"Eu Davi Augusto Neves Leite, 191027383, declaro que esta prova reflete o meu conhecimento sobre o conteúdo da disciplina Cálculo III e declaro que não houve qualquer comunicação com os demais alunos da turma durante o período de realização desta prova"

Ass: Davi A. Neves Leite

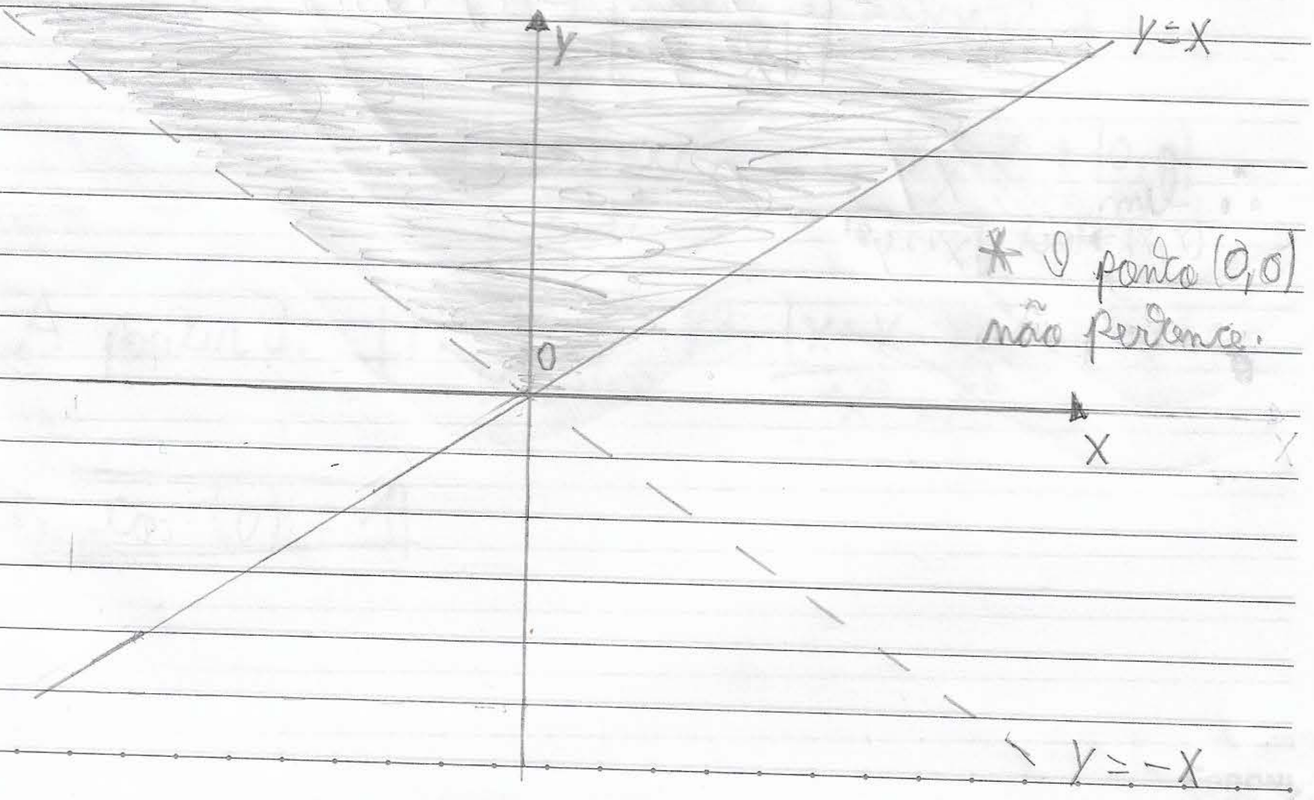
// //

P1 - Cálculo III

① $F(x,y) = \underbrace{\sqrt{y-x}}_{\text{(I)}} \, \ln\underbrace{(y+x)}_{\text{(II)}}$

I) $y - x \geq 0$
$y \geq x$

II) $y + x > 0$
$y > -x$



* O ponto (0,0) não pertence.

$\therefore D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \; y \geq x \text{ e } y > -x\}$

④ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (I)

(I) A partir da proposição sobre função limitada:

- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$
- $\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ é uma função limitada, pois:

$$\Rightarrow |y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1 \; ; \; \forall (x,y) \neq (0,0)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq 1 \; ; \; \forall (x,y) \neq (0,0)$$

$\therefore \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

(5) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos\left(\dfrac{xy^2+y^3-xy^3}{x^2+y^2}\right)$ * Função composta

$\Rightarrow \cos\left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2+y^3-xy^3}{x^2+y^2}\right)$

$\Rightarrow \cos\left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2(x+y-xy)}{x^2+y^2}\right)$

$\Rightarrow \cos\left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2 \cdot \dfrac{(x+y-xy)}{x^2+y^2}\right)$ (I)

I) A partir da proposição sobre função limitada:

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2 = 0$
- $\dfrac{x+y-xy}{x^2+y^2}$ é uma função limitada, pois:

$$\Rightarrow x+y-xy \leq x^2+y^2$$

$$\Rightarrow \frac{x+y-xy}{x^2+y^2} \leq 1;\ \forall(x,y) \neq (0,0)$$

$$\Rightarrow \left|\frac{x+y-xy}{x^2+y^2}\right| \leq 1;\ \forall(x,y) \neq (0,0)$$

A partir de I): $\lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2 \cdot \dfrac{(x+y-xy)}{x^2+y^2} = 0$

$\boxed{\therefore \cos(0) = 1}$

(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{2x+y}$

I) Considere $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y=0\}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S_1}} \frac{x}{2x+y} \Rightarrow \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=0}} \frac{x}{2x+y} = \frac{x}{2x} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

II) Considere $S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x=0\}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S_2}} \frac{x}{2x+y} \Rightarrow \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x=0}} \frac{x}{2x+y} = \frac{0}{y} = \boxed{0}$$

Como $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S_1}} \dfrac{x}{2x+y} \neq \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S_2}} \dfrac{x}{2x+y}$, então

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{2x+y}$ não existe.

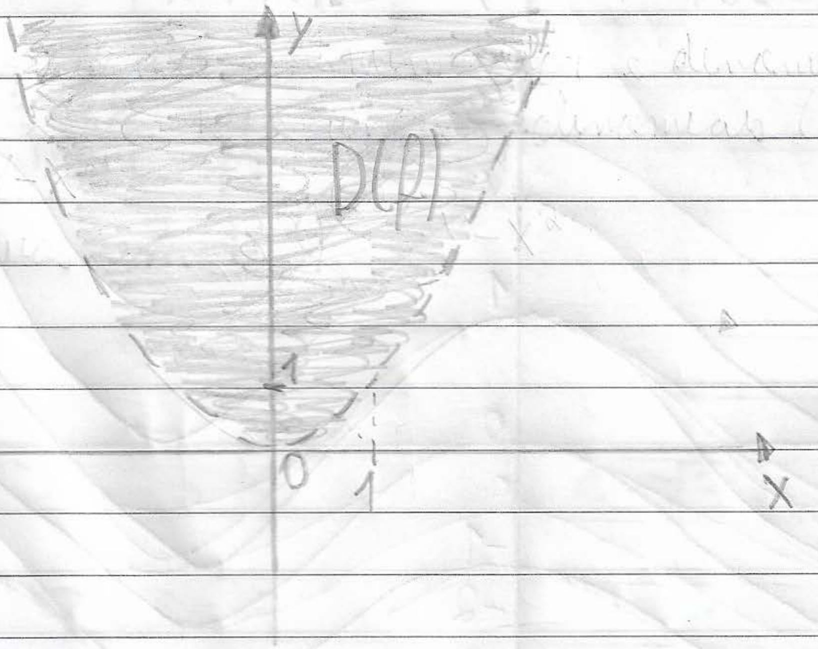
7 $F(x,y) = \ln\left(\dfrac{x^2}{y-x^2}\right)$ * Continuidade

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{y-x^2} > 0$

$\hookrightarrow x^2 \geq 0$
$\hookrightarrow y - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow y > x^2$ (parábola)

A função será contínua em:

$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y > x^2 \text{ e } x \neq 0\}$

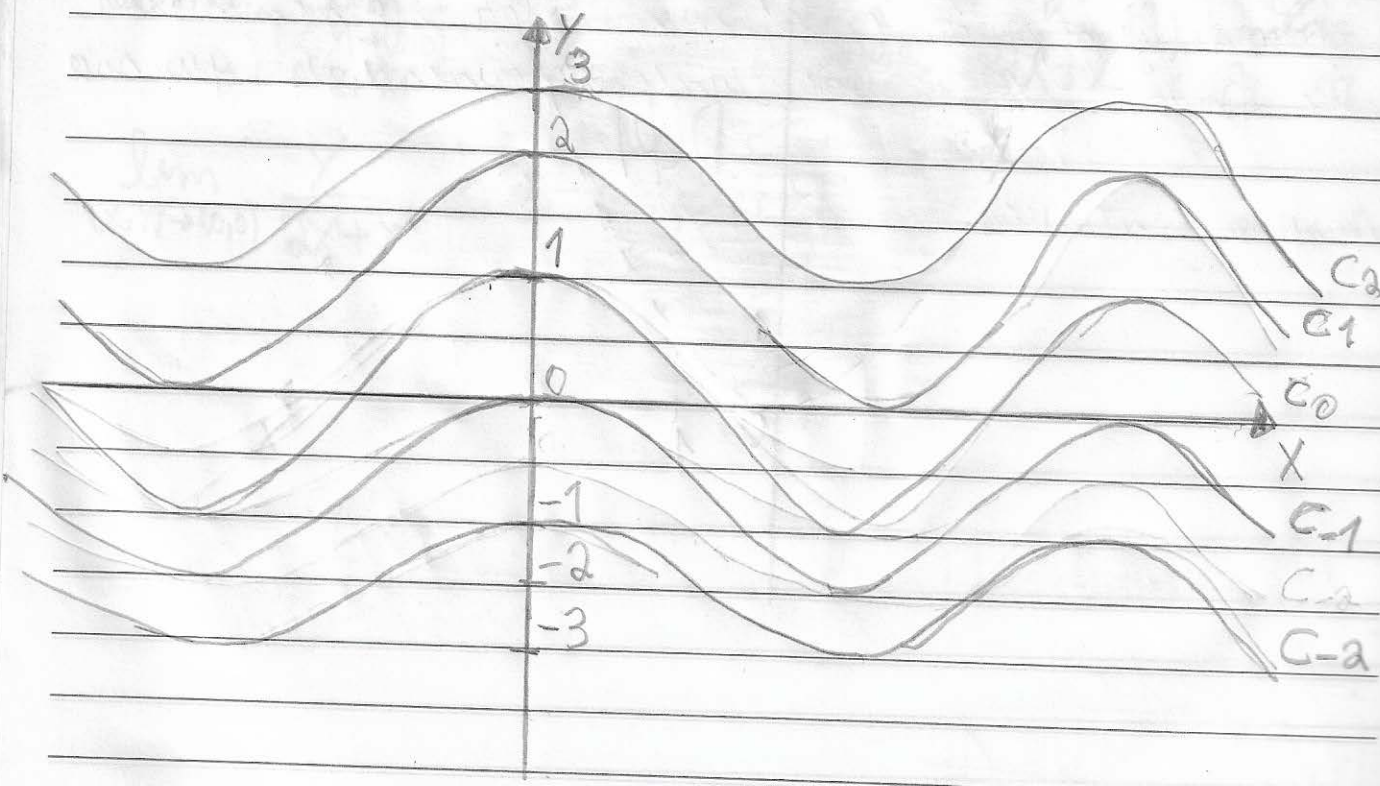


② $F(x,y) = y - \cos(x)$

Curvas de nível: $k = y - \cos(x)$

• $k = -2$	• $k = -1$	• $k = 0$
$-2 = y - \cos(x)$ $y = \cos(x) - 2$	$-1 = y - \cos(x)$ $y = \cos(x) - 1$	$0 = y - \cos(x)$ $y = \cos(x)$

• $k = 1$	• $k = 2$
$1 = y - \cos(x)$ $y = -\cos(x) + 1$	$2 = y - \cos(x)$ $y = \cos(x) + 2$



③ $z^2 = 3x^2 + 4y^2 - 12 \Rightarrow 3x^2 + 4y^2 - z^2 = 12$

I) Corte em X (X = K):

$$z^2 - 4y^2 = 3k^2 - 12$$
$$\frac{z^2}{4} - \frac{y^2}{1} = \frac{3k^2}{4} - 3 \quad \text{(hipérbole)}$$

$* \ \frac{3k^2}{4} - 3 > 0$

$3k^2 - 12 > 0 \Rightarrow k^2 > 4 \Rightarrow k < -2$ ou $k > 2$

II) Corte em Y (Y = K):

$$z^2 - 3x^2 = 4k^2 - 12$$
$$\frac{z^2}{3} - \frac{x^2}{1} = \frac{4k^2 - 12}{3} \quad \text{(hipérbole)}$$

$* \ \frac{4k^2 - 12}{3} > 0$

$4k^2 - 12 > 0 \Rightarrow k^2 > 3 \Rightarrow k < -\sqrt{3}$ ou $k > \sqrt{3}$

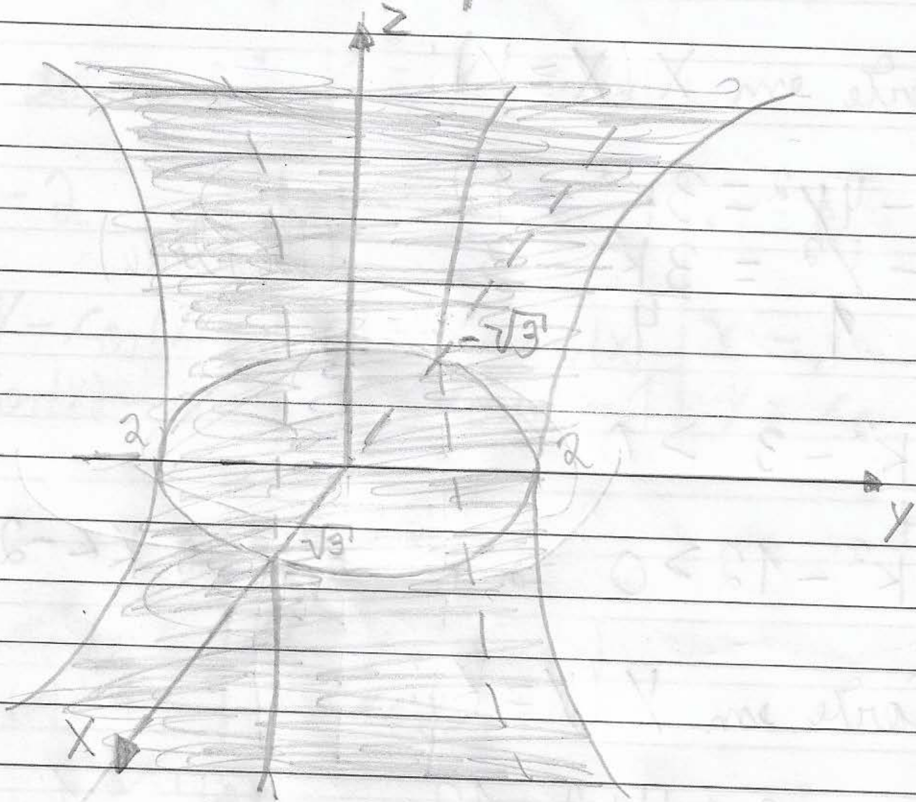
III) Corte em Z (Z = K):

$$3x^2 + 4y^2 = k^2 + 12$$

$* \ k^2 > -12 \rightarrow$ qualquer valor

$\rightarrow k = 0$ (máx): $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ (elipse)

Dessa forma, o gráfico final:



Ou seja: Hiperboloide de uma folha