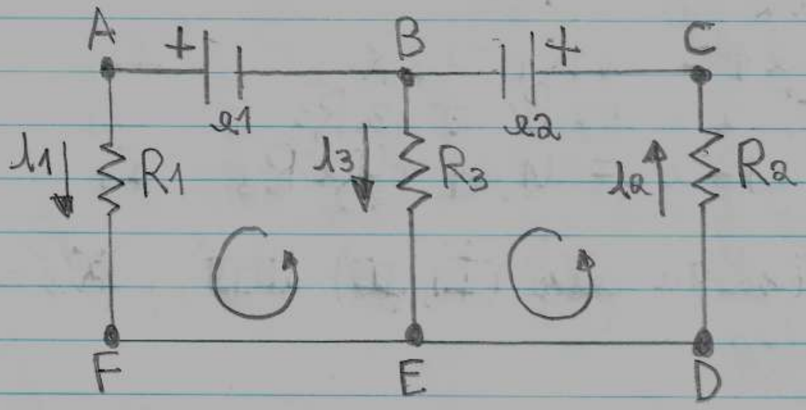
04 . 02 . 21

Nome: Davi Augusto Neves Leite RA: 191027383

Atividade Avaliativa de 07/02/21 (Parte 2)

1) Redesenhando o circuito com base nas malhas



Dessa forma, tem-se: i_1 é a corrente que passa em R_1; i_2 é a corrente que passa em R_2; i_3 é a corrente que passa em R_3.

Além disso, pelas Leis de Kirchhoff, tem-se:

- Lei dos Nós

Sabe-se que os pontos B e E são <u>dois</u> nós do circuito e, portanto, existem <u>duas</u> equações associadas a Lei de Nós. Dessa forma:

$$\text{Nó B: } i_1 - i_2 + i_3 = 0 \quad (I)$$
$$\text{Nó E: } -i_1 + i_2 - i_3 = 0 \quad (II)$$

• Lei das Malhas

Sabe-se que o circuito tem três malhas: ABEF, BCDE e ACDF. Dessa forma, existe três equações associadas pela Lei das Malhas, sendo elas:

Malha ABEF: $e_1 = i_1 R_1 - i_3 R_3$ (III)
Malha BCDE: $-e_2 = i_2 R_2 + i_3 R_3$ (IV)
Malha ACDF: $e_1 - e_2 = i_1 R_1 + i_2 R_2$ (V)

⇒ Utilizando as equações (I), (III) e (IV), tem-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 + i_3 = 0 & (I) \\ e_1 = i_1 R_1 - i_3 R_3 & (III) \\ -e_2 = i_2 R_2 + i_3 R_3 & (IV) \end{cases}$$

Resolvendo-o e encontrando as correntes (pelo Método de Gauss):

$$\begin{cases} i_1 - i_2 + i_3 = 0 & \cdot(-R_1) \\ 0i_1 + R_1 i_2 + (-R_1 - R_3) i_3 = e_1 \\ 0i_1 + R_2 i_2 + R_3 i_3 = -e_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i_1 - i_2 + i_3 = 0 \\ 0i_1 + R_1 i_2 + (-R_1 - R_3) i_3 = e_1 & \cdot(-R_2/R_1) \\ 0i_1 + 0 i_2 + \left(\dfrac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_1}\right) i_3 = \dfrac{-e_1R_2 - e_2R_1}{R_1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow i_3 = \frac{-e_1 R_2 - e_2 R_1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

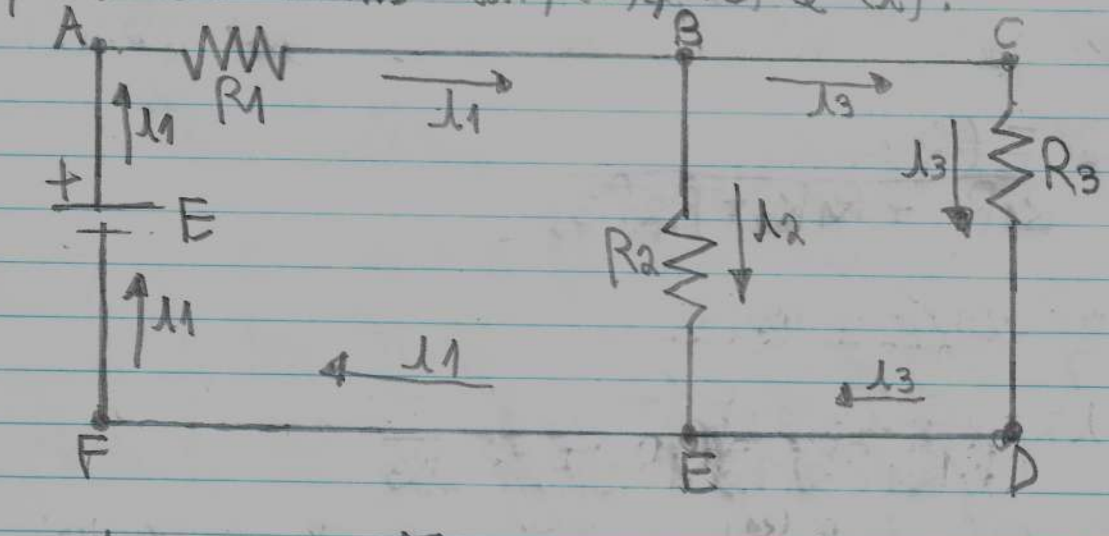
$$\Rightarrow i_2 = \frac{e_1 R_3 - e_2 R_1 - e_2 R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

$$\Rightarrow i_1 = \frac{e_1 R_2 + e_1 R_3 - e_2 R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

(2) Para o instante $t=0$: capacitor descarregado ($q=0$), ou seja, desconsiderá-lo do circuito.

Para o instante $t \to \infty$: capacitor carregado ($q \neq 0$), ou seja, considerá-lo no circuito

Dessa forma, consideram o seguinte circuito para os itens (a), (b), (c) e (d):



* Nós: B e E $\Rightarrow$ Malhas: ABEF e ACDF

a) Aplicando as Leis de Kirchhoff:

• Lei dos Nós

Nó E: $i_1 - i_2 - i_3 = 0$ (I)

• Lei das Malhas

Malha ABEF: $E = i_1 R_1 + i_2 R_2$ (II)
Malha ACDF: $E = i_1 R_1 + i_3 R_3$ (III)

⇒ Utilizando as equações (I), (II) e (III), tem-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0 & \text{(I)} \\ R_1 i_1 + R_2 i_2 + 0 i_3 = E & \text{(II)} \\ R_1 i_1 + 0 i_2 + R_3 i_3 = E & \text{(III)} \end{cases}$$

Aplicando o método de Gauss, obtém-se:

$$\Rightarrow i_1 = \frac{E(R_2 + R_3)}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

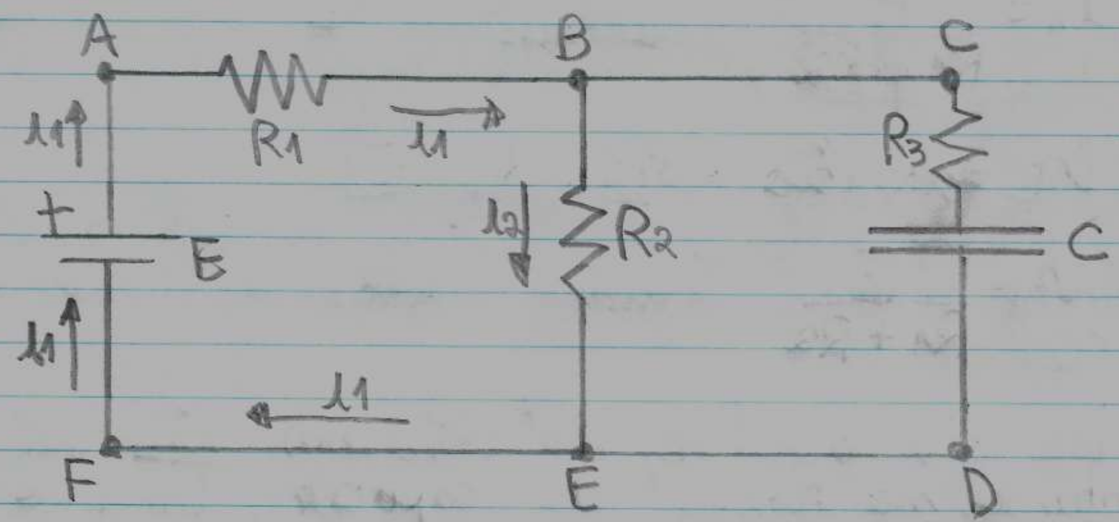
b) Do exercício (a):

$$\Rightarrow i_2 = \frac{ER_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

c) Do exercício (a):

$$\Rightarrow i_3 = \frac{ER_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

Agora, para o instante $t \to \infty$, o capacitor fica completamente carregado e, portanto, não há corrente em seu ramo. Ou seja, o circuito para as letras (d), (e), (f), (g), (h) e (j) é:



* Nós: B e E ⇒ Malhas: ABEF

d) Aplicando as Leis de Kirchhoff:

- Lei dos Nós

Nó E: $i_1 - i_2 = 0$ (I)

- Lei das Malhas

Malha ABEF: $E = i_1 R_1 + i_2 R_2$ (II)

⇒ Utilizando as equações (I) e (II), tem-se o seguinte sistema:

tilibra

$$\begin{cases} i_1 - i_2 = 0 & (I) \\ R_1 i_1 + R_2 i_2 = E & (II) \end{cases}$$

Aplicando o método de Gauss, obtém-se:

$$\Rightarrow i_1 = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

e) Da equação (d):

$$\Rightarrow i_2 = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

f) Da equação (d), sabe-se que não há corrente no ramo do capacitor (mesmo de R_3). Portanto:

$$\Rightarrow i_3 = 0$$

i) Quando $x = 0$, a diferença de potencial V_2 equivale:

$$V_2 = R_2 i_2 \quad (\text{para } x = 0)$$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{E R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

j) Quando $x \to \infty$, a diferença de potencial V_2 equivale:

$$V_2 = R_2 i_2 \ (\text{para } x \to \infty) \Rightarrow V_2 = \frac{E R_2}{R_1 + R_2}$$

g) Considerando o processo de carregamento do capacitor:

$$\begin{cases} \text{Malha ABEF: } E = i_1 R_1 + i_2 R_2 & (I) \\ \text{Malha BCDE: } \dfrac{q}{C} = i_2 R_2 - i_3 R_3 & (II) \end{cases}$$

Considerando $i_1 = i_2 + i_3$ e substituindo em (I):

$$\Rightarrow \begin{cases} E = (R_1 + R_2) i_2 + R_1 i_3 & (III) \\ \dfrac{q}{C} = i_2 R_2 - i_3 R_3 \end{cases}$$

Isolando i_2 em (III):

$$\Rightarrow \begin{cases} i_2 = (E - R_1 i_3) / R_1 + R_2 & (IV) \\ q/C = i_2 R_2 - i_3 R_3 & (II) \end{cases}$$

Encontrando a equação equivalente aplicando (IV) em (II)

$$\Rightarrow \frac{q}{C} = R_2 \left(\frac{E - R_1 i_3}{R_1 + R_2} \right) - R_3 i_3$$

$$\Rightarrow \frac{q}{C} = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2} + \left(-\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} - R_3 \right) i_3$$

$$\Rightarrow \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 \right) i_3 + \frac{q}{C} = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2}$$

Considerando: $i_3 = \frac{dq}{dt}$

$$\Rightarrow \left(\frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_1 + R_2}\right)\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \frac{R_2E}{R_1+R_2}$$

Encontrando a função $q(t)$ por meio das aplicações de equação diferencial:

$$\Rightarrow \frac{dq}{dt} = \left(\frac{R_1+R_2}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}\right)\left(\frac{R_2EC - (R_1+R_2)q}{C(R_1+R_2)}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dq}{dt} = \frac{R_2EC - (R_1+R_2)q}{(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)C}$$

$$\Rightarrow \frac{dq}{R_2EC - R_1q - R_2q} = \frac{dt}{(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)C}$$

$$\Rightarrow \int_0^q \frac{dq}{R_2EC - R_1q - R_2q} = \int_0^t \frac{dt}{(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)C}$$

$$\Rightarrow -\frac{\ln[(-R_2 - R_1)q + R_2EC]}{R_1 + R_2}\Bigg|_0^q = \frac{t}{C(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R_1+R_2}\cdot \ln\left[\frac{R_2EC - q(R_1+R_2)}{R_2EC}\right] = \frac{-t}{C(R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3)}$$

$$\Rightarrow \ln\left[\frac{R_2EC - q(R_1+R_2)}{R_2EC}\right] = \frac{(-t)(R_1+R_2)}{C(R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3)}$$

$$\Rightarrow \frac{R_2EC - q(R_1+R_2)}{R_2EC} = \overset{e^{arg}}{\exp}\left[\frac{(-t)(R_1+R_2)}{C(R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3)}\right]$$

$$\boxed{\therefore q(t) = \frac{(-R_2EC)}{(R_1+R_2)} \cdot \exp\left[\frac{(-t)(R_1+R_2)}{C(R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3)}\right] + \frac{R_2EC}{R_1+R_2}}$$

OBS: $e^{arg} \Leftrightarrow \exp[arg]$

b) O tempo característico τ do circuito é dado por:

$$\tau = R.C = R_{eq}.C$$

* Pela teorema de Norton: $R_{eq} = \dfrac{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}{R_1+R_2}$

$$\boxed{\therefore \tau = \frac{C(R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3)}{R_1+R_2}}$$