4616 – Métodos Numéricos Computacionais

Larissa Oliveira
oliveira.t.larissa@gmail.com

Na última aula...

MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO LU

O objetivo é fatorar a matriz dos coeficientes A em um produto de duas matrizes L e U

$$[L]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \qquad [U]=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO LU

Dada a matriz coeficiente:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO LU

Solução do Sistema Ax=b

Seja um sistema Ax = b de ordem n, onde A satisfaz as condições da fatoração LU. Então, o sistema Ax = b pode ser escrito como:

$$(LU)x = b$$

$$Ly = b \qquad Ux = y$$

OBSERVAÇÃO 1

Se det A ≠ 0 e se tivermos $\det(A_k) = 0$ é possível trocar a linha k por uma linha abaixo dela e se $\det(A_k) \neq 0$ pode-se efetuar a decomposição.

✓ Lembre-se de trocar também o termo independente.

Exemplo:

Resolver o sistema utilizando a decomposição LU

A_2

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = 6-6=0 \ \times$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = A'$$

$$b' = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$\det(A_2) = -4 \neq 0$

$\det(A_1) = 2 \neq 0$

OBSERVAÇÃO 2

O método de Eliminação de Gauss também pode ser utilizado para a obtenção dos coeficientes l_{ij} e u_{ij} das matrizes da decomposição LU.

Matriz L: $l_{ij} = m_{ij}$ do método de Eliminação de Gauss e $l_{ii} = 1$ e $l_{ij} = 0$ se $i < j$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & 0 \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \cdots & & 1 \end{pmatrix} = L$$

Matriz U: é a matriz resultante do processo de Eliminação de Gauss (matriz escalonada) .

MÉTODO DE GAUSS COMPACTO

Primeiramente, montamos a matriz de ordem n × (n+1):

A

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & a_{n,n+1}
\end{array}\right)
$$

$$
\begin{pmatrix} a_{1,n+1} \\ a_{2,n+1} \\ \vdots \\ a_{n,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}
$$

MÉTODO DE GAUSS COMPACTO

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \end{array} \right)$$

U   b'

$$\left(\begin{array}{cccc|c} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} & u_{1,n+1} \\ l_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} & u_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & u_{nn} & u_{n,n+1} \end{array} \right)$$

L

Para determinar os termos u_{ij} e l_{ij}, utilizamos as mesmas expressões da decomposição LU, entretanto, i = 1, 2, ..., n e j = 1, 2, ..., n, (n+1):

Determinados os elementos u_{ij} e l_{ij}, resolvemos o sistema $Ux = b'$ em que $b_i' = u_{i,n+1}$, i = 1, 2, ..., n.

Hoje...

MÉTODO DE CHOLESKY

- ✓ Definido para a resolução de sistemas lineares de ordem quadrada *n*
- ✓ Matriz dos coeficientes seja **simétrica e definida positiva**.

Uma matriz quadrada A_n é definida positiva se $x^T A x > 0$ para todo $x \in R^n$, $x \neq 0$.

ou

Uma matriz quadrada A_n é definida positiva se $\boxed{\det(A_k) > 0,}$ para $k = 1,\ldots,n$.

MÉTODO DE CHOLESKY

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} g_{11} & & & \\ g_{21} & g_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}}_{G} \underbrace{\begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & \cdots & g_{n1} \\ & g_{22} & \cdots & g_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & g_{nn} \end{pmatrix}}_{G^T}$$

G é uma matriz triangular inferior com elementos da diagonal estritamente positivos

MÉTODO DE CHOLESKY

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} g_{11} & & & \\ g_{21} & g_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}}_{G} \underbrace{\begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & \cdots & g_{n1} \\ & g_{22} & \cdots & g_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & g_{nn} \end{pmatrix}}_{G^T}$$

Primeira Coluna da G

$$a_{11} = (g_{11})^2 \Rightarrow g_{11} = \sqrt[2]{a_{11}}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{21} = g_{21}g_{11} \\ a_{31} = g_{31}g_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} = g_{n1}g_{11} \end{array}\right\} \Rightarrow g_{i1} = \frac{a_{i1}}{g_{11}}, i = 2,3,\ldots,n$$

MÉTODO DE CHOLESKY

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} g_{11} & & & \\ g_{21} & g_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}}_{G} \underbrace{\begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & \cdots & g_{n1} \\ & g_{22} & \cdots & g_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & g_{nn} \end{pmatrix}}_{G^T}$$

Segunda Coluna da G

$$a_{22} = g_{21}^2 + g_{22}^2 \Rightarrow g_{22} = \sqrt[2]{a_{22} - g_{21}^2}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{32} &= g_{31}g_{21} + g_{32}g_{22} \\ a_{42} &= g_{41}g_{21} + g_{42}g_{22} \\ &\vdots \\ a_{n2} &= g_{n1}g_{21} + g_{n2}g_{22} \end{aligned}\right\} \Rightarrow g_{i2} = \frac{a_{i2} - \sum_{k=1}^{2-1} g_{ik} \cdot g_{2k}}{g_{22}}, i = 3, \ldots, n$$

MÉTODO DE CHOLESKY

J-ésima Coluna da G

$$a_{jj} = g_{j1}^2 + g_{j2}^2 + \ldots + g_{jj}^2$$

$$a_{j+1,j} = g_{j+1,1} g_{j1} + g_{j+1,2} g_{j2} + \ldots + g_{j+1,j} g_{jj}$$

$$a_{j+2,j} = g_{j+2,1} g_{j1} + g_{j+2,2} g_{j2} + \ldots + g_{j+2,j} g_{jj}$$

$$\vdots$$

$$a_{nj} = g_{n1} g_{j1} + g_{n2} g_{j2} + \cdots + g_{n,j} g_{jj}$$

MÉTODO DE CHOLESKY

Elementos diagonais da G

$$g_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} g_{jk}^{2}}$$

Elementos não diagonais da G

$$g_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} g_{ik} . g_{jk}}{g_{jj}}, i = j+1, \ldots, \quad n$$

MÉTODO DE CHOLESKY

Resolução do sistema linear

$$Ax = b$$

$$\underbrace{(G\,G^T)x}_{\mathbf{y}} = b$$

$$\boxed{\mathbf{Gy = b}} \qquad \boxed{\mathbf{G^T x = y}}$$

MÉTODO DE CHOLESKY

Observação 1:

$det(A) = det(L) . \underbrace{det(U)}_{u_{11} u_{22} u_{33} \cdots u_{nn}}$

Utilizando a Decomposição de Cholesky, A = G.G^t.

$$\det(A) = (\det G)^2 = (g_{11} g_{22} \ldots g_{nn})^2$$

$= det(G) . det(G^T)$

Observação 2:

$(g_{11} g_{22} g_{33} \ldots g_{nn})(g_{11} g_{22} \ldots g_{nn}) = (g_{11} g_{22} \cdots g_{nn})^2$

Podemos aplicar a decomposição de Cholesky para verificar se uma matriz simétrica é definida positiva. Se o processo falha ela não é definida positiva!!!!!

Observação 3:

Número de operações menor que decomposição LU

MÉTODO DE CHOLESKY

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

a. Verificar se A pode ser decomposta em $G.G^t$

b. Decompor A em $G.G^t$

c. Calcular o determinante de A.

d. Resolver o sistema $Ax = b$ com $b = (2\ \ 1\ \ 5)^T$

a) Simetrica ✓

definida positiva
$$\begin{cases} \det(A_1) = 1 > 0 \\ \det(A_2) = 1 > 0 \\ \det(A_3) = \det(A) = 6 - 1 - 3 = 2 > 0 \end{cases}$$

∴ PODE SER DECOMPOSTA GG^T

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix}$$

1° COLUNA G

$$g_{11} = \sqrt{a_{11}} = 1$$

$$g_{21} = \frac{a_{21}}{g_{11}} = 1$$

$$g_{31} = \frac{a_{31}}{g_{11}} = 0$$

2° COLUNA G

$$g_{22} = \sqrt{a_{22} - g_{21}^2} = 1$$

$$g_{32} = \frac{a_{32} - g_{31} g_{21}}{g_{22}} = -1$$

3° COLUNA G

$$g_{33} = \sqrt{a_{33} - g_{31}^2 - g_{32}^2}$$

$$= \sqrt{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}}_{G} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}}_{G^T}$$

c)

$$\det(A) = \left(\overset{1}{g_{11}} \cdot \overset{1}{g_{22}} \cdot \overset{\sqrt{2}}{g_{33}}\right)^2$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$$

d) $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \to y = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$Gy = b$

$G^T x = y$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \to x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

MATRIZ INVERSA

A: uma matriz quadrada de ordem n.

- ✓ Se det(A) ≠ 0, então existe uma matriz B, tal que:

$$AB = BA = I \longrightarrow \boxed{\text{Matriz Identidade}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \; 1 \end{pmatrix}$$

A matriz B é chamada de matriz inversa de A e representada por $B = A^{-1}$.

$$A\,A^{-1} = A^{-1}A = I$$

MATRIZ INVERSA

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}}_{A^{-1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{I}$$

Para determinar as n colunas da matriz A^{-1} resolvemos n sistemas lineares utilizando qualquer método que resolva sistemas lineares.

MATRIZ INVERSA

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Primeira coluna de } A^{-1}$$

$A \quad b_1 \quad e_1$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Segunda coluna de } A^{-1}$$

$A \quad b_2 \quad e_2$

MATRIZ INVERSA

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{1n}\\ b_{2n}\\ \vdots\\ b_{nn}\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}}_{e_n} \Rightarrow$$ n-ésima coluna de A^{-1}

$$e_j = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ j\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \rightarrow \text{j-ésima linha de } e.$$

$$\boxed{Ab_j = e_j}$$

MATRIZ INVERSA

1) **Método de Eliminação de Gauss**

$$A\, b_j = e_j\,,\quad j = 1,\dots,n.$$

2) **Método de Decomposição LU**

$$(L\,U)\, b_j = e_j, \qquad j = 1,\dots,n.$$

$$L\, y_j = e_j$$
$$U\, b_j = y_j,$$

MATRIZ INVERSA

Método de Cholesky (somente para matriz simétrica e positiva definida)

$$G\,G^T \,.\, b_j = e_j\,, \qquad j = 1,\ldots,n.$$

$$G\,y_j = e_j$$

$$G^T b_j = y_j\,,\ j = 1,\ldots,n.$$

MATRIZ INVERSA

Exemplo:

1. Determine a inversa da matriz A utilizando algum método estudado.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}}_{A^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

II)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$M_{32} = 1$

III)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gauss Simples

I) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

II) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

III) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

//

MÉTODO DE CHOLESKY

Atividade para contabilizar presença - método de Cholesky - 14/07/2020.

Usando o método de Cholesky, resolva o sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 10 \\ 4 & 10 & 26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 10 \end{bmatrix}$$