, para uma superfície situada a 1,8 m da lâmpada, é de 61,8962 lux.

⑦ **F(X) = 0,285**; polinômio de grau 2; encontrar X:

Utilizando a fórmula de Newton, tem-se:

• Polinômio de Newton

X	F(X)	1ª ordem	2ª ordem
0,2	0,16		
		0,6	
0,25	0,19		0
		0,6	
0,3	0,22		

$\Rightarrow P_2(X) = F(X_0) + (X - X_0)F[X_0, X_1] + (X - X_0)(X - X_1)F[X_0, X_1, X_2]$

$P_2(X) = 0,16 + (X - 0,2)(0,6) + (X - 0,2)(X - 0,25)(0)$

$\therefore P_2(X) = 0,6X + 0,04$

/ /

• X tal que $F(X) = 0,285$

$\rightarrow F(X) = 0,285 \approx P_2(X) \rightarrow 0,285 = 0,6X + 0,04 \rightarrow \boxed{X \approx 0,4083}$

(8) Ajuste para uma reta: $g(X) = a_1 + a_2 X$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} n & \sum x_i^1 \\ \sum x_i^1 & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$$

–	x_i	x_i^2	y_i	$x_i y_i$
	-2	4	4,4	-8,8
	-0,4	0,16	5,5	-2,2
	1,2	1,44	3,2	3,84
	2,1	4,41	1,6	3,36
	3,2	10,24	0,9	2,88
	5,4	29,16	-0,6	-3,24
Σ	9,5	49,41	15	-4,16

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 9,5 \\ 9,5 & 49,41 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -4,16 \end{bmatrix}$$

→ Utilizando o método de Gauss, tem-se:

$\Rightarrow a_1 = 3,7858$

$\Rightarrow a_2 = -0,8121$

$\therefore g(X) = 3,7858 - 0,8121X$

spiral

9) Ajuste para um polinômio de grau 2

* $g(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} n & \sum x_i^1 & \sum x_i^2 \\ \sum x_i^1 & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \end{bmatrix}$$

	x_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	y_i	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
	-2	4	-8	16	0	0	0
	-1	1	-1	1	0	0	0
	0	0	0	0	1	0	0
	1	1	1	1	1	1	1
	2	4	8	16	2	4	8
Σ	0	10	0	34	4	5	9

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

→ Utilizando o método de Gauss, tem-se:

$\Rightarrow a_1 = 0,6571$

$\Rightarrow a_2 = 0,5$

$\Rightarrow a_3 = 0,0714$

$\therefore g(x) = 0,6571 + 0,5x + 0,0714x^2$

(/ /)

(10) Ajuste para ~~duas~~ duas curvas: e verificar o melhor

I) $y = ab^x$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \sum n & \sum x_i^1 \\ \sum x_i^1 & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \ln(y_i) \\ \sum \ln(y_i) x_i \end{bmatrix}$$

	x_i	x_i^2	$\ln(y_i)$	$\ln(y_i)\,x_i$
	0,1	0,01	1,7750	0,1775
	1,5	2,25	2,1748	3,2622
	3,3	10,89	2,4849	8,2002
	4,5	20,25	2,9857	13,4357
	5	25	3,0681	15,3405
$\sum$	14,4	58,4	12,4885	40,4161

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 14,4 \\ 14,4 & 58,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12,4885 \\ 40,4161 \end{bmatrix}$$

→ Utilizando o método de Gauss, tem-se:

$\Rightarrow a_1 = 1,7407 \rightarrow a = e^{a_1} = 5,7016$

$\Rightarrow a_2 = 0,2628 \rightarrow b = e^{a_2} = 1,3006$

$\therefore g(x) = (5,7016)(1,3006)^x$

• Erro: $E(x_i) = (F(x_i) - g(x_i))^2$

$\rightarrow E(x_1) = (5,9 - 5,8534)^2 = 0,0022$

$\rightarrow E(x_2) = (8,8 - 8,4569)^2 = 0,1177$

spiral

$\rightarrow E(X_3) = (12 - 13,5729)^2 = 2,4740$
$\rightarrow E(X_4) = (19,8 - 18,6056)^2 = 1,4266$
$\rightarrow E(X_5) = (21,5 - 21,2185)^2 = 0,0792$

$\therefore \sum E(x_i) = 4,0997$

#) $y = a \cdot e^{bx}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} n & \sum x_i^1 \\ \sum x_i^1 & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \ln(y_i) \\ \sum \ln(y_i) x_i \end{bmatrix}$$

	x_i	x_i^2	$\ln(y_i)$	$\ln(y_i) x_i$
	0,1	0,01	1,7750	0,1775
	1,5	2,25	2,1748	3,2622
	3,3	10,89	2,4849	8,2002
	4,5	20,25	2,9857	13,4357
	5	25	3,0681	15,3405
Σ	14,4	58,4	12,4885	40,4161

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 14,4 \\ 14,4 & 58,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12,4885 \\ 40,4161 \end{bmatrix}$$

→ Utilizando o método de Gauss, tem-se:

$\Rightarrow a_1 = 1,7407 \rightarrow a = e^{a_1} \Rightarrow a = 5,7016$
$\Rightarrow a_2 = 0,2628 \Rightarrow e^b = e^{a_2} \Rightarrow b = 0,2628$

$\therefore g(x) = (5,7016)\, e^{0,2628 \cdot x}$

/ /

• Erro

→ $E(x_1) = (5,9 - 5,8534)^2 = 0,0022$
→ $E(x_2) = (8,8 - 8,4566)^2 = 0,1179$
→ $E(x_3) = (12 - 13,5717)^2 = 2,4702$
→ $E(x_4) = (19,8 - 18,6034)^2 = 1,4319$
→ $E(x_5) = (21,5 - 21,2158)^2 = 0,0808$

$\therefore \sum E(x_i) = 4,1030$

Portanto, o melhor ajuste é de $y = ab^x$ pois $\sum E_I(x_i) < \sum E_{II}(x_i)$.

(11) Aproximar $y = 3 - x$ em $I: [1;2]$ por $g(x) = a_1 + \frac{a_2}{x}$

* $g_1(x) = 1$
* $g_2(x) = \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \int_1^2 1^2\,dx & \int_1^2 (1/x)\,dx \\ \int_1^2 (1/x)\,dx & \int_1^2 (1/x^2)\,dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_1^2 (3-x).1\,dx \\ \int_1^2 (3-x)(1/x)\,dx \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \ln(2) \\ \ln(2) & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 3\ln(2) - 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0,6931 \\ 0,6931 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5 \\ 1,0794 \end{bmatrix}$$

→ Utilizando o método de Gauss, tem-se:

⇒ $a_1 = 0{,}0952$

⇒ $a_2 = 2{,}0268$

$\therefore g(x) = 0{,}0952 + (2{,}0268)\left(\frac{1}{x}\right)$

spiral