4616 – Métodos Numéricos Computacionais

Larissa Oliveira
oliveira.t.larissa@gmail.com

unesp

Na última aula...

POLINÔMIO INTERPOLADOR DE NEWTON

Diferenças Divididas

Seja f(x) uma função contínua, (n + 1) vezes diferenciável e definida em x_0, x_1, ..., x_n pontos distintos de um intervalo [a, b].

$$f[x_0] = f(x_0) \longrightarrow \boxed{\text{Ordem } 0}$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \longrightarrow \text{Ordem } 1$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \longrightarrow \text{Ordem } 2$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} \longrightarrow \text{Ordem } 3$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f[x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \cdots, x_n] - f[x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \longrightarrow \text{Ordem } n$$

POLINÔMIO INTERPOLADOR DE NEWTON

x	**Ordem 0**	**Ordem 1**	**Ordem 2**	**Ordem 3**	**...**	**Ordem n**
$\mathbf{x_0}$	$f[x_0]$					
		$f[x_0, x_1]$				
$\mathbf{x_1}$	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$			
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$		
$\mathbf{x_2}$	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$		.	
		$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	.	
$\mathbf{x_3}$	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$	.	.	$f[x_0, x_1, x_2, ..., x_n]$
		$f[x_3,x_4]$	.	.	.	
			.	.		
$\mathbf{x_4}$	$f[x_4]$	.	.	$f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		
.	.	.	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$			
.	.	.				
.	.	$f[x_{n-1}, x_n]$				
$\mathbf{x_n}$	$f[x_n]$					

POLINÔMIO INTERPOLADOR DE NEWTON

Teorema:

Seja $f(x)$ uma função contínua. Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n$, (n + 1) pontos distintos de [a, b], então:

$f[x_0]$

$$p_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \ldots + \\ + \ldots + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

é o polinômio interpolador de Newton para a função $f(x)$ sobre os pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

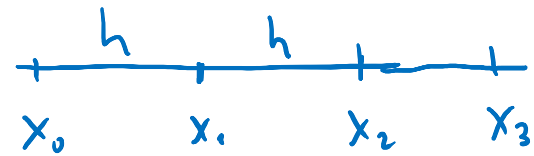
Hoje...

FORMA DE NEWTON-GREGORY PARA O POLINÔMIO INTERPOLADOR

No caso em que os nós da interpolação x_0, x_1, ..., x_n são igualmente espaçados, podemos usar a forma de Newton-Gregory para obter $p_n(x)$.

$$x_i = x_{i-1} + h$$

FORMA DE NEWTON-GREGORY PARA O POLINÔMIO INTERPOLADOR



Operador diferenças ordinárias

Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo [a, b] e sejam $x_0, x_1, ..., x_n$ os (n + 1) pontos de [a, b] que se sucedem com passo h, isto é, $x_j = x_0 + jh$.

x_0

$x_1 = x_0 + h$

$x_2 = x_1 + h = x_0 + h + h = x_0 + 2h$

ORDEM 0 — $\boxed{\Delta^0 f(x) = f(x)}$

ORDEM 1 $\quad \Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = \Delta^0 f(x+h) - \Delta^0 f(x)$

$$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x)$$

$$\vdots$$

ORDEM N $\quad \Delta^n f(x) = \Delta^{n-1} f(x+h) - \Delta^{n-1} f(x)$

FORMA DE NEWTON-GREGORY PARA O POLINÔMIO INTERPOLADOR

Tabela de diferenças ordinárias

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$
x_0	$f(x_0)$		
		$\Delta f(x_0)$	
x_1	$f(x_1)$		$\Delta^2 f(x_0)$
		$\Delta f(x_1)$	
x_2	$f(x_2)$		$\Delta^2 f(x_1)$
			.
			.
		$\Delta f(x_2)$	.
		.	
x_3	$f(x_3)$	.	
		.	
.	.		
.	.		
.	.		

FORMA DE NEWTON-GREGORY PARA O POLINÔMIO INTERPOLADOR

Exemplo:

Construir a tabela de diferenças ordinárias da função f(x) a partir da tabela:

x	-1	0	1	2
f(x)	1	2	3	-1

x	$\Delta^0 f(x)$	$\Delta^1 f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
-1	1	1	0	-5
0	2	1	-5	
1	3	-4		
2	-1			

FORMA DE NEWTON-GREGORY PARA O POLINÔMIO INTERPOLADOR

Teorema:

Seja f(x) uma função contínua e (n + 1) vezes diferenciável em um intervalo [a, b]. Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n$ os (n + 1) pontos distintos e igualmente espaçados em [a, b].

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{\Delta^n f(x_0)}{h^n n!}$$

POLINÔMIO INTERPOLADOR DE NEWTON-GREGORY

$$P_n(x) = f[x_0] + (x-x_0)f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] + \dots +$$

$$+ (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})f[x_0,x_1,\dots,x_n]$$

$$\boxed{p_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)\frac{\Delta f(x_0)}{h} + (x-x_0)(x-x_1)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2h^2} + \dots + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})\frac{\Delta^n f(x_0)}{h^n n!}.}$$

POLINÔMIO INTERPOLADOR DE NEWTON-GREGORY

A forma de Newton-Gregory para $p_n(x)$ pode ser simplificada, a partir de uma mudança de variáveis:

$$\boxed{s = \frac{x - x_0}{h}} \Rightarrow \boxed{x = sh + x_0}$$

como os pontos são equidistantes, $\boxed{x_j = x_0 + jh:}$

$$x = sh + x_0 \qquad x_j = jh + x_0$$

$$(x - x_j) = sh - jh + \cancel{x_0} - \cancel{x_0}$$

$$(x - x_j) = (s - j)h.$$

Assim, temos a seguinte forma geral para $p_n(x)$:

$$\boxed{p_n(s) = f(x_0) + s\Delta f(x_0) + s(s-1)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2} + \ldots + s(s-1)\ldots(s-n+1)\frac{\Delta^n f(x_0)}{n!}}$$

POLINÔMIO INTERPOLADOR DE NEWTON-GREGORY

Exemplo:

Determine o polinômio de interpolação de Newton-Gregory da função tabelada e calcule f(0.5):

x	-2	-1	0	1
f(x)	4	3	1	-1

$h = 1$

	x	$\Delta^0 f(x)$	$\Delta^1 f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
x_0	-2	4	-1	-1	1
x_1	-1	3	-2	0	
x_2	0	1	-2		
x_3	1	-1			

$h=1$

$$P_3(x)=f(x_0)+(x-x_0)\frac{\Delta f(x_0)}{h}+(x-x_0)(x-x_1)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{h^2\,2}+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\frac{\Delta^3 f(x_0)}{h^3\,3!}$$

$$=4+(x+2)\left(\frac{-1}{1}\right)+(x+2)(x+1)\left(\frac{-1}{2}\right)+(x+2)(x+1)(x-0)\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$=4-x-2+(x^2+3x+2)\left(\frac{-1}{2}\right)+(x^3+3x^2+2x)\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$P_3(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{13}{6}x+1$$

$$f(0{,}5)\approx P_3(0{,}5)=-0{,}0625$$

$$P_3(s) = f(x_0) + s\,\Delta f(x_0) + s(s-1)\,\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2} + s(s-1)(s-2)\,\frac{\Delta^3 f(x_0)}{3!}$$

$$P_3(s) = 4 + s(-1) + s(s-1)\left(\frac{-1}{2}\right) + s(s-1)(s-2)\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= 4 - s - \frac{s^2}{2} + \frac{s}{2} + \frac{s^3}{6} - \frac{s^2}{3} - \frac{s^2}{6} + \frac{s}{3}$$

$$P_3(s) = \frac{s^3}{6} - s^2 - \frac{s}{6} + 4$$

$$\boxed{s = \frac{x - x_0}{h}} = \frac{0.5+2}{1} = 2{,}5$$

$$f(0.5) \cong P_3(2{,}5) = -0{,}0625$$

$$x = 0{,}5 \Rightarrow s = 2{,}5$$

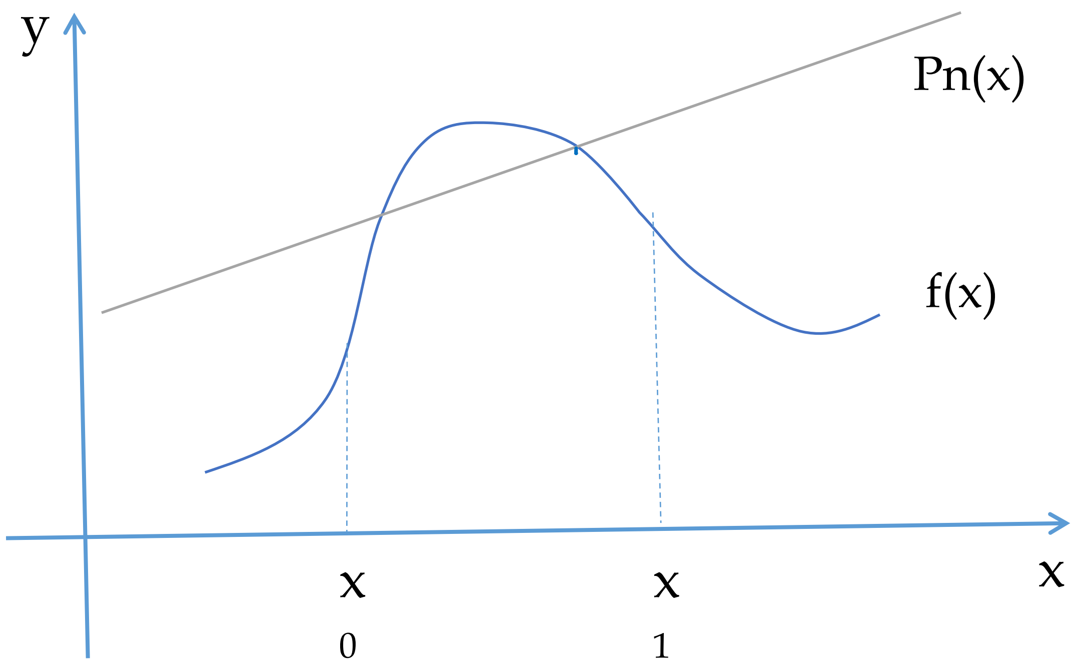
ESTUDO DO ERRO NA INTERPOLAÇÃO

O polinômio interpolador p(x) coincide com a função nos pontos de interpolação, $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Espera-se que:

$$p(\bar{x}) \cong f(\bar{x})$$

erro na aproximação

$$E(\bar{x}) = f(\bar{x}) - p_n(\bar{x})$$



ESTUDO DO ERRO NA INTERPOLAÇÃO

Teorema: Resto de Lagrange

Seja $f(x)$ uma função definida em $x_0, x_1, \dots, x_n$, (n + 1) pontos distintos de um intervalo [a, b] e (n + 1) vezes diferenciável. Se $p(x)$ interpola $f(x)$ nesses pontos, então o erro cometido E(x) é dado por:

$$E_n(x) = f(x) - p_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

$\in (x_0, x_n)$

ESTUDO DO ERRO NA INTERPOLAÇÃO

Limitante Superior para o erro

Na expressão do erro, ($E_n(x)$) o parâmetro $\boxed{\xi_x}$ nunca é conhecido no intervalo I = $[x_0, x_n]$ e, portanto, não é possível calcular o valor numérico de $f^{(n+1)}(\xi)$. Desta forma, um limitante superior para o erro é dado por:

$$|E_n(x)| = |f(x) - p_n(x)| \leq |(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)| \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$$

$$M_{n+1} = \max_{x \in I} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$$

ESTUDO DO ERRO NA INTERPOLAÇÃO

Exemplo:

Seja $\boxed{f(x) = e^x + x - 1}$ tabelada abaixo. Obter f(0.7) por interpolação linear e um LS para o erro.

		x_0	0,7	x_1	
x	0	0.5		1.0	1.5
f(x)	0.0	1.1487		2.7183	4.9811

$x = 0{,}7 \in [0{,}5 \,,\, 1] \rightarrow \underline{x_0 = 0{,}5} \quad \underline{x_1 = 1}$

$$P_1(x) = 1{,}1487 + (x - 0{,}5)\left(\frac{2{,}7183 - 1{,}1487}{1 - 0{,}5}\right) = 1{,}1487 + (x - 0{,}5)\,3{,}1392$$

$$\underline{P_1(x) = 3{,}1392x - 0{,}4209}$$

$$f(0{,}7) \cong P_1(0{,}7) = \underline{1{,}7765}$$

ERRO EXATO

$$|E_1(0,7)| = |f(0,7) - p_1(0,7)| = |1,7137 - 1,7765| = 0,0628$$

L.S

$$|E(x)| \leq (x-x_0)(x-x_1)\frac{M_2}{2!}$$

$$M_2 = \max_{x \in [0.5,\, 1]} |f''(x)|$$

$$\boxed{f''(x) = e^x}$$

$$f''(0.5) = 1,6487$$

$$\boxed{f''(1) = 2,7183} = M_2$$

$$M_2 = \max\{1,6487,\ 2,7183\}$$

$$|E(0,7)| \leq (0,7-0,5)(0,7-1)\frac{2,7183}{2}$$

$$|E(0,7)| \leq 0,082$$

ESTUDO DO ERRO NA INTERPOLAÇÃO

Estimativa para o erro

Se a função $f(x)$ é dada na forma de tabela, o valor absoluto do erro só pode ser estimado, pois, não é possível calcular M_{n+1}. Entretanto, se construirmos a tabela de diferenças divididas até ordem n + 1, podemos usar o maior valor (em módulo) destas diferenças como uma aproximação para $\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$ no intervalo $[x_0, x_n]$. Neste caso:

$f^{(n+1)}$

$\pi(x-x_0)$ $\quad\quad\quad\quad$ M_{n+1}

$$|E_n(x)| \approx |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)| \, (\text{máx} \mid \text{dif. divididas de ordem } n+1 \mid)$$

ESTUDO DO ERRO NA INTERPOLAÇÃO

Exemplo:

Seja f(x) dada na forma:

$n \leq 4$

x	0.2	0.34	0.4	0.52	0.6
f(x)	0.16	0.22	0.27	0.29	0.32

a) Obter f(0.47) usando um polinômio de grau 2. → 3 pontos

b) estimar o erro.

x	O(0)	O(1)	O(2)	O(3)	O(4)
0,2	0,16	0,4286	2,0235	-17,8963	90,3643
0,34	0,22	0,8333	-3,7033	18,2494	
x_0 – 0,4	0,27	0,1667	1,0415		
x_1 – 0,52	0,29	0,375			
x_2 – 0,6	0,32				

$M_3 = \max\{17,8963 \,,\, 18,2494\}$

a) $x = 0{,}47 \in [0{,}4 \ , \ 0{,}52]$ $\quad$ $\underline{x_0 = 0{,}4}$; $y_1 = \underline{0{,}52}$; $x_2 = \underline{0{,}6}$

$$P_2(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, y_1, x_2]$$

$$= 0{,}27 + (x - 0{,}4)\, 0.1667 + (x - 0{,}4)(x - 0{,}52)\, \underline{1{,}0415}$$

$$= 1{,}0417x^2 - 0{,}7917x + 0{,}42$$

$$f(0{,}47) \cong P_2(0{,}47) = \underline{0{,}2780}$$

b) $|E(x)| \leq |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)|\, 18{,}2494$

$$|E(0{,}47)| \leq |(0{,}47 - 0{,}4)(0{,}47 - 0{,}52)(0{,}47 - 0{,}6)|\, 18{,}2494$$

$$\leq \underline{0{,}0083}$$

POLINÔMIO INTERPOLADOR DE NEWTON-GREGORY

Atividade para presença - 04/08/2020.

Considere a função $f(x) = \frac{x}{x+1}$ tabelada, como segue:

$\boldsymbol{x_i}$	0	1	2
$\boldsymbol{f(x_i)}$	0	1/2	2/3

Determine o polinômio interpolador usando a fórmula de Newton-Gregory, estime $f(1{,}3)$ e o erro.