23.02.21

Nome: Davi Augusto Neves Leite RA: 191027383

P2 – Séries

1) a) Uma sequência de números reais $\{a_n\}_n^\infty$ é definida como uma lista infinita de números reais de tal forma que:

$$\{a_n\}_n^\infty = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$$

em que $\{a_n\}_n^\infty$ é uma função do tipo $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Ou seja: cada $a_i \in \mathbb{R}$ e $i \in \mathbb{N}$.

Ela é dita convergente quando o chamado $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(n) = L$, com $L \in \mathbb{R}$. Se $L \notin \mathbb{R}$ ou $L = \pm\infty$, então a sequência é chamada divergente. *(Explicação detalhada no vídeo).

Dessa forma, para que a sequência $\{1/n^r\}_{n=1}^\infty$ basta analisar:

$$\lim_{n\to\infty} a_n(n) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = \begin{cases} 0, & \text{para todo } r > 0 \\ 1, & \text{para } r = 0 \\ \infty, & \text{para } r < 0 \end{cases}$$

(com $r \in \mathbb{R}$)

Portanto, a sequência $\{1/n^r\}_{n=1}^\infty$ é convergente para $r \geq 0$, pois $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n^r = L \in \mathbb{R}$.

b) $$\lim_{n\to\infty} (-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{se "}\infty\text{" é par} \\ -1, & \text{se "}\infty\text{" é ímpar} \end{cases}$$

Dessa forma, percebe-se que esta sequência oscila e, portanto, não é convergente. *(Detalhes no vídeo)

c) $\lim_{n \to \infty} \frac{\ln(n)}{n} \overset{L.H.}{\Longrightarrow} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 \in \mathbb{R}$

Como $\lim_{n \to \infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$, então a sequência é convergente. *(Correção $\{\ln(n)/n\}_{n=1}^{\infty}$)

d) Seja $\{a_n\}_n^{\infty}$ uma sequência limitada por $L \in \mathbb{R}$. Admitindo que essa seja convergente, implica que:

↳ Dado uma distância mínima $\varepsilon > 0$, existe um número $L \in \mathbb{R}$ tal que.

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

Ou seja, considerando que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ pode-se implicar em:

$$L - \varepsilon \leq a_{n_0} \leq L + \varepsilon$$

Isso somente é válido se $\forall n \in \mathbb{N}$ e $n \geq n_0$, a sequência seja crescente $(L - \varepsilon \leq a_n \leq L)$ ou decrescente $(L \leq a_n \leq L + \varepsilon)$, pois significa que a sequência $\{a_n\}_n^{\infty}$ está chegando em algum lugar (L).

Consideramos a sequência $\{(-1)^n\}_n^{\infty}$, a qual não é monótona. Dessa forma, supondo um $L = 2$, sabe-se que esta sequência nunca vai existir uma distância mínima ε de tal forma que $L - \varepsilon \leq a_n \leq L + \varepsilon$.

c) Como $\{a_n\}$ analisa os recordes para cada número natural n, no ano de $2000+n$, pode-se dizer que esta é uma sequência decrescente e, portanto, monótona.

Além disso, analisando o $\lim_{n \to \infty} a_n = L$, encontra-se que $L = 0$, pois os recordes tendem a diminuir até o valor 0. Basta analisar o gráfico da função $a_n(n)$, estipulando uma curva real para esta função e comprovando que $L = 0$.

*(Explicação detalhada no vídeo)

2) a) Uma série de números reais é definida por um somatório dos termos de uma sequência $\{a_n\}_n^\infty$. Ou seja:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_n$$

Este a_n é denominado termo geral da série.

A série é dita convergente quando:

$$\lim_{n \to \infty} S_n \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$$

Caso $L \notin \mathbb{R}$, então a série é dita divergente.

b) Suponha a série $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.
Se tomarmos como S_s a soma da série S_n quando tomamos $n \to \infty$ (suficientemente grande), pode-se afirmar que S_n e S_{n-1} estão muito próximos de S_s.

Em outras palavras:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S_s - S_s = 0$$

Portanto, se a_n não convergir para 0, a série será divergente.

c) Para refutar essa "contrapositiva" do exercício anterior, basta analisar a série $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n$.

Dessa forma, tem-se que pelo Teste da Comparação:

$$S_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{> 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{> 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \dots$$

$$\Rightarrow S_{2n} = \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)}_{> 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}}$$

$\Rightarrow S_{2^n} = \ldots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}$

$\Rightarrow S_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$

Como $\lim_{n \to \infty} 1 + \frac{n}{2} = \infty$ e, pelo Teste da Comparação tem que, dada $a_n \leq b_n$ e $a_n, b_n > 0$, tem-se:

↳ Se $S_n \leq S_{2^n}$ e $S_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$,

então $\lim_{n \to \infty} S_{2^n} = \lim_{n \to \infty} S_n \geq \lim_{n \to \infty} 1 + \frac{n}{2}$

e, como $\lim_{n \to \infty} 1 + \frac{n}{2} = \infty$, então a

série S_n é divergente.

Logo, a proposição está incorreta, pois não se pode afirmar a convergência da série com apenas $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, necessitando-se dos testes de convergência.

d) I) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \cdot n^3$

Teste da Série Alternada:

I) $a_{n+1} \leq a_n$: verificar se $\forall n$ tem

$\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \leq \frac{n^3}{3^n}$. De fato, supondo

$n = 10$, tem-se: $\frac{11^3}{3^{11}} < \frac{10^3}{3^{10}}$.

Portanto, é válido.

II) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$: verificando o limite

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{3^n} \overset{L.H.}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{\ln(3).3^x}$

$\overset{L.H.}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} \frac{6n}{\ln^2(3).3^n} \overset{L.H.}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} \frac{6}{\ln^3(3).3^n} = 0$

Portanto, é válido

Como (I) e (II) são válidos, a série é convergente.

II) Teste da Raiz:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(-\frac{2}{n}\right)^n\right|} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|-\frac{2}{n}\right| = 0$$

Como $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 < 1$, então a série é convergente.

III) Teste da Integral:

I) $F(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ (Positiva)

$\Rightarrow [1; +\infty[\to \mathbb{R}$

Logo, intervalo contínuo.

II) $F'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}} \Rightarrow$ Decrescente.

Pode ser aplicado o teste. Dessa forma:

$$\int_1^\infty F(x)\,dx \Rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \Rightarrow \lim_{a\to\infty} [2\sqrt{x}]\Big|_1^a$$

$$\Rightarrow \lim_{a\to\infty} 2\sqrt{a} - 2 = \infty \neq L \in \mathbb{R}$$

Logo, a série é divergente.

(Ou pela Série Harmônica!)

③ a) $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-8)^n}{n^2}$ (I)

$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-8)^{n-1}}{n}$ (II)

$F''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)(x-8)^{n-2}}{n}$ (III)

I) • Raio de Convergência:

$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{1} = 1$

• Intervalo de Convergência: $|x-a| < R$

$\Rightarrow 7 < x < 9$ (Análise restante)

↳ $x = 7$: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2} \Rightarrow$

↳ Convergente (S. Alternada e S. harmônica)

↳ $x = 9$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

↳ Convergente (S. harmônica)

Logo: I.C. $= [7;9]$ ou $7 \leq x \leq 9$

II) • Raio de Convergência:

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = 1$$

• Intervalo de Convergência: $7 < x < 9$

↳ $x = 7$: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$

↳ Convergente (S. alternada)

↳ $x = 9$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

↳ Divergente (S. harmônica)

Logo: I.C. = [7; 9[ou $7 \leq x < 9$

III) • Raio de Convergência

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n-1}{n}}} = 1$$

• Intervalo de Convergência: $7 < x < 9$

↳ $x = 7$: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-2} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)$

↳ Divergente (S. alternada)

↳ $x = 9$: $\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)/n$ → Divergente (Termo Geral)

Logo: I.C. =]7; 9[ou $7 < x < 9$

b) Sabendo que: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$; para $|x| < 1$

Pode-se utilizar a derivação em cima, até encontrar o desejado. Ou seja:

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-x)^3} = \left(-\frac{1}{2}\right) \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) n x^{n-2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-x)^4} = \left(-\frac{1}{12}\right) \sum_{n=3}^{\infty} (n-2)(n-1)(n) x^{n-3}$$

$$\therefore \frac{1}{(1-x)^4} = \sum_{n=3}^{\infty} \left(-\frac{1}{12}\right) (n-2)(n-1)(n) x^{n-3} ,$$

para $\frac{1}{12} < x < -\frac{1}{12}$

c) Série de Taylor: $F(x) \approx P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$

Aplicando para $g(x) = \text{sen}(x)$ e $a = 0$:

$$g(x) \approx P(x) = \frac{g(0)}{0!}(x-0)^0 + \frac{g^1(0)}{1!}(x-0)^1 + \frac{g^2(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{g^3(0)}{3!}(x-0)^3 + \ldots$$

* $g'(x) = \cos(x)$; $g''(x) = -\text{sen}(x)$; $g'''(x) = -\cos(x)$; ...

$$\Rightarrow g(x) \approx P(x) = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{(-1)}{3!}x^3 + \underset{\text{repete}}{\ldots}$$

$$\therefore g(x) \approx P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

* $2n+1$: sequência com base nas derivadas

II) Pode-se dizer que $F(x) = \dfrac{x}{\text{sen}\,x}$. Dessa forma, aplicando a Série de Maclaurin (Taylor quando $a = 0$):

$$F(x) \approx P(x) = \frac{F(0)}{0!}x^0 + \frac{F^1(0)}{1!}x^1 + \frac{F^2(0)}{2!}x^2 + \frac{F^3(0)}{3!}x^3 + \ldots$$

* Detalhe no domínio: 0 não pertence!

Ou seja: $F(0) = \lim_{x \to 0} \dfrac{x}{\text{sen}(x)} \overset{L.H.}{=} 1$

(aplicável em todos)

$$\Rightarrow F(x) \approx P(x) = 1 + \frac{0}{1!}x + \frac{(1/3)}{2!}x^2 + \ldots$$

↳ x sempre presente.

$$\therefore \lim_{x \to 0} F(x) \approx \lim_{x \to 0} P(x) = 1$$