# 4616 – Métodos Numéricos Computacionais

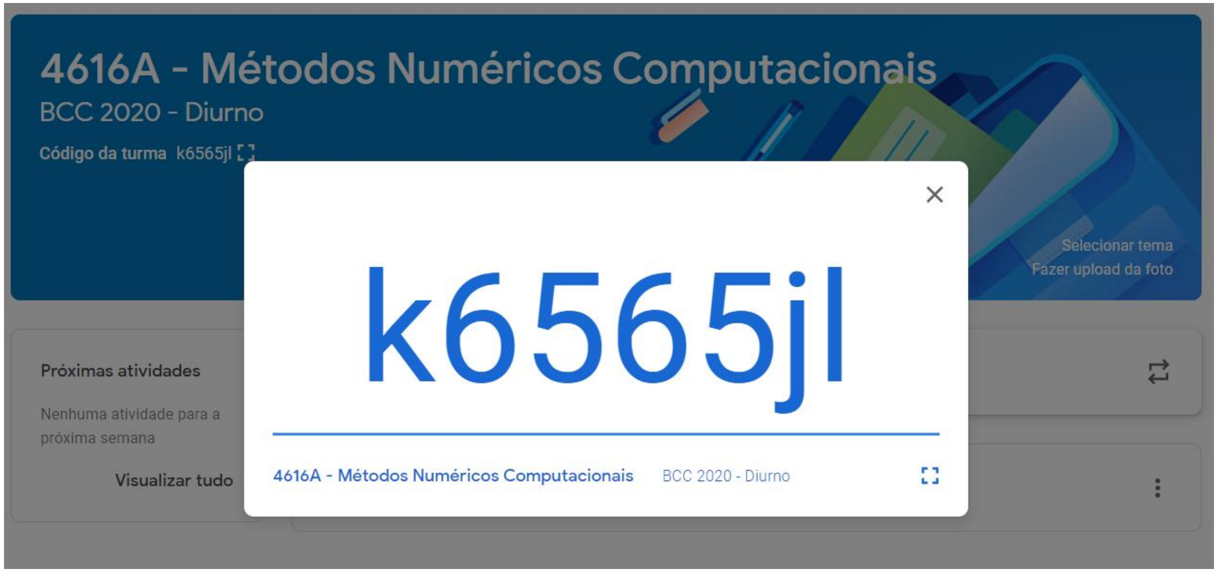
Larissa Oliveira
oliveira.t.larissa@gmail.com

# Recados...

- A princípio serão 6 aulas (referente as aulas de 16, 17, 23, 24, 30 e 31/03)

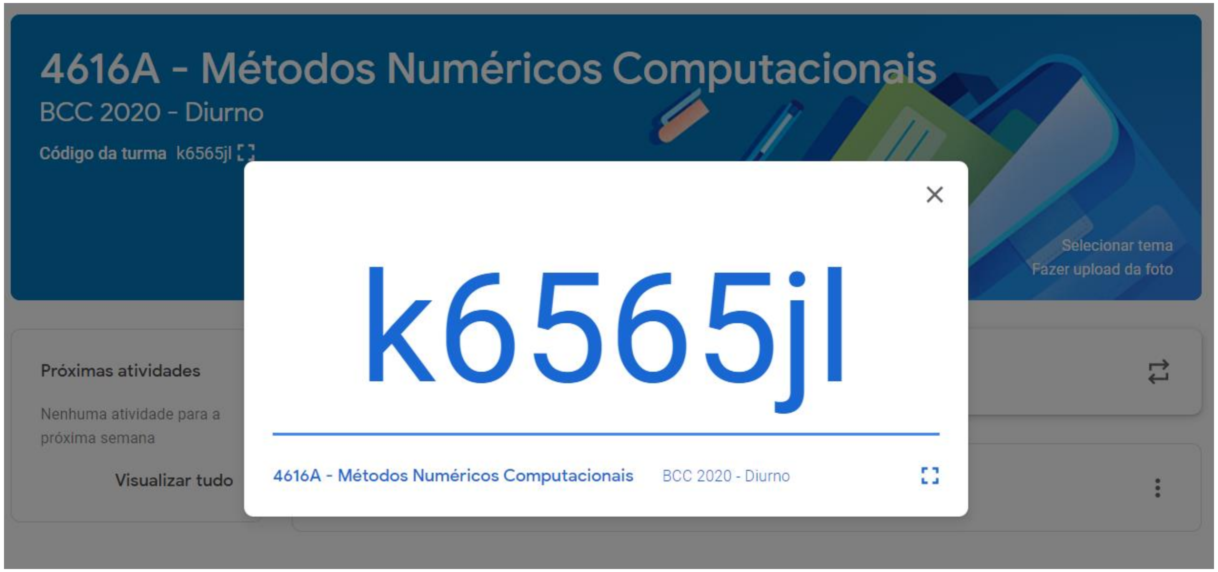
- Aulas no GoogleMeet

- Apoio do GoogleClassroom



# Recados...

- Apoio do GoogleClassroom

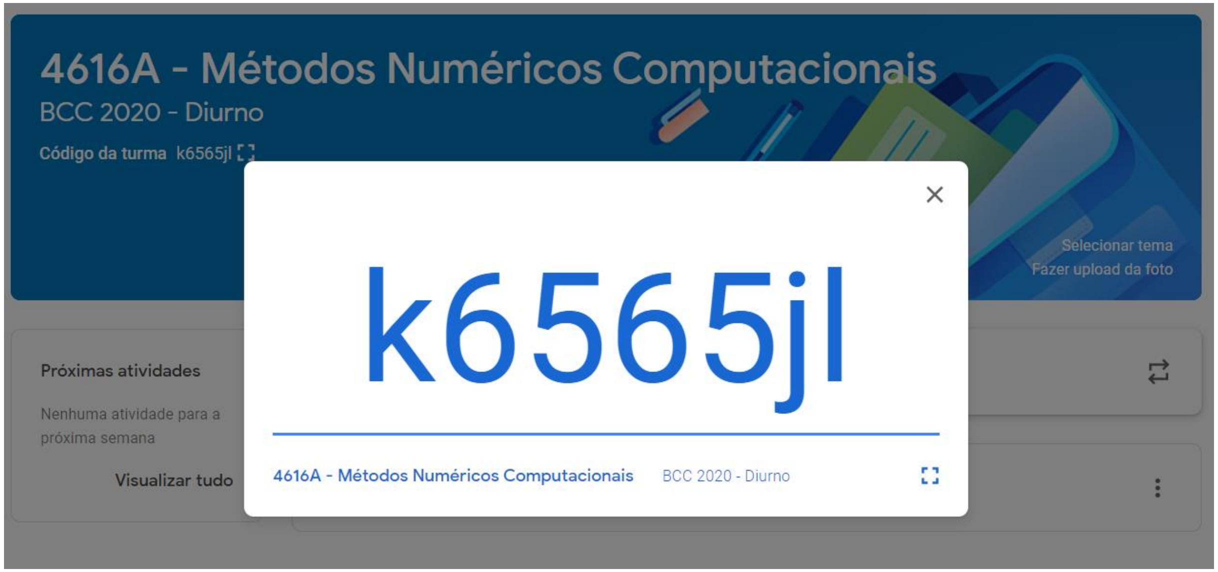



- Presença será contabilizada por exercícios que deverão ser entregues no Classroom

- <u>Lista sobre diferenciação</u> para 06/07 às 23h59

# Recados...

- Apoio do GoogleClassroom




- Dúvidas as quintas das 10h as 12h (25/06 não)

- <u>Dúvidas?</u>

# Continuando...

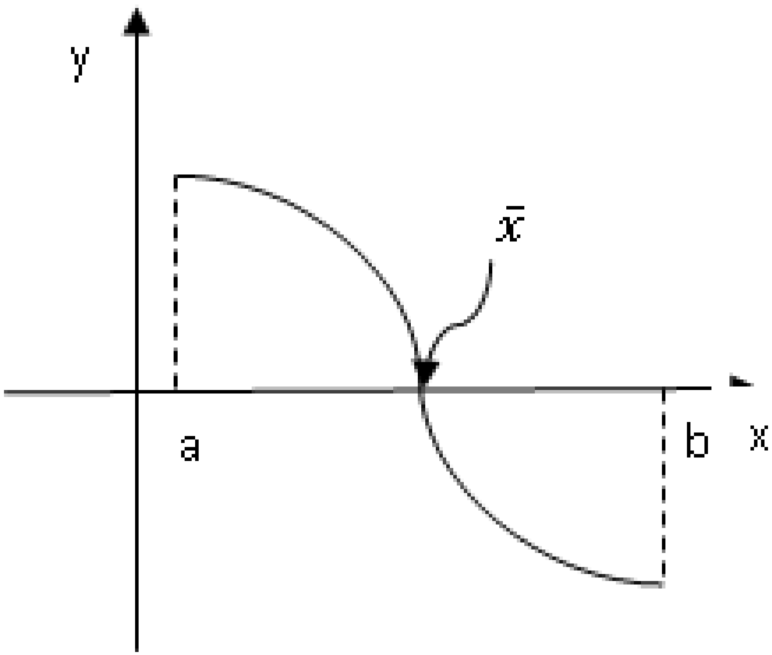
1) Introdução (erro, arredondamentos, ponto flutuante...)

2) Diferenciação

3) Raízes (ou zeros) de funções de uma variável real

# O QUE SÃO ZEROS DE FUNÇÕES REAIS?

Dado $f$: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $f$ definida e contínua em [a, b], são denominadas raízes de $f$ os valores de x tais que $f(x) = 0$.




Graficamente, as raízes reais são representadas pelas abscissas dos pontos onde a curva intercepta o eixo $\overrightarrow{Ox}$

# O QUE SÃO ZEROS DE FUNÇÕES REAIS?

- ✓ A partir de uma equação de 2º grau da forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- ✓ Determinação das raízes em função de *a*, *b* e *c*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- ✓ Polinômios de grau mais elevado e funções com maior grau de complexidade
  - *Impossibilidade* de determinação *exata* dos zeros

# O QUE SÃO ZEROS DE FUNÇÕES REAIS?

Dado $f$: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $f$ definida e contínua em [a, b], são denominadas raízes de $f$ os valores de x tais que $f(x) = 0$.

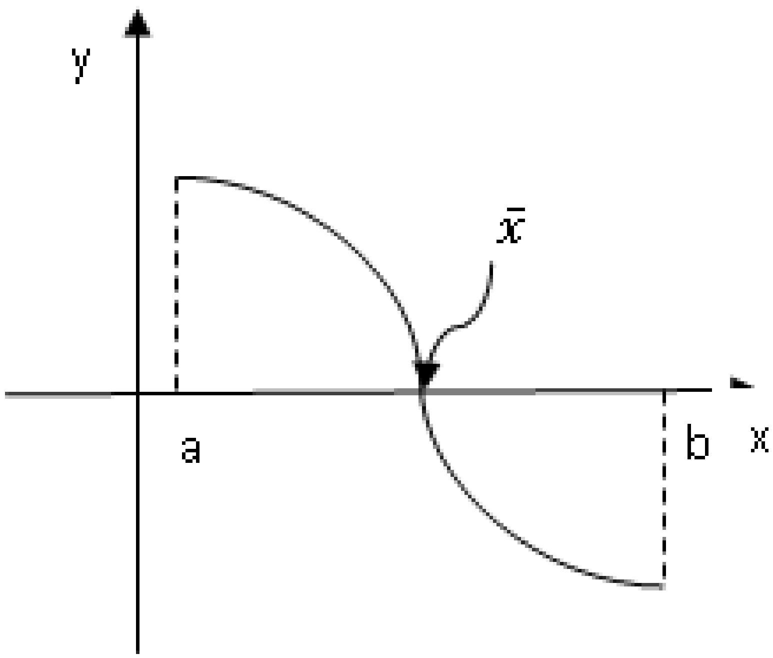
$$\boxed{f(x) = \cos x + x^2 + 5}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\text{determinar a solução } \bar{x}}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{f(\bar{x}) = \cos \bar{x} + \bar{x}^2 + 5 = 0}$$



# CÁLCULO DE ZEROS DE FUNÇÕES REAIS

✓ Etapas usuais para a determinação de raízes a partir de Métodos Numéricos

**MÉTODOS**

FASE I

Isolamento das raízes

Determinação de um intervalo (o menor possível) que contenha apenas uma raiz

FASE II

Refinamento das raízes

Melhora do valor da raiz aproximada (refinamento até a precisão desejada).

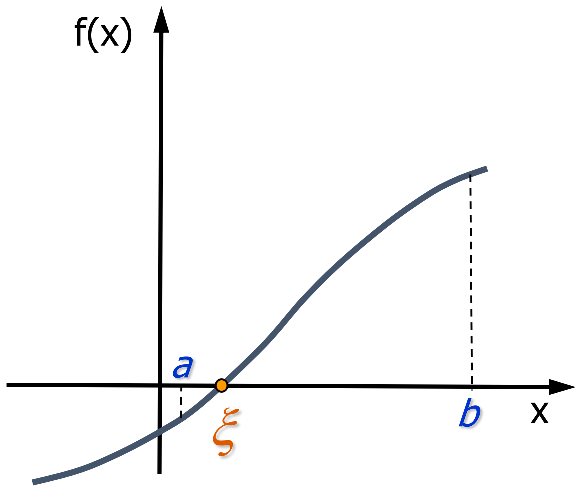
# CÁLCULO DE ZEROS DE FUNÇÕES REAIS

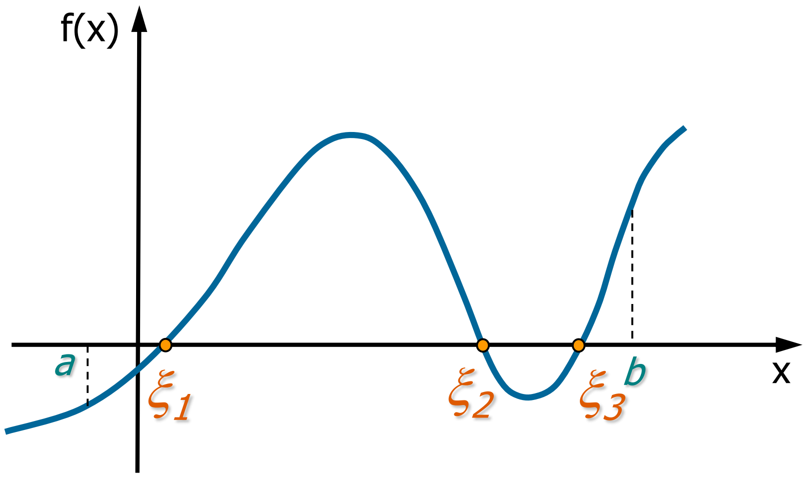
## FASE I : Isolamento das Raízes

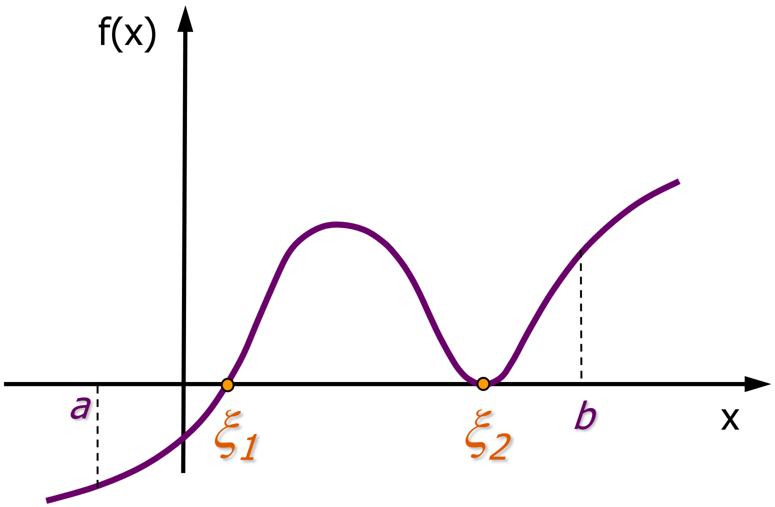
**Teorema:**

Sendo f(x) contínua em um intervalo [a,b], se $f(a)f(b) < 0$ então existe pelo menos um ponto $x = \xi$ entre a e b que é zero de $f(x)$.

# CÁLCULO DE ZEROS DE FUNÇÕES REAIS

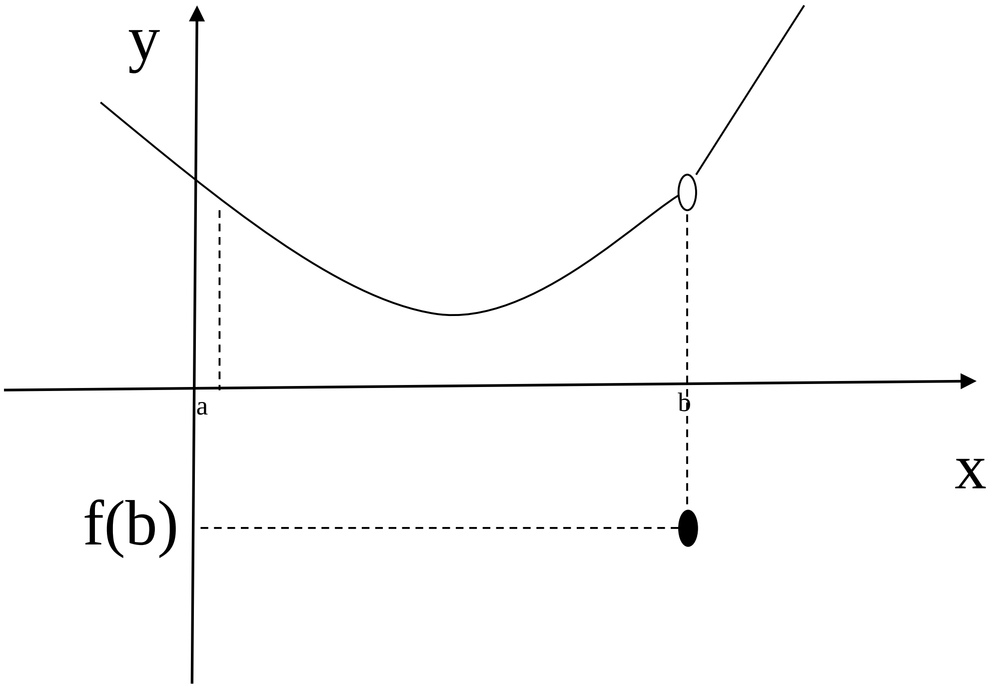


# CÁLCULO DE ZEROS DE FUNÇÕES REAIS

**1-** Se a função não for contínua o teorema não é válido.

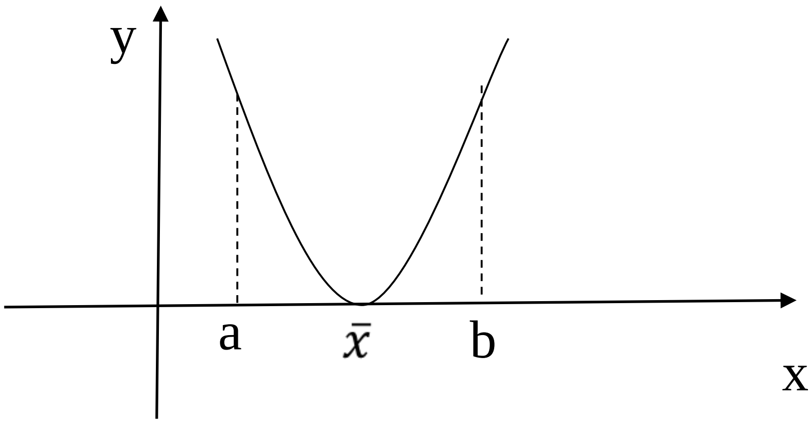



$f(a)\ f(b) < 0$, mas

$\nexists\ x \in [a, b]$ tal que $f(x) = 0$

# CÁLCULO DE ZEROS DE FUNÇÕES REAIS

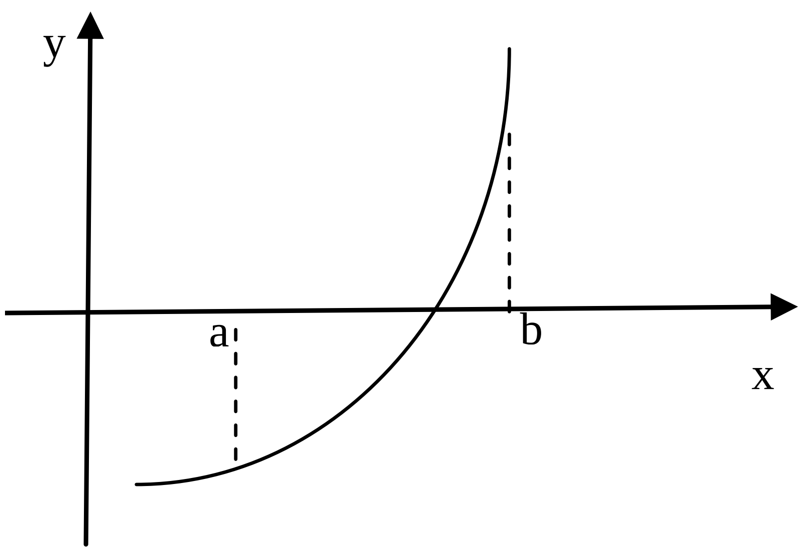
**2-** O teorema não é suficiente!!!! Não vale a volta: Se a raiz em [a,b] existe, então f(a) e f(b) tem sinais contrários.

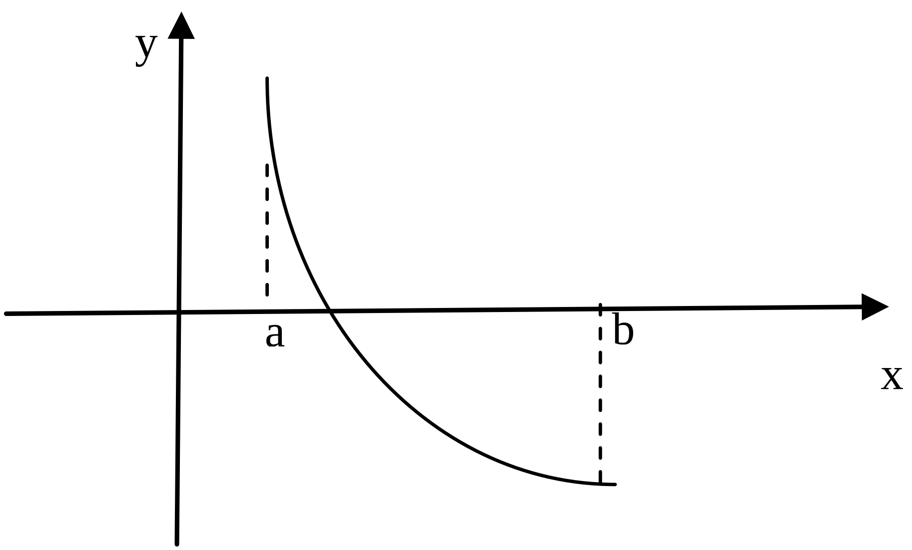



$f(a) > 0$ e $f(b) > 0$, mas
$\exists\ x \in [a, b]$ tal que $f(x) = 0$

# CÁLCULO DE ZEROS DE FUNÇÕES REAIS

**3-** Levando em consideração o teorema anterior e afirmando que f’(x) existe e não muda de sinal no intervalo, podemos afirmar que o zero é único (não existe ponto de inflexão).




$f'(x) > 0, \forall\ x \in [a,b]$

$f'(x) < 0, \forall\ x \in [a,b]$

# CÁLCULO DE ZEROS DE FUNÇÕES REAIS

A análise gráfica da função $f(x)$ ou da equação $f(x) = 0$ é fundamental para obter boas aproximações para a raiz.

Uma forma prática de investigar intervalos [a,b] que contém a raiz da função $f$ consiste em expressar $f$ em uma forma equivalente:

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

$$f(x) = 0 \quad \text{se} \quad f_1(x) - f_2(x) = 0$$

ou seja, $\bar{x}$ é a raiz da $f$ se, e somente se, em $\bar{x}$, $f_1(x)$ e $f_2(x)$ se interceptam.

# CÁLCULO DE ZEROS DE FUNÇÕES REAIS

**Exemplos:**

$$f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$$

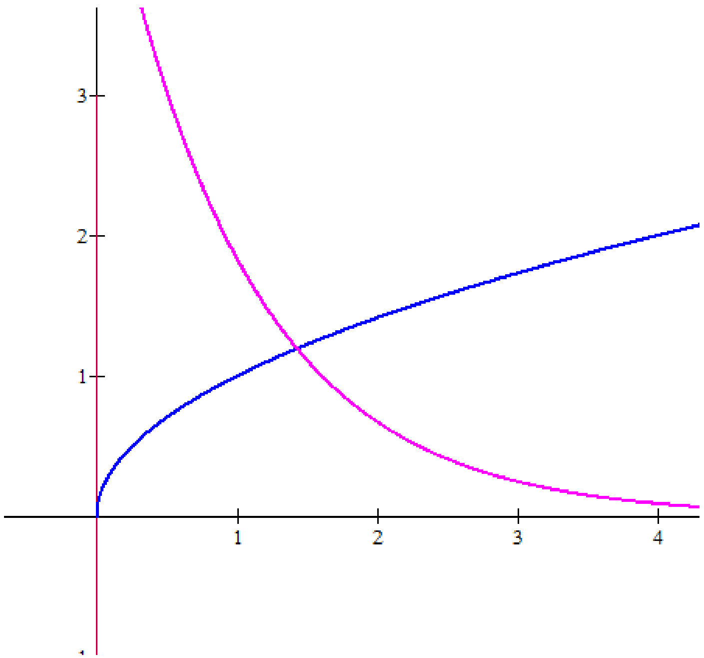
$$f(x) = e^{x} + x$$

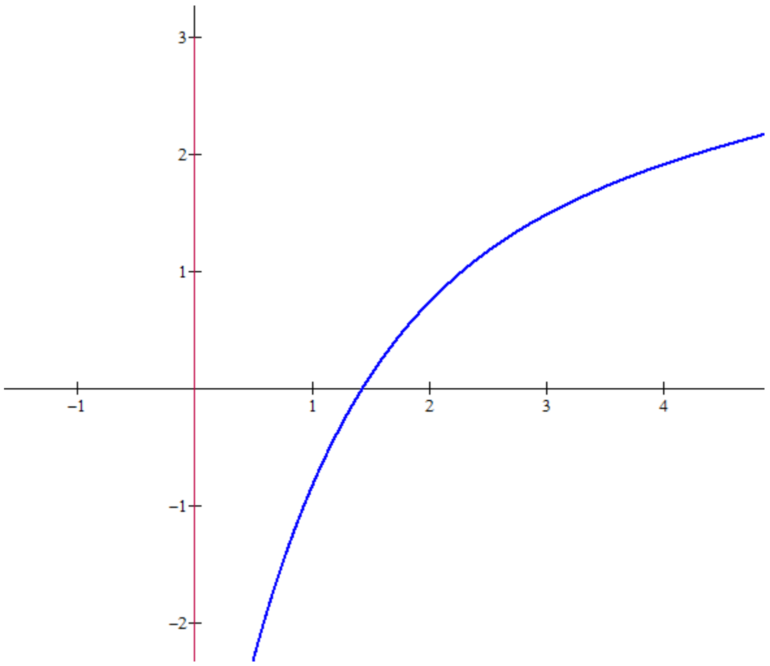
$$f(x) = sen(x) - \frac{1}{2}$$

# CÁLCULO DE ZEROS DE FUNÇÕES REAIS

$$\sqrt{x} = 5e^{-x}$$

$$f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$$

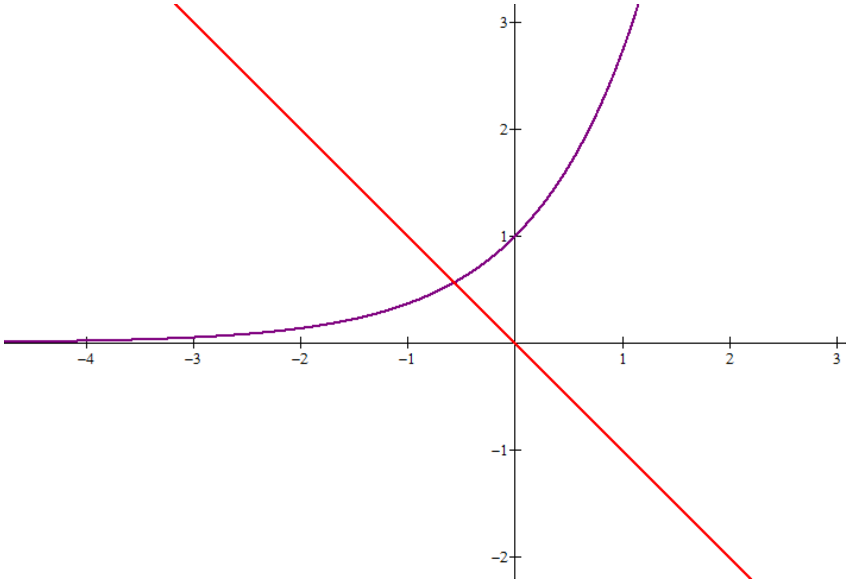


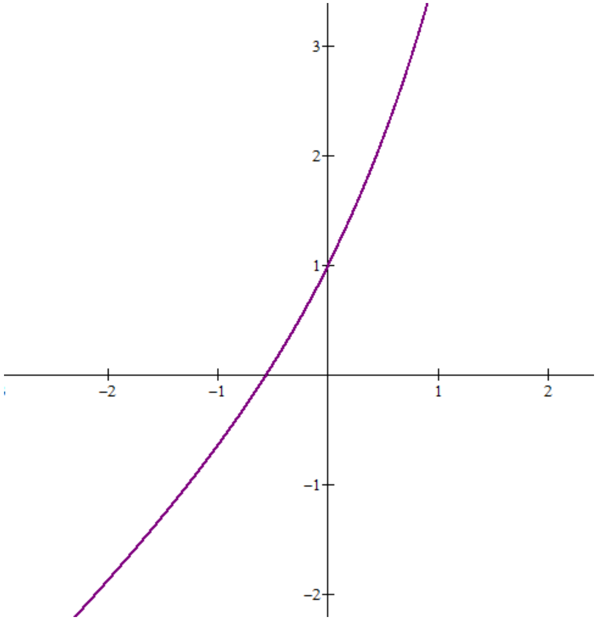



# CÁLCULO DE ZEROS DE FUNÇÕES REAIS

$$e^x = -x$$

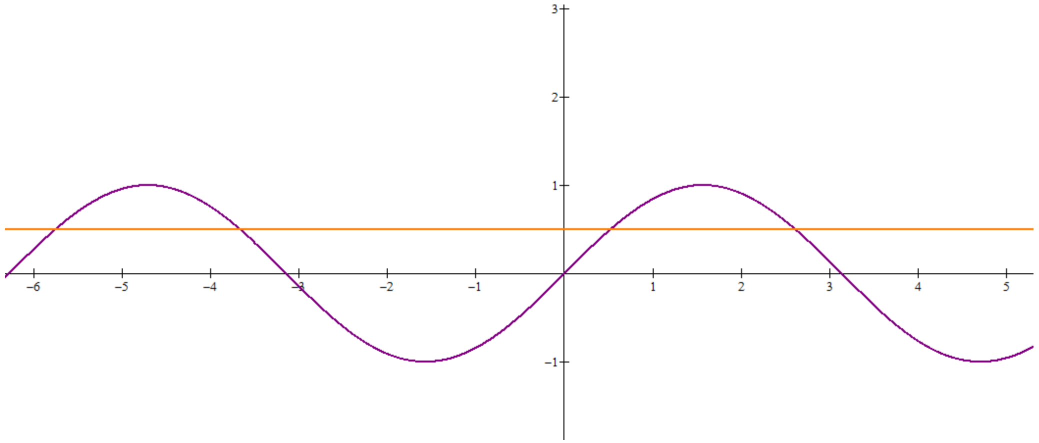
$$f(x) = e^x + x$$



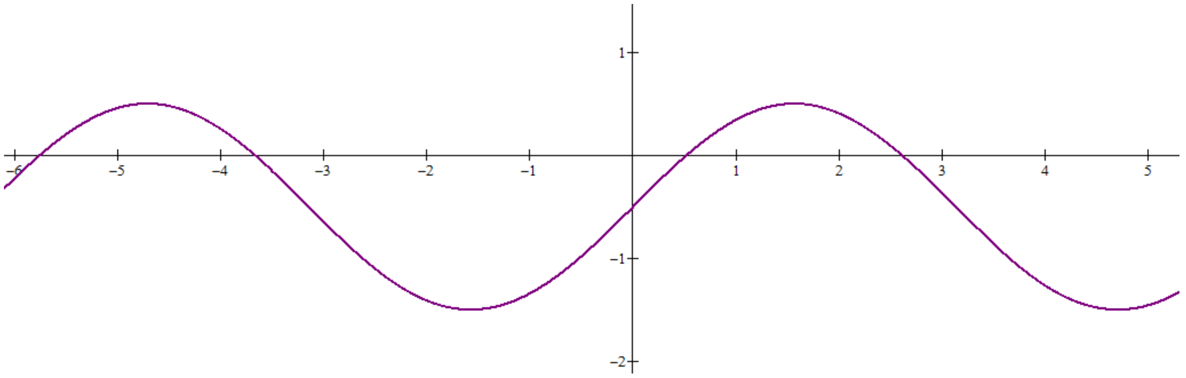



# CÁLCULO DE ZEROS DE FUNÇÕES REAIS

$$sen(x) = \frac{1}{2}$$



$$f(x) = sen(x) - \frac{1}{2}$$



# CÁLCULO DE ZEROS DE FUNÇÕES REAIS

## FASE I : Isolamento das Raízes

**Resumindo:**

Essa é a fase onde determinamos o intervalo que contenha um zero da função

1) Plotando a função
2) Usando duas funções mais simples $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$
3) Tabelando valores, buscando $f(a)f(b) < 0$

# CÁLCULO DE ZEROS DE FUNÇÕES REAIS

*a*) $f(x) = x^3 - 9x + 3$

Construindo uma tabela de valores para f(x) e considerando apenas os sinais, temos:

| x | $-\infty$ | $-100$ | $-10$ | $-5$ | $-3$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | − | − | − | − | + | + | + | − | − | + | + | + |

Sabendo que f(x) é contínua para qualquer x real e observando as variações de sinal, podemos concluir que cada um dos intervalos $I_1 = [-5, -3]$, $I_2 = [0, 1]$ e $I_3 = [2, 3]$ contém pelo menos um zero de f(x).

# CÁLCULO DE ZEROS DE FUNÇÕES REAIS

## FASE II : Refinamento

- ✓ O refinamento da solução pode ser feito utilizando vários métodos numéricos.
- ✓ A forma como se efetua o refinamento é o que diferencia os métodos.
- ✓ Todos eles pertencem à classe dos métodos iterativos.
- ✓ Um método iterativo consiste em uma sequência de instruções que são executadas passo a passo, algumas das quais são repetidas em ciclos até que um critério de parada seja satisfeito.

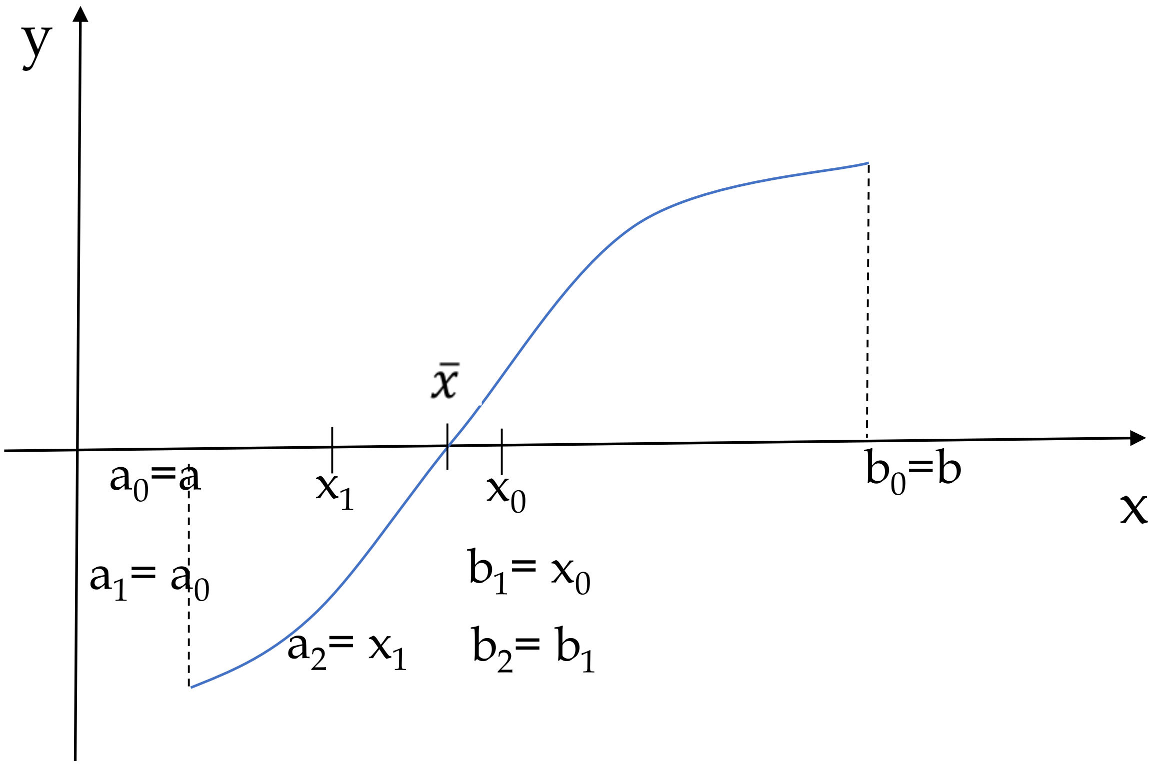
# MÉTODO DA BISSECÇÃO

Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo [a,b] e tal que $f(a)f(b) < 0$.

O Método da Bissecção consiste em, a partir de um intervalo [a, b] que contenha a raiz $\bar{x}$ , determinar uma sequência de intervalos $[a_i, b_i]$, $i = 0, 1, \ldots, n$, em que $a_0 = a$ e $b_0 = b$, de modo que a amplitude do intervalo numa iteração é a metade da amplitude do intervalo anterior e que ele sempre contem a raiz $\bar{x}$.

(SUCESSIVA DIVISÃO DE [a,b] AO MEIO).

# MÉTODO DA BISSECÇÃO



# MÉTODO DA BISSECÇÃO

As sequências $a_i$, $b_i$ e $x_i$ são construídas da seguinte maneira:

1- Determinar um intervalo inicial $[a_0, b_0]$ tal que $f(a_0)f(b_0) < 0$;

2- Calcular $x_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$ (ponto médio do intervalo);

3- Se $\dfrac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_k|} < \varepsilon$ ou $|f(x_k)| < \varepsilon$ PARE, $x_k$ é uma raiz de $f(x)$;

4- Se $f(a_k)f(x_k) < 0$, então $a_{k+1} = a_k$ e $b_{k+1} = x_k$;

5- Se $f(a_k)f(x_k) > 0$, então $a_{k+1} = x_k$ e $b_{k+1} = b_k$.

# CONVERGÊNCIA

- ✓ O Método da Bissecção converge sempre que a função $f(x)$ for contínua no intervalo [a,b] e $f(a)f(b) < 0$.

- ✓ A convergência do Método da Bissecção é muito lenta, pois se o intervalo inicial é tal que $(b_0 - a_0) \gg \varepsilon$ e se $\varepsilon$ for muito pequeno, o número de iterações tende a ser muito grande.

# ESTIMATIVA DO NÚMERO DE ITERAÇÕES

$$k > \frac{\log(b_0 - a_0) - \log(\varepsilon)}{\log(2)}$$

**Exemplo**

$a_0 = 2$, $b_0 = 5$ e $\varepsilon < 10^{-7}$

$$k > \frac{\log(5-2)-\log(\varepsilon)}{\log(2)} = 24{,}8$$

# MÉTODO DA BISSECÇÃO

**Vantagens:**

- ✓ O método converge sempre e pode ser aplicado para obter a raiz de qualquer equação;
- ✓ As iterações não envolvem cálculos trabalhosos;

**Desvantagens:**

- ✓ Lentidão do processo de convergência (requer o cálculo de $f(x)$ em um elevado número de iterações);
- ✓ Necessidade de conhecimento prévio da região na qual se encontra a raiz de interesse (o que nem sempre é possível);

# MÉTODO DA BISSECÇÃO

**Algoritmo**

1 Dados f(x) , a e b, tais que f(a)f(b) < 0 e $\varepsilon$ uma precisão.

2 Faça $x = \frac{a+b}{2}$

3 Enquanto $|b - a| > \varepsilon$, faça

início

Se f(a)f(x) < 0, então

b = x

senão

a = x

$x = \frac{a+b}{2}$

fim

4 Escreva ($\bar{x} = \frac{a+b}{2}$)

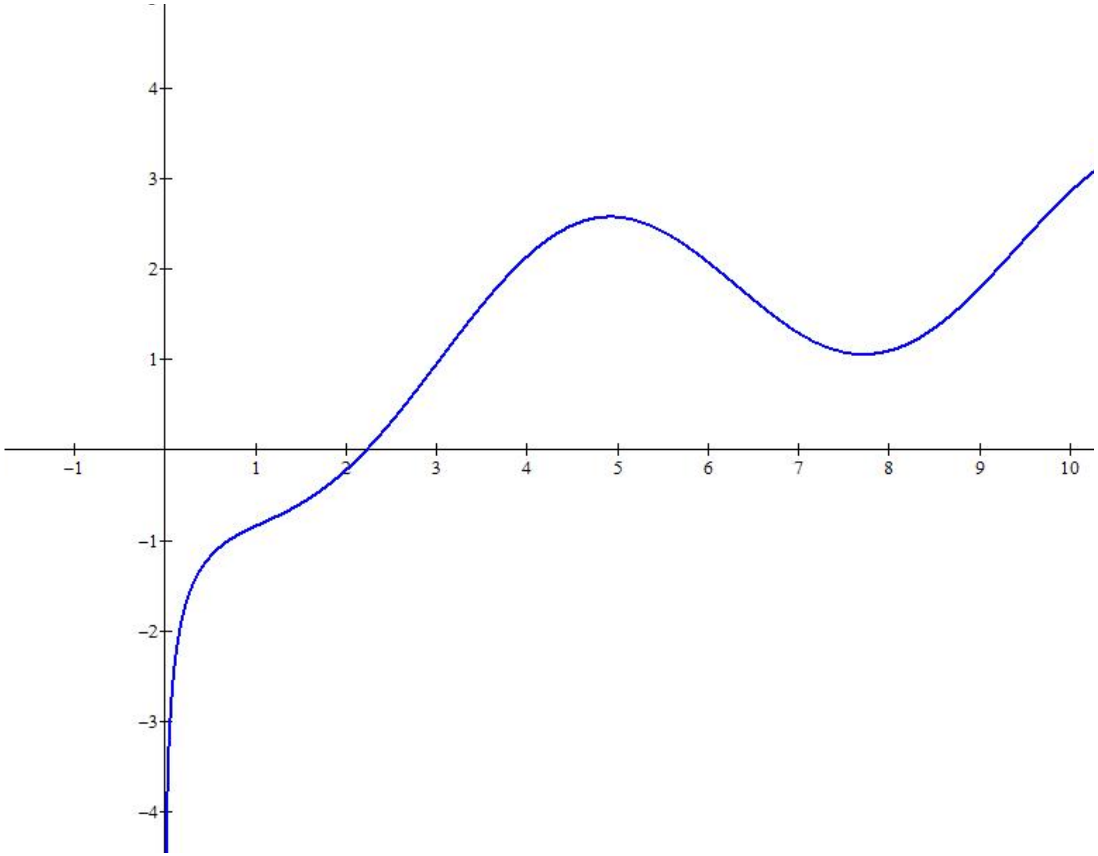
# MÉTODO DA BISSECÇÃO

**Exemplo:**

Utilizando o Método da Bissecção, determine a raiz da função $f(x) = \ln(x) - \text{sen}(x)$, com $\varepsilon = 0.01$.

# MÉTODO DA BISSECÇÃO

$f(x) = \ln(x) - \text{sen}(x)$



$f(x) = \ln(x) - \text{sen}(x)$ , $\varepsilon = 0.01$

$n > \dfrac{\log(3-2) - \log(0,01)}{\log(2)} = 6,64$ $\therefore$ pelo menos 7 iterações

$a_0 = 2 \rightarrow f(a_0) = -0,2162$   $|b-a| = |3-2| = 1 > \varepsilon = 0,01$

$x_0 = 2,5 \rightarrow f(x_0) = 0,3178$ $\Big] < 0$   logo $a_1 = a_0 = 2$

$b_0 = 3 \rightarrow f(b_0) = 0,9575$   $b_1 = x_0 = 2,5$

$a_1 = 2$   $f(a_1) = -0,2162$   $|b-a| = 0,5 > \varepsilon = 0,01$

$x_1 = 2,25$   $f(x_1) = 0,0329$ $\Big] < 0$   logo $a_2 = a_1 = 2$

$b_1 = 2,5$   $f(b_1) = 0,3178$   $b_2 = x_1 = 2,25$

$a_2 = 2$ $\quad f(a_2) = -0{,}2162$ $\quad |b-a| = 0{,}25 > \varepsilon$

$$\begin{array}{ll} x_2 = 2{,}125 & \left.\begin{array}{l} f(x_2) = -0{,}0043 \\ f(b_2) = 0{,}0329 \end{array}\right] < 0 \\ b_2 = 2{,}25 & \end{array}$$

logo $a_3 = x_2 = 2{,}125$

$b_3 = b_2 = 2{,}25$

$a_3 = 2{,}125$ $\quad f(a_3) = -0{,}0043$ $\quad |b-a| = 0{,}125 > \varepsilon$

$$\begin{array}{ll} x_3 = 2{,}1875 & \left.\begin{array}{l} f(x_3) = -0{,}0330 \\ f(b_3) = 0{,}0329 \end{array}\right] < 0 \\ b_3 = 2{,}25 & \end{array}$$

logo $a_4 = x_3 = 2{,}1875$

$b_4 = b_3 = 2{,}25$

$a_4 = 2{,}1875$ $\quad f(a_4) = -0{,}0330$ $\quad |b-a| = 0{,}0625 > \varepsilon$

$$\begin{array}{ll} x_4 = 2{,}2188 & \left.\begin{array}{l} f(x_4) = -0{,}0032 \\ f(b_4) = 0{,}0329 \end{array}\right] < 0 \\ b_4 = 2{,}25 & \end{array}$$

logo $a_5 = x_4 = 2{,}2188$

$b_5 = b_4 = 2{,}25$

$a_5 = 2,2188$ $\quad f(a_5) = -0,0032$
$x_5 = 2,2344$ $\quad f(x_5) = 0,0162$ $\quad \Big] < 0$ $\quad |b-a| = 0,0312 > \varepsilon$
$b_5 = 2,25$ $\quad f(b_5) = 0,0329$

logo $a_6 = a_5 = 2,2188$
$b_6 = x_5 = 2,2344$

$a_6 = 2,2188$ $\quad f(a_6) = -0,0032$
$x_6 = 2,2266$ $\quad f(x_6) = 0,0079$ $\quad \Big] < 0$ $\quad |b-a| = 0,0156 > \varepsilon$
$b_6 = 2,2344$ $\quad f(b_6) = 0,0162$

logo $a_7 = a_6 = 2,2188$
$b_7 = x_6 = 2,2266$

$a_7 = 2,2188$ $\quad f(a_7) = -0,0032$
$x_7 = 2,2227$ $\quad f(x_7) = 0,0038$ $\quad \Big] < 0$ $\quad |b-a| = 0,0078 < 0,01$
$b_7 = 2,2266$ $\quad f(b_7) = 0,0079$

PARE

$\bar{x} \simeq 2,2227$

# MÉTODO DA BISSECÇÃO

**Exercício para presença:**

Usando o método da bisseção, resolva a equação $x^2 + \ln(x) = 0$, com $\varepsilon = 0{,}01$. Apresente os valores com 4 casas decimais.

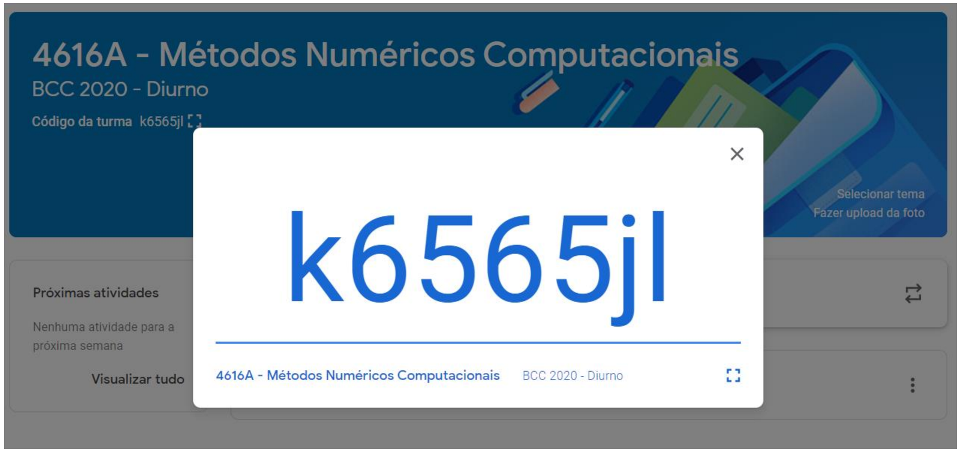
**Exercício:**

1 - Utilizando o Método da Bisseção, resolva a equação $x^3 + \mathrm{sen}(x) = 0$ com $\varepsilon = 0{,}001$.

2 - Utilizando o Método da Bissecção, resolva a equação $x^2 + \ln(x) = 0$, com $\varepsilon = 0{,}01$.

# Recados...

- A princípio serão 6 aulas (referente as aulas de 16, 17, 23, 24, 30 e 31/03)
- Aulas no GoogleMeet
- Apoio do GoogleClassroom




- Presença será contabilizada por exercícios que deverão ser entregues no Classroom
- <u>Lista sobre diferenciação</u> para 06/07 às 23h59