4616 – Métodos Numéricos Computacionais

Larissa Oliveira
oliveira.t.larissa@gmail.com

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES

Uma equação que contenha uma expressão do tipo x^2, y^{-2}, $x.y$, $sen(x)$, e^{x+z} é chamada não-linear em x, y, z, ..., porque ela não pode ser escrita como

$$\boxed{ax + by + cz + \ldots = cte}$$

equação linear em x, y, z, ...

Exemplo

$$x^2 - 2xy + 5 = 0$$

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES

Um sistema de n equações e n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é chamado de ***não-linear*** se uma ou mais equações é não-linear. Trazendo todos os termos diferentes de zero à esquerda de todas as equações, tem-se uma forma geral que pode ser usada para qualquer sistema não-linear.

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \cdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \\ \cdots \\ f_n(x) = 0 \end{cases}$$

Forma geral

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES

Notação vetorial

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

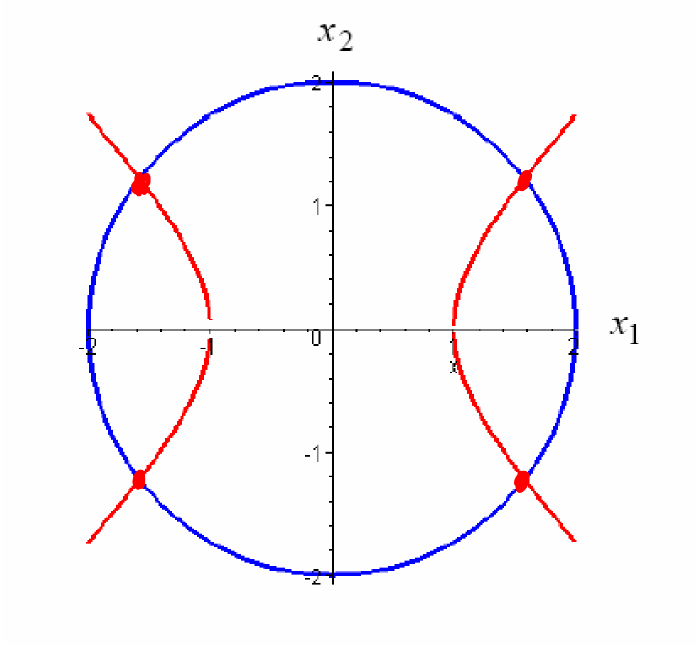
Um vetor $\bar{x}^T = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ que satisfaz $F(\bar{x}) = 0$

é denominado *raiz do sistema não-linear*.

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES

Exemplo:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ f_2(x,y) = x^2 - y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$



Este sistema não-linear admite quatro soluções, que são os pontos onde as curvas

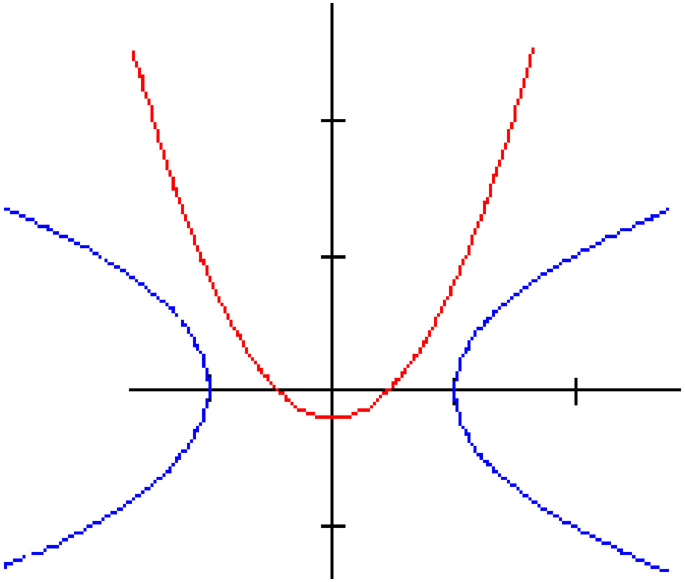
$$x^2 + y^2 = 4 \text{ e } x^2 - y^2 = 1$$

se interceptam.

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES

Exemplo:

$$\begin{cases} f_1(x,y) = x^2 - y^2 - 1 = 0 \\ f_2(x,y) = x^2 - y - 0.2 = 0 \end{cases}$$



Este sistema não admite solução. Não existem pontos em que as curvas

x^2 - y^2 -1 = 0 1 e x^2 - y - 0.2 = 0

se interceptam.

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES

MÉTODO DE NEWTON

Considere um sistema não-linear de duas variáveis

$$\begin{cases} f_1(x,y) = 0 \\ f_2(x,y) = 0 \end{cases}$$

Queremos determinar o vetor solução

$$(\bar{x}, \bar{y}) \text{ tal que } F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$$

$$\text{em que } F(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}.$$

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES

DESENVOLVIMENTO

Seja (x_0,y_0) uma aproximação inicial para a solução $(\bar{x},\bar{y})$ do sistema. Expandindo $f_1(x,y)$ e $f_2(x,y)$ por série de Taylor em torno do ponto (x_0,y_0) até a derivada de primeira ordem e igualando a zero a série truncada, temos:

$$\begin{cases} f_1(x,y) \approx f_1(x_0,y_0) + \dfrac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \dfrac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0) = 0 \\ f_2(x,y) \approx f_2(x_0,y_0) + \dfrac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \dfrac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0) = 0 \end{cases}$$

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES

Isolando f_1 e f_2

$$\begin{cases} -f_1(x_0,y_0) = \dfrac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \dfrac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0) \\ -f_2(x_0,y_0) = \dfrac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \dfrac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

Matricialmente

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}}_{J(x_0,y_0)} \begin{array}{c} d_x \\ \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \\ d_y \end{array} = \begin{pmatrix} -f_1(x_0,y_0) \\ -f_2(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

Matriz Jacobiana

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES

Denotando

$$d_x = (x - x_0) \text{ e } d_y = (y - y_0),$$

Temos

$$J(x_0, y_0)\begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1(x_0, y_0) \\ -f_2(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Solução

$$x = x_0 + d_x \quad \text{e} \quad y = y_0 + d_y$$

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES

$$x = x_0 + d_x \qquad \text{e} \qquad y = y_0 + d_y$$

Nova Aproximação

Repete-se o processo para (x_1,y_1) , depois para (x_2,y_2) e assim sucessivamente, o que resulta num processo iterativo

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES

Processo iterativo

$$\underbrace{J\left(x_k, y_k\right)}_{}\overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} x_{k+1} - x_k \\ y_{k+1} - y_k \end{pmatrix}}_{d_y^u}}^{d_x^u} = \begin{pmatrix} -f_1(x_k, y_k) \\ -f_2(x_k, y_k) \end{pmatrix}$$

$$\underline{x_{k+1}} = x_k + d_x^k \quad e \quad y_{k+1} = y_k + d_y^k$$

A cada iteração do método resolve-se um sistema linear, logo precisamos de um método para resolver sistemas!!!!!!!!

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES

Generalizando

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \quad \cdots \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{F(x_1, x_2, ..., x_n)} = 0;$$

$$\text{em que, } F(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \cdots \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) \end{pmatrix}$$

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES

O processo iterativo de Newton é dado por:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}}_{J}{}_{n \times n} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1^{k+1} - x_1^{k} \\ x_2^{k+1} - x_2^{k} \\ \vdots \\ x_n^{k+1} - x_n^{k} \end{pmatrix}}_{du} = \underbrace{\begin{pmatrix} -f_1(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k) \\ -f_2(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k) \\ \vdots \\ -f_n(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k) \end{pmatrix}}_{-F(x)}$$

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES

Simplificando:

$$J(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k)\begin{pmatrix} x_1^{k+1} - x_1^k \\ x_2^{k+1} - x_2^k \\ \vdots \\ x_n^{k+1} - x_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k) \\ -f_2(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k) \\ \vdots \\ -f_n(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k) \end{pmatrix}$$

$$J(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k)\begin{pmatrix} d_1^k \\ d_2^k \\ \vdots \\ d_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k) \\ -f_2(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k) \\ \vdots \\ -f_n(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{J(x^{(k)})\left(d^{(k)}\right) = -F(x^{(k)})}$$

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES

Critério de Parada:

- *Análise de* $F(x_1, x_2, ..., x_n) = F(x) = 0$:

$$\left\| F(x^{(k)}) \right\|_\infty = \boxed{\max_{1 \le i \le n} \left| f_i\,(x^{(k)} \right| < \varepsilon}$$

- *Análise do Erro absoluto*:

max { | d^k | } < ε

$$\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\|_\infty = \boxed{\max_{1 \le i \le n} \left| x_i^{k+1} - x_i^k \right| < \varepsilon}$$

- *Análise do Erro relativo*:

$$\left\| \frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{x^{(k+1)}} \right\|_\infty = \boxed{\max_{1 \le i \le n} \left| \frac{x_i^{k+1} - x_i^k}{x_i^{k+1}} \right| < \varepsilon}.$$

max $\left\{ \frac{| d^k |}{| x^{k+1} |} \right\}$ < ε

Nas expressões acima as fórmulas podem ser simplificadas considerando-se:

$$x^{(k+1)} - x^{(k)} = d^{(k)} \quad e \quad x_i^{k+1} - x_i^k = d_i^k$$

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES

Exemplo:

Resolver o sistema de equações não lineares utilizando o método de Newton com $(x_0, y_0) = (0.5, 0.5)$ e ε = 0,01.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - y = 0 \end{cases}$$

1) $J = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -1 \end{bmatrix}$

$F(x,y) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 - 1 \\ x^2 - y \end{bmatrix}$

$\underline{\underline{k=0}}$

$J_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$F(x,y) = \begin{bmatrix} -0,5 \\ -0,25 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x^0 \\ d_y^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,25 \end{bmatrix}$

$d_x^0 = 0,3750$

$d_y^0 = 0,1250$

$x_1 = x_0 + d_x^0 = \underline{0,8750}$

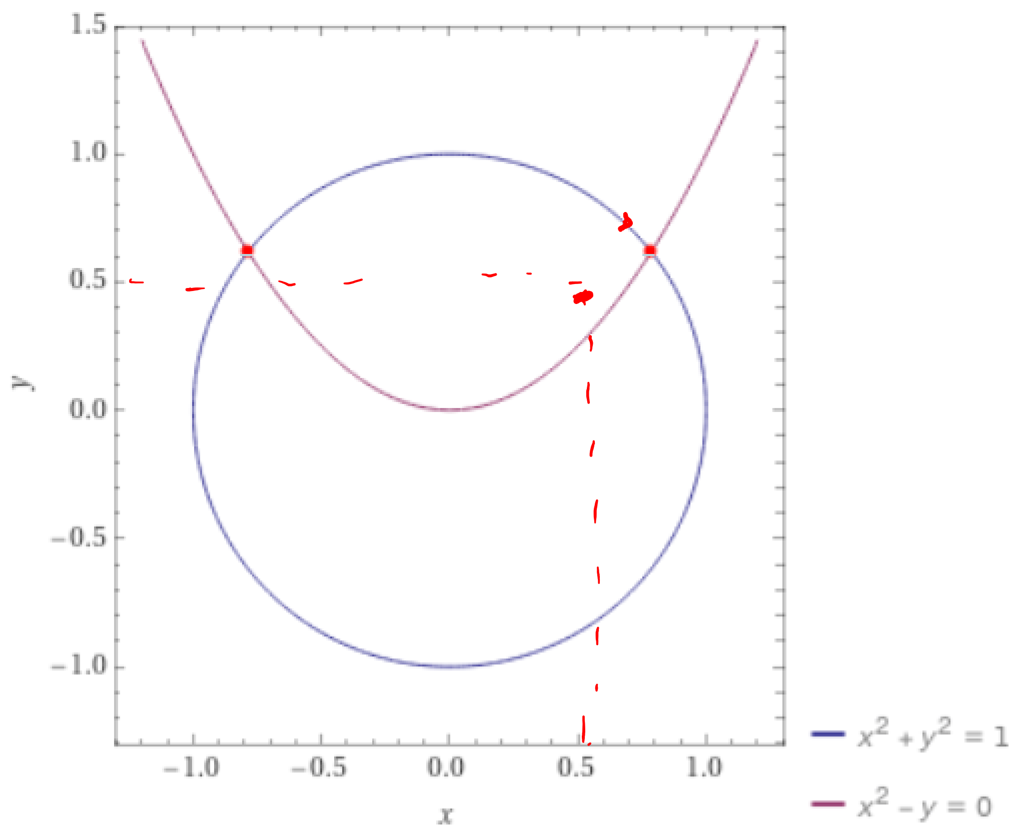
$y_1 = y_0 + d_y^0 = \underline{0,6250}$

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES

Exemplo:

Resolver o sistema de equações não lineares utilizando o método de Newton com $(x_0, y_0) = (0.5, 0.5)$ e $\varepsilon = 0{,}01$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - y = 0 \end{cases}$$



$$CP: \frac{|x_1 - x_0|}{|x_1|} = \boxed{0{,}4286} > \varepsilon$$

$$\frac{|y_0 - y_1|}{|y_1|} = 0{,}2$$

$\max\{0{,}2\ ,\ 0{,}4286\} > \varepsilon$ cont...

$\boxed{k=1}$

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1{,}75 & 1{,}25 \\ 1{,}75 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1{,}75 & 1{,}25 \\ 1{,}75 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x^1 \\ d_y^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}1563 \\ -0{,}1406 \end{bmatrix}$$

$$F(x_1, y_1) = \begin{bmatrix} 0{,}1563 \\ 0{,}1406 \end{bmatrix}$$

$$d_x^1 = \boxed{-0{,}0843}$$

$$d_y^1 = -0{,}0070$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_2 &= x_1 + d_x^1 = \boxed{0{,}7907} \\ y_2 &= y_1 + d_y^1 = \boxed{0{,}6108} \end{aligned}}$$

$\varepsilon = 0{,}01$

CP $\quad \dfrac{|x_2 - x_1|}{|x_2|} = \boxed{0{,}1066} > \varepsilon$

$\max\{0{,}1066\ ,\ 0{,}0113\} > \varepsilon$ cont...

$\dfrac{|y_2 - y_1|}{|y_2|} = 0{,}0113$

$\boxed{k=2}$

$$J_2 = \begin{bmatrix} 1{,}5814 & 1{,}2360 \\ 1{,}5814 & -1 \end{bmatrix}$$

$$F(x_2, y_2) = \begin{bmatrix} 0{,}0071 \\ 0{,}0072 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1{,}5814 & 1{,}2360 \\ 1{,}5814 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x^2 \\ d_y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}0071 \\ -0{,}0072 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} d_x^2 = -0{,}0045 \\ d_y^2 = 0 \end{array}$$

$\varepsilon = 0,01$

$x_3 = x_2 + d_x^2 = 0,7862$

$y_3 = y_2 + d_y^2 = 0,6180$

CP: $\dfrac{|x_3 - x_2|}{|x_3|} = \underline{0,0057} < \varepsilon$

$\dfrac{|y_3 - y_2|}{|y_3|} = 0$

$\max\{0,0057 \, , \, 0\} < \varepsilon \quad \therefore \underline{\text{fim}}$

$\therefore (\bar{x}, \bar{y}) \simeq (0,7862 \quad 0,6180)$

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES

CONVERGÊNCIA

1. As funções $f_i = (x, y, ..., z)$ i = 1, 2, ..., n e as derivadas até 2ª ordem devem ser contínuas e limitadas numa vizinhança da raiz $(\bar{x}, \bar{y}, \dots, \bar{z})$.
2. Det$[\, J(x_k, y_k, ..., z_k)\,] \neq 0$.
3. A solução inicial $(x_0, y_0, ..., z_0)$ deve ser próxima da raiz $(\bar{x}, \bar{y}, \dots, \bar{z})$.

OBS: A sequência gerada pelo Método de Newton $(x_k, y_k, ..., z_k)$, a partir de uma solução inicial $(x_0, y_0, ..., z_0)$ suficientemente próxima da solução do sistema, converge para $(\bar{x}, \bar{y}, \dots, \bar{z})$, e a convergência é quadrática.

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES

OBSERVAÇÕES

1) Avaliar a Jacobiana e resolver um sistema linear (computacionalmente caro)

2) Se utilizar métodos iterativos pra resolver o sistema, as soluções não são calculadas exatamente e o método é denominado "Método de Newton Inexato"

3) A aproximação inicial de x_0 deve estar suficientemente próxima da solução para garantirmos convergência.

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES

MÉTODO DE NEWTON MODIFICADO

A cada iteração k utilizamos a matriz $J(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$

Processo iterativo:

$$J(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)\begin{pmatrix} d_1^k \\ d_2^k \\ \vdots \\ d_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k) \\ -f_2(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k) \\ \vdots \\ -f_n(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{J(x^{(0)})\left(d^{(k)}\right) = -F(x^{(k)})}$$

Exemplo:

Resolver o sistema de equações não lineares utilizando o método de Newton Modificado com $(x_0, y_0) = (1, 3)$ e ε = 0.01.

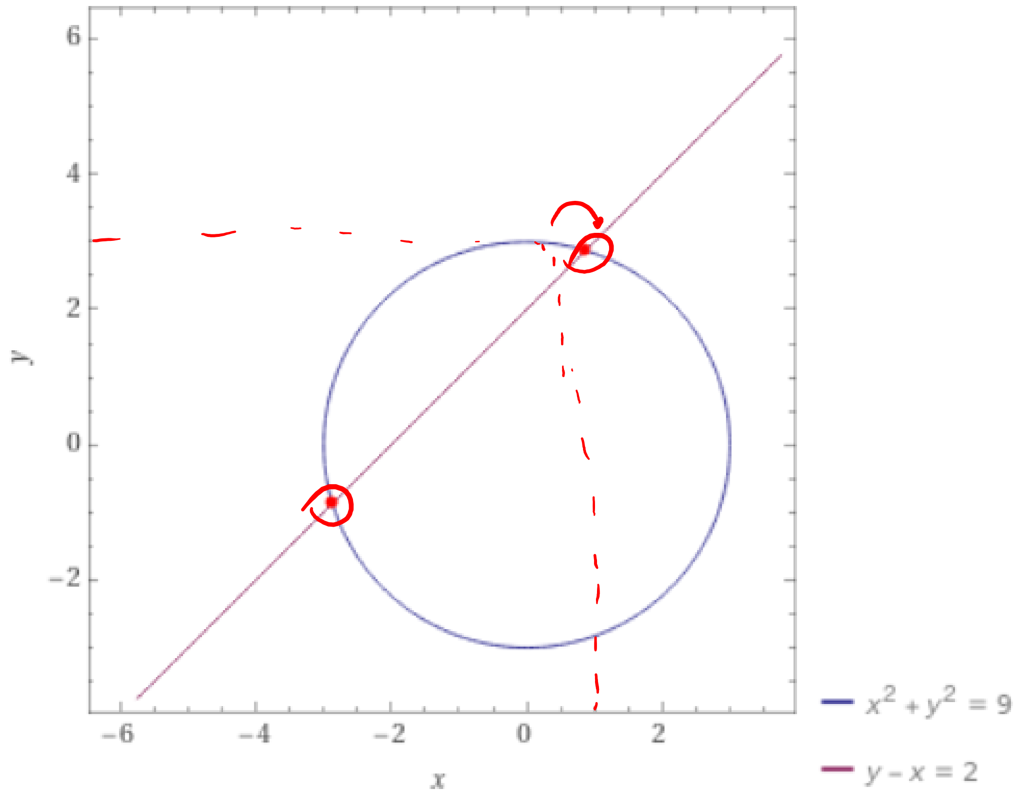
$$\begin{cases} y - x = 2 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES

Exemplo:

Resolver o sistema de equações não lineares utilizando o método de Newton Modificado com $(x_0, y_0) = (1, 3)$ e $\varepsilon = 0.01$.

$$\begin{cases} y - x = 2 \\ \boxed{x^2 + y^2 = 9} \end{cases}$$



$$J = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2x & 2y \end{bmatrix} \qquad (x_0, y_0) = (1, 3) \qquad f(x,y) = \begin{bmatrix} -x + y - 2 \\ x^2 + y^2 - 9 \end{bmatrix}$$

*

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$k = 0 \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x^0 \\ d_y^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} d_x^0 = -0,125 \\ d_y^0 = -0,125 \end{array}$$

$$x_1 = x_0 + d_x^0 = 0,8750$$

$$y_1 = y_0 + d_y^0 = 2,8750$$

A

$\varepsilon = 0{,}01$

CP $\quad \dfrac{|x_1 - x_0|}{|x_1|} = 0{,}1429 > \varepsilon$

$$\frac{|y_1 - y_0|}{|y_1|} = 0{,}0435$$

$$\max\{0{,}1429 \,,\, 0{,}0435\} > \varepsilon$$

$k = 1$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x^1 \\ d_y^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0{,}0313 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} d_x^1 = -0{,}0039 \\ d_y^1 = -0{,}0039 \end{array}$$

$$x_2 = x_1 + d_x^1 = 0{,}8711$$

$$y_2 = y_1 + d_y^1 = 2{,}8711$$

$\varepsilon = 0{,}01$

CP $\quad \dfrac{|x_2 - x_1|}{|x_2|} = 0{,}0045$

$\dfrac{|y_2 - y_1|}{|y_2|} = 0{,}0014$

$\max\{0{,}0045 \, , \, 0{,}0014\} < \varepsilon$

PARE

$\therefore (\bar{x}, \bar{y}) \simeq (0{,}8711 \, , \, 2{,}8711)$

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES

Atividade para presença – 26/08/2020 (reposição).

Resolver o sistema de equações não-lineares utilizando o método de Newton com $(x_0, y_0) = (1, 5)$ e $\varepsilon = 10^{-1}$. Considerar 4 casas decimais.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1^2 + x_2^2 = 9 \end{cases}$$