4616 – Métodos Numéricos Computacionais

Larissa Oliveira
oliveira.t.larissa@gmail.com

unesp

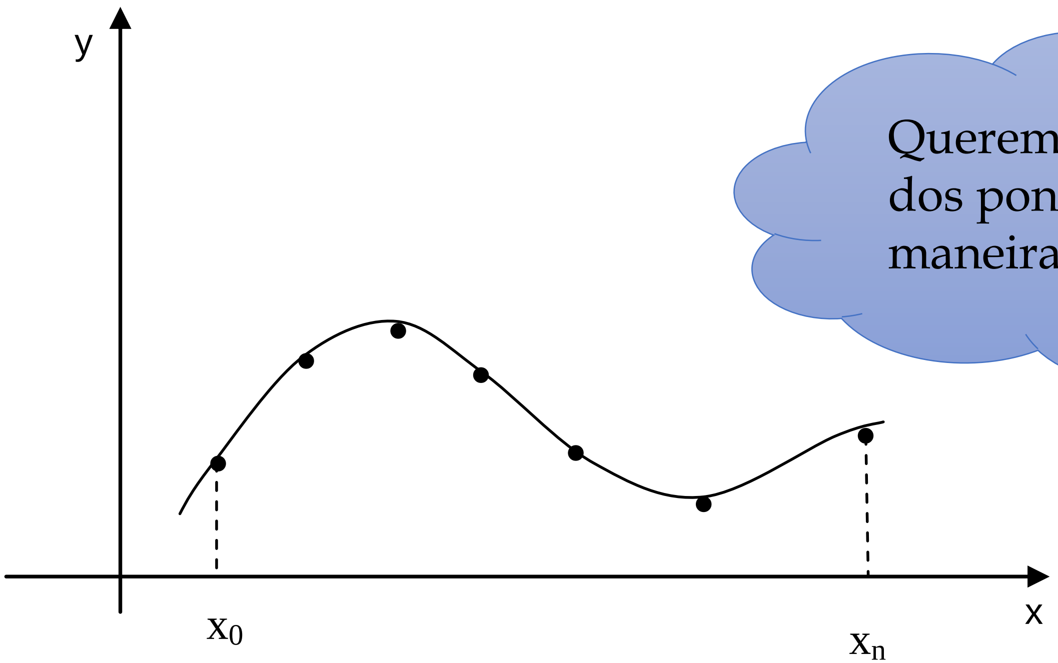
Datas…

Domingo	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
09	10 Ajuste (Lista 4 e trab 3)	11 Ajuste	12	13	14	15
16	17 Integração	18 Integração Trab 2	19	20	21	22
23	24 Integração (Lista 5)	25 SNL Lista 4	26	27	28	29
30	31 SNL	01 EDO Trab 3	02	03	04 **Notas parciais**	05
06	07 Repor!	08 **P2** Lista 5	09	10	11 **Médias**	12
13	14	15 **Exame**	16	17	18	19

Hoje...

AJUSTE DE CURVAS PELO MÉTODO DOS QUADRADOS MÍNIMOS

Interpolação: O polinômio de aproximação foi definido de tal maneira a coincidir com o valor da função dada em pontos definidos.



Queremos nos aproximar dos pontos da melhor maneira possível.

AJUSTE DE CURVAS PELO MÉTODO DOS QUADRADOS MÍNIMOS

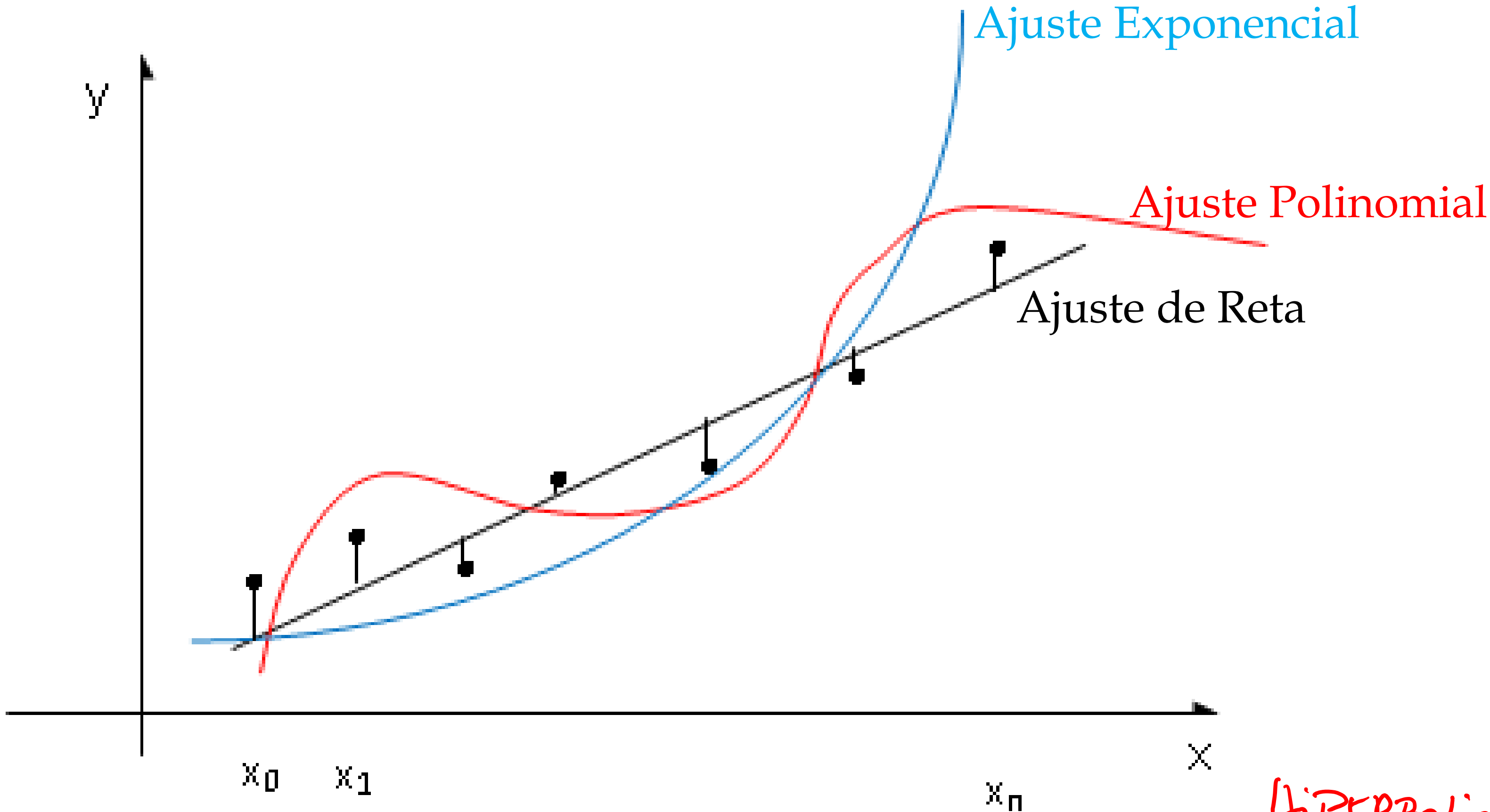
- ✓ Consiste em uma boa aproximação para valores tabelados, que nos permita obter um valor da função em algum ponto fora do intervalo tabelado com certa margem de segurança;

- ✓ **Problema:** aproximar f por outra função g de uma família previamente escolhida em que $g(x) = a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + \ldots + a_n g_n(x)$;

- ✓ Se f é apresentada na forma tabelada temos o caso **discreto**;

- ✓ Se f é apresentada na forma analítica temos o caso **contínuo**;

AJUSTE DE CURVAS PELO MÉTODO DOS QUADRADOS MÍNIMOS



Exponenciais

Hiperbolicas

$$g(x) = a_1 g_1(x) \; + a_2 g_2(x) + \ldots + a_n g_n(x)$$

Polinomiais

$$g(x) = ae^{bx} \qquad g(x) = e^{ax+b}$$

$$g(x) = ab^x$$

$$g(x) = \frac{1}{a_1 x + a_2}$$

AJUSTE DE CURVAS PELO MÉTODO DOS QUADRADOS MÍNIMOS

Como Aproximar???

Ao aproximarmos uma função *f* por uma função *g* de uma família previamente escolhida estamos introduzindo um erro(ou desvio ou resíduo), dado por:

$$\textbf{erro (e)} = \textbf{(f(x) – g(x))}$$

+ –

$\Sigma e(x_i) = 0$ X

$\Sigma |e(x_i)|$

Devemos impor:

- ✓ **e = 0?**
- ✓ **absoluto(e) mínimo?**
- ✓ **e^2 mínimo?**

AJUSTE DE CURVAS PELO MÉTODO DOS QUADRADOS MÍNIMOS

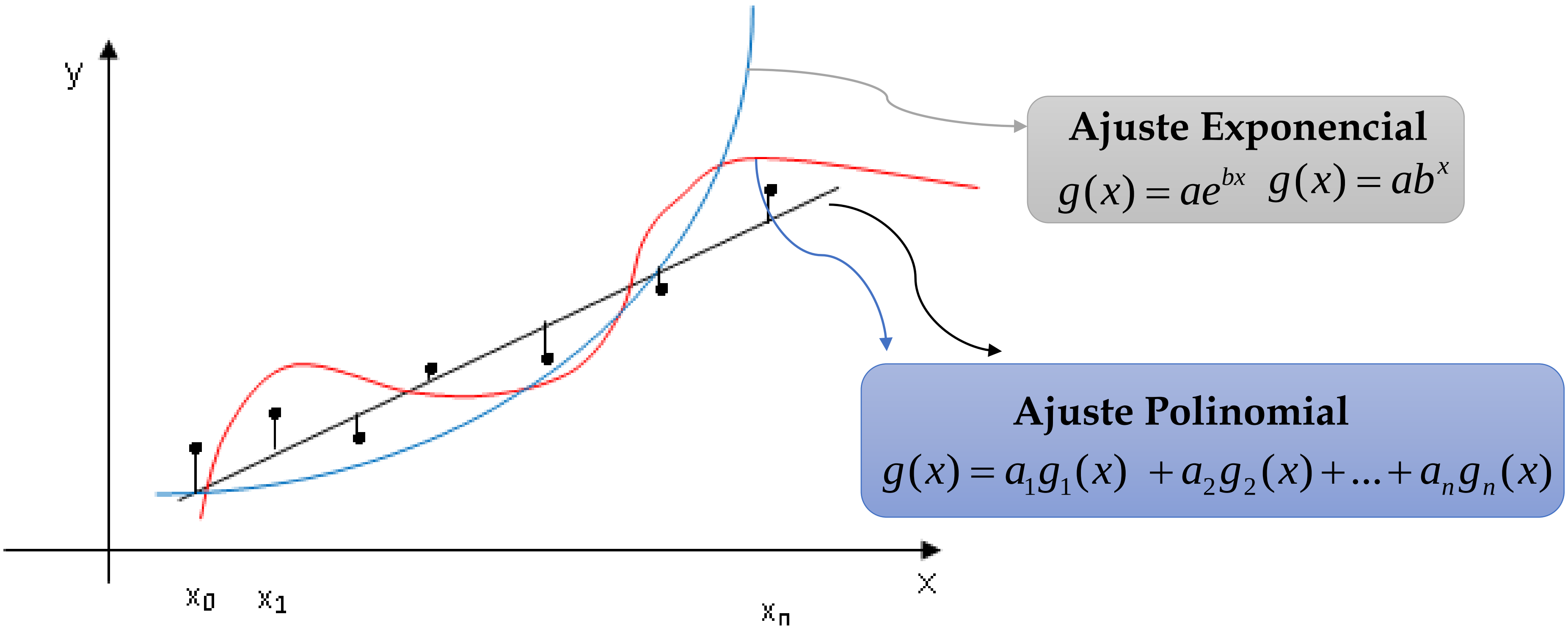
minimizar erros^2

desvios quadráticos mínimos

$$\text{minimizar} \sum_{i=1}^{n} (\underbrace{f(x_i) - g(x_i)})^2 \quad \rightarrow \quad \text{minimizar} \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} e_{\mathrm{i}}^2$$

AJUSTE DE CURVA – CASO DISCRETO

Dados os pontos $(x_i, f(x_i))$, $i = 1, \ldots, n$, e as n funções $g_1(x)$, $g_2(x)$, ..., $g_n(x_n)$ escolhidas de alguma forma, devemos determinar os coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tal que $g(x) = a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + \ldots + a_n g_n(x)$ se aproxime ao máximo de $f(x)$.



O ajuste de curvas pelo Método dos Mínimos Quadrados tem por objetivo ajustar $g(x) = f(x)$, de forma que os desvios quadráticos sejam mínimos

AJUSTE DE RETA

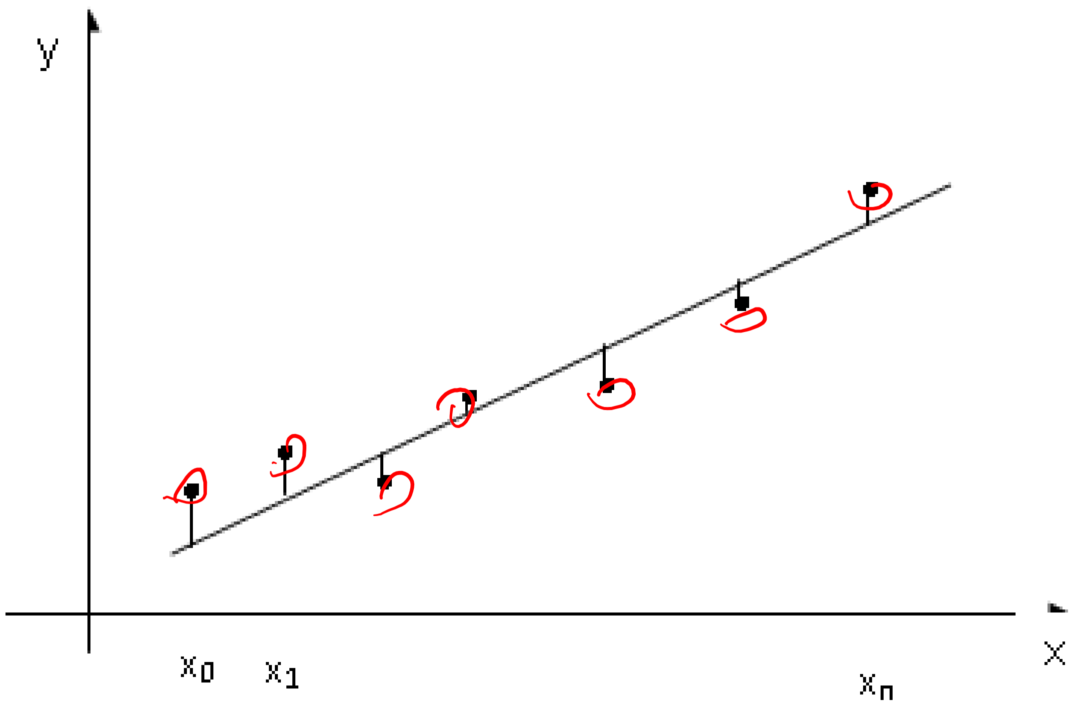
Dados n pontos (x_i, y_i), i = 1,..., n, deseja-se ajustar a eles uma reta $g(x) = a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) = a_1 x + a_2$.

$$E(a_1, a_2) = \min \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

$$= \min \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - g(x_i))^2$$

$$= \min \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - (a_1 x_i + a_2)]^2$$

$$= \min \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - a_1 x_i - a_2)^2$$



Variáveis do problema

AJUSTE DE RETA

Se a função $E(a_1, a_2)$ possui um ponto de mínimo...

*

$f(x_i)$

$\div 2$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sum_{i=1}^{n} e_i^2}{\partial a_1} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \sum_{i=1}^{n} e_i^2}{\partial a_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\sum_{i=1}^{n} (y_i - a_1 x_i - a_2)(-x_i) = 0 \\ 2\sum_{i=1}^{n} (y_i - a_1 x_i - a_2)(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_1 x_i - a_2)(x_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_1 x_i - a_2) = 0 \end{cases}$$

$$* \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} a_1 x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} a_2 x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} a_1 x_i - \sum_{i=1}^{n} a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 (n) = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}} \ \#$$

AJUSTE DE RETA

Sistema linear: simetrica

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{pmatrix}$$

$g(x) = a_1 x + a_2$

AJUSTE DE RETA

Exemplo

Ajuste os pontos abaixo a $g(x)$ e calcule o erro.

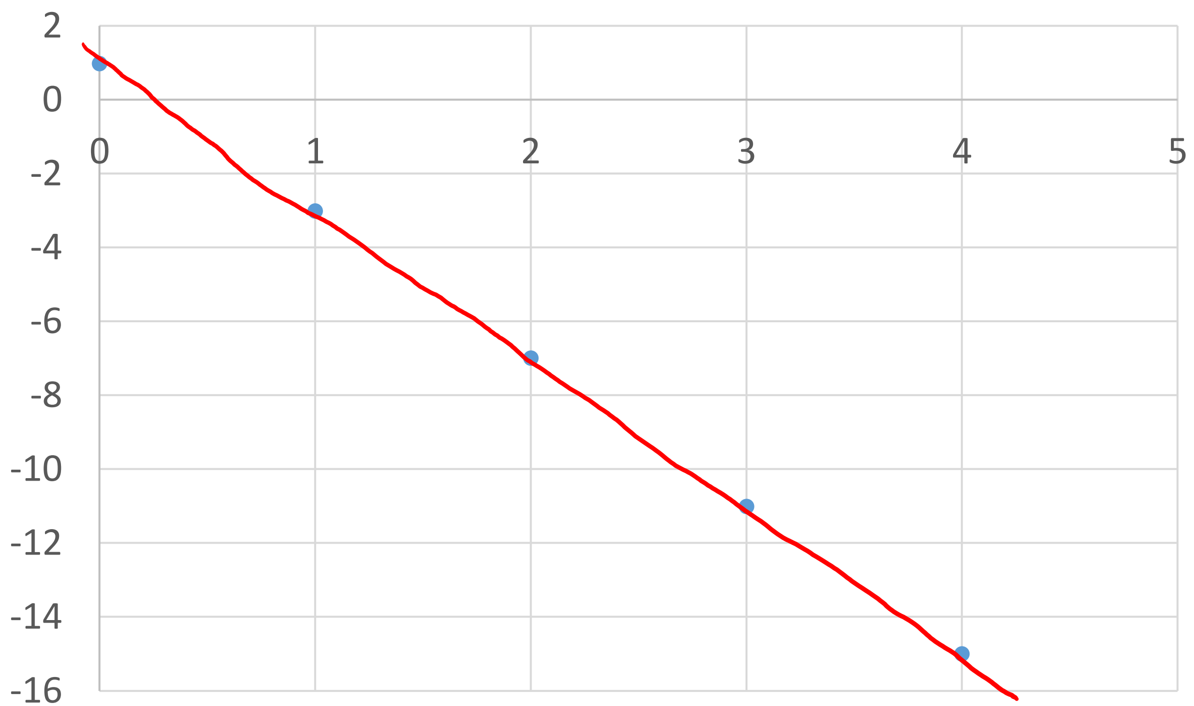
x	0	1	2	3	4
y	0,98	-3,01	-6,99	-11,01	-15

AJUSTE DE RETA

Exemplo

Ajuste os pontos abaixo a $g(x)$ e calcule o erro.

x	0	1	2	3	4
y	0,98	-3,01	-6,99	-11,01	-15



$$g(x) = a_1 x + a_2$$

$$\begin{pmatrix} n & \sum_1^5 x_i \\ \sum_1^5 x_i & \sum_1^5 x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_1^5 y_i \\ \sum_1^5 x_i y_i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35{,}03 \\ -110{,}02 \end{pmatrix}$$

	x_i	x_i^2	y_i	$x_i y_i$
	0	0	0.98	0
	1	1	-3,01	-3,01
	2	4	-6,99	-13,98
	3	9	-11,01	-33,03
	4	16	-15	-60
Σ	10	30	-35,03	-110,02

$$\Downarrow$$

$a_2 = 0{,}986$

$a_1 = -4$

$$\therefore g(x) = -4x + 0{,}986 \;//$$

ERRO $\quad e(x_i)$

$$\sum \left(f(x_i) - g(x_i)\right)^2$$

$$g(x) = -4x + 0,986$$

$$e(x_1) = \left(f(x_1) - g(x_1)\right)^2 = (0,98 - 0,986)^2 = 0,0000$$

$$e(x_2) = (-3,01 + 3,014)^2 = 0,0000$$

$$e(x_3) = (-6,99 + 7,014)^2 = 0,0006$$

$$e(x_4) = (-11,01 + 11,014)^2 = 0,0000$$

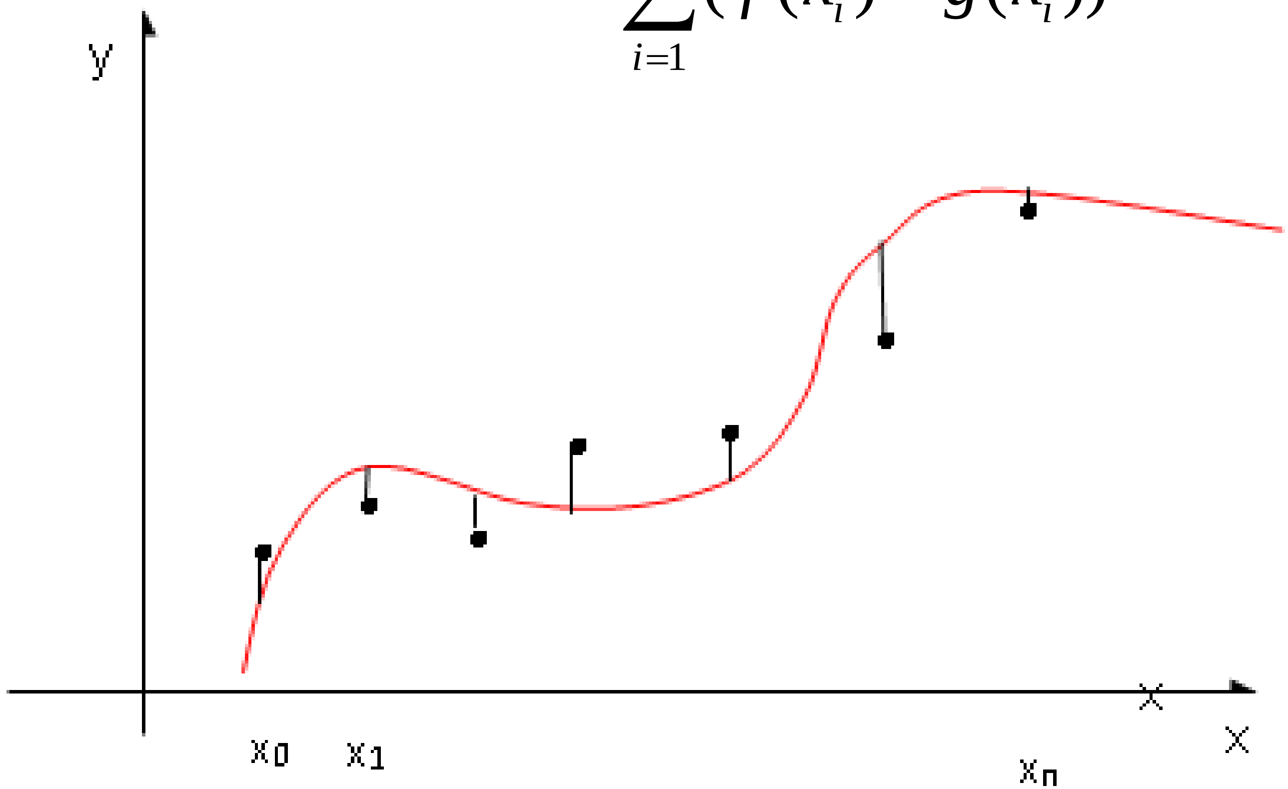
$$e(x_5) = (-15 + 15,014)^2 = 0,0002$$

$$\text{ERRO} = \sum_{1}^{5} e(x_i) = 0,0008$$

AJUSTE POLINOMIAL

Dados n pontos (x_i,y_i), i = 1,.., n, e o grau do polinômio a ser determinado, deseja-se encontrar os coeficientes do polinômio de modo que

$$\min \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - g(x_i))^2$$



AJUSTE POLINOMIAL

Resolvendo min $\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-g(x_i))^2$

$g(x) = a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + \dots a_n g_n(x)$

$$\begin{pmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 & \cdots & \sum x_i^n \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \cdots & \sum x_i^{n+1} \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \cdots & \sum x_i^{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum x_i^n & \sum x_i^{n+1} & \sum x_i^{n+2} & \cdots & \sum x_i^{n+n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \\ \vdots \\ \sum x_i^n y_i \end{pmatrix}$$

AJUSTE POLINOMIAL

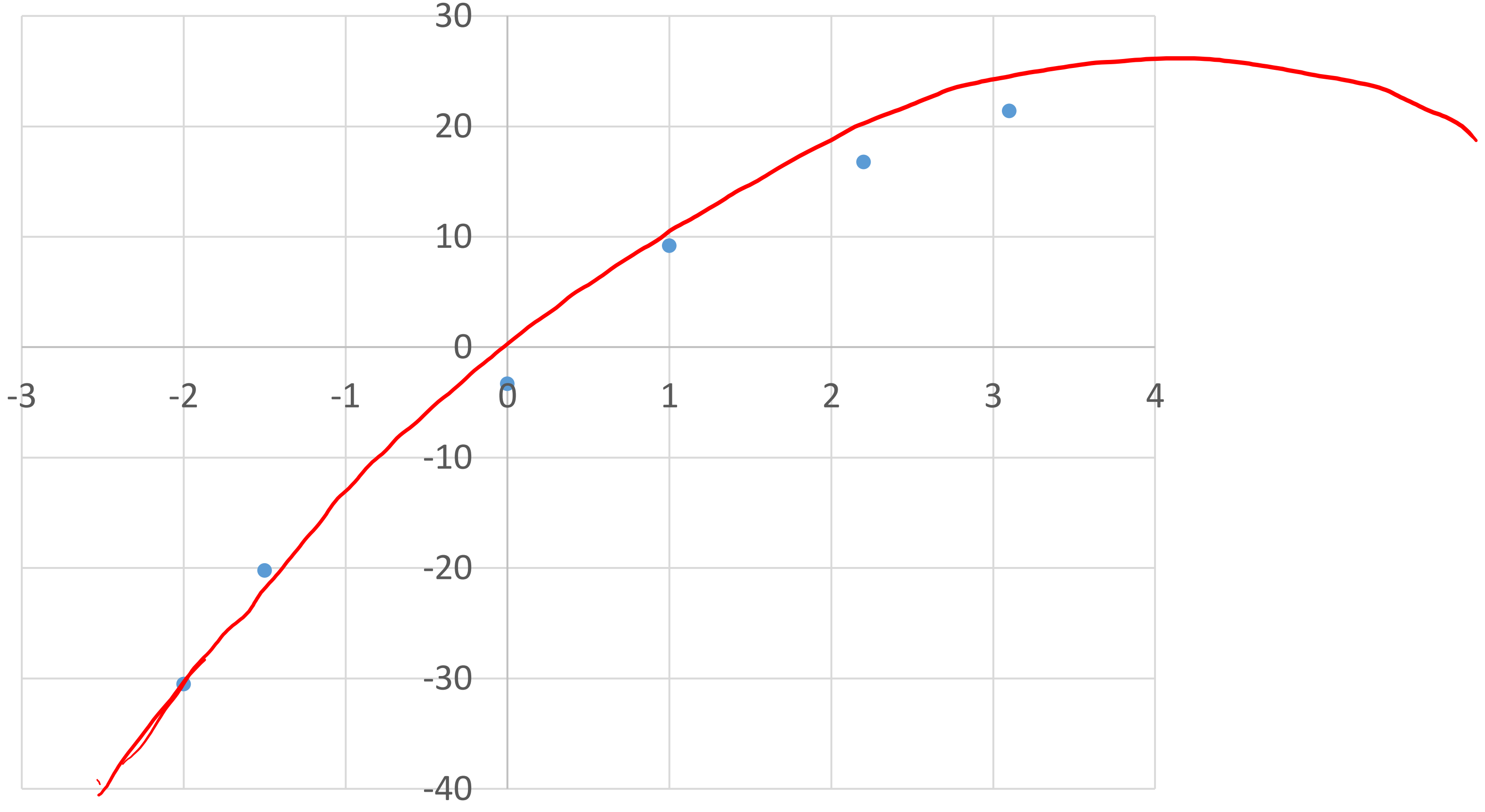
Exemplo

Ajuste os pontos da tabela abaixo à uma equação do 2º grau.

x	-2,0	-1,5	0,0	1,0	2,2	3,1
y	-30,5	-20,2	-3,3	9,2	16,8	21,4

AJUSTE POLINOMIAL

x	-2,0	-1,5	0,0	1,0	2,2	3,1
y	-30,5	-20,2	-3,3	9,2	16,8	21,4



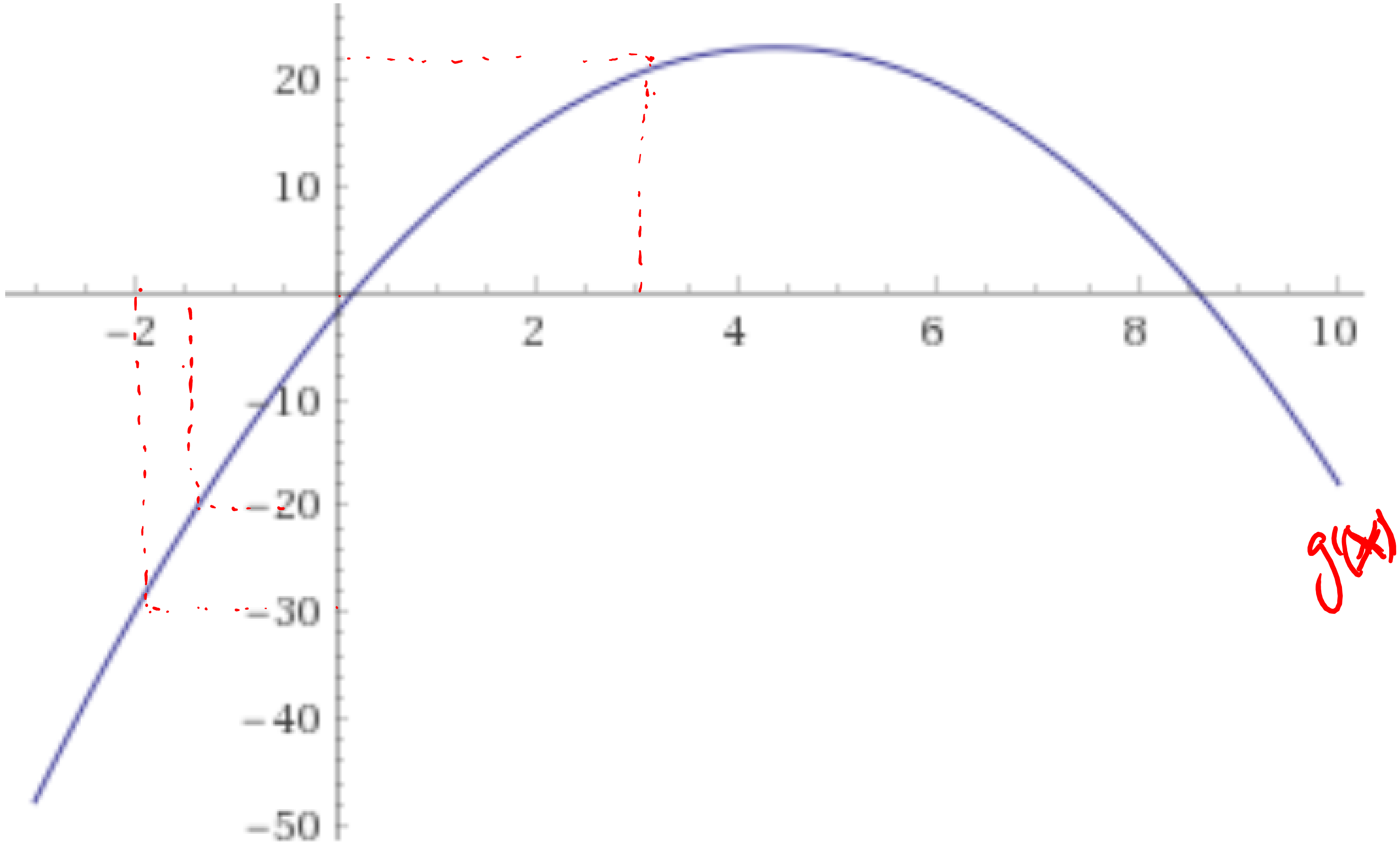
$$g(x) = a_1 x^2 + a_2 x + a_3$$

$$\begin{pmatrix} n & \sum_1^6 x_i & \sum_1^6 x_i^2 \\ \sum_1^6 x_i & \sum_1^6 x_i^2 & \sum_1^6 x_i^3 \\ \sum_1^6 x_i^2 & \sum_1^6 x_i^3 & \sum_1^6 x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_1^6 y_i \\ \sum_1^6 x_i y_i \\ \sum_1^6 x_i^2 y_i \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2{,}8 & 21{,}7 \\ 2{,}8 & 21{,}7 & 30{,}1 \\ 21{,}7 & 30{,}1 & 137{,}8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6{,}6 \\ 203{,}8 \\ 128{,}7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} a_3 = -1{,}9 \\ a_2 = 11{,}4 \\ a_1 = -1{,}3 \end{array}$$

$$g(x) = -1{,}3x^2 + 11{,}4x - 1{,}9$$

	x_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	y_i	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
	-2	4	-8	16	-30.5	61	-122
	-1,5	2,3	-3,4	5,1	-20.2	30.3	-45.5
	0	0	0	0	-3.3	0	0
	1	1	1	1	9.2	9.2	9.2
	2.2	4,8	10,6	23,4	16.8	37,0	81,3
	3.1	9,6	29,8	92,4	21.4	66,3	205,7
Σ	2,8	21,7	30,1	137,8	-6,6	203,8	128,7



20
10
−2
2
4
6
8
10
−10
−20
−30
−40
−50
g(x)

AJUSTE DE CURVA – CASO DISCRETO

Atividade para contabilizar presença – 10/08/2020.

Considere uma função $f(x)$ definida conforme a tabela:

$\boldsymbol{x_i}$	-2	-1	0	1	2	3
$\boldsymbol{f(x_i)}$	19,01	3,99	-1	4,01	48,99	45

Usando o método dos mínimos quadrados, determine uma função $g(x)$ que melhor se ajuste aos dados da tabela.