# 4616 – Métodos Numéricos Computacionais

Larissa Oliveira oliveira.t.larissa@gmail.com



## Na última aula...

## MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO LU

O objetivo é fatorar a matriz dos coeficientes <u>A</u> em um produto de duas matrizes L e U

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \qquad [U] = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

## MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO LU

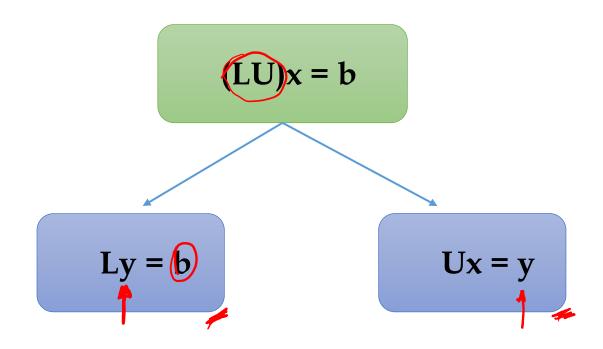
Dada a matriz coeficiente: 
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

## MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO LU

#### Solução do Sistema Ax=b

Seja um sistema Ax = b de ordem n, onde A satisfaz as condições da fatoração LU. Então, o sistema Ax = b pode ser escrito como:



## **OBSERVAÇÃO 1**

Se det  $A \neq 0$  e se tivermos  $\det(A_k) = 0$  é possível trocar a linha k por uma linha abaixo dela e se  $\det(A_k) \neq 0$  pode-se efetuar a decomposição.



Lembre-se de trocar também o termo independente.

## **Exemplo:**

Resolver o sistema utilizando a decomposição LU

## **OBSERVAÇÃO 2**

O método de <u>Eliminação de Gauss</u> também pode ser utilizado para a obtenção dos coeficientes  $l_{ij}$  e  $u_{ij}$  das matrizes da decomposição LU.

**Matriz L:**  $l_{ij} = m_{ij}$  do método de Eliminação de Gauss e  $l_{ii} = 1$  e  $l_{ij} = 0$  se i < j.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} = L$$

Matriz U: é a matriz r<u>esultante</u> do processo de Eliminação de Gauss (matriz escalonada) .

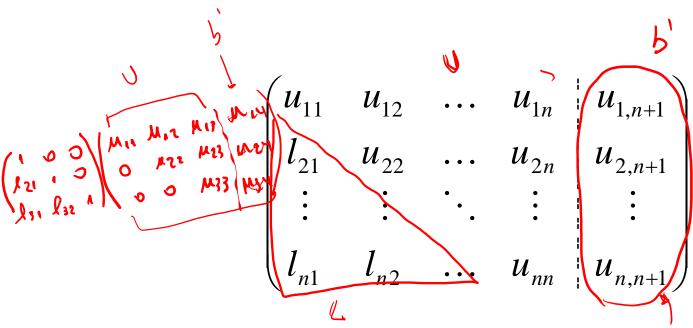
## MÉTODO DE GAUSS COMPACTO

Primeiramente, montamos a matriz de ordem  $n \times (n+1)$ :

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & a_{n,n+1}
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
a_{1,n+1} \\
a_{2,n+1} \\
\vdots \\
a_{n,n+1}
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
b_1 \\
b_2 \\
\vdots \\
b_n
\end{pmatrix}$$

## MÉTODO DE GAUSS COMPACTO



Para determinar os termos  $u_{ij}$  e  $l_{ij}$ , utilizamos as mesmas expressões da decomposição LU, entretanto, i = 1, 2, ..., n e j = 1, 2, ..., n, (n+1):

Determinados os elementos  $u_{ij}$  e  $l_{ij}$ , resolvemos o sistema  $\underbrace{\mathsf{Ux}}_{ij} = \underbrace{\mathsf{b'}}_{ij}$  em que  $b_i^{'} = u_{i'n+1}$ , i = 1, 2, ..., n. Hoje...

- ✓ Definido para a resolução de sistemas lineares de ordem quadrada *n*
- ✓ Matriz dos coeficientes seja simétrica e definida positiva.

Uma matriz quadrada  $A_n$  é definida positiva se  $x^TAx > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \neq 0$ .

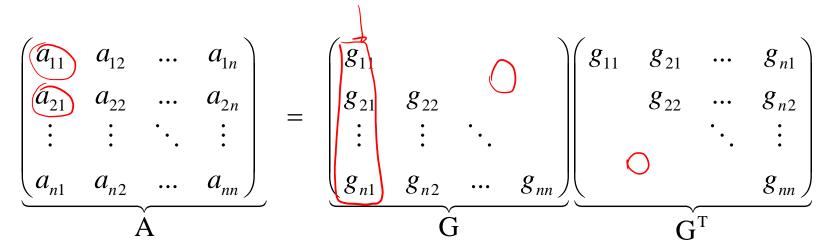
ou

Uma matriz quadrada  $A_n$ é definida positiva se det  $(A_k) > 0$ , para k = 1,...,n.

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
g_{11} & & & & \\
g_{21} & g_{22} & & & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & & \\
g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
g_{11} & g_{21} & \dots & g_{n1} \\
g_{22} & \dots & g_{n2} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn}
\end{pmatrix}$$

$$G^{T}$$

G é uma matriz triangular inferior com elementos da diagonal estritamente positivos



#### Primeira Coluna da G

$$a_{11} = (g_{11})^{2} \qquad g_{11} = \sqrt[2]{a_{11}}$$

$$a_{21} = g_{21}g_{11}$$

$$a_{31} = g_{31}g_{11}$$

$$\vdots$$

$$a_{n1} = g_{n1}g_{11}$$

$$g_{i1} = \frac{a_{i1}}{g_{11}}, i = 2, 3, ..., n$$

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
g_{11} & g_{21} & \dots & g_{n1} \\
g_{21} & g_{22} & \dots & g_{n2} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn}
\end{pmatrix}$$

$$G \qquad G^{T}$$

#### Segunda Coluna da G

$$a_{22} = g_{21}^{2} + g_{22}^{2}$$

$$a_{32} = g_{31}g_{21} + g_{32}g_{22}$$

$$a_{42} = g_{41}g_{21} + g_{42}g_{22}$$

$$\vdots$$

$$a_{n2} = g_{n1}g_{21} + g_{n2}g_{22}$$

$$g_{22} = \sqrt[2]{a_{22} - g_{21}^{2}}$$

$$a_{i} - \sum_{k=1}^{3-1} g_{ik} \cdot g_{2k}$$

$$g_{22} = \frac{3}{2}$$

$$g_{22} = \sqrt[2]{a_{22} - g_{21}^{2}}$$

$$g_{22} = \frac{3}{2}$$

$$g_{23} = \frac{3}{2}$$

$$g_{22} = \frac{3}{2}$$

$$g_{23} = \frac{3}{2}$$

$$g_{22} = \frac{3}{2}$$

$$g_{23} = \frac{3}{2}$$

$$g_{24} = \frac{3}{2}$$

$$g_{25} = \frac{3}{2}$$

$$g_{25}$$

#### J-ésima Coluna da G

$$a_{jj} = g_{j1}^{2} + g_{j2}^{2} + \dots + g_{jj}^{2}$$

$$a_{j+1,j} = g_{j+1,1}g_{j1} + g_{j+1,2}g_{j2} + \dots + g_{j+1,j}g_{jj}$$

$$a_{j+2,j} = g_{j+2,1}g_{j1} + g_{j+2,2}g_{j2} + \dots + g_{j+2,j}g_{jj}$$

$$\vdots$$

$$a_{nj} = g_{n1}g_{j1} + g_{n2}g_{j2} + \dots + g_{n,j}g_{jj}$$

#### Elementos diagonais da G

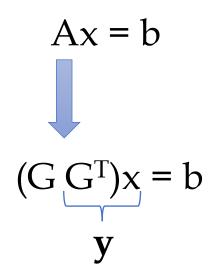
$$g_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} g_{jk}^2}$$

#### Elementos não diagonais da G

$$a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} g_{ik} \cdot g_{jk}$$

$$g_{ij} = \frac{g_{ij} \cdot g_{ik} \cdot g_{jk}}{g_{jj}}, i = j+1,..., n$$

#### Resolução do sistema linear



$$\mathbf{G}\mathbf{y} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{G}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

dit (R) = dit(L), dit (U)

MILMER M33...Mnn

Utilizando a Decomposição de Cholesky, A = G.G<sup>t</sup>.

$$\det (A) = (\det G)^{2} = (g_{11}g_{22}...g_{nn})^{2}$$

$$= \det (G) \cdot \det (G^{\dagger})$$
2: 
$$(g_{11}g_{22}g_{33}...g_{nn}) \cdot (g_{11}g_{22}...g_{nn})^{2}$$

Observação 2:

Podemos aplicar a decomposição de Cholesky para verificar se <u>uma matriz simétrica</u> é definida positiva. Se o processo falha ela não é definida positiva!!!!!

#### Observação 3:

Número de operações menor que decomposição LU

Exemplo: 
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

- a. Verificar se A pode ser decomposta em G.G <sup>t</sup>
- b. Decompor A em G.G <sup>t</sup>
- c. Calcular o determinante de A.
- d. Resolver o sistema  $Ax = b com b = (2 \ 1 \ 5)^T$

definite 
$$\begin{bmatrix} dut(A_1)=170 \\ dut(A_2)=170 \end{bmatrix}$$
  
Positive  $\begin{bmatrix} dut(A_2)=170 \\ dut(A_3)=dut(A)=6-1-3=270 \end{bmatrix}$ 

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & 32 & 33 \\ 31 & 32 & 33 \\ 31 & 32 & 33 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 32 & 33 \\ 0 & 32 & 33 \\ 0 & 33 & 33 \end{pmatrix}$$

$$931 = \frac{931}{911} = 0$$

$$g^{22} = \sqrt{g_{22} - g_{21}^2} = 1$$

$$d = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

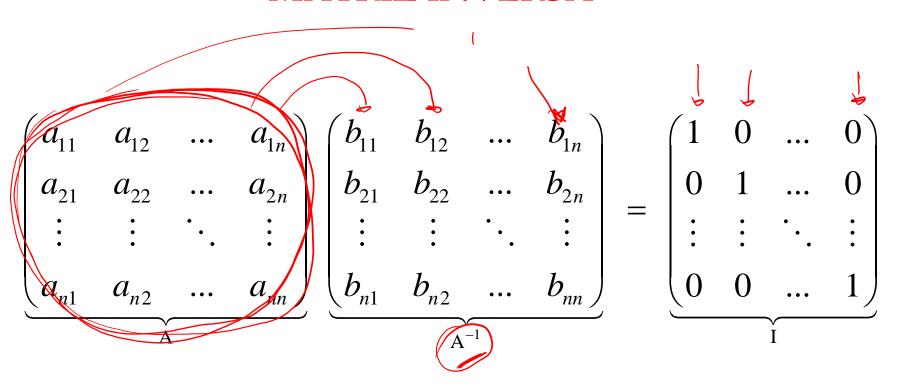
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$$

- A: uma matriz quadrada de ordem n.
- ✓ Se  $det(A) \neq 0$ , então existe uma matriz B) tal que:

$$AB = BA = I \longrightarrow Matriz Identidade$$

A matriz B é chamada de matriz inversa de A e representada por  $B = A^{-1}$ .

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$



Para determinar as n colunas da matriz A<sup>-1</sup> resolvemos n sistemas lineares utilizando qualquer método que resolva sistemas lineares.

#### /IATRIZ INVERSA

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ Primeira coluna de A}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \implies \text{Segunda coluna de A}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
b_{1n} \\
b_{2n} \\
\vdots \\
b_{nn}
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
0 \\
0 \\
\vdots \\
b_{nn}
\end{pmatrix}
\Rightarrow \text{n-ésima coluna de A}^{-1}$$

$$e_{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ j \end{pmatrix} \rightarrow \underline{j - \text{ésima linha de } e}.$$

$$Ab_{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

1) Método de Eliminação de Gauss

A 
$$b_j = e_j$$
,  $j = 1,...,n$ .

2) Método de Decomposição LU

(L U) 
$$b_j = e_j$$
,  $j = 1,...,n$ .

$$L y_j = e_j$$

$$U b_j = y_{j'}$$

**Método de Cholesky** (somente para matriz <u>simétrica</u> e positiva definida)

$$G G^{T} \cdot b_{j} = e_{j}, \quad j = 1,...,n.$$

$$G y_j = e_j$$
  
 $G^T b_j = y_j$ ,  $j = 1,...,n$ .

#### **Exemplo:**

1. Determine a inversa da matriz A utilizando algum método estudado.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \\$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Atividade para contabilizar presença - método de Cholesky - 14/07/2020.

Usando o método de Cholesky, resolva o sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 10 \\ 4 & 10 & 26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 10 \end{bmatrix}$$