4616 – Métodos Numéricos Computacionais

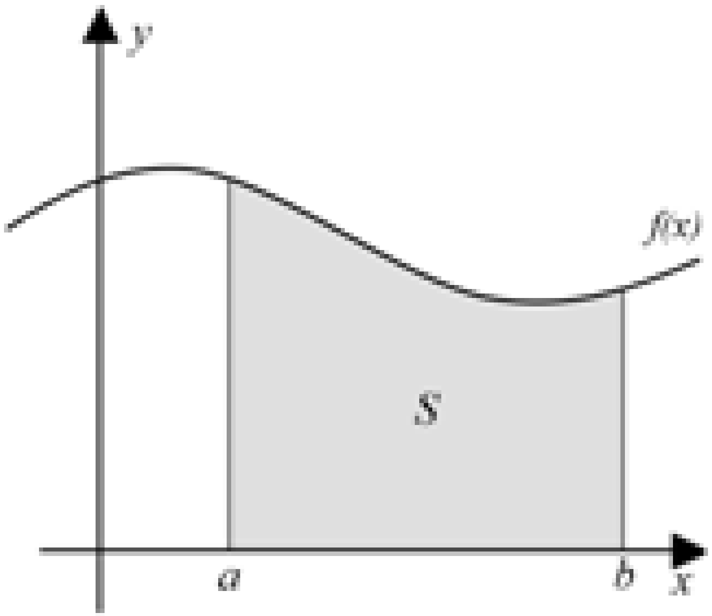
Larissa Oliveira
oliveira.t.larissa@gmail.com

unesp

Na última aula...

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

No cálculo, a integral de uma função foi criada originalmente para determinar a área sob uma curva no plano cartesiano.



Também surge naturalmente em problemas de física.

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

- ✓ $f(x)$: função contínua no intervalo [a,b] e primitiva F(x) conhecida. A integral definida de pode ser calculada pela fórmula de Newton-Leibniz:

$$\int_a^b f(x)dx = f\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Esta técnica não pode ser aplicada quando:

- ✓ apenas alguns pontos tabelados da função são conhecidos

- ✓ $f(x)$ não pode ser integrada

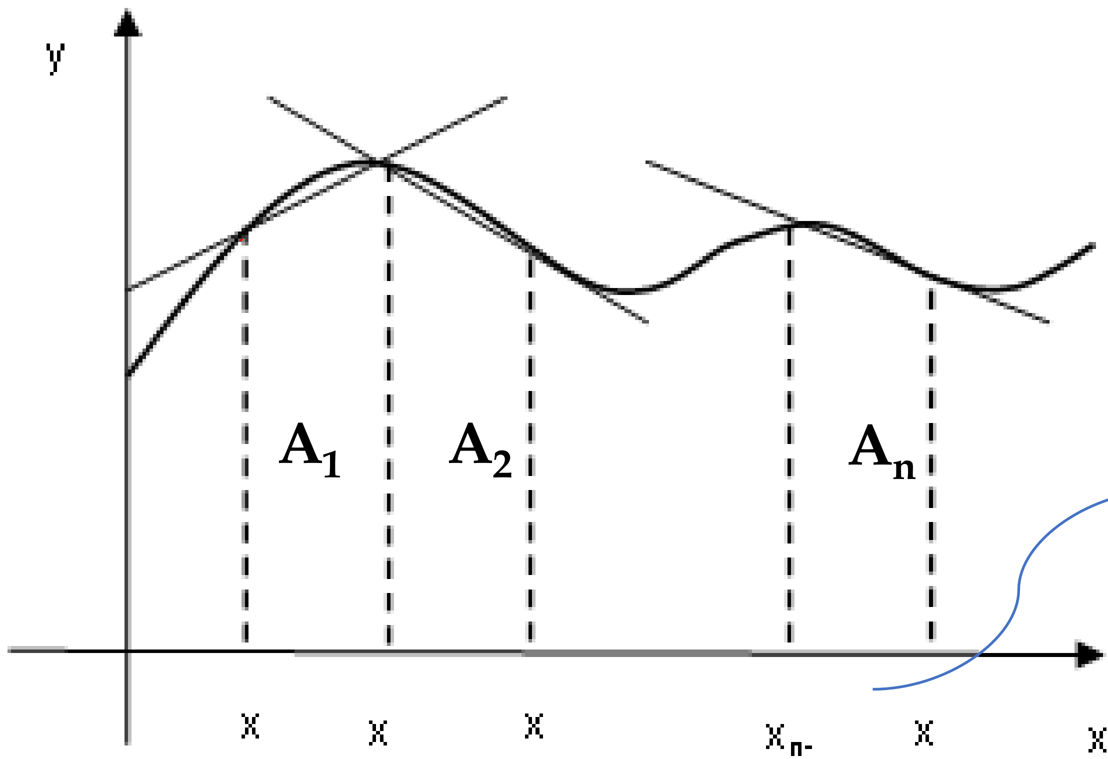
INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Ideia Básica

Substituir a função por um polinômio que aproxime $f(x)$ razoavelmente no intervalo [a,b].

REGRA DOS TRAPÉZIOS GENERALIZADA

A regra dos trapézios generalizada consiste na subdivisão do intervalo de integração em n subintervalos iguais, cada qual de amplitude h, e a aplicação da Regra dos Trapézios em cada subintervalo, isto é, a cada 2 pontos consecutivos.



$$h = \frac{x_n - x_0}{n}$$

REGRA DOS TRAPÉZIOS GENERALIZADA

Para a regra generalizada:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \cong \frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)\right]+\frac{h}{2}\left[f(x_1)+f(x_2)\right]+\ldots+\frac{h}{2}\left[f(x_{x-1})+f(x_n)\right]=$$

$$\boxed{=\frac{h}{2}\left[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\ldots+2f(x_{x-1})+f(x_n)\right]}$$

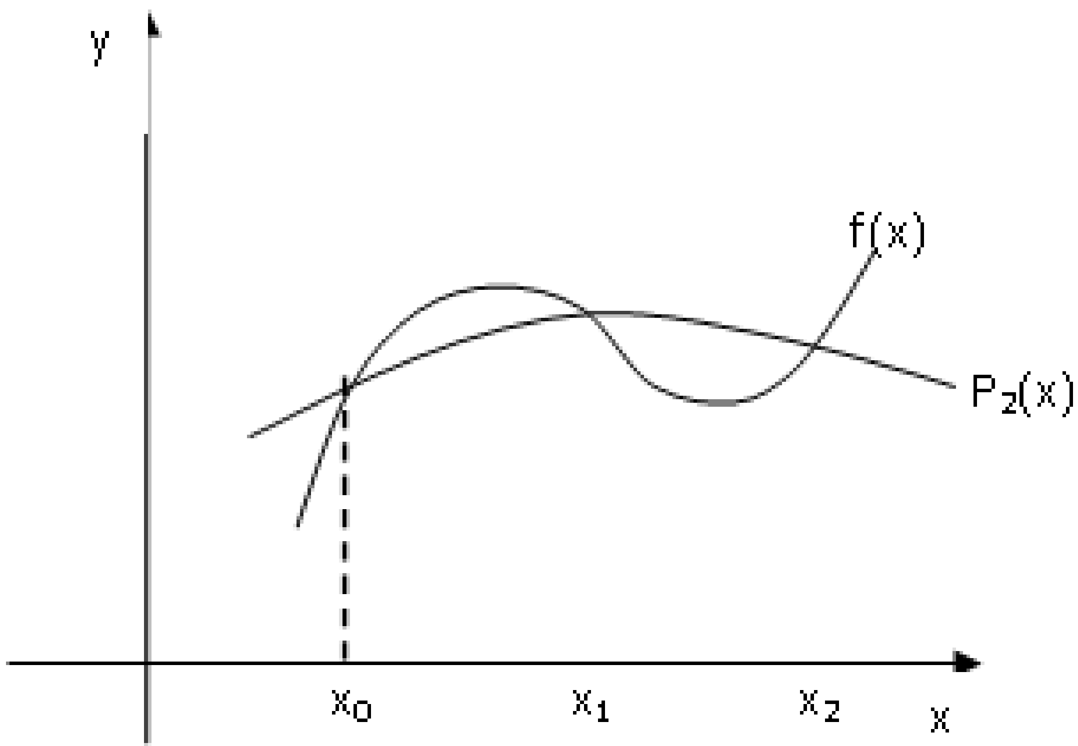
Limitante superior para o erro

$$\boxed{|E_t| \le \frac{h^2}{12}(x_n-x_0)\max\{|f^{(2)}(x)| / x_0 \le x \le x_n\}}$$

Hoje…

REGRA 1/3 DE SIMPSON

Na regra dos trapézios a função f(x) foi aproximada por funções lineares, na regra 1/3 de Simpson essa aproximação é feita através de arcos de parábola (funções do segundo grau) obtendo uma melhor aproximação para f(x).



REGRA 1/3 DE SIMPSON

Considere uma função $f(x)$ contínua no intervalo [a,b], definida em 3 pontos distintos x_0, x_1, x_2 equidistantes. Para determinar a Regra 1/3 de Simpson utiliza-se o polinômio de Newton-Gregory de grau 2, que é dado por:

$$\boxed{P_2(x) = f(x_0) + (x - x_0)\frac{\Delta f(x_0)}{h} + (x - x_0)(x - x_1)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2}}$$

$$\boxed{a = x_0 \text{ e } b = x_n} \longrightarrow \boxed{\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} p_2(x)dx = h\int_0^2 P_2 ds}$$

$$s = \frac{x - x_0}{h} \qquad h = \frac{x_n - x_0}{n}$$

REGRA 1/3 DE SIMPSON

$\Delta^1 f(x) = f(x_1) - f(x_0)$

$\Delta^2 f(x_0) = \Delta^1 f(x_1) - \Delta^1 f(x_0)$

$= f(x_2) - f(x_1) -$

$- (f(x_1) - f(x_0)) =$

$f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)$

Integrando $P_2(s)$:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = h\int_0^2 \left[f(x_0) + s\Delta^1 f(x_0) + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0) \right] ds =$$

$$= h\int_0^2 f(x_0)ds + h\int_0^2 s\boxed{\Delta^1 f(x_0)}ds + \int_0^2 \frac{s(s-1)}{2!}\boxed{\Delta^2 f(x_0)}ds =$$

$$= \underline{h\, f(x_0)s}\,\Big|_0^2 + h(\underline{f(x_1) - f(x_0)})\left.\frac{s^2}{2}\right|_0^2 + \frac{h}{2}(\underline{f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)})\left.\underbrace{\left(\frac{s^3}{3} - \frac{s^2}{2}\right)}_{2/3}\right|_0^2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{2}$$

$$= \underline{2h\, \cancel{f}(x_0)} + \underline{2h\, f(x_1)} - \underline{2h\, \cancel{f}(x_0)} + \frac{h}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{3}(f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)) =$$

$$\frac{6h}{3} = 2h\, f(x_1) + \frac{h}{3}[f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)] = \frac{h}{3}[\underline{6f(x_1)} + f(x_2) - \underline{2f(x_1)} + f(x_0)] =$$

$$= \boxed{\frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]}$$

REGRA 1/3 DE SIMPSON

A

Regra 1/3 de Simpson:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \simeq \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right]$$

Erro na regra 1/3 de Simpson

O intervalo de integração foi subdividido em n = 2 (par):

$$E_n = \frac{h^{(n+3)} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_0^n (s - n/2)(s)(s-1)\ldots(s-n)\,ds$$

$s = u$

$$E_2 = \frac{h^5 f^{(4)}(\xi)}{4!} \underbrace{\int_0^2 (u-1).u(u-1).(u-2)du}_{-4/15} \Rightarrow \boxed{E = \frac{-h^5 f^{(4)}(\xi)}{90} \quad x_0 \le \xi \le x_2}$$

Limitante superior para o erro

$$\boxed{|E_2| \le \frac{h^5}{90}\{\max|f^{(4)}|, x_0 \le x \le x_2\}}$$

REGRA 1/3 DE SIMPSON

Exemplo:

Calcule o valor aproximado de $\int_{0,5}^{1,5} \cos x dx$ usando a Regra 1/3 de Simpson e um Limitante Superior para o erro.

$$h = \frac{(x_n - x_0)}{n} = \frac{(1,5 - 0,5)}{2} = 0,5$$

x_i	0,5	1	1,5
$f(x_i)$	0,8776	0,5403	0,0707

$$\int_{0,5}^{1,5} \cos x \, dx \simeq \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4 f(x_1) + f(x_2) \right] =$$

$$= \frac{0,5}{3}\left[0,8776 + 4(0,5403) + 0,0707 \right] = \underline{0,5783}$$

$$\therefore \int_{0,5}^{1,5} \cos(x)\,dx \simeq \underline{0,5183}$$

L.S p/ ERRO

$$|E_2| \leq \frac{h^5}{90} \max\left\{ |f^{(4)}(x)|,\ 0,5 \leq x \leq 1,5 \right\}$$

$f^{(4)}(x) = \cos(x) \rightarrow$ decrescente

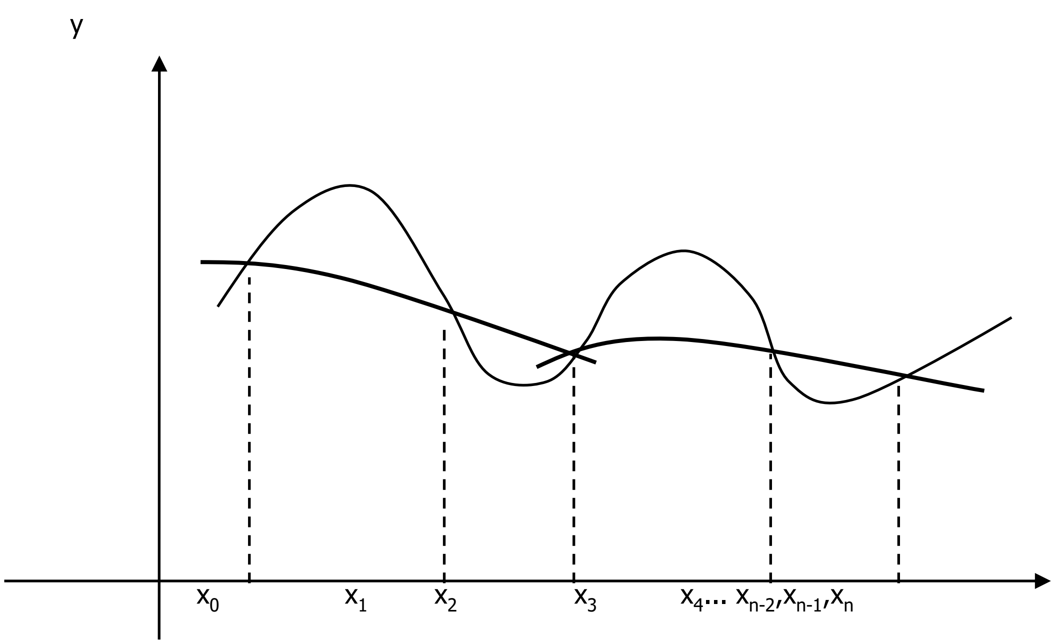
$$\max: |f^{(4)}(0,5)| = 0,8776$$

$$|E_2| \leq \frac{(0,5)^5}{90}(0,8776) = \underline{0,0003}$$

REGRA 1/3 DE SIMPSON GENERALIZADA

A regra 1/3 de Simpson generalizada consiste na subdivisão do intervalo de integração e n subintervalos iguais, cada qual de amplitude h e a aplicação da Regra 1/3 de Simpson a cada 2 subintervalos consecutivos.

$a = x_0$ e $b = x_n$



$$h = \frac{x_n - x_0}{n}$$

n é um número **par** de subintervalos,

$$n = \frac{x_n - x_0}{h}$$

REGRA 1/3 DE SIMPSON GENERALIZADA

Aplicando a regra 1/3 de Simpson a cada 2 subintervalos

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \cong \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right]+\frac{h}{3}\left[f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\right]+$$

$$+\ldots+\frac{h}{3}\left[f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right]=$$

$$=\frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\ldots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$$

Erro na regra 1/3 de Simpson

$$E=\frac{-h^5 f^{(4)}(\varepsilon)}{90}$$

$$E=\frac{-h^4}{180}(x_n-x_0)\underbrace{f^{(4)}(\xi)}_{},x_0\leq\xi\leq x_n$$

$$\frac{-h^5}{90}\,\frac{n}{2}\,f^{(4)}(\varepsilon)$$

$$\frac{-h^{4}}{180}\,\frac{(x_n-x_0)}{\cancel{h}}\,f^{(4)}(\varepsilon)$$

Limitante superior para o erro

$$|E|\leq\frac{h^4}{180}(x_n-x_0)\max\{|f^{(4)}(x)|,x_0\leq x\leq x_n\}$$

REGRA 1/3 DE SIMPSON GENERALIZADA

Exemplo:

Calcule o valor aproximado da integral $\int_0^3 (xe^x + 1)dx$ usando a regra 1/3 de Simpson generalizada para 2, 4 e 6 subintervalos e um limitante superior para o erro.

1) 2 SUBINT:

$h = \frac{(3-0)}{2} = 1,5$

x_i	0	1,5	3
$f(x_i)$	1	7,7225	61,2566

$$\int_0^3 (xe^x+1) \simeq \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] =$$

$$= \frac{1,5}{3}\left[1 + 4(7,7225) + 61,2566\right] = \underline{46,5733}$$

$$\therefore \int_0^3 (x e^x + 1)\,dx \simeq \underline{46,5733}$$

L.S p/ ERRO:

$$|E_t| \leq \frac{h^4}{180}(x_n - x_0)\max\left\{ |f^{(4)}(x)| \,;\; 0 \leq x \leq 3 \right\}$$

$$f^{(4)}(x) = e^x(4+x) \longrightarrow \text{CRESCENTE}$$

$$\text{max}: |f^{(4)}(3)| = 140,5988$$

$$|E_t| \leq \frac{(1,5)^4}{180}(3-0)(140,5988) = \underline{11,8630}$$

II) 4 SUBINT.:

$f(x) = xe^x + 1$

$$h = \frac{(3-0)}{4} = 0{,}75$$

x_i	0	0,75	1,5	2,25	3
$f(x_i)$	1	2,5878	7,7225	22,3474	61,2566

$$\int_0^3 (xe^x+1)\,dx \simeq \frac{0{,}75}{3}\left[1 + 4(2{,}5878 + 22{,}3474) + 2(7{,}7225) + 61{,}2566\right]$$

$$\therefore \int_0^3 (xe^x+1)\,dx \simeq 44{,}3606$$

L.S p/ ERRO:

$$|E_t| \leq \frac{(0{,}75)^4}{180}(3-0)(140{,}5988) = 0{,}7414$$

III) 6 SUBINT:

$h = \frac{(3-0)}{6} = 0{,}5$

x_i	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$f(x_i)$	1	1,8244	3,7183	7,7225	15,7781	31,4562	61,2566

$$\int_0^3 (xe^x+1)\,dx \simeq \frac{0{,}5}{3}\left[1 + 4(1{,}8244 + 7{,}7225 + 31{,}4562) + 2(3{,}7183 + 15{,}7781) + 61{,}2566\right] = 44{,}2103$$

L.S p/ ERRO:

$$|E_t| \leq \frac{(0{,}5)^4}{180}(3-0)(140{,}5988) = 0{,}1465$$

	2	4	6
$\int$	46,5733	44,3606	44,2103
ERRO	11,8630	0,7414	0,1465

REGRA 1/3 DE SIMPSON GENERALIZADA

Atividade para presença – 18/08/2020.

Calcular $\int_2^3 xe^{x/2}dx$ pela regra 1/3 de Simpson, dada a tabela:

$\boldsymbol{x_i}$	2	2,25	2,5	2,75	3
$\boldsymbol{e^{x/2}}$	2,71	3,08	3,49	3,96	4,48

Calcule também um limitante superior para o erro.