Nome: Davi Augusto Neves Leite RA: 191027383

3ª Lista de Exercícios P.O.

• Método de Branch and Bound

(3) MAX $Z = X_1 + 2X_2 + 3X_3 + X_4$

s.a. $\begin{cases} 3X_1 + 2X_2 + X_3 + 4X_4 \leq 10 \\ 5X_1 + 3X_2 + 2X_3 + 5X_4 \leq 5 \\ X \geq 0, \text{ inteira} \end{cases}$

P1: MAX $Z = X_1 + 2X_2 + 3X_3 + X_4$

s.a. $\begin{cases} 3X_1 + 2X_2 + X_3 + 4X_4 \leq 10 \\ 5X_1 + 3X_2 + 2X_3 + 5X_4 \leq 5 \\ X \geq 0 \end{cases}$

↳ Resolução pelo Quadro Simplex

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
X_5	3	2	1	4	1	0	10
X_6	5	3	2	5	0	1	5
	-1	-2	-3	-1	0	0	-Z

↳ $X = (0\ 0\ 0\ 0\ 10\ 5)$

$Z(X) = 0$

↳ Entra na base: X_3

↳ Sai da base: $MIN(10; 5/2) = 5/2 \rightarrow X_6$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
X_5	1/2	1/2	0	3/2	1	-1/2	15/2
X_3	5/2	3/2	$\boxed{1}$	5/2	0	1/2	5/2
	13/2	5/2	0	13/2	0	3/2	$-Z + 15/2$

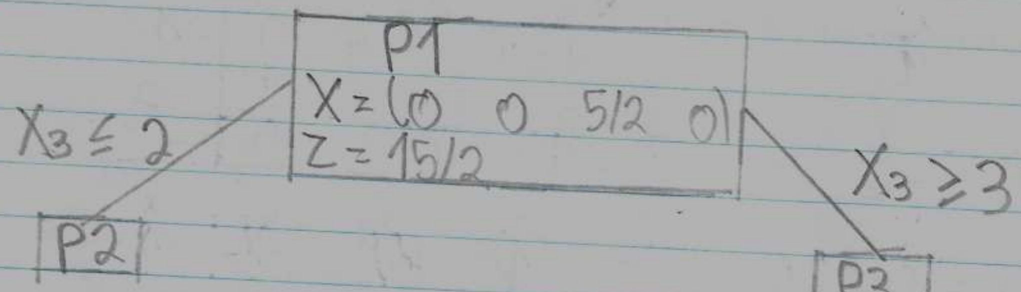
↳ Como $\nexists\, c_j < 0$ para $j \in NB$, o quadro é ótimo.

↳ $X_{P1} = (0 \quad 0 \quad 5/2 \quad 0 \quad 15/2 \quad 0)$
$Z_{P1}(X) = 15/2$

↳ Contudo, a solução não é inteira. Dessa forma:

⇒ Variável não inteira: $X_3 = 5/2 = 2{,}5$
⇒ Inteiros consecutivos: $2 < X_3 < 3 \Rightarrow \begin{cases} X_3 \leq 2 \ (P2) \\ X_3 \geq 3 \ (P3) \end{cases}$

Diagrama atual:



P2: $\max Z = X_1 + 2X_2 + 3X_3 + X_4$

$$\text{s.a.} \begin{cases} 3X_1 + 2X_2 + X_3 + 4X_4 \leq 10 \\ 5X_1 + 3X_2 + 2X_3 + 5X_4 \leq 5 \\ X_3 \leq 2 \\ X \geq 0 \end{cases}$$

↳ Resolução pelo Quadro Simplex

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	
X_5	3	2	1	4	1	0	0	10
X_6	5	3	2	5	0	1	0	5
X_7	0	0	1	0	0	0	1	2
	-1	-2	-3	-1	0	0	0	$-Z$

↳ $X = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 10 \quad 5 \quad 2)$
$Z(X) = 0$

↳ Entra na base: X_3
↳ Sai da base: MIN (10 ; 5/2 ; 2) = 2 → X_7

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	
X_5	3	2	0	4	1	0	-1	8
X_6	5	3	0	5	0	1	-2	1
X_3	0	0	$\boxed{1}$	0	0	0	1	2
	-1	-2	0	-1	0	0	3	$-Z+6$

↳ Entra na base: X_2
↳ Sai da base: MIN (4 ; 1/3) = 1/3 → X_6

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	
X_5	-1/3	0	0	2/3	1	-2/3	1/3	22/3
X_2	5/3	$\boxed{1}$	0	5/3	0	1/3	-2/3	1/3
X_3	0	0	1	0	0	0	1	2
	7/3	0	0	7/3	0	2/3	5/3	$-Z+20/3$

↳ Como $\nexists\, c_j < 0$ para $j \in NB$, o quadro atual é ótimo.

↳ $X_{P2} = (0 \quad 1/3 \quad 2 \quad 0 \quad 22/3 \quad 0 \quad 0)$
$Z_{P2}(X) = 20/3$

↳ Contudo, a solução não é inteira. Dessa forma:

⇒ Variável não inteira: $X_2 = 1/3 \cong 0,3$
⇒ Inteiros consecutivos: $0 < X_2 < 1 \Rightarrow \begin{cases} X_2 \leq 0 \ (P4) \\ X_2 \geq 1 \ (P5) \end{cases}$

P3: $\text{MAX } Z = X_1 + 2X_2 + 3X_3 + X_4$

s.a. $\begin{cases} 3X_1 + 2X_2 + X_3 + 4X_4 \leq 10 \\ 5X_1 + 3X_2 + 2X_3 + 5X_4 \leq 5 \\ X_3 \geq 3 \\ X \geq 0 \end{cases}$

↳ Resolução pelo Quadro Simplex

· Fase I

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8^a	
X_5	3	2	1	4	1	0	0	0	10
X_6	5	3	2	5	0	1	0	0	5
X_8^a	0	0	1	0	0	0	-1	1	3
	-1	-2	-3	-1	0	0	0	M	-Z

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8^a	
X_5	3	2	1	4	1	0	0	0	10
X_6	5	3	2	5	0	1	0	0	5
X_8^a	0	0	1	0	0	0	-1	1	3
	-1	-2	-3	-1	0	0	0	0	-Z
	0	0	-1	0	0	0	1	0	W-3

↳ $X = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 10 \ 5 \ 0 \ 3)$
$Z(X) = 0$ e $W(X) = 3$

↳ Entra na base: X_3
↳ Sai da base: MIN $(10; 5/2; 3) = 5/2 \rightarrow X_6$

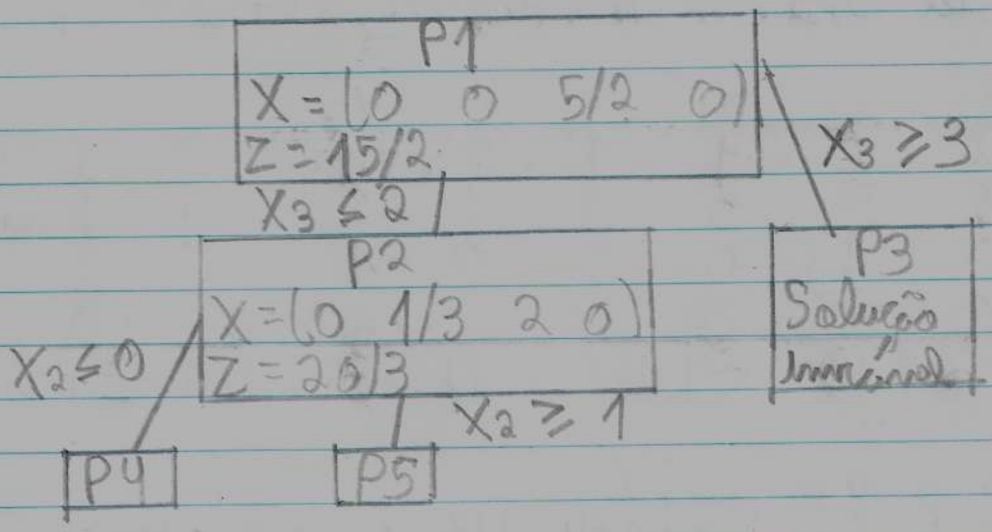
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	
X_5	1/2	1/2	0	3/2	1	-1/2	0	0	15/2
X_3	5/2	3/2	1	5/2	0	1/2	0	0	5/2
X_8	-5/2	-3/2	0	-5/2	0	-1/2	-1	1	1/2
	13/2	5/2	0	13/2	0	3/2	0	0	$-Z + 15/2$
	5/2	3/2	0	5/2	0	1/2	1	0	$W - 1/2$

↳ Como $\nexists\, c_j < 0$ para $j \in NB$, é marcado o fim da Fase I.

↳ $X_{P3} = (0 \quad 0 \quad 5/2 \quad 0 \quad 15/2 \quad 0 \quad 0 \quad 1/2)$
$Z_{P3}(X) = 15/2$ e $W^*(X) = 1/2$

↳ Contudo, como $W^*(X) \neq 0$ então a solução é inviável.

Diagrama atual:



P4: MAX $Z = X_1 + 2X_2 + 3X_3 + X_4$

$$\text{s.a.} \begin{cases} 3X_1 + 2X_2 + X_3 + 4X_4 \leq 10 \\ 5X_1 + 3X_2 + 2X_3 + 5X_4 \leq 5 \\ X_3 \leq 2 \\ X_2 \leq 0 \\ X \geq 0 \end{cases}$$

↳ Resolução pelo Quadro Simplex

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	
X_5	3	2	1	4	1	0	0	0	10
X_6	5	3	2	5	0	1	0	0	5
X_7	0	0	1	0	0	0	1	0	2
X_8	0	1	0	0	0	0	0	1	0
	-1	-2	-3	-1	0	0	0	0	$-Z$

↳ $X = (0\ 0\ 0\ 0\ 10\ 5\ 2\ 0)$

$Z(X) = 0$

↳ Entra na base: X_3

↳ Sai da base: $MIN(10; 5/2; 2) = 2 \rightarrow X_7$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	
X_5	3	2	0	4	1	0	-1	0	8
X_6	5	3	0	5	0	1	-2	0	1
X_3	0	0	1	0	0	0	1	0	2
X_8	0	1	0	0	0	0	0	1	0
	-1	-2	0	-1	0	0	3	0	$-Z+6$

↳ Entra na base: X_2

↳ Sai da base: $MIN(4; 1/3; 0) = 0 \rightarrow X_8$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	
X_5	3	0	0	4	1	0	-1	-2	8
X_6	5	0	0	5	0	1	-2	-3	1
X_3	0	0	1	0	0	0	1	0	2
X_2	0	1	0	0	0	0	0	1	0
	-1	0	0	-1	0	0	3	2	$-Z+6$

↳ Entra na base: X_1 (arbitrário)
↳ Sai da base: MIN $(8/3; 1/5) = 1/5 \rightarrow X_6$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	
X_5	0	0	0	1	1	-3/5	1/5	-1/5	37/5
X_1	1	0	0	1	0	1/5	-2/5	-3/5	1/5
X_3	0	0	1	0	0	0	1	0	2
X_2	0	1	0	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	0	0	1/5	13/5	7/5	$-Z+31/5$

↳ Como $\nexists\, c_j < 0$ para $j \in NB$, o quadro atual é ótimo.

↳ $X_{P4} = (1/5 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad 37/5 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$
$Z_{P4}(X) = 31/5$

↳ Contudo, a solução não é inteira. Dessa forma:

⇒ Variável não inteira: $X_1 = 1/5 = 0{,}2$
⇒ Inteiros consecutivos: $0 < X_1 < 1 \Rightarrow \begin{cases} X_1 \leq 0 \ (P6) \\ X_1 \geq 1 \ (P7) \end{cases}$

P5: $\max Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4$

s.a.
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 10 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 \leq 5 \\ x_3 \leq 2 \\ x_2 \geq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

↳ Resolução pelo Quadro Simplex

• Fase I

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9^a	
x_5	3	2	1	4	1	0	0	0	0	10
x_6	5	3	2	5	0	1	0	0	0	5
x_7	0	0	1	0	0	0	1	0	0	2
x_9^a	0	1	0	0	0	0	0	−1	1	1
	−1	−2	−3	−1	0	0	0	0	M	−Z

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9^a	
x_5	3	2	1	4	1	0	0	0	0	10
x_6	5	3	2	5	0	1	0	0	0	5
x_7	0	0	1	0	0	0	1	0	0	2
x_9^a	0	1	0	0	0	0	0	−1	1	1
	−1	−2	−3	−1	0	0	0	0	0	−Z
	0	−1	0	0	0	0	0	1	0	W−1

↳ $X = (0 \; 0 \; 0 \; 0 \; 10 \; 5 \; 2 \; 0 \; 1)$
$Z(X) = 0$ e $W(X) = 1$

↳ Entra na base: x_2
↳ Sai da base: $\min(5; 5/3; 1) = 1 \rightarrow x_9^a$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	
X_5	3	0	1	4	1	0	0	2	-2	8
X_6	5	0	2	5	0	1	0	3	-3	2
X_7	0	0	1	0	0	0	1	0	0	2
X_2	0	1	0	0	0	0	0	-1	1	1
	-1	0	-3	-1	0	0	0	-2	2	$-Z+2$
	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$W-0$

↳ Como $\nexists\, c_j < 0$ para $j \in NB$, é marcado o fim da Fase I.

↳ $x = (0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 8 \;\; 2 \;\; 2 \;\; 0 \;\; 0)$
$Z(x) = 2$ e $\boxed{W^*(x) = 0}$

• Fase II

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	
X_5	3	0	1	4	1	0	0	2	8
X_6	5	0	2	5	0	1	0	3	2
X_7	0	0	1	0	0	0	1	0	2
X_2	0	1	0	0	0	0	0	-1	1
	-1	0	-3	-1	0	0	0	-2	$-Z+2$

↳ Entra na base: X_3
↳ Sai da base: $\min(8; 1; 2) = 1 \rightarrow X_6$

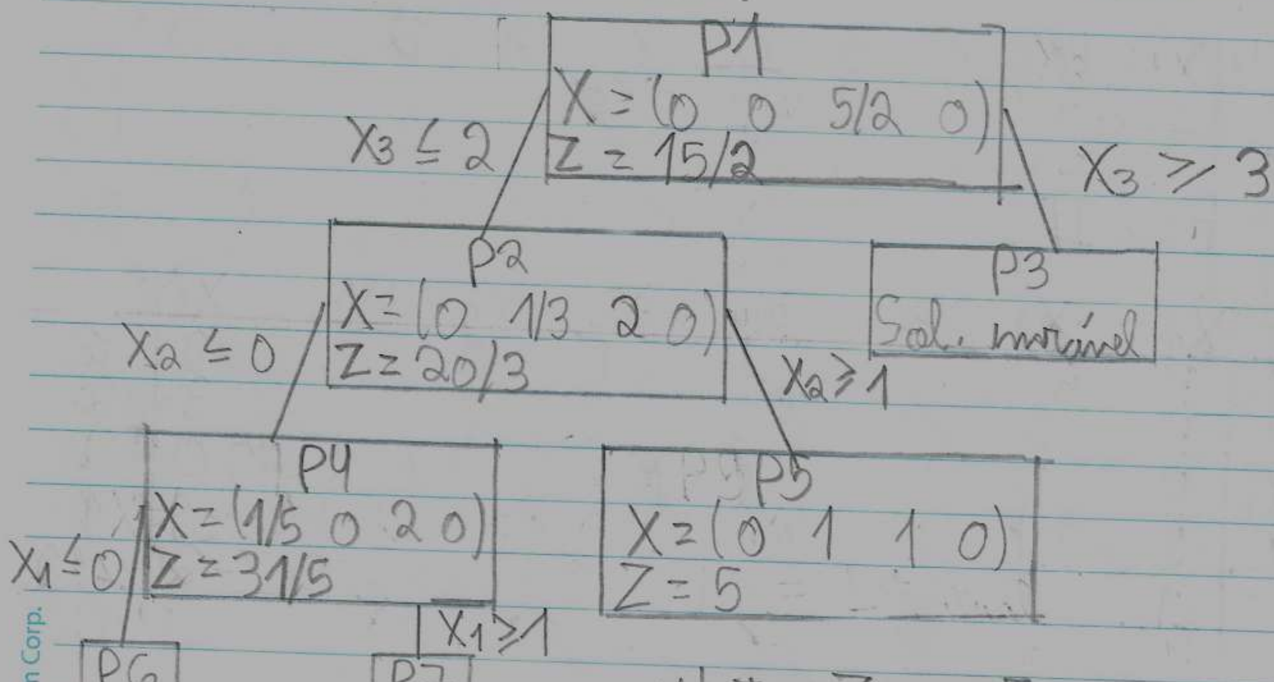
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	
X_5	1/2	0	0	3/2	1	-1/2	0	1/2	7
X_3	5/2	0	1	5/2	0	1/2	0	3/2	1
X_7	-5/2	0	0	-5/2	0	-1/2	1	-3/2	1
X_2	0	1	0	0	0	0	0	-1	1
	13/2	0	0	13/2	0	3/2	0	5/2	$-Z+5$

↳ Como $\nexists\, c_j < 0$ para $j \in NB$, o quadro atual é ótimo (fim da Fase II)

↳ $X_{P5} = (0 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 7 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0)$
$Z_{P5}(X) = 5$

↳ Como a solução é inteira, tem-se:
$Z_{P5} = 5$ = limite inferior (máx)

Diagrama atual:



$*LI = Z_{P5} = 5$

P6: MAX $Z = X_1 + 2X_2 + 3X_3 + X_4$

s.a. $\begin{cases} 3X_1 + 2X_2 + X_3 + 4X_4 \leq 10 \\ 5X_1 + 3X_2 + 2X_3 + 5X_5 \leq 5 \\ X_3 \leq 2 \\ X_2 \leq 0 \\ X_1 \leq 0 \\ X \geq 0 \end{cases}$

↳ Resolução pelo Quadro Simplex

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	
X_5	3	2	1	4	1	0	0	0	0	10
X_6	5	3	2	5	0	1	0	0	0	5
X_7	0	0	1	0	0	0	1	0	0	2
X_8	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
X_9	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
	-1	-2	-3	-1	0	0	0	0	0	-Z

↳ $X = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 10 \quad 5 \quad 2 \quad 0 \quad 0)$
$Z(X) = 0$

↳ Entra na base: X_3
↳ Sai da base: MIN $(10; 5/2; 2) = 2 \rightarrow X_7$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	
X_5	3	2	0	4	1	0	-1	0	0	8
X_6	5	3	0	5	0	1	-2	0	0	1
X_3	0	0	1	0	0	0	1	0	0	2
X_8	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
X_9	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
	-1	-2	0	-1	0	0	3	0	0	-Z+6

↳ Entra na base: X_2
↳ Sai da base: MIN $(5; 5/3; 0) = 0 \rightarrow X_8$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	
X_5	3	0	0	4	1	0	-1	-2	0	8
X_6	5	0	0	5	0	1	-2	-3	0	1
X_3	0	0	1	0	0	0	1	0	0	2
X_2	0	$\boxed{1}$	0	0	0	0	0	1	0	0
X_9	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
	-1	0	0	-1	0	0	3	2	0	$-Z+6$

↳ Entra na base: X_1 (arbitrário)
↳ Sai da base: $MIN(8/3; 1/5; 0) = 0 \rightarrow X_9$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	
X_5	0	0	0	4	1	0	-1	-2	-3	8
X_6	0	0	0	5	0	1	-2	-3	-5	1
X_3	0	0	1	0	0	0	1	0	0	2
X_2	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
X_1	$\boxed{1}$	0	0	0	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	-1	0	0	3	2	1	$-Z+6$

↳ Entra na base: X_4
↳ Sai da base: $MIN(2; 1/5) = 1/5 \rightarrow X_6$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	
X_5	0	0	0	0	1	-4/5	3/5	2/5	1	36/5
X_4	0	0	0	$\boxed{1}$	0	1/5	-2/5	-3/5	-1	1/5
X_3	0	0	1	0	0	0	1	0	0	2
X_2	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
X_1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	0	0	1/5	13/5	7/5	0	$-Z+31/5$

↳ Como $\nexists\, c_j < 0$ para $j \in NB$, o quadro atual é ótimo.

↳ $X_{P6} = (0 \quad 0 \quad 2 \quad 1/5 \quad 36/5 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$

$Z_{P6}(X) = 31/5$

↳ Contudo, a solução não é inteira. Dessa forma:

⇒ Variável não inteira: $X_4 = 1/5 = 0{,}2$

⇒ Inteiros consecutivos: $0 < X_4 < 1 \Rightarrow \begin{cases} X_4 \leq 0 & (P8) \\ X_4 \geq 1 & (P9) \end{cases}$

$$P7: \text{MAX } z = X_1 + 2X_2 + 3X_3 + X_4$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} 3X_1 + 2X_2 + X_3 + 4X_4 \leq 10 \\ 5X_1 + 3X_2 + 2X_3 + 5X_4 \leq 5 \\ X_3 \leq 2 \\ X_2 \leq 0 \\ X_1 \geq 1 \\ X \geq 0 \end{cases}$$

↳ Resolução pelo Quadro Simplex

• Fase I

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}^a	
X_5	3	2	1	4	1	0	0	0	0	0	10
X_6	5	3	2	5	0	1	0	0	0	0	5
X_7	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	2
X_8	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
X_{10}^a	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	1
	-1	-2	-3	-1	0	0	0	0	0	M	-z

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}^a	
X_5	3	2	1	4	1	0	0	0	0	0	10
X_6	5	3	2	5	0	1	0	0	0	0	5
X_7	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	2
X_8	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
X_{10}^a	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	1
	-1	-2	-3	-1	0	0	0	0	0	0	$-Z$
	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	$W-1$

↳ $X = (0 \; 0 \; 0 \; 0 \; 10 \; 5 \; 2 \; 0 \; 0 \; 1)$
$Z(X) = 0$ e $W(X) = 1$

↳ Entra na base: X_1
↳ Sai da base: $\min(10/3; 1; 1) = 1 \rightarrow X_{10}^a$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}^a	
X_5	0	2	1	4	1	0	0	0	3	-3	7
X_6	0	3	2	5	0	1	0	0	5	-5	0
X_7	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	2
X_8	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
X_1	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	1
	0	-2	-3	-1	0	0	0	0	-1	1	$-Z+1$
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$W-0$

↳ Como $\nexists\, c_j < 0$ para $j \in NB$, é marcado o fim da Fase I.

↳ $X = (1 \; 0 \; 0 \; 0 \; 7 \; 0 \; 2 \; 0 \; 0 \; 0)$
$Z(X) = 1$ e $\boxed{W^*(X) = 0}$

• Fase II

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	
X_5	0	2	1	4	1	0	0	0	3	7
X_6	0	3	2	5	0	1	0	0	5	0
X_7	0	0	1	0	0	0	1	0	0	2
X_8	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
X_1	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	1
	0	-2	-3	-1	0	0	0	0	-1	$-Z+1$

↳ Entra na base: X_3
↳ Sai da base: $MIN(7; 0; 2) = 0 \rightarrow X_6$

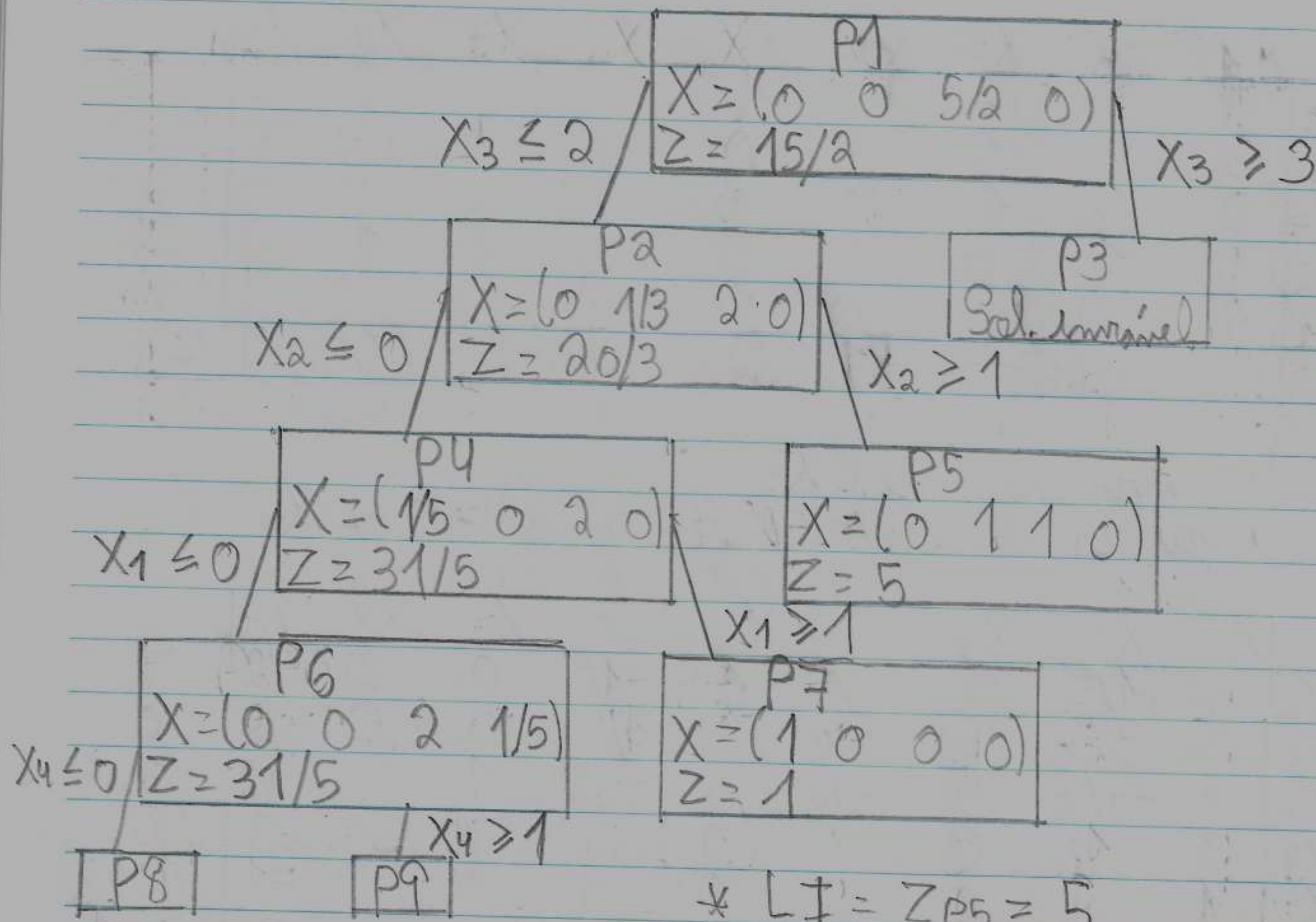
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	
X_5	0	1/2	0	3/2	1	-1/2	0	0	1/2	7
X_3	0	3/2	$\boxed{1}$	5/2	0	1/2	0	0	5/2	0
X_7	0	-3/2	0	-5/2	0	-1/2	1	0	-5/2	2
X_8	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
X_1	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	1
	0	5/2	0	13/2	0	3/2	0	0	13/2	$-Z+1$

↳ Como $\nexists\, c_j < 0$ para $j \in NB$, o quadro atual é ótimo.

↳ $X_{P7} = (1 \; 0 \; 0 \; 0 \; 7 \; 0 \; 2 \; 0 \; 0)$
$Z_{P7}(X) = 1$

↳ Como a solução é inteira, ela é viável. Contudo, como $Z_{P7} < LI$ ela é descartada para o problema original de maximização.

Diagrama atual:



$* \; LI = Z_{P5} = 5$

P8: $\max Z = X_1 + 2X_2 + 3X_3 + X_4$

$$
\text{s.a.} \begin{cases} 3X_1 + 2X_2 + X_3 + 4X_4 \leq 10 \\ 5X_1 + 3X_2 + 2X_3 + 5X_4 \leq 5 \\ X_3 \leq 2 \\ X_2 \leq 0 \\ X_1 \leq 0 \\ X_4 \leq 0 \\ X \geq 0 \end{cases}
$$

↳ Resolução pelo Quadro Simplex

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	
X_5	3	2	1	4	1	0	0	0	0	0	10
X_6	5	3	2	5	0	1	0	0	0	0	5
X_7	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	2
X_8	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
X_9	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
X_{10}	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
	-1	-2	-3	-1	0	0	0	0	0	0	-Z

↳ $X = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 10 \ 5 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0)$
$Z(X) = 0$

↳ Entra na base: X_3
↳ Sai da base: MIN (10; 5/2; 2) = 2 → X_7

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	
X_5	3	2	0	4	1	0	-1	0	0	0	8
X_6	5	3	0	5	0	1	-2	0	0	0	1
X_3	0	0	$\boxed{1}$	0	0	0	1	0	0	0	2
X_8	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
X_9	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
X_{10}	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
	-1	-2	0	0	0	0	3	0	0	0	-Z+6

↳ Entra na base: X_2
↳ Sai da base: MIN (4; 1/3; 0) = 0 → X_8

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	
X_5	3	0	0	4	1	0	-1	-2	0	0	8
X_6	5	0	0	5	0	1	-2	-3	0	0	1
X_3	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	2
X_2	0	$\boxed{1}$	0	0	0	0	0	1	0	0	0
X_9	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
X_{10}	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
	-1	0	0	-1	0	0	3	2	0	0	$-Z+6$

↳ Entra na base: X_1 (arbitrário)
↳ Sai da base: $MIN(8/3; 1/5; 0) = 0 \rightarrow X_9$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	
X_5	0	0	0	4	1	0	-1	-2	-3	0	8
X_6	0	0	0	5	0	1	-2	-3	-5	0	1
X_3	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	2
X_2	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
X_1	$\boxed{1}$	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
X_{10}	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	-1	0	0	3	2	1	0	$-Z+6$

↳ Entra na base: X_4
↳ Sai da base: $MIN(2; 1/5; 0) = 0 \rightarrow X_{10}$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	
X_5	0	0	0	0	1	0	-1	-2	-3	-4	8
X_6	0	0	0	0	0	1	-2	-3	-5	-5	1
X_3	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	2
X_2	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
X_1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
X_4	0	0	0	$\boxed{1}$	0	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	0	0	0	3	2	1	1	$-Z+6$

↳ Como $\nexists\, c_j < 0$ para $j \in NB$, o quadro atual é ótimo

↳ $X_{P8} = (0 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad 8 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$

$Z_{P8}(X) = 6$

↳ Como a solução é inteira, ela é válida para o problema original. Além disso:

$$Z_{P8} > LI \Rightarrow LI = Z_{P8} = 6 \ (max)$$

$$P9: \ MAX \ Z = X_1 + 2X_2 + 3X_3 + X_4$$

$$s.a. \begin{cases} 3X_1 + 2X_2 + X_3 + 4X_4 \leq 10 \\ 5X_1 + 3X_2 + 2X_3 + 5X_4 \leq 5 \\ X_3 \leq 2 \\ X_2 \leq 0 \\ X_1 \leq 0 \\ X_4 \geq 1 \\ X \geq 0 \end{cases}$$

↳ Resolução pelo Quadro Simplex

• Fase I

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}^a	
X_5	3	2	1	4	1	0	0	0	0	0	0	10
X_6	5	3	2	5	0	1	0	0	0	0	0	5
X_7	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	2
X_8	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
X_9	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
X_{11}^a	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	1	1
	-1	-2	-3	-1	0	0	0	0	0	0	M	-Z

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}^a	
x_5	3	2	1	4	1	0	0	0	0	0	0	10
x_6	5	3	2	5	0	1	0	0	0	0	0	5
x_7	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	2
x_8	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
x_9	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
x_{11}^a	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	1	1
	-1	-2	-3	-1	0	0	0	0	0	0	0	$-Z$
	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	$W-1$

↳ $x = (0\ 0\ 0\ 0\ 10\ 5\ 2\ 0\ 0\ 0\ 1)$
$Z(x) = 0$ e $W(x) = 1$

↳ Entra na base: x_4
↳ Sai da base: $MIN(5/2; 1; 1) = 1 \rightarrow x_{11}^a$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}^a	
x_5	3	2	1	0	1	0	0	0	0	4	-4	6
x_6	5	3	2	0	0	1	0	0	0	5	-5	0
x_7	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	2
x_8	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
x_9	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
x_4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	1	1
	-1	-2	-3	0	0	0	0	0	0	-1	1	$-Z+1$
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$W-0$

↳ Como ∄ $c_j < 0$ para $j \in NB$, é marcado o fim da Fase I.

↳ $x = (0\ 0\ 0\ 1\ 6\ 0\ 2\ 0\ 0\ 0\ 0)$
$Z(x) = 1$ e $\boxed{W^*(x) = 0}$

• Fase II

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	
X_5	3	2	1	0	1	0	0	0	0	4	6
X_6	5	3	2	0	0	1	0	0	0	5	0
X_7	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	2
X_8	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
X_9	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
X_4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	1
	-1	-2	-3	0	0	0	0	0	0	-1	$-Z+1$

↳ Entra na base: X_3
↳ Sai da base: $\text{MIN}(6; 0; 2) = 0 \rightarrow X_6$

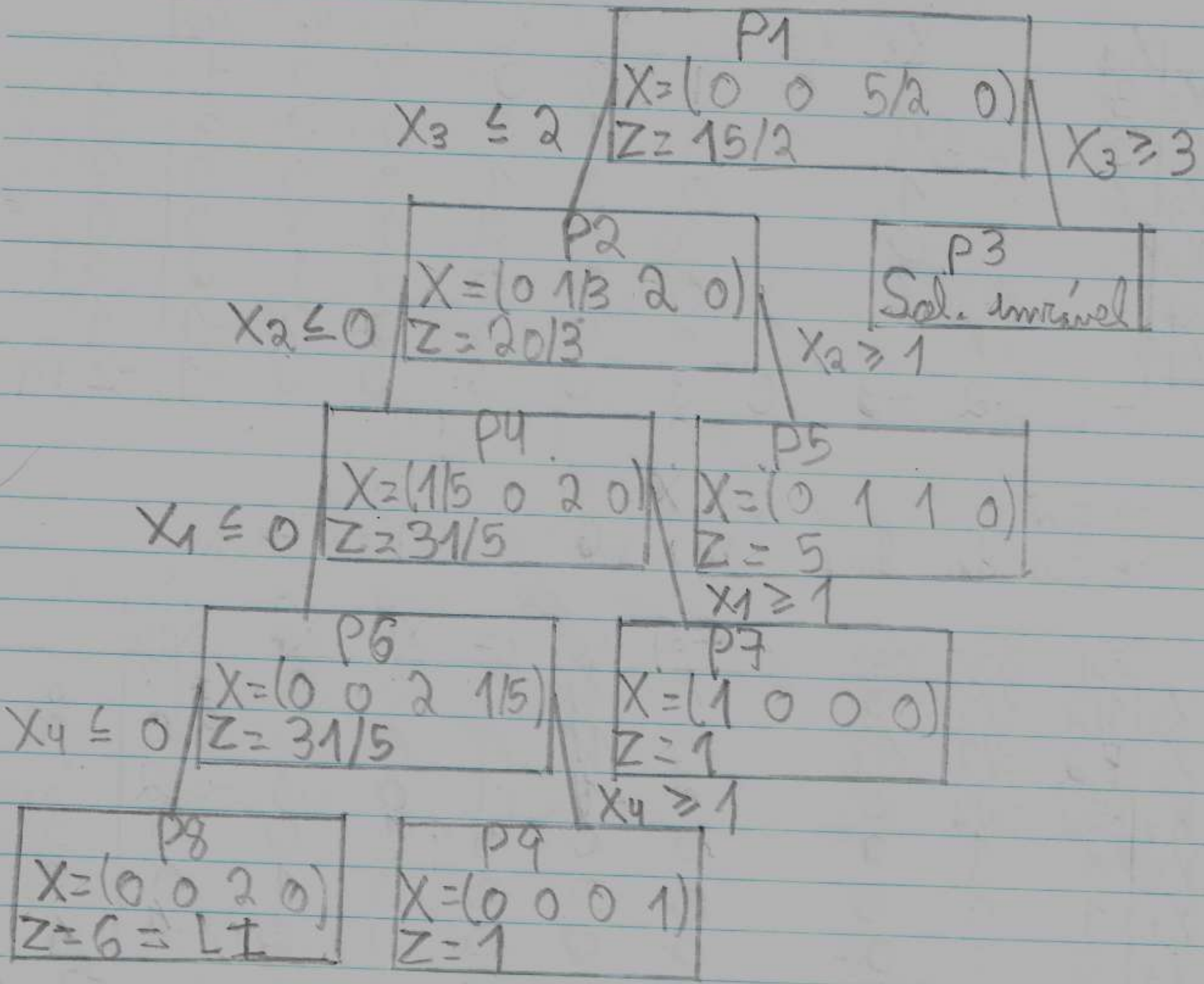
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	
X_5	1/2	1/2	0	0	1	-1/2	0	0	0	3/2	6
X_3	5/2	3/2	1	0	0	1/2	0	0	0	5/2	0
X_7	-5/2	-3/2	0	0	0	-1/2	1	0	0	-5/2	2
X_8	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
X_9	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
X_4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	1
	13/2	5/2	0	0	0	3/2	0	0	0	13/2	$-Z+1$

↳ Como $c_j < 0$ para $j \in NB$, o quadro atual é ótimo

↳ $X_{pq} = (0\ 0\ 0\ 1\ 6\ 2\ 0\ 0\ 0\ 0)$
$Z_{pq}(X) = 1$

↳ Como a solução é inteira, ela é válida para o problema original. Contudo, como $Z_{pq} < LI$, a solução é descartada.

Diagrama final:



$\therefore X^* = X_{P8} = (0 \quad 0 \quad 2 \quad 0)$

$Z^* = Z_{P8} = 6$ → Solução única degenerada

- Método de Gomory

(6) MAX $Z = 7X_1 + 7X_2 + 6X_3 + 9X_4$

s.a. $4X_1 + 5X_2 + 3X_3 + 5X_4 \leq 300$

$2X_1 + (3/2)X_2 + 3X_3 + 3X_4 \leq 200$

$X \geq 0$, inteira

↳ Resolução pelo Quadro Simplex (após relaxamento)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
X_5	4	5	3	5	1	0	300
X_6	2	3/2	3	3	0	1	200
	-7	-7	-6	-9	0	0	-Z

↳ $X = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 300 \quad 200)$

$Z(X) = 0$

↳ Entra na base: X_4

↳ Sai da base: MIN $(60; 200/3) = 60 \rightarrow X_5$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
X_4	4/5	1	3/5	1	1/5	0	60
X_6	-2/5	-3/2	6/5	0	-3/5	1	20
	1/5	2	-3/5	0	9/5	0	-Z + 540

↳ Entra na base: X_3

↳ Sai da base: MIN $(100; 50/3) = 50/3 \rightarrow X_6$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
X_4	1	7/4	0	1	1/2	-1/2	50
X_3	-1/3	-5/4	1	0	-1/2	5/6	50/3
	0	5/4	0	0	3/2	1/2	-Z + 550

↳ Como $\nexists\ c_j < 0$ para $j \in NB$, o quadro atual é ótimo.

↳ $X = (0 \quad 0 \quad 50/3 \quad 50 \quad 0 \quad 0)$
$Z(X) = 550$

↳ Contudo, a solução não é inteira. Dessa forma, aplicando Gomory em X_3:

$$-\frac{1}{3}X_1 - \frac{5}{4}X_2 + 1X_3 + 0X_4 - \frac{1}{2}X_5 + \frac{5}{6}X_6 = \frac{50}{3}$$

$$\Rightarrow \left(-1+\frac{2}{3}\right)X_1 + \left(-2+\frac{3}{4}\right)X_2 + (1+0)X_3 + (0+0)X_4 + \left(-1+\frac{1}{2}\right)X_5 + \left(0+\frac{5}{6}\right)X_6 = \left(16+\frac{2}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}X_1 + \frac{3}{4}X_2 + 0X_3 + 0X_4 + \frac{1}{2}X_5 + \frac{5}{6}X_6 - \frac{2}{3} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}X_1 + \frac{3}{4}X_2 + 0X_3 + 0X_4 + \frac{1}{2}X_5 + \frac{5}{6}X_6 \geq \frac{2}{3}$$

↳ Atualizando e continuando o quadro Simplex

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8^a	
X_4	1	7/4	0	1	1/2	-1/2	0	0	50
X_3	-1/3	-5/4	1	0	-1/2	5/6	0	0	50/3
X_8^a	2/3	3/4	0	0	1/2	5/6	-1	1	2/3
	0	5/4	0	0	3/2	1/2	0	M	-Z+550

• Fase I

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8^a	
X_4	1	7/4	0	1	1/2	-1/2	0	0	50
X_3	-1/3	-5/4	1	0	-1/2	5/6	0	0	50/3
X_8^a	2/3	3/4	0	0	1/2	5/6	-1	1	2/3
	0	5/4	0	0	3/2	1/2	0	0	-Z + 550
	-2/3	-3/4	0	0	-1/2	-5/6	1	0	W - 2/3

↳ Entra na base: X_6
↳ Sai da base: MIN(20; 4/5) = 4/5 → X_8^a

$\frac{-5}{6}$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8^a	
X_4	7/5	11/5	0	1	4/5	0	-3/5	3/5	252/5
X_3	-1	-2	1	0	-1	0	1	-1	48/3
X_6	4/5	9/10	0	0	3/5	1	-6/5	6/5	4/5
	-2/5	4/5	0	0	6/5	0	3/5	-3/5	-Z + 2748/5
	0	0	0	0	0	0	0	1	W - 0

↳ Como ∄ $c_j < 0$ para $j \in NB$, é marcado o fim da Fase I.

↳ X = (0 0 48/3 252/5 0 4/5 0 0)
Z(X) = 2748/5 e W*(X) = 0

• Fase II

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	
X_4	7/5	11/5	0	1	4/5	0	-3/5	252/5
X_3	-1	-2	1	0	-1	0	1	48/3
X_6	4/5	9/10	0	0	3/5	1	-6/5	4/5
	-2/5	4/5	0	0	6/5	0	-3/5	-Z + 2748/5

↳ Entra na base: X_1

↳ Sai da base: MIN(36; 1) = 1 → X_6

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	
X_4	0	5/8	0	1	-1/4	-7/4	3/2	49
X_3	0	-7/8	1	0	-1/4	5/4	-1/2	17
X_1	1	9/8	0	0	3/4	5/4	-3/2	1
	0	5/4	0	0	3/2	1/2	0	-Z + 550

↳ Como $\nexists c_j < 0$ para $j \in NB$, o quadro atual é ótimo (fim da Fase II)

↳ $X = (1 \quad 0 \quad 17 \quad 49 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$
$Z(X) = 550$

∴ Como a solução é inteira e, portanto, válida para o problema original, tem-se:
$X^* = (1 \quad 0 \quad 17 \quad 49)$
$Z^* = 550$ → Solução única

7) MAX: $Z = 3X_1 + 4X_2$
s.a. $2X_1 + X_2 \leq 6$
$2X_1 + 3X_2 \leq 9$
$X \geq 0$, inteiro

↳ Resolução pelo Quadro Simplex (após relaxamento)

	X_1	X_2	X_3	X_4	
X_3	2	1	1	0	6
X_4	2	3	0	1	9
	-3	-4	0	0	-Z

↳ $X = (0 \quad 0 \quad 6 \quad 9)$
$Z(X) = 0$

↳ Entra na base: X_2
↳ Sai da base: $MIN(6; 3) = 3 \rightarrow X_4$

	X_1	X_2	X_3	X_4	
X_3	4/3	0	1	-1/3	3
X_2	2/3	1	0	1/3	3
	-1/3	0	0	4/3	$-Z + 12$

↳ Entra na base: X_1
↳ Sai da base: $MIN(9/4; 9/2) = 9/4 \rightarrow X_3$

	X_1	X_2	X_3	X_4	
X_1	1	0	3/4	-1/4	9/4
X_2	0	1	-1/2	1/2	3/2
	0	0	1/4	5/4	$-Z + 51/4$

↳ Como $\nexists\, c_j < 0$ para $j \in NB$, o quadro atual é ótimo.

↳ $X = (9/4 \quad 3/2 \quad 0 \quad 0)$
$Z(X) = 51/4$

↳ Contudo, a solução não é inteira. Dessa forma, aplicando Gomory em X_2:

$$\Rightarrow (0+0)X_1 + (1+0)X_2 + \left(-1 + \frac{1}{2}\right)X_3 + \left(0 + \frac{1}{2}\right)X_4 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 0X_1 + 0X_2 + \frac{1}{2}X_3 + \frac{1}{2}X_4 \geq \frac{1}{2}$$

↳ Atualizando e continuando o Quadro Simplex

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6^a	
X_1	1	0	3/4	-1/4	0	0	9/4
X_2	0	1	-1/2	1/2	0	0	3/2
X_6^a	0	0	-1/2	1/2	-1	1	1/2
	0	0	1/4	5/4	0	M	$-Z + 51/4$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6^a	
X_1	1	0	3/4	-1/4	0	0	9/4
X_2	0	1	-1/2	1/2	0	0	3/2
X_6^a	0	0	1/2	1/2	-1	1	1/2
	0	0	1/4	5/4	0	0	$-Z + 51/4$
	0	0	-1/2	-1/2	1	0	$W - 1/2$

• Fase I

↳ Entra na base: X_3 (arbitrário)
↳ Sai da base: MIN $(3; 1) = 1 \rightarrow X_6^a$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6^a	
X_1	1	0	0	-1	3/2	-3/2	3/2
X_2	0	1	0	1	-1	1	2
X_3	0	0	1	1	-2	2	1
	0	0	0	1	1/2	-1/2	$-Z + 25/2$
	0	0	0	0	0	1	$W - 0$

↳ Como $\nexists\, c_j < 0$ para $j \in NB$, é marcado o fim da Fase I.

↳ $X = (3/2 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$
$Z(X) = 25/2$ e $W^*(X) = 0$

• Fase II

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
X_1	1	0	0	-1	3/2	3/2
X_2	0	1	0	1	-1	2
X_3	0	0	1	1	-2	1
	0	0	0	1	1/2	$-Z + 25/2$

↳ Como $\nexists\, c_j < 0$ para $j \in NB$, o quadro atual é ótimo

↳ $X = (3/2 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 0)$
$Z(X) = 25/2$

↳ Contudo, a solução não é inteira. Dessa forma, aplicando Gomory em X_1:

$$\Rightarrow (1+0)X_1 + (0+0)X_2 + (0+0)X_3 + (-1+0)X_4 + \left(1+\frac{1}{2}\right)X_5 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 0X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 0X_4 + \frac{1}{2}X_5 \geq \frac{1}{2}$$

↳ Atualizando e continuando o quadro Simplex

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7^a	
X_1	1	0	0	-1	3/2	0	0	3/2
X_2	0	1	0	1	-1	0	0	2
X_3	0	0	1	1	-2	0	0	1
X_7^a	0	0	0	0	1/2	-1	1	1/2
	0	0	0	1	1/2	0	M	$-Z + 25/2$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7^a	
X_1	1	0	0	-1	3/2	0	0	3/2
X_2	0	1	0	1	-1	0	0	2
X_3	0	0	1	1	-2	0	0	1
X_7^a	0	0	0	0	1/2	-1	1	1/2
	0	0	0	1	1/2	0	0	$-Z + 25/2$
	0	0	0	0	-1/2	1	0	$W - 1/2$

- Fase I

↳ Entra na base: X_5
↳ Sai da base: $\min(1; 1) = 1 \to X_7^a$ (arbitrário)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7^a	
X_1	1	0	0	-1	0	3	-3	0
X_2	0	1	0	1	0	-2	2	3
X_3	0	0	1	1	0	-4	4	3
X_5	0	0	0	0	$\boxed{1}$	-2	2	1
	0	0	0	1	0	1		$-Z + 12$
	0	0	0	0	0	0	1	$W - 0$

↳ Como $\nexists\, c_j < 0$ para $j \in NB$, é marcado o fim da Fase I

↳ $X = (0 \quad 3 \quad 3 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0)$
$Z(X) = 12$ e $W^*(X) = 0$

- Fase II

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	1	0	0	-1	0	3	0
x_2	0	1	0	1	0	-2	3
x_3	0	0	1	1	0	-4	3
x_5	0	0	0	0	1	-2	1
	0	0	0	1	0	1	$-z+12$

↳ Como $\nexists\, c_j < 0$ para $j \in NB$, o quadro atual é ótimo.

↳ $X = (0 \quad 3 \quad 3 \quad 0 \quad 1 \quad 0)$
$Z(X) = 12$

∴ Como a solução é inteira e, portanto, válida para o problema original, tem-se:

$X^* = (0 \quad 3)$
$Z^* = 12$ → Solução única degenerada