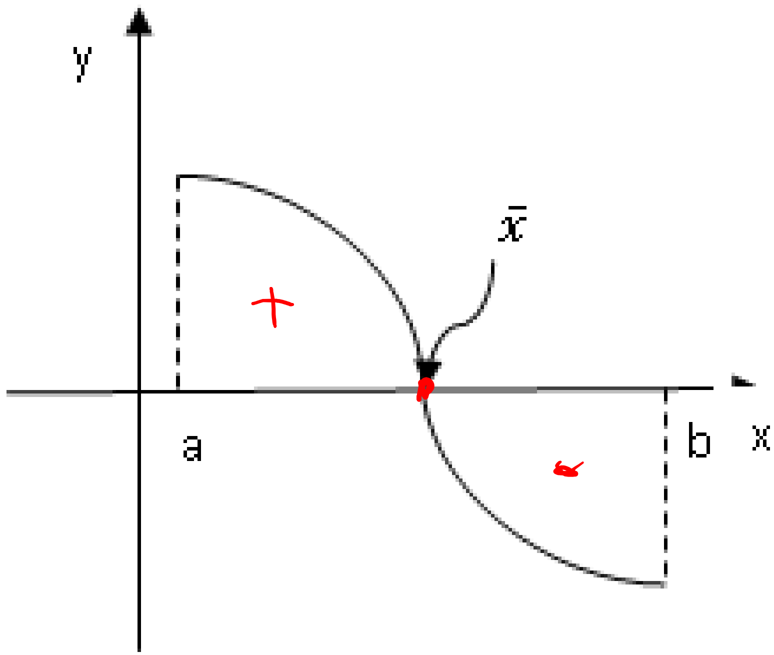
4616 – Métodos Numéricos Computacionais

Larissa Oliveira
oliveira.t.larissa@gmail.com

Nas últimas aulas...

O QUE SÃO ZEROS DE FUNÇÕES REAIS?

Dado $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com f definida e contínua em [a, b], são denominadas raízes de f os valores de x tais que $f(x) = 0$.



Graficamente, as raízes reais são representadas pelas abscissas dos pontos onde a curva intercepta o eixo $\overrightarrow{Ox}$

1 - MÉTODO DA BISSECÇÃO

Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo [a,b] e tal que $f(a)f(b) < 0$.

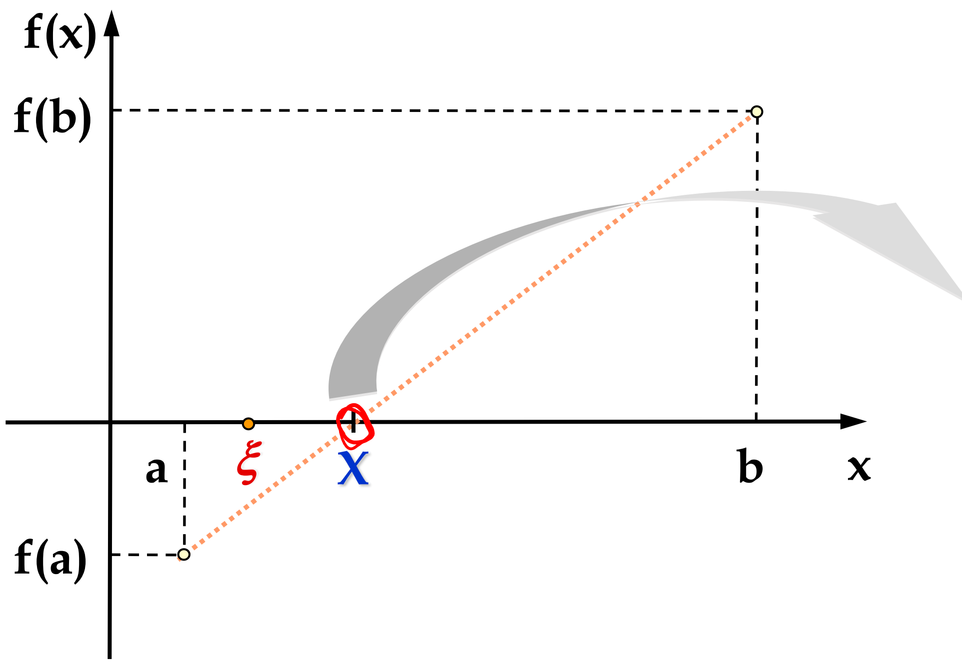
O Método da Bissecção consiste em, a partir de um intervalo [a, b] que contenha a raiz $\bar{x}$, determinar uma sequência de intervalos $[a_i, b_i]$, i = 0, 1, ..., n, em que $a_0 = a$ e $b_0 = b$, de modo que a amplitude do intervalo numa iteração é a metade da amplitude do intervalo anterior e que ele sempre contem a raiz $\bar{x}$.

(SUCESSIVA DIVISÃO DE [a,b] AO MEIO).

2- MÉTODO DA POSIÇÃO FALSA

Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo [a,b] e tal que $f(a)f(b) < 0$.

Calcula a média ponderada entre a e b com pesos |f(b)| e |f(a)|, respectivamente:



$$X = \frac{a|f(b)| + b|f(a)|}{|f(b)| + |f(a)|}$$

$$X = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

(já que f(a) e f(b) tem sinais opostos)

3. MÉTODO DO PONTO FIXO (MPF)

Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo [a,b] e tal que $f(a)f(b) < 0$.

- O MPF consiste em transformar uma equação $f(x) = 0$ em uma equação equivalente $x = \varphi(x)$ e a partir de uma aproximação inicial x_0, gerar uma sequência $\{x_k\}$ de aproximações para $\bar{x}$ pela relação $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ ($f(\bar{x}) = 0$ se, e somente se, $\varphi(\bar{x}) = \bar{x}$).

Assim, transformamos o problema de encontrar um zero de $f(x)$ no problema de encontrar um ponto fixo de $\varphi(x)$.

4- MÉTODO DE NEWTON

$\bar{x} = x + h$

Seja $\bar{x}$ a raiz da equação f(x) = 0, tal que $\bar{x} \in [a, b]$, finito e que f´(x) e f´´(x) sejam funções contínuas que preservam o sinal em [a,b].

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, k = 0,1,2,..$$

MÉTODO DE NEWTON

COMPARAÇÃO DOS MÉTODOS

Bissecção: é um método mais simples, envolvendo operações simples, não exige o conhecimento da derivada da função, mas o número de iterações depende da amplitude do intervalo inicial.

É usado para diminuir a amplitude do intervalo que contém a raiz e depois, uma vez próximo da raiz $\bar{x}$, aplicamos outro método, por exemplo, método de Newton.

Ponto Fixo: deve ser usado quando a função iteração for de fácil obtenção, gerando um processo iterativo simples e a condição de convergência na vizinhança de $\bar{x}$ pode ser analisada sem dificuldades.

Newton: requer o conhecimento da derivada, mas possui convergência quadrática.

Convergência

Bissecção e posição falsa: garantia de convergência se $f(x)$ é contínua em [a,b] e f(a)f(b) <0.
Ponto Fixo e Newton: condições mais restritas de convergência.

Esforço computacional

Bissecção: cálculos mais simples
Newton: mais elaborados, porém número menor de iterações.
O método de Newton é o mais indicado desde que as condições de convergência sejam asseguradas e o calculo de $f'(x)$ não seja muito elaborado.

A escolha do método está diretamente ligada com a equação que se deseja resolver

Todos os métodos vistos dependem de uma boa escolha da solução inicial ou do intervalo onde se encontra a raiz.

Hoje...

Sistemas Lineares

SISTEMAS LINEARES

Motivação:

Uma transportadora possui 5 tipos de caminhões, representados por (1), (2), (3), (4) e (5), ao quais são equipados para transportar 5 tipos de diferentes máquinas A, B, C, D e E segundo a tabela:

			Máquinas		
Caminhões	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
(1)	1	1	1	0	2
(2)	0	1	2	1	1
(3)	2	1	1	2	0
(4)	3	2	1	2	1
(5)	2	1	2	3	1

SISTEMAS LINEARES

Problema

Supondo que A, B, C, D e E é a quantidade de máquinas que cada caminhão pode transportar levando carga plena, quantos caminhões de cada tipo devemos enviar para transportar exatamente:

- 27 máquinas do tipo A,
- 23 máquinas do tipo B,
- 31 máquinas do tipo C,
- 31 máquinas do tipo D,
- 22 máquinas do tipo E?

SISTEMAS LINEARES

Modelagem

x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 QTDE CAMINHÕES DO TIPO 1, 2, 3, 4, 5

$$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 27 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 23 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 31 \\ 0x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 31 \\ 2x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 + x_5 = 22 \end{cases}$$

$x_1 = 4$ $x_3 = 2$ $x_5 = 5$

$x_2 = 6$ $x_4 = 3$

SISTEMAS LINEARES

Definições...

Equação Linear

Uma **equação linear** em n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma equação da forma

$$\boxed{a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b}$$

em que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e b são constantes reais;

SISTEMAS LINEARES

Sistema de Equações Lineares

Um **sistema de equações lineares** ou simplesmente **sistema linear** é um conjunto de *m* equações lineares:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

a_{ij} e b_k são constantes reais, para $i, k = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

SISTEMAS LINEARES

Forma Matricial: representado como Ax = b

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$m = n$

$n \times n$

QUADRADO

A $Ax = b$ **x**   **b**

Solução do sistema linear: $x^* = (x_1, x_2, \ldots x_n)^T$

SISTEMAS LINEARES

Classificação de um Sistema Linear quanto à solução

SL

- **Possível** – Tem Solução
  - **Determinado** – Solução única
  - **Indeterminado** – Infinitas soluções
- **Impossível** – Não admite solução

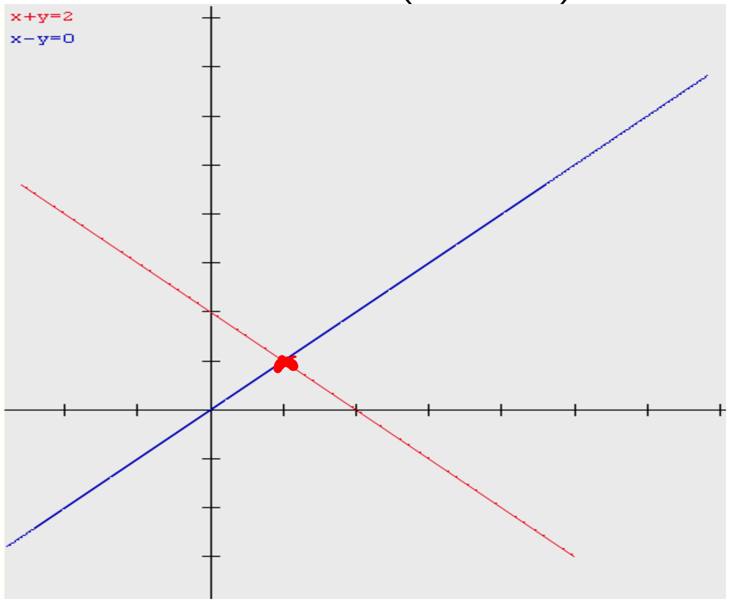
SISTEMAS LINEARES

Análise no $\mathbb{R}^2$

Sistema Possível e Determinado

- ✓ Possui uma única solução;
- ✓ O determinante de A deve ser diferente de zero;
- ✓ Se b for um vetor nulo (constantes nulas), a solução do sistema será a solução trivial, ou seja, o vetor x também será nulo.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{A} = -2 \neq 0$$



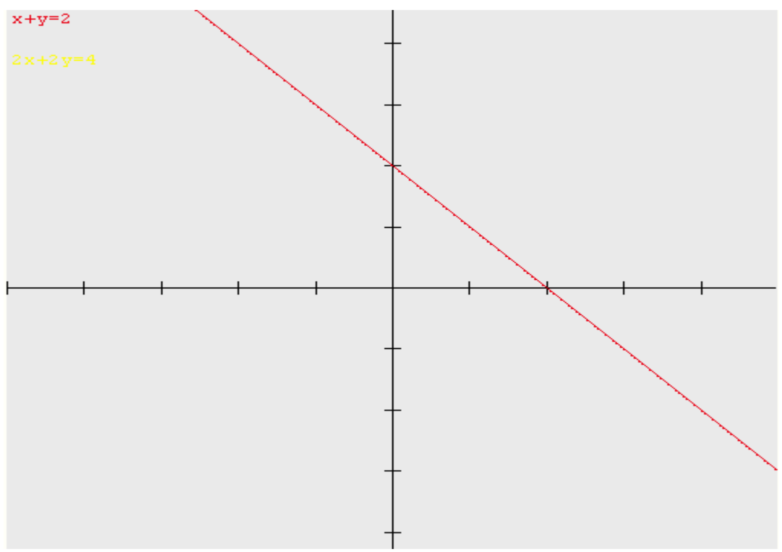
$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

SISTEMAS LINEARES

Sistema Possível e Indeterminado

- ✓ Possui infinitas soluções;
- ✓ O determinante de A é nulo;
- ✓ O vetor de constantes b deve ser nulo ou múltiplo de uma coluna de A.

$$\begin{cases} 1x_1 + 1x_2 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases} \times 2 \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{A} = 0$$



$$\begin{pmatrix} x_1{}^* \\ x_2{}^* \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x_1 \\ 2 - x_1 \end{pmatrix}$$

SISTEMAS LINEARES

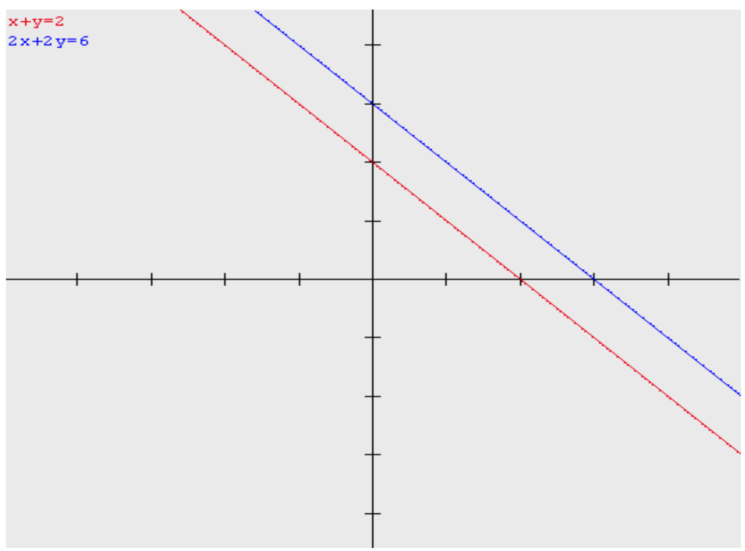
Sistema Impossível ou Incompatível

✓Não possui solução;

✓O determinante de A é nulo;

✓O vetor b não pode ser nulo ou múltiplo de alguma coluna de A

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \det \mathbf{A} = 0$$



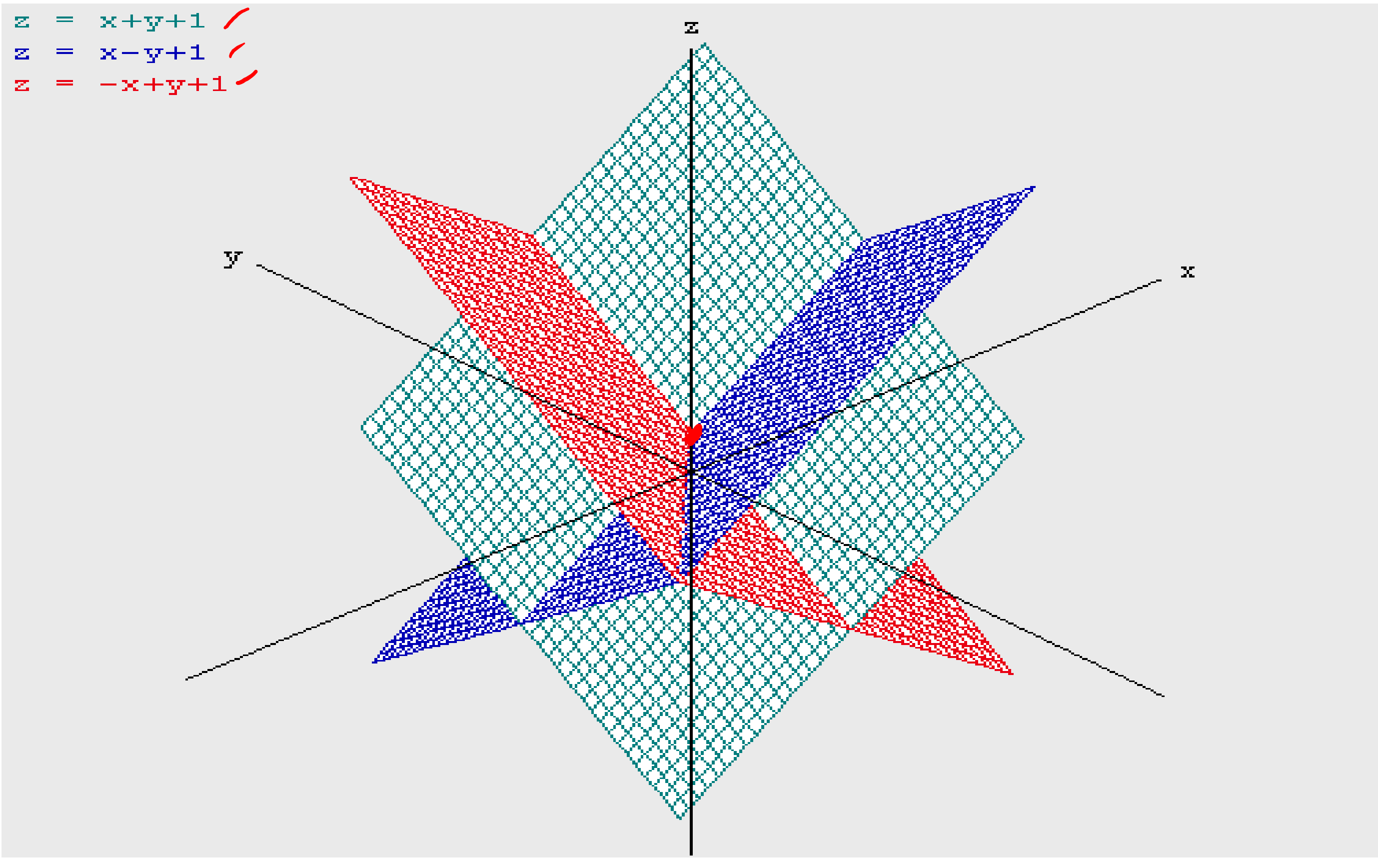
$\nexists$ solução em $\mathbb{R}^2$

SISTEMAS LINEARES

Análise no $\mathbb{R}^3$

Sistema Possível e Determinado

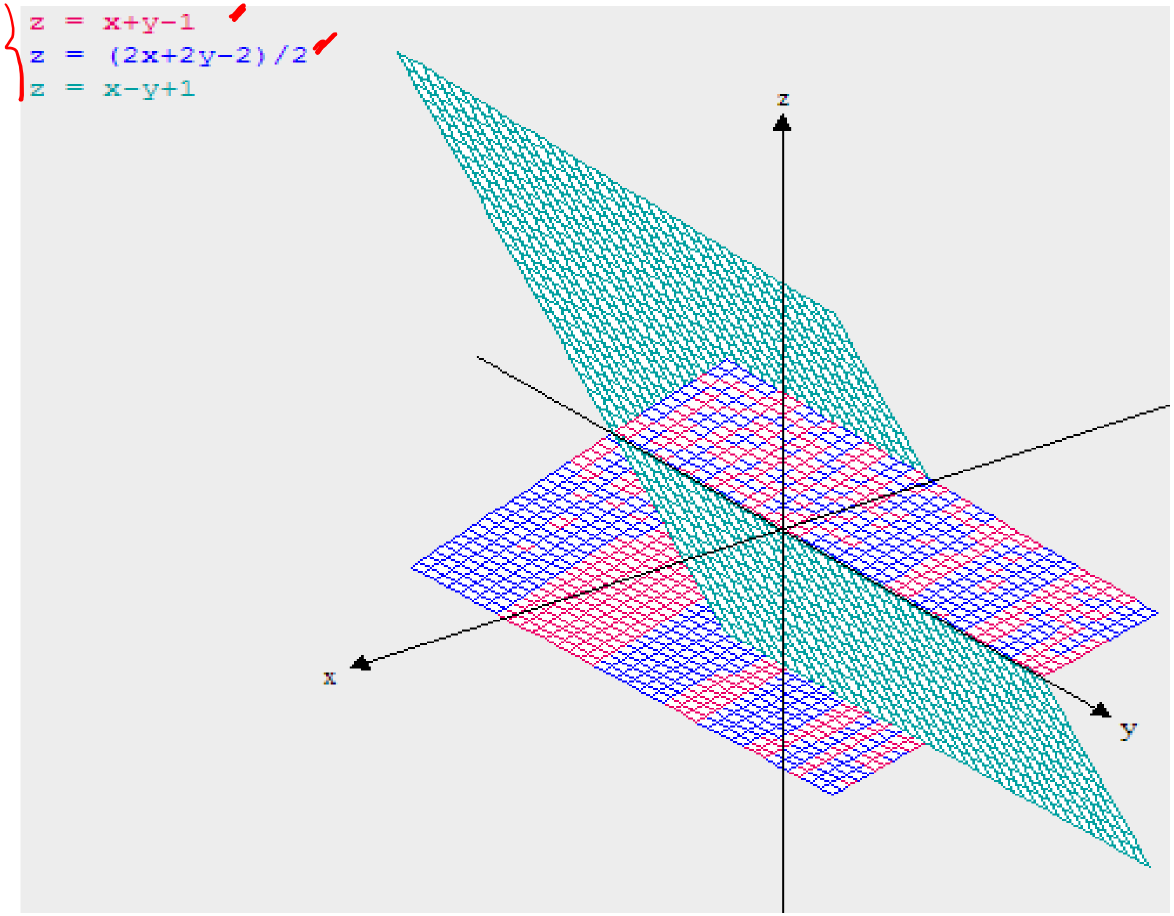
1 única sol.



(x, y, z)

SISTEMAS LINEARES

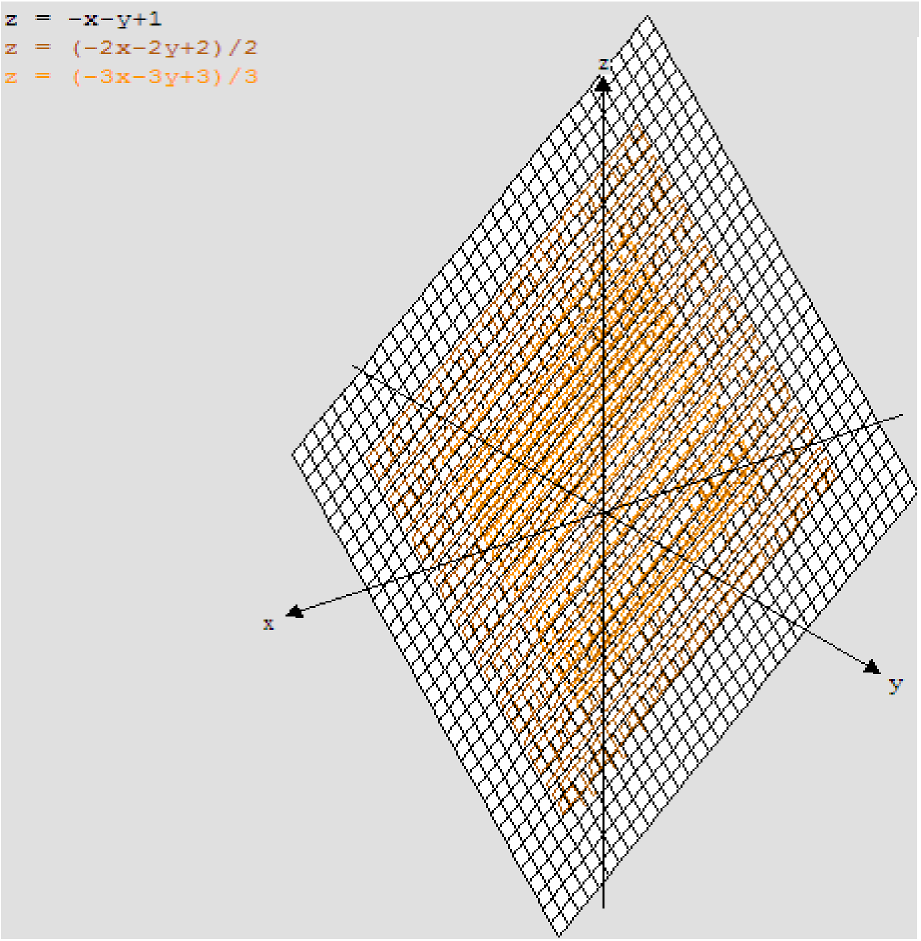
Sistema Possível e Indeterminado



2 planos paralelos coincidentes

SISTEMAS LINEARES

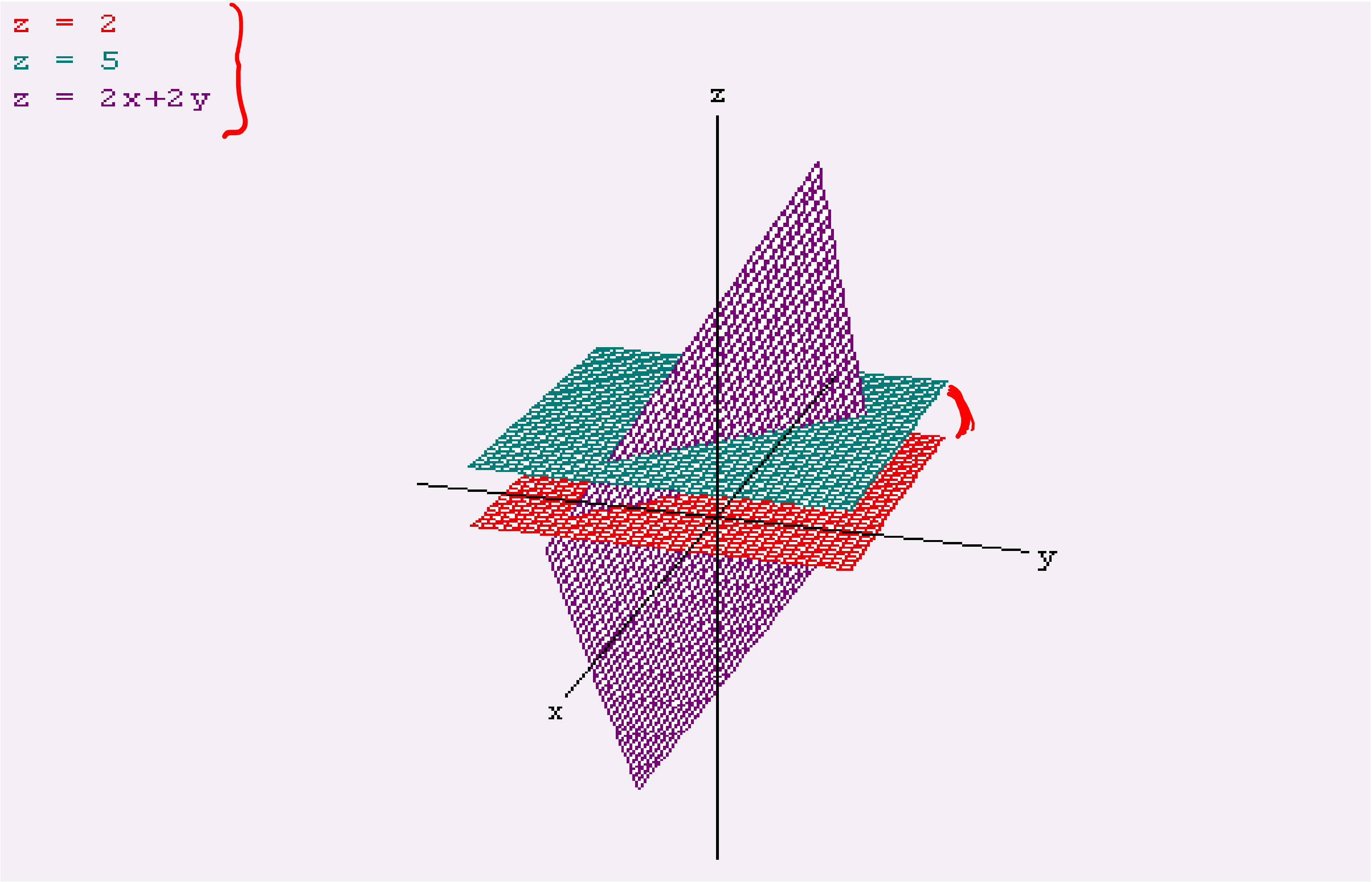
Sistema Possível e Indeterminado



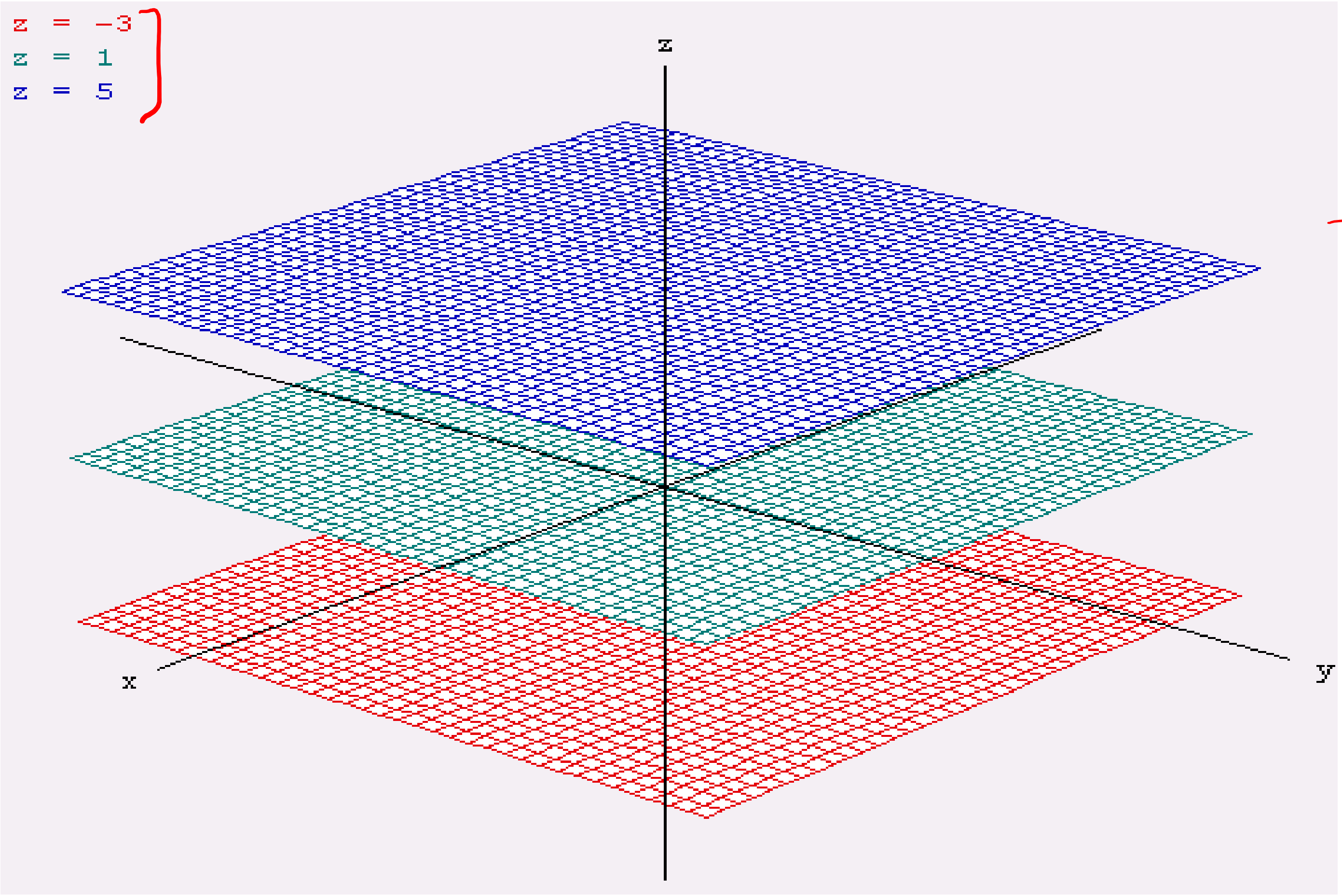
3 PLANOS

SISTEMAS LINEARES

Sistema Incompatível



Sistema Incompatível



SISTEMAS LINEARES

Sistema homogêneo

SE

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T = 0.$$

Um sistema homogêneo é sempre consistente, uma vez que o vetor nulo é sempre solução deste sistema.

SISTEMAS LINEARES

Matriz Transposta

Seja $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ com $A = (a_{ij}), i, j = 1, \ldots, n$. A matriz transposta de A, denotada por A^T, é definida a partir da matriz A, por $A^T = (b_{ij}), i, j = 1, \ldots, n$ tal que $b_{ij} = a_{ji}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

SISTEMAS LINEARES

Matriz Simétrica

Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ com $A = (a_{ij}), i, j = 1, \dots, n$ é simétrica se $a_{ij} = a_{ji}$, com $i \neq j$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

SISTEMAS LINEARES

Matriz Triangular Inferior

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matriz Triangular Superior

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

SISTEMAS LINEARES

Sistemas Equivalentes

Sejam P e P′ dois sistemas lineares (quadrados ou retangulares). $m \times m$
$n \times n$

O sistema P′ é equivalente a P (notação: P ~ P′) se P′ é obtido de P a partir das seguintes operações elementares:

- ✓ Troca da posição de linhas ou de colunas de P;
- ✓ Multiplicação de uma linha de P por um escalar $\alpha \neq 0$;
- ✓ Multiplicação uma linha de P por um escalar $\alpha \neq 0$ e adição a uma outra linha de S.

OBS: Se P e P′ são equivalentes, então a solução de P′ é solução de P.

SISTEMAS LINEARES

Sistemas Equivalentes

$\times(-1)$

$$P \quad \begin{cases} 1x_1 + 1x_2 = 2 \\ 1x_1 - 1x_2 = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

multiplicando a 1º. linha de P por $\alpha = -1$ e adicionando à 2º linha de P, obtemos o sistema equivalente P′ dado por:

$$P' \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 0x_1 - 2x_2 = -2 \end{cases}$$

Na forma matricial: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

TRIANGULAR SUPERIOR

SISTEMAS LINEARES

Classificação dos sistemas lineares

Métodos diretos: são aqueles que fornecem solução exata do sistema linear, caso ela exista, após um número finito de operações.

Métodos iterativos: geram uma sequência de vetores $\{x^{(k)}\}$ a partir de uma aproximação inicial $x^{(0)}$. Sob certas condições, esta sequência converge para a solução x^*, caso ela exista.

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \longrightarrow \text{Técnicas mais avançadas}$$

Solução de Sistemas Lineares

SISTEMA TRIANGULAR SUPERIOR

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\qquad\qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}
$$

x_1

$\vdots$

x_{n-2}

x_{n-1}

$x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}}$

em que $a_{ii} \neq 0$; i = 1, 2,..., n.

SUBSTITUIÇÃO RETROATIVA

SISTEMA TRIANGULAR SUPERIOR

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{nn}x_n}{a_{n-1\,n-1}}$$

$$a_{n-1}x_{n-1} + a_n x_n = b_{n-1}$$

em que $a_{ii} \neq 0$; i = 1, 2,..., n.

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

ALGORITMO

Para i=(n-1), (n-2), ... 1, faça

$$x_i = \left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j \right) \Big/ a_{ii}, \; i = (n-1), \ldots, 1$$

SISTEMA TRIANGULAR SUPERIOR

Exemplo

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = \frac{b_3}{a_{33}} = 2$$

$$x_2 = \Big(b_2 - \sum_{j=3}^{3} a_{2j} x_j\Big) / a_{22} = \big(b_2 - \underline{a_{23} x_3}\big) / a_{22} = (1-2)/(-1) = 1$$

$$x_1 = \Big(b_1 - \sum_{j=2}^{3} a_{1j} x_j\Big) / a_{11} = \big(b_1 - a_{12} x_2 - a_{13} x_3\big) / a_{11} = (9-1-6)/2$$

$$= 1$$

SISTEMA TRIANGULAR INFERIOR

$$
\begin{cases}
a_{11}\, x_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 & = b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 & = b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \quad 0 & \vdots \\
a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n & = b_n
\end{cases}
\qquad
\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{array}
$$

em que $a_{ii} \neq 0$; i = 1, 2,..., n.

SUBSTITUIÇÃO PROGRESSIVA

SISTEMA TRIANGULAR INFERIOR

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots. + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

em que $a_{ii} \neq 0$; i = 1, 2,..., n. .

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

Para i=2, 3, ..., n, faça

$$x_i = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j \right) \Big/ a_{ii}, i = 2, \ldots, n$$

SISTEMA TRIANGULAR INFERIOR

Exemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$y^* = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = \frac{b_1}{a_{11}} = 9$$

$$y_2 = \left(b_2 - \sum_{j=1}^{1} a_{2j} y_j\right) / a_{22} = \left(b_2 - a_{21} y_1\right) / a_{22} = (1 - 0)/1 = 1$$

$$y_3 = \left(b_3 - \sum_{j=1}^{2} a_{3j} y_j\right) / a_{33} = \left(b_3 - a_{31} y_1 - a_{32} y_2\right) / a_{33} = \left(7 - \frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) / 1 = 2$$

SISTEMAS LINEARES

Atividade para contabilizar presença

1- Resolver os seguintes sistemas de equações lineares:

a) $$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) $$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$