4616 – Métodos Numéricos Computacionais

Larissa Oliveira
oliveira.t.larissa@gmail.com

unesp

Aproximação do valor da <u>primeira derivada</u> de uma função de <u>uma variável real</u>

DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA

Definição: A derivada de uma função y $= f(x)$ é a função denotada por $f'(x)$, tal que seu valor em qualquer $x \in D(f)$ é dado por

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

se este limite existir.

DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA

Diferenças finitas

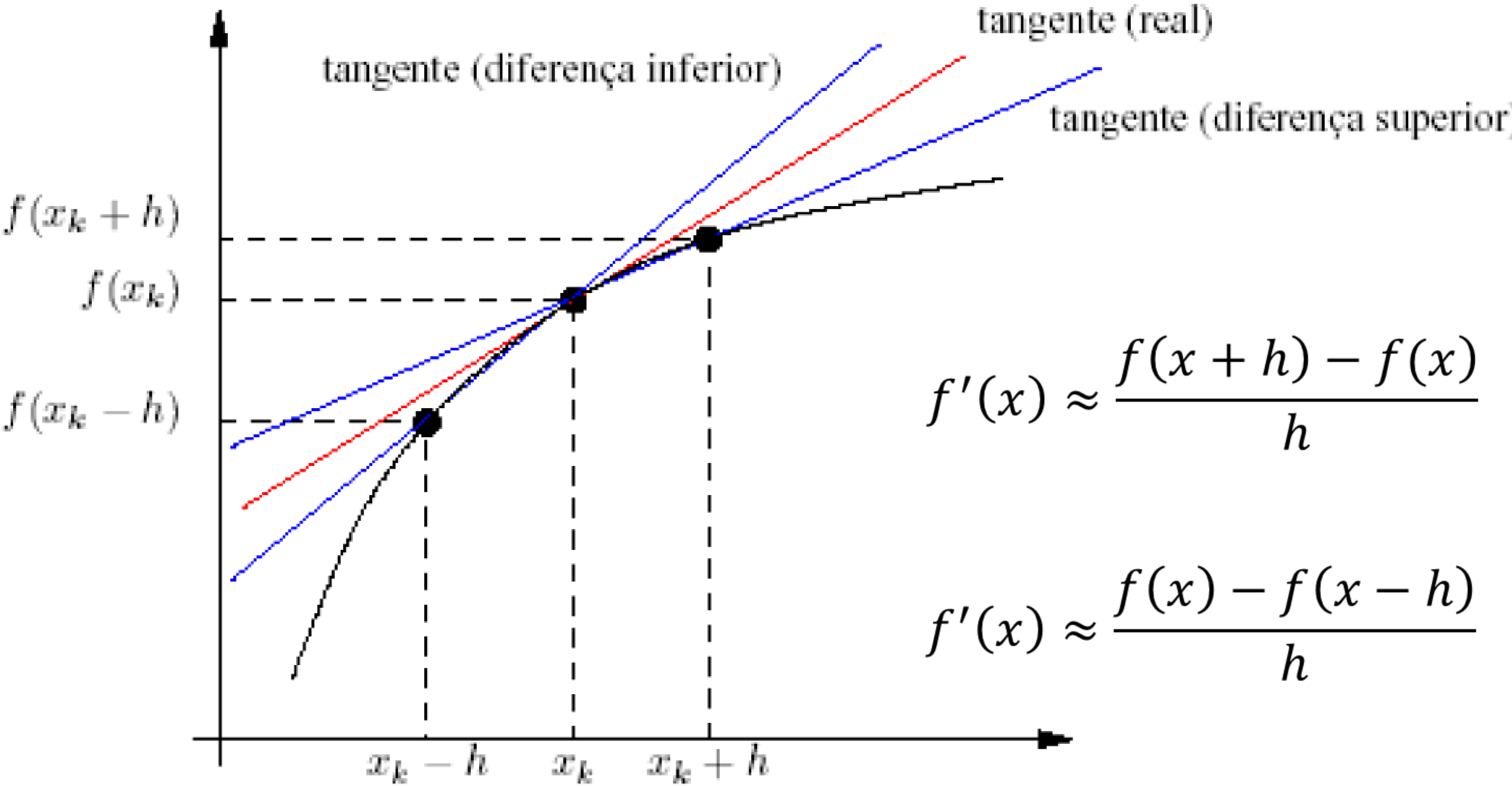
Diferença finita progressiva (diferença superior):

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Diferença finita regressiva (diferença inferior):

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA



$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA

Diferença finita central

Para obter uma aproximação para a derivada primeira com um erro menor podemos utilizar a diferença finita central, dada pela <u>média aritmética da diferença superior e inferior:</u>

$$f'(x) \approx \frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{f(x)-f(x-h)}{h}}{2}$$

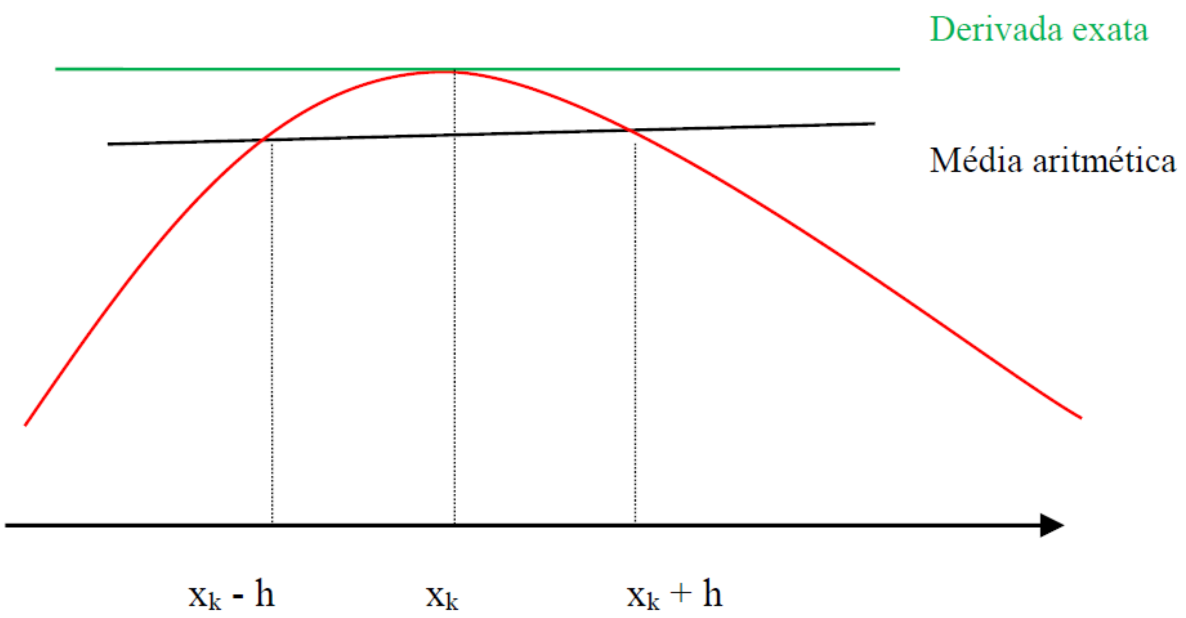
$$= \frac{\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}}{2}$$

$$= \boldsymbol{\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}}$$

DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA

Aproximação das derivada de primeira ordem

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$



DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA

Diferenças finitas

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Observações:

1) Não preciso da expressão matemática de *f* para calcular uma aproximação da derivada de *f* em *x*

2) Não preciso saber derivar *f* para calcular uma aproximação da derivada de *f* em *x*

Aproximação do valor da <u>segunda derivada </u>de uma função de <u>uma variável real</u>

DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA

Derivada de segunda ordem

Sabe-se que

$$f''(x) \approx \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h}$$

DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA

$$f''(x) \approx \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h}$$

Substituindo $f'(x) \approx \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$

DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA

$$f''(x) \approx \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h}$$

Substituindo $f'(x) \approx \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$

$$f''(x) \approx \frac{\dfrac{f\big((x+h)+h\big) - f\big((x+h)-h\big)}{2h} - \left[\dfrac{f\big((x-h)+h\big) - f\big((x-h)-h\big)}{2h}\right]}{2h}$$

DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA

$$f''(x) \approx \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h}$$

Substituindo $f'(x) \approx \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$

$$f''(x) \approx \frac{\dfrac{f\big((x+h)+h\big) - f\big((x+h)-h\big)}{2h} - \left[\dfrac{f\big((x-h)+h\big) - f\big((x-h)-h\big)}{2h}\right]}{2h}$$

$$= \frac{\dfrac{f(x+2h) - f(x) - f(x) + f(x-2h)}{2h}}{2h}$$

DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA

$$f''(x) \approx \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h}$$

Substituindo $f'(x) \approx \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$

$$f''(x) \approx \frac{\dfrac{f\big((x+h)+h\big) - f\big((x+h)-h\big)}{2h} - \left[\dfrac{f\big((x-h)+h\big) - f\big((x-h)-h\big)}{2h}\right]}{2h}$$

$$= \frac{\dfrac{f(x+2h) - f(x) - f(x) + f(x-2h)}{2h}}{2h}$$

$$= \frac{\boldsymbol{f(x+2h) - 2f(x) + f(x-2h)}}{\boldsymbol{(2h)^2}}$$

DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA

Resumo

Derivada de primeira ordem de uma função de uma variável real

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Derivada de segunda ordem de uma função de uma variável real

$$f''(x) \approx \frac{f(x+2h) - 2f(x) + f(x-2h)}{(2h)^2}$$

Aproximação do valor da <u>derivada parcial</u> de uma função de <u>duas ou mais variáveis reais</u>

DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA

Definição: Se $f: I \to \mathbb{R}$, uma função de um intervalo I contido em $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$, é uma função de duas variáveis, suas <u>derivadas parciais</u> são definidas por:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$\frac{df}{dy} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA

Diferenças finitas

Analogamente....

Diferença finita progressiva (diferença superior):

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \quad \text{e} \quad \frac{df}{dy} \approx \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Diferença finita regressiva (diferença inferior):

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x,y) - f(x-\Delta x, y)}{\Delta x} \quad \text{e} \quad \frac{df}{dy} \approx \frac{f(x,y) - f(x, y-\Delta y)}{\Delta y}$$

DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA

Diferença finita central

Para obter uma aproximação para a derivada parciais de primeira ordem com um erro menor podemos utilizar a diferença finita central, dada pela média aritmética da diferença superior e inferior:

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x - \Delta x, y)}{2\Delta x}$$

$$\frac{df}{dy} \approx \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y - \Delta y)}{2\Delta y}$$

Aproximação do valor da <u>derivada parcial de segunda ordem</u> de uma função de <u>duas ou mais variáveis reais</u>

DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA

Se f é uma função de duas variáveis, suas derivadas parciais são funções de duas variáveis, de modo que podemos considerar novamente suas derivadas parciais, chamadas de <u>derivadas parciais de segunda ordem</u> de f, dadas por:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) \quad \text{e} \qquad \text{(I)}$$

$$\frac{d^2 f}{dy^2} = \frac{d}{dy}\left(\frac{df}{dy}\right) \quad \text{e} \qquad \text{(II)}$$

$$\frac{d^2 f}{dxdy} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dy}\right) \qquad \text{(III)}$$

DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA

Derivadas parciais de segunda ordem: (I)

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \approx \frac{\frac{d}{dx}(x+\Delta x, y) - \frac{d}{dx}(x-\Delta x, y)}{2\Delta x}$$

DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA

Derivadas parciais de segunda ordem: (I)

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \approx \frac{\frac{d}{dx}(x + \Delta x, y) - \frac{d}{dx}(x - \Delta x, y)}{2\Delta x}$$

$$= \frac{\frac{f\big((x + \Delta x) + \Delta x, y\big) - f\big((x + \Delta x) - \Delta x, y\big)}{2\Delta x} - \left[\frac{f\big((x - \Delta x) + \Delta x, y\big) - f\big((x - \Delta x) - \Delta x, y\big)}{2\Delta x}\right]}{2\Delta x}$$

DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA

Derivadas parciais de segunda ordem: (I)

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \approx \frac{\frac{d}{dx}(x+\Delta x, y) - \frac{d}{dx}(x-\Delta x, y)}{2\Delta x}$$

$$= \frac{\frac{f\big((x+\Delta x)+\Delta x, y\big) - f\big((x+\Delta x)-\Delta x, y\big)}{2\Delta x} - \left[\frac{f\big((x-\Delta x)+\Delta x, y\big) - f\big((x-\Delta x)-\Delta x, y\big)}{2\Delta x}\right]}{2\Delta x}$$

$$= \frac{\frac{f(x+2\Delta x, y) - f(x,y) - f(x,y) + f(x-2\Delta x, y)}{2\Delta x}}{2\Delta x}$$

DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA

Derivadas parciais de segunda ordem: (I)

$$\frac{d^2f}{dx^2} \approx \frac{\frac{d}{dx}(x+\Delta x, y) - \frac{d}{dx}(x-\Delta x, y)}{2\Delta x}$$

$$= \frac{\frac{f\left((x+\Delta x)+\Delta x, y\right) - f\left((x+\Delta x)-\Delta x, y\right)}{2\Delta x} - \left[\frac{f\left((x-\Delta x)+\Delta x, y\right) - f\left((x-\Delta x)-\Delta x, y\right)}{2\Delta x}\right]}{2\Delta x}$$

$$= \frac{\frac{f(x+2\Delta x, y) - f(x,y) - f(x,y) + f(x-2\Delta x, y)}{2\Delta x}}{2\Delta x}$$

$$= \frac{\boldsymbol{(x+2\Delta x, y) - 2f(x,y) + f(x-2\Delta x, y)}}{\boldsymbol{(2\Delta x)^2}}$$

DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA

Derivadas parciais de segunda ordem: (II)

$$\frac{d^2f}{dy^2} \approx \frac{\frac{d}{dy}(x, y + \Delta y) - \frac{d}{dy}(x, y - \Delta y)}{2\Delta y}$$

DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA

Derivadas parciais de segunda ordem: (II)

$$\frac{d^2 f}{dy^2} \approx \frac{\frac{d}{dy}(x, y+\Delta y) - \frac{d}{dy}(x, y-\Delta y)}{2\Delta y}$$

$$= \frac{\frac{f(x,(y+\Delta y)+\Delta y) - f(x,(y+\Delta y)-\Delta y)}{2\Delta y} - \left[\frac{f(x,(y-\Delta y)+\Delta y) - f(x,(y-\Delta y)-\Delta y)}{2\Delta y}\right]}{2\Delta y}$$

DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA

Derivadas parciais de segunda ordem: (II)

$$\frac{d^2 f}{dy^2} \approx \frac{\frac{d}{dy}(x, y + \Delta y) - \frac{d}{dy}(x, y - \Delta y)}{2\Delta y}$$

$$= \frac{\frac{f(x,(y + \Delta y) + \Delta y) - f(x,(y + \Delta y) - \Delta y)}{2\Delta y} - \left[\frac{f(x,(y - \Delta y) + \Delta y) - f(x,(y - \Delta y) - \Delta y)}{2\Delta y}\right]}{2\Delta y}$$

$$= \frac{\frac{f(x, y + 2\Delta y) - f(x, y) - f(x, y) + f(x, y - 2\Delta y)}{2\Delta y}}{2\Delta y}$$

DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA

Derivadas parciais de segunda ordem: (II)

$$\frac{d^2 f}{dy^2} \approx \frac{\frac{d}{dy}(x, y + \Delta y) - \frac{d}{dy}(x, y - \Delta y)}{2\Delta y}$$

$$= \frac{\frac{f(x, (y + \Delta y) + \Delta y) - f(x, (y + \Delta y) - \Delta y)}{2\Delta y} - \left[\frac{f(x, (y - \Delta y) + \Delta y) - f(x, (y - \Delta y) - \Delta y)}{2\Delta y}\right]}{2\Delta y}$$

$$= \frac{\frac{f(x, y + 2\Delta y) - f(x, y) - f(x, y) + f(x, y - 2\Delta y)}{2\Delta y}}{2\Delta y}$$

$$= \frac{(x, y + 2\Delta y) - 2f(x, y) + f(x, y - 2\Delta y)}{(2\Delta y)^2}$$

DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA

Derivadas parciais de segunda ordem: (III)

$$\frac{d^2 f}{dxdy} \approx \frac{\frac{d}{dx}(x, y + \Delta y) - \frac{d}{dx}(x, y - \Delta y)}{2\Delta y}$$

DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA

Derivadas parciais de segunda ordem: (III)

$$\frac{d^2 f}{dxdy} \approx \frac{\frac{d}{dx}(x, y + \Delta y) - \frac{d}{dx}(x, y - \Delta y)}{2\Delta y}$$

$$= \frac{\frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x - \Delta x, y + \Delta y)}{2\Delta x} - \left[\frac{f(x + \Delta x, y - \Delta y) - f(x - \Delta x, y - \Delta y)}{2\Delta x}\right]}{2\Delta y}$$

DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA

Derivadas parciais de segunda ordem: (III)

$$\frac{d^2 f}{dxdy} \approx \frac{\frac{d}{dx}(x, y + \Delta y) - \frac{d}{dx}(x, y - \Delta y)}{2\Delta y}$$

$$= \frac{\frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x - \Delta x, y + \Delta y)}{2\Delta x} - \left[\frac{f(x + \Delta x, y - \Delta y) - f(x - \Delta x, y - \Delta y)}{2\Delta x}\right]}{2\Delta y}$$

$$= \frac{\frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x - \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y - \Delta y) + f(x - \Delta x, y - \Delta y)}{2\Delta x}}{2\Delta y}$$

DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA

Derivadas parciais de segunda ordem: (III)

$$\frac{d^2 f}{dxdy} \approx \frac{\frac{d}{dx}(x, y + \Delta y) - \frac{d}{dx}(x, y - \Delta y)}{2\Delta y}$$

$$= \frac{\frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x - \Delta x, y + \Delta y)}{2\Delta x} - \left[\frac{f(x + \Delta x, y - \Delta y) - f(x - \Delta x, y - \Delta y)}{2\Delta x}\right]}{2\Delta y}$$

$$= \frac{\frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x - \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y - \Delta y) + f(x - \Delta x, y - \Delta y)}{2\Delta x}}{2\Delta y}$$

$$= \frac{\boldsymbol{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x - \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y - \Delta y) + f(x - \Delta x, y - \Delta y)}}{\boldsymbol{4\Delta x\Delta y}}$$

DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA

Resumo

Derivadas parciais de uma função de duas variáveis reais

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x - \Delta x, y)}{2\Delta x}$$

$$\frac{df}{dy} \approx \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y - \Delta y)}{2\Delta y}$$

DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA

Resumo

Derivadas parciais de segunda ordem de uma função de duas variáveis reais

$$\frac{d^2f}{dx^2} \approx \frac{(x+2\Delta x, y) - 2f(x,y) + f(x-2\Delta x, y)}{(2\Delta x)^2}$$

$$\frac{d^2f}{dy^2} \approx \frac{(x, y+2\Delta y) - 2f(x,y) + f(x, y-2\Delta y)}{(2\Delta y)^2}$$

$$\frac{d^2f}{dxdy} = \frac{d^2f}{dydx} \approx \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x-\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y-\Delta y) + f(x-\Delta x, y-\Delta y)}{4\Delta x\Delta y}$$

Método e critério de parada

DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA

O método consiste em iterar na perturbação (h, Δx e/ou Δy), fazendo a perturbação tender a zero.

Quando parar?

- Quando atingir um erro mínimo...
- Esse erro é calculado de maneira iterativa, comparando os valores de iterações sucessivas

Seja k a iteração atual e k-1 a iteração anterior, então a formula do erro é dada por:

$$erro_k = \left| \frac{f'_k(x) - f'_{k-1}(x)}{max\{1, |f'_k(x)|\}} \right| < \varepsilon$$