02 12 20

Name: Davi Augusto Neves Leite RA: 191027383

3ª Atividade Avaliativa
(P.O. - B.C.C.)

① Branch and Bound

$$MAX\ Z(X) = 5X_1 + 7X_2$$
$$s.a. \begin{cases} 2X_1 + X_2 \leq 13 \\ 5X_1 + 9X_2 \leq 41 \\ X \geq 0 \text{ e inteira} \end{cases}$$

P1: $MAX\ Z(X) = 5X_1 + 7X_2$
$$s.a. \begin{cases} 2X_1 + X_2 \leq 13 \\ 5X_1 + 9X_2 \leq 41 \\ X \geq 0 \end{cases}$$

↳ Resolução pelo Quadro Simplex

	X_1	X_2	X_3	X_4	
X_3	2	1	1	0	13
X_4	5	9	0	1	41
	-5	-7	0	0	-Z

↳ $X = (0\ \ 0\ \ 13\ \ 41)$
$Z(X) = 0$

↳ Entra na base: X_2
↳ Sai da base: $MIN(13; 41/9) = 41/9 \Rightarrow X_4$

TM & © 20th Century Fox Film Corp.

tilibra

	X_1	X_2	X_3	X_4	
X_3	13/9	0	1	-1/9	76/9
X_2	5/9	[1]	0	1/9	41/9
	-10/9	0	0	7/9	$-Z + 287/9$

↳ Entra na base: X_1
↳ Sai da base: $MIN(76/13; 41/5) = 76/13 \Rightarrow X_3$

	X_1	X_2	X_3	X_4	
X_1	[1]	0	9/13	-1/13	76/13
X_2	0	1	-5/13	2/13	17/13
	0	0	10/13	9/13	$-Z + 499/13$

↳ $X_{P1} = (76/13 \quad 17/13 \quad 0 \quad 0)$
$Z_{P1} = 499/13$

↳ Contudo, a solução não é inteira. Dessa forma:

⇒ Variável não inteira: $X_2 = 17/13 \cong 1{,}31$
⇒ Inteiros consecutivos: $1 < X_2 < 1 \Rightarrow \begin{cases} X_2 \leq 1 \ (P2) \\ X_2 \geq 2 \ (P3) \end{cases}$

P2: $MAX \ Z(x) = 5X_1 + 7X_2$

$$s.a. \begin{cases} 2X_1 + X_2 \leq 13 \\ 5X_1 + 9X_2 \leq 41 \\ X_2 \leq 1 \\ X \geq 0 \end{cases}$$

↳ Resolução pela Quadra Simplex

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
X_3	2	1	1	0	0	13
X_4	5	9	0	1	0	41
X_5	0	1	0	0	1	1
	-5	-7	0	0	0	-Z

↳ $X = (0 \quad 0 \quad 13 \quad 41 \quad 1)$
$Z(X) = 0$

↳ Entra na base: X_2
↳ Sai da base: $MIN(13; 41/9; 1) = 1 \Rightarrow X_5$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
X_3	2	0	1	0	-1	12
X_4	5	0	0	1	-9	32
X_2	0	1	0	0	1	1
	-5	0	0	0	7	-Z+7

↳ Entra na base: X_1
↳ Sai da base: $MIN(6; 32/5) = 6 \Rightarrow X_3$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
X_1	1	0	1/2	0	-1/2	6
X_4	0	0	-5/2	1	-13/2	2
X_2	0	1	0	0	1	1
	0	0	5/2	0	9/2	-Z+37

↳ $X_{P2} = (6 \quad 1 \quad 0 \quad 2 \quad 0)$
$Z_{P2} = 37$

↳ Como a solução é inteira, tem-se:
$Z_{P2} = 37$ = limite inferior (máx)

TM & © 20th Century Fox Film Corp.
tilibra

P3: MAX $Z(X) = 5X_1 + 7X_2$

s.a. $\begin{cases} 2X_1 + X_2 \leq 13 \\ 5X_1 + 9X_2 \leq 41 \\ X_2 \geq 2 \\ X \geq 0 \end{cases}$

↳ Resolução pelo método Simplex

• Fase I

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6^a	
X_3	2	1	1	0	0	0	13
X_4	5	9	0	1	0	0	41
X_6^a	0	1	0	0	-1	1	2
	-5	-7	0	0	0	M	-Z

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6^a	
X_3	2	1	1	0	0	0	13
X_4	5	9	0	1	0	0	41
X_6^a	0	1	0	0	-1	1	2
	-5	-7	0	0	0	0	-Z
	0	-1	0	0	1	0	W - 2

↳ $X = (0 \quad 0 \quad 13 \quad 41 \quad 0 \quad 2)$

$Z(X) = 0$ e $W(X) = 2$

↳ Entra na base: X_2

↳ Sai da base: $\min(13; 41/9; 2) = 2 \Rightarrow X_6^a$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6^a	
X_3	2	0	1	0	1	-1	11
X_4	5	0	0	1	9	-9	23
X_2	0	[1]	0	0	-1	1	2
	-5	0	0	0	-7	7	$-z + 14$
	0	0	0	0	0	1	$w - 0$

↳ Como $\bar{b}_j \geq 0$ para $j \in NB_j$, é marcado o fim da Fase I.

↳ $X = (0, 2, 11, 23, 0, 0)$
$\Sigma(X) = 14$ e $W^*(X) = 0$ (∃ Fase II)

• Fase II

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
X_3	2	0	1	0	1	11
X_4	5	0	0	1	9	23
X_2	0	1	0	0	-1	2
	-5	0	0	0	-7	$-z + 14$

↳ Entra na base: X_5
↳ Sai da base: $MIN(11; 23/9) = 23/9 \Rightarrow X_4$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
X_3	13/9	0	1	-1/9	0	76/9
X_5	5/9	0	0	1/9	[1]	23/9
X_2	5/9	1	0	1/9	0	41/9
	-10/9	0	0	7/9	0	$-z + 287/9$

↳ Entra na base: X_1
↳ Sai da base: $MIN(76/13; 23/5; 41/5) = 23/5 \Rightarrow X_5$

TM & © 20th Century Fox Film Corp.
tilibra

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
X_3	0	0	1	-2/5	-13/5	9/5
X_1	[1]	0	0	1/5	9/5	23/5
X_2	0	1	0	0	-1	2
	0	0	0	1	2	$-z+37$

↳ Como, $\nexists c_j < 0$ para $j \in NB$, o quadro atual é ótimo (fim da fase II)

↳ $X_{P3} = (23/5 \quad 2 \quad 9/5 \quad 0 \quad 0)$
$z_{P3} = 37 = L^*$

↳ Contudo, a solução não é inteira. Dessa forma:

⇒ Variável não inteira: $X_1 = 23/5 = 4,6$
⇒ Inteiros consecutivos: $4 < x_1 < 5 \Rightarrow \begin{cases} x_1 \leq 4 \ (P4) \\ x_2 \geq 5 \ (P5) \end{cases}$

P4: MAX $z(x) = 5x_1 + 7x_2$

s.a. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 13 \\ 5x_1 + 9x_2 \leq 41 \\ x_2 \geq 2 \\ x_1 \leq 4 \\ x \geq 0 \end{cases}$

↳ Resolução pelo Quadro Simplex

• Fase I

tilibra

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7^a	
X_3	2	1	1	0	0	0	0	13
X_4	5	9	0	1	0	0	0	41
X_7^a	0	1	0	0	-1	0	1	2
X_6	1	0	0	0	0	1	0	4
	-5	-7	0	0	0	0	M	-Z

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7^a	
X_3	2	1	1	0	0	0	0	13
X_4	5	9	0	1	0	0	0	41
X_7^a	0	1	0	0	-1	0	1	2
X_6	1	0	0	0	0	1	0	4
	-5	-7	0	0	0	0	0	-Z
	0	-1	0	0	1	0	0	W-2

↳ $X = (0\ 0\ 13\ 41\ 0\ 4\ 2)$
$Z(X) = 0$ e $W(X) = 2$

↳ Entra na base: X_2
↳ Sai da base: $MIN(13; 41/9; 2) = 2 \Rightarrow X_7^a$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7^a	
X_3	2	0	1	0	1	0	-1	11
X_4	5	0	0	1	9	0	-9	23
X_2	0	1	0	0	-1	0	1	2
X_6	1	0	0	0	0	1	0	4
	-5	0	0	0	-7	0	7	-Z+14
	0	0	0	0	0	0	1	W-0

↳ Como $\nexists$ LO para j E NB e $W^*(X) = 0$, é marcado o fim da Fase I ($\exists$ a Fase II).

TM & © 20th Century Fox Film Corp.
tilibra

• Fase II

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
X_3	2	0	1	0	1	0	11
X_4	5	0	0	1	9	0	23
X_2	0	1	0	0	-1	0	2
X_6	1	0	0	0	0	1	4
	-5	0	0	0	-7	0	$-z+14$

↳ Entra na base: X_5
↳ Sai da base: $MIN(11; 23/9) = 23/9 \Rightarrow X_4$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
X_3	13/9	0	1	-1/9	0	0	76/9
X_5	5/9	0	0	1/9	1	0	23/9
X_2	5/9	1	0	1/9	0	0	41/9
X_6	1	0	0	0	0	1	4
	-10/9	0	0	7/9	0	0	$-z+287/9$

↳ Entra na base: X_1
↳ Sai da base: $MIN(76/13; 23/5; 41/5; 4) = 4 \Rightarrow X_6$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
X_3	0	0	1	-1/9	0	-13/9	8/3
X_5	0	0	0	1/9	1	-5/9	1/3
X_2	0	1	0	1/9	0	-5/9	7/3
X_1	1	0	0	0	0	1	4
	0	0	0	7/9	0	10/9	$-z+109/3$

↳ Como $\Delta_j c_j < 0$ para $j \in NB$, o quadro atual é ótimo.

↳ $X_{P4} = (4 \quad 7/3 \quad 8/3 \quad 0 \quad 1/3)$
$Z_{P4} = \frac{109}{3} \cong 36,3$

↳ Como $Z_{P4} < LI(Z_{P2})$, a solução é descartada.

P5: MAX $Z(x) = 5x_1 + 7x_2$

s.a. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 13 \\ 5x_1 + 9x_2 \leq 41 \\ x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 5 \\ x \geq 0 \end{cases}$

↳ Resolução pelo Quadro Simplex

• Fase 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7^a	x_8^a	
x_3	2	1	1	0	0	0	0	0	13
x_4	5	9	0	1	0	0	0	0	41
x_7^a	0	1	0	0	-1	0	1	0	2
x_8^a	1	0	0	0	0	-1	0	1	5
	-5	-7	0	0	0	0	M	M	-z

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7^a	x_8^a	
x_3	2	1	1	0	0	0	0	0	13
x_4	5	9	0	1	0	0	0	0	41
x_7^a	0	1	0	0	-1	0	1	0	2
x_8^a	1	0	0	0	0	-1	0	1	5
	-5	-7	0	0	0	0	0	0	-z
	-1	-1	0	0	1	1	0	0	w-7

TM & © 20th Century Fox Film Corp.
tilibra

↳ X = (0 0 13 41 0 0 2 5)
Z(X) = 0 e W(X) = 7

↳ Entra na base: X_2 (arbitrário)
↳ Sai da base: MIN(13; 41/9; 2) = 2 ⇒ X_7^a

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7^a	X_8^a	
X_3	2	0	1	0	1	0	−1	0	11
X_4	5	0	0	1	9	0	−9	0	23
X_2	0	[1]	0	0	−1	0	1	0	2
X_8^a	1	0	0	0	0	−1	0	1	5
	−5	0	0	0	−7	0	7	0	−Z + 14
	−1	0	0	0	0	1	1	0	W − 5

↳ Entra na base: X_1
↳ Sai da base: MIN(11/2; 23/5; 5) = 23/5 ⇒ X_4

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7^a	X_8^a	
X_3	0	0	1	−2/5	−13/5	0	13/5	0	9/5
X_1	[1]	0	0	1/5	9/5	0	−9/5	0	23/5
X_2	0	1	0	0	−1	0	1	0	2
X_8^a	0	0	0	−1/5	−9/5	−1	9/5	1	2/5
	0	0	0	1	2	0	−2	0	−Z + 37
	0	0	0	1/5	9/5	1	−4/5	0	W − 2/5

↳ Entra na base: X_7^a
↳ Sai da base: MIN(9/13; 2; 2/9) = 2/9 ⇒ X_8^a

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7^a	X_8^a	
X_3	0	0	1	0	0	0	0	-13/9	11/9
X_1	1	0	0	0	0	9/5	0	1	5
X_2	0	1	0	1/9	0	5/9	0	-5/9	7/9
X_7^a	0	0	0	-1/9	-1	-5/9	1	5/9	2/9
	0	0	0	1/9	0	-10/9	0	10/9	$-Z+337/9$
	0	0	0	1/9	5/9	5/9	0	4/9	$W-2$

↳ Como $\bar{c}_j \leq 0$ para $j \in NB$, é marcado o fim da Fase I

↳ $X_{P5} = (5 \quad 7/9 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2/9 \quad 0)$
$Z_{P5} = 337/9$ e $W(X) = 2$

↳ Como $W^* \neq 0$, a solução é inviável

∴ Solução do problema original:

$X^* = X_{P2} = (6 \quad 1)$ ⇒ Solução ótima e única
$Z^* = Z_{P2} = 37$

TM & © 20th Century Fox Film Corp.
tilibra