4616 – Métodos Numéricos Computacionais

Larissa Oliveira
oliveira.t.larissa@gmail.com

Na última aula...

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Ideia Básica

Substituir a função por um polinômio que aproxime $f(x)$ razoavelmente no intervalo [a,b].

Hoje...

REGRA 3/8 DE SIMPSON

Considere uma função $f(x)$ contínua no intervalo [a,b], definida em x_0, x_1, x_2 , x_3, 4 pontos distintos e equidistantes. Queremos determinar uma fórmula de integração numérica para calcular

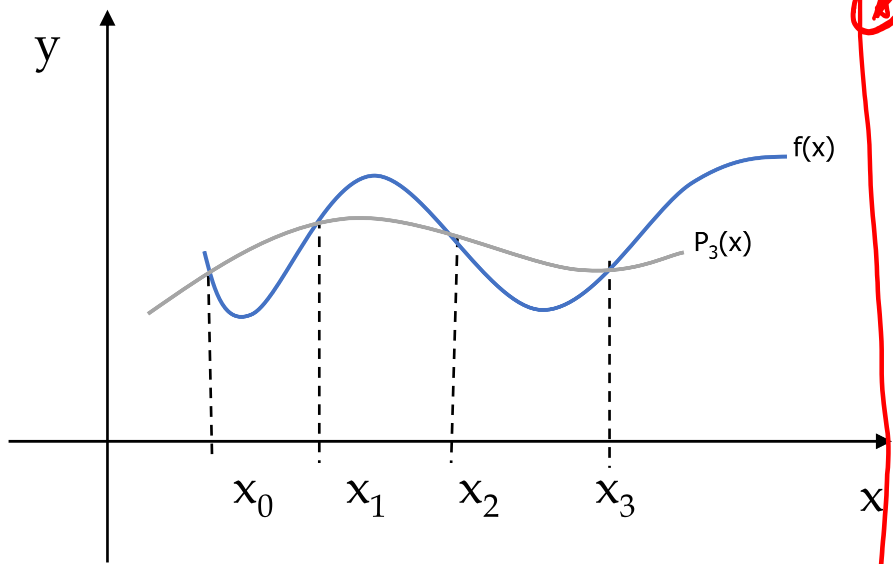
$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Aproximando $f(x)$ por arcos de uma função do terceiro grau.

Para determinar a Regra 1/3 de Simpson utiliza-se o polinômio de Newton-Gregory de grau 3, que é dado por:

$$P_3(x) = f(x_0) + (x - x_0)\underbrace{\Delta f(x_0)}_{h} + (x - x_0)(x - x_1)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2h^2} + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\frac{\Delta^3 f(x_0)}{3!h^3}$$

REGRA 3/8 DE SIMPSON



(*) $\Delta^3 f(x_0) = \Delta^2 f(x_1) - \Delta^2 f(x_0)$

$\Delta^2 f(x_1) = \underbrace{\Delta^1 f(x_2)} - \underbrace{\Delta^1 f(x_1)}$

$\Delta^2 f(x_0) = \underbrace{\Delta^1 f(x_1)} - \Delta^1 f(x_0)$

$\Delta^1 f(x_2) = \underbrace{\Delta^0 f(x_3) - \Delta^0 f(x_2)}$

$\Delta^1 f(x_1) = \Delta^0 f(x_2) - \Delta^0 f(x_1)$

$\Delta^1 f(x_0) = \Delta^0 f(x_1) - \Delta^0 f(x_0)$

Fazendo $a = x_0$ e $b = x_n$, temos:

$$s = \frac{x - x_0}{h} \qquad \frac{x_n - x_0}{h}$$

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_3} p_3(x)dx = h\int_0^3 P_3^{(s)} ds$$

$$h = \frac{x_n - x_0}{n}$$

(*) $\Delta^3 f(x_0) = \Delta^0 f(x_3) - \Delta^0 f(x_2) - 2\left(\Delta^0 f(x_2) - \Delta^0 f(x_1)\right) + \Delta^0 f(x_1) - \Delta^0 f(x_0)$

$\Delta^3 f(x_0) = f(x_3) - 3f(x_2) + 3f(x_1) - f(x_0)$

REGRA 3/8 DE SIMPSON

$s = u$

Integrando $P_3(s)$:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \cong h\int_0^3 \left[\Delta^0 f(x_0) + u\Delta f(x_0) + u(u-1)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!} + u(u-1)(u-2)\frac{\Delta^3 f(x_0)}{3!} \right] du =$$

SLIDE ANT. *

$$= h\int_0^3 \Delta^0 f(x_0)du + h\int_0^3 u\Delta f(x_0)du + \frac{h}{2}\int_0^3 u(u-1)\Delta^2 f(x_0)du + \frac{h}{6}\int_0^3 u(u-1)(u-2)\Delta^3 f(x_0)du =$$

$$= h\, f(x_0)u\Big|_0^3 + h\left[f(x_1) - f(x_0)\right]\frac{u^2}{2}\Bigg|_0^3 + \frac{h}{2}\left[f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)\right]\left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2}\right)\Bigg|_0^3 +$$

$$+ \frac{h}{6}\left[f(x_3) - 3f(x_2) + 3f(x_1) - f(x_0)\right]\left(\frac{u^4}{4} - u^3 + u^2\right)\Bigg|_0^3 = \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right]$$

$$\text{Portanto: } \int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right]$$

REGRA 3/8 DE SIMPSON

$$E_n = \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)\int_0^n u(u-1)\ldots(u-n)\,du$$

Erro na regra 3/8 de Simpson

O intervalo n = 3 é $\boxed{\text{ímpar,}}$ portanto:

$$E_3 = \frac{h^5}{4!} f^{(4)}(\xi)\underbrace{\int_0^3 u(u-1)(u-2)(u-3)du}_{-9/10} \Rightarrow \boxed{E_3 = -\frac{3}{80}h^5 f^{(4)}(\xi), x_0 \le \xi \le x_3}$$

$$\frac{h^5}{4.\cancel{3}.2}\cdot\left(\frac{-\cancel{9}^{3}}{10}\right) = \frac{-3h^5}{80}$$

Limitante superior para o erro

$$|E_3(x)| \le \frac{3}{80}h^5 \max\{|f^{(4)}(x)|, x_0 \le \xi \le x_3\}$$

REGRA 3/8 DE SIMPSON

Exemplo:

Calcule o valor aproximado de

$$\int_{0,3}^{1,2} \underbrace{(e^{x} + 5x)}_{f(x)}dx$$

usando a Regra 3/8 de Simpson e um Limitante Superior para o erro.

$$h = \frac{(x_n - x_0)}{n} = \frac{(1,2 - 0,3)}{3} = \boxed{0,3}$$

x_i	0,3	0,6	0,9	1,2
$f(x_i)$	2,8499	4,8221	6,9596	9,3201

$$\int_{0,3}^{1,2} (e^x + 5x)\, dx \simeq$$

$$\frac{3}{8} h \left[f(x_0) + 3\left(f(x_1) + f(x_2) \right) + f(x_3) \right] =$$

$$= \frac{3}{8}(0,3)\left[2,8499 + 3(4,8221 + 6,9596) + 9,3201 \right] =$$

$$= 5,3454$$

$$\therefore \int_{0,3}^{1,2} (e^x + 5x)\, dx \simeq 5,3454$$

L.S p/ ERRO:

$$|E_3| \leq \frac{3}{80} h^5 \max \left\{ |f^{(4)}(x)|,\ x_0 \leq x \leq x_n \right\}$$

$f^{(4)}(x) = e^x$ CRESCENTE $\therefore$ $\max = |f^{(4)}(1,2)| = 3,3201$

$$|E_3| \leq \frac{3}{80}(0,3)^5\, 3,3201 = 0,0003$$

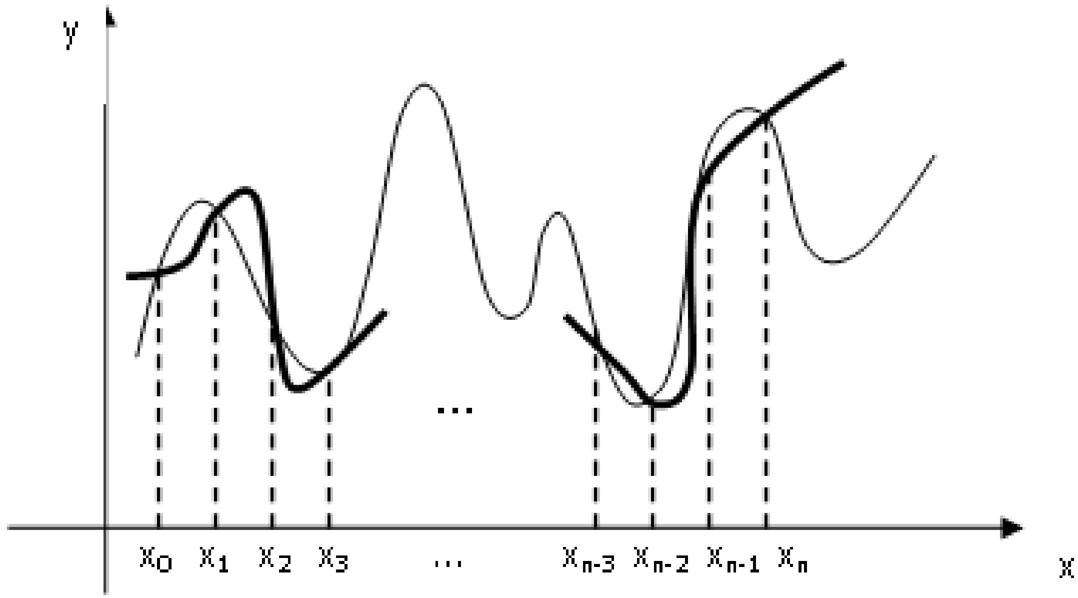
REGRA 3/8 DE SIMPSON GENERALIZADA

A regra 3/8 de Simpson generalizada consiste na subdivisão do intervalo [a, b] de integração e n subintervalos iguais, cada qual de amplitude

$$h = \frac{x_0 - x_n}{n}$$

em que n é um número múltiplo de 3, de forma que a = x_0 e b = x_n e a aplicação da Regra 3/8 de Simpson a cada 4 pontos consecutivos, ou 3 subintervalos consecutivos.

REGRA 3/8 DE SIMPSON GENERALIZADA



$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{3h}{8}\left[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)\right]+\frac{3h}{8}\left[f(x_3)+3f(x_4)+3f(x_5)+f(x_6)\right]+$$

$$+\ldots+\frac{3h}{8}\left[f(x_{n-3})+3f(x_{n-2})+3f(x_{n-1})+f(x_n)\right]=$$

$$\therefore \frac{3h}{8}\left\{f(x_0)+3\left[f(x_1)+f(x_2)+f(x_4)+\ldots+f(x_{n-2})+f(x_{n-1})\right]+2\left[f(x_3)+f(x_6)+\ldots+f(x_{n-3})+f(x_n)\right]\right\}$$

REGRA 3/8 DE SIMPSON GENERALIZADA

Erro na regra 3/8 de Simpson generalizada

$\boxed{\frac{n}{3}}$

$$E = -\frac{h^4}{80}(x_n - x_0) f^{(4)}(\xi), x_0 \le \xi \le x_n$$

$$-\frac{3}{80} h^5 f^{(4)}(\varepsilon)$$

$$E_t = -\frac{\cancel{3}}{80} h^5 \frac{n}{\cancel{3}} f^{(4)}(\varepsilon) = -\frac{h^5}{80} n f^{(4)}(\varepsilon)$$

$$-\frac{h^{\cancel{5}\,4}}{80} \frac{(x_n - x_0)}{h} f^{(4)}(\varepsilon)$$

Limitante superior para o erro

$$|E| \le \frac{h^4}{80}(x_n - x_0) \max\{|f^{(4)}(x)|, x_0 \le x \le x_n\}$$

REGRA 3/8 DE SIMPSON GENERALIZADA

Exemplo:

Calcule o valor aproximado da integral

$$\int_1^7 \underbrace{\ln(x+9)}_{f(x)}dx$$

usando a regra 3/8 de Simpson generalizada para 3, 6 e 9 subintervalos e um limitante superior para o erro. (MULTIPLOS DE 3)

I) 7 | n=3

$$h = \frac{(x_n - x_0)}{n} = \frac{(7-1)}{3} = 2$$

x_i	1	3	5	7
$f(x_i)$	2,3026	2,4849	2,6391	2,7726

$$\int_1^7 \ln(x+9)\,dx \simeq$$

$$\frac{3}{8}h\left[f(x_0)+3\left(f(x_1)+f(x_2)\right)+f(x_3)\right]=$$

$$=\frac{3}{8}(2)\left[2{,}3026+3(2{,}4849+2{,}6391)+2{,}7726\right]=15{,}3354$$

$$\therefore \int_1^7 \ln(x+9)\,dx \simeq \underline{15{,}3354}$$

L.S p/ ERRO:

$$|E_t| \leq \frac{h^4}{80}(x_n-x_0)\max\left\{|f^{(4)}(x)|,\ x_0 \leq x \leq x_n\right\}$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{-6}{(x+9)^4}$$ DECRESCENTE $\therefore$ MAX ACONTECE $x=1$

$$\max=|f^{(4)}(x)|=\underline{0{,}0006}$$

$$|E_t| \leq \frac{2^4}{80}(7-1)\,0{,}0006=\underline{0{,}0007}$$

II) $n=6$

$$h=\frac{(7-1)}{6}=\underline{1}$$

x_i	1	2	3	4	5	6	7
$f(x_i)$	2,3026	2,3979	2,4849	2,5649	2,6391	2,7081	2,7726

$$\int_1^7 \ln(x+9)\,dx \simeq \frac{3}{8}h\left[f(x_0)+3\left(f(x_1)+f(x_2)+f(x_4)+f(x_5)\right)+2\,f(x_3)+f(x_6)\right]=$$

$$=\frac{3}{8}(1)\left[2{,}3026+3\left(2{,}3979+2{,}4849+2{,}6391+2{,}7081\right)+2\left(2{,}5649\right)+2{,}7726\right]=\underline{\underline{15{,}3356}}$$

$$\therefore \int_1^7 \ln(x+9)\,dx \simeq \underline{\underline{15{,}3356}}$$

LS p/ ERRO:

$$|E_t| \le \frac{1^4}{80}(7-1)\,0{,}0006$$

$$\boxed{|E_t| \le 0{,}0001}$$

III) $n=9$ SUBINT.

$$h = \frac{(7-1)}{9} = \frac{2}{3} = 0{,}6667$$

x_i	1	$5/3$	$7/3$	3	$11/3$	$13/3$	...
$f(x_i)$	2,3026	2,3671	2,4277	2,4849	2,5390	2,5903	

...	5	$17/3$	$19/3$	7
	2,6391	2,6856	2,73	2,7726

$$\int_1^7 \ln(x+9)\,dx \approx \frac{3}{8}h\Big[f(x_0) + 3\big(f(x_1) + f(x_2) + f(x_4) + f(x_5) + f(x_7) + f(x_8)\big) + 2\big(f(x_3) + f(x_6)\big) + f(x_9)\Big] =$$

$$= \frac{3}{8}\,\frac{2}{3}\Big[2{,}3026 + 3(2{,}3671 + 2{,}4277 + 2{,}5390 + 2{,}5903 + 2{,}6856 + 2{,}73) + 2(2{,}4849 + 2{,}6391) + 2{,}7726\Big] = \underline{15{,}3356}$$

LS p/ ERRO

$$|E_t| \leq \frac{(2/3)^4}{80}(7-1)\,0{,}0006 = 0$$

INTEGRAÇÃO

Podemos ainda calcular a integral estabelecendo a priori a precisão desejada, em função do número de subintervalos

Exemplo:

Determine o menor número de subintervalos em que podemos dividir [0, 0.6] para obter $\int_0^{0,6} \frac{dx}{1+x}$ com erro menor ou igual a 0,0001 usando a regra dos trapézios.

$$\underbrace{|E_t| \leq \frac{h^2}{12}(x_n - x_0)\max\{|f^{(2)}(x)|\}}\leq 0{,}0001$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$ DECRESC. $\max = |f^{(2)}(0)| = 2$

$$\frac{h^2}{12}\overset{1,2}{\underline{(0,6-0)}(2)} \le 0,0001$$

$$h^2 \le 0,001 \rightarrow \underline{h \le 0,0316}$$

$$h = \frac{(x_n - x_0)}{n} = \frac{(0,6-0)}{n} \le 0,0316$$

$$\boxed{n \geq 18,9873}$$

$$\therefore \underline{n = 19}$$

$n = 20 \rightarrow$ 1/3 Simpson n par

$n = 21 \rightarrow$ 3/8 Simpson n multiplo 3

REGRA 3/8 DE SIMPSON

Atividade para presença - Aula sobre Integração – 24/08/2020.

Calcular $\int_0^{0,6} \frac{dx}{1+x}$ pela regra 3/8 de Simpson e h = 0,1.

Calcule também um limitante superior para o erro.

Considere 4 casas decimais.