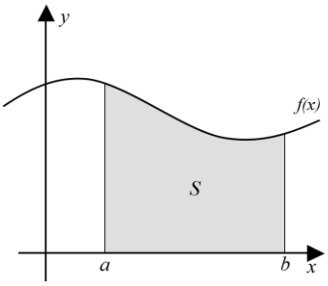
INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

No cálculo, a integral de uma função foi criada originalmente para determinar a área sob uma curva no plano cartesiano. Ela também surge naturalmente em dezenas de problemas de Física, como por exemplo, na determinação da posição em todos os instantes de um objeto, se for conhecida a sua velocidade instantânea em todos os instantes.



Seja uma função $f(x)$ contínua em um intervalo [a,b] e sua primitiva F(x) conhecida. A integral definida de $f(x)$ pode ser calculada pela fórmula de Newton-Leibniz:

$$\int_a^b f(x)dx = f\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Porém, essa técnica não pode ser aplicada quando se conhece apenas alguns pontos tabelados da função $f(x)$ ou, quando $f(x)$ não pode ser integrada. Portanto, os métodos de integração numérica permitem calcular o valor aproximado de uma integral definida sem conhecer uma expressão analítica para a sua primitiva.

Integrar numericamente uma função $y = f(x)$ num intervalo [a, b] pode ser o mesmo que integrar um polinômio $P_n(x)$ que aproxime $f(x)$ em um determinado intervalo.

Fórmulas de Newton – Cotes

Considere uma função definida em $x_0, x_1, ..., x_n$ (n + 1) pontos distintos e equidistantes no intervalo [a, b]. Para a determinação das fórmulas de Newton-Cotes utiliza-se o polinômio interpolador de Newton-Gregory para pontos equidistantes:

$$P_n(s) = f(x_0) + s\,\Delta f(x_0) + s(s-1)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!} + ... + s(s-1)\,...\,(s-n+1)\,\frac{\Delta^n f(x_0)}{n!}.$$

em que $s = \dfrac{x - x_0}{h}$.

Aproximando a função $f(x)$ pelo polinômio de Newton-Gregory $p_n(s)$ e integrando-o, obtém-se as fórmulas de Newton-Cotes.

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \cong \frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)\right]+\frac{h}{2}\left[f(x_1)+f(x_2)\right]+\ldots+\frac{h}{2}\left[f(x_{x-1})+f(x_n)\right]=$$

$$=\frac{h}{2}\left[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\ldots+2f(x_{x-1})+f(x_n)\right]$$

Erro Cometido na Integração Numérica

Teorema

Se $f(x)$ possui (n+1) derivadas continuas no intervalo $[x_0, x_n]$ e os pontos $x_j = x_0 + jh$, j = 0, 1, ..., n subdividem o intervalo de integração em um número ímpar de intervalos iguais, então a expressão do erro para as fórmulas de Newton-Cotes com n ímpar é dada por:

$$E_n = \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\int_0^n (u-1)\ldots(u-n)du \text{ para algum ponto } \xi \in [x_0, x_n]$$

Teorema

Se $f(x)$ possui (n+2) derivadas continuas no intervalo $[x_0, x_n]$ e os pontos $x_j = x_0 + jh$, j = 0, 1, ..., n subdividem o intervalo de integração em um número par de intervalos iguais, então a expressão do erro para as fórmulas de Newton-Cotes com n par é dada por:

$$E_n = \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}\int_0^n (u-\frac{n}{2})u(u-1)\ldots(u-n)du \text{ para algum ponto } \xi \in [x_0, x_n]$$

Regra dos Trapézios

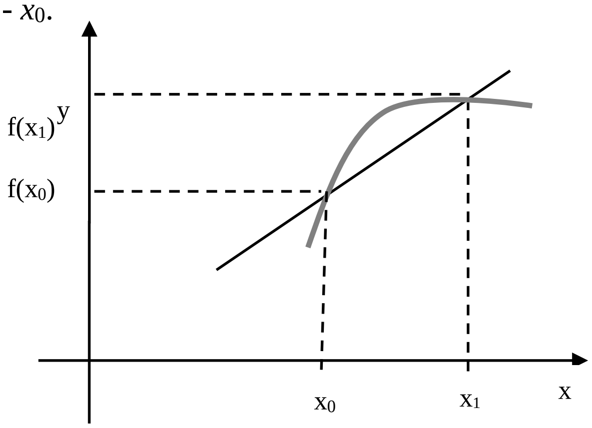
Considere uma função $f(x)$ contínua e definida em dois pontos x_0 e x_1 no intervalo [a,b]. Para a determinação da Regra dos Trapézios utiliza-se o polinômio de Newton-Gregory do 1º grau, que é dado por:

$$P_1(x) = f(x_0) + (x - x_0)\frac{\Delta f(x_0)}{h}$$

e assim, para a = x_0 e b = x_1

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_1} p_1(x)dx = h\int_0^1 P_1(s)ds$$

em que $s = \dfrac{x - x_0}{h}$ e $h = x_1 - x_0$.



Integrando $P_1(s)$, obtemos uma fórmula de integração da seguinte forma:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \cong h\int_0^1 [f(x_0) + s\Delta f(x_0)]ds = h\int_0^1 f(x_0)\,ds + h\int_0^1 \Delta f(x_0)s\,ds =$$

$$= h\int_0^1 f(x_0)\,ds + h\int_0^1 [f(x_1) - f(x_0)]\frac{s^2}{2}ds = h\,f(x_0)\,s\,|_0^1 + h[f(x_1) - f(x_0)]\frac{s^2}{2}ds =$$

$$= h\,f(x_0) + \frac{h}{2}[f(x_1) - f(x_0)] = \frac{1}{2}(2hf(x_0) + hf(x_1) - hf(x_0)) = \frac{h}{2}[f(x_1) - f(x_0)]$$

Portanto: $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}[f(x_1) - f(x_0)]$

Erro na regra dos trapézios

O intervalo n = 1 é ímpar e, portanto:

$$E_1 = \frac{h^3 f^{(2)}(\xi)}{2!}\int_0^1 u(u-1)du,\, x_0 \le \xi \le x_1 \Rightarrow E_1 = \frac{-h^3 f^{(2)}(\xi)}{12}$$

Limitante superior para o erro

$$|E_1| \le \frac{h^3}{12}\max\{|f^{(2)}(x)/x_0 \le x \le x_1|\}$$

Exemplo:

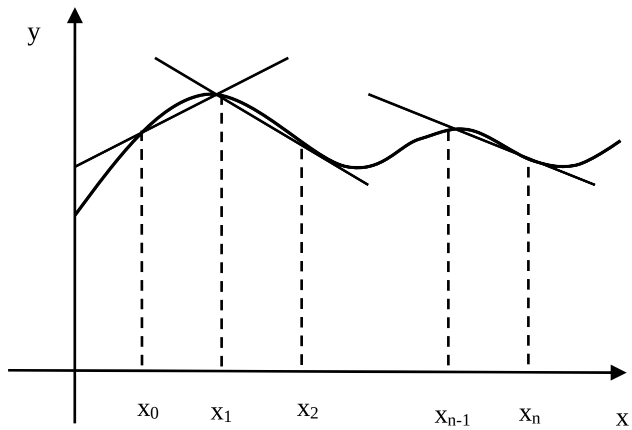
Dada a tabela

x	0.5	1
$f(x)$	-0.1931	1

Calcule o valor aproximado de $\int_{0,5}^{1}(\ln(x)+x)dx$ usando a regra dos trapézios e um Limitante Superior para o erro.

Regra dos Trapézios generalizada

A regra dos trapézios generalizada consiste na subdivisão do intervalo de integração e n subintervalos iguais, cada qual de amplitude $h = \dfrac{x_0 - x_n}{n}$ e a aplicação da Regra dos Trapézios em cada subintervalo, isto é, a cada 2 pontos consecutivos.



Assim, temos que:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \cong \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right] + \frac{h}{2}\left[f(x_1) + f(x_2)\right] + \ldots + \frac{h}{2}\left[f(x_{x-1}) + f(x_n)\right] =$$

$$= \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{x-1}) + f(x_n)\right]$$

Erro na regra dos trapézios generalizada

$$E_t = \frac{h^2}{12}(x_n - x_0) f^{(2)}(\xi), \xi \in [x_{0,} x_1]$$

Limitante superior para o erro

$$|E_t| \leq \frac{h^2}{12}(x_n - x_0)\max\{|f^{(2)}(x)| / x_0 \leq x \leq x_n\}$$

Exemplo:

Calcule o valor aproximado da integral $\int_1^4 \sqrt{x}dx$ usando a regra dos trapézios generalizada para 2, 4 e 6 subintervalos e um limitante superior para o erro.

Exercícios

1 Calcule o valor de $\int_{-1}^{1} (x^3 + 1)\,dx$ pela Regra dos Trapézios usando 5 divisões no intervalo [a,b].

2 Usando a Regra dos Trapézios determine o valor de $\int_{1}^{3} \frac{dx}{x}$ com 6 subintervalos. Compare o resultado com o valor de ln(3).

Regra 1/3 de Simpson

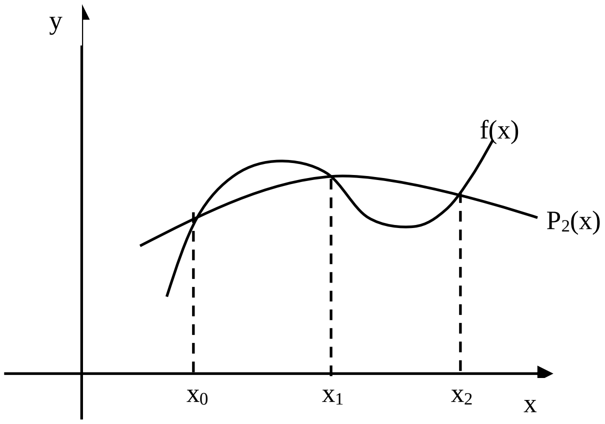
Considere uma função $f(x)$ contínua no intervalo [a,b], definida em 3 pontos distintos x_0, x_1, x_2 equidistantes. Para determinar a Regra 1/3 de Simpson utiliza-se o polinômio de Newton-Gregory de grau 2, que é dado por:

$$P_2(x) = f(x_0) + (x - x_0)\,\Delta f(x_0) + (x - x_0)(x - x_1)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2}$$

Fazendo $a = x_0$ e $b = x_n$, temos:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} p_2(x)dx = h\int_0^2 P_2 ds$$

em que $s = \dfrac{x - x_0}{h}$ e $h = \dfrac{x_n - x_0}{n}$.



Integrando $P_2(s)$, obtemos uma fórmula de integração da seguinte forma:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = h\int_0^2 \left[f(x_0) + s\Delta^1 f(x_0) + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0) \right] ds =$$

$$= h\int_0^2 f(x_0)ds + h\int_0^2 s\Delta^1 f(x_0)ds + \int_0^2 \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0)ds =$$

$$= h\, f(x_0)s\,|_0^2 + h(f(x_1) - f(x_0))\left.\frac{s^2}{2}\right|_0^2 + \frac{h}{2}(f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0))\left.\left(\frac{s^3}{3} - \frac{s^2}{2}\right)\right|_0^2 =$$

$$= 2h\, f(x_0) + 2h\, f(x_1) - 2h\, f(x_0) + \frac{h}{2}.\frac{2}{3}(f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)) =$$

$$= 2h\, f(x_1) + \frac{h}{3}[f(x_3) - 2f(x_1) + f(x_0)] = \frac{h}{3}[6f(x_1) + f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)] =$$

$$= \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

Portanto: $\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)]$

Erro na regra 1/3 de Simpson

O intervalo de integração foi subdividido em um número n = 2 (par de intervalos) e, portanto:

$$E_2 = \frac{h^5 f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_0^2 (u-1).u(u-1).(u-2)du \Rightarrow E = \frac{-h^5 f^{(4)}(\xi)}{90} \quad x_0 \le \xi \le x_2$$

Limitante superior para o erro

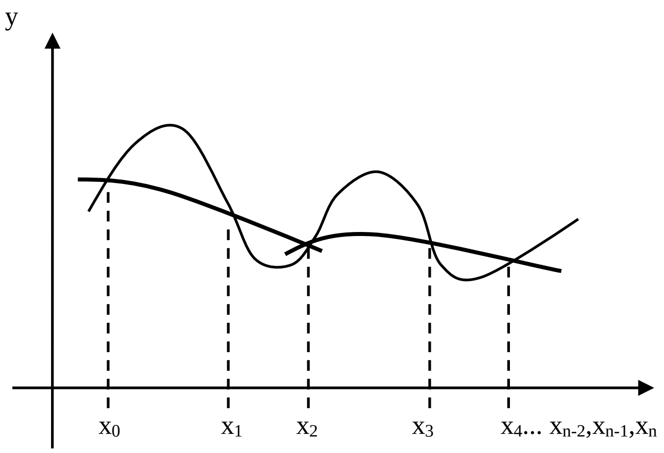
$$|E_2| \le \frac{h^5}{90}\{\max|f^{(4)}|, x_0 \le x \le x_2\}$$

Exemplo:

Calcule o valor aproximado de $\int_{0,5}^{1,5} \cos x dx$ usando a Regra 1/3 de Simpson e um Limitante Superior para o erro.

Regra 1/3 de Simpson generalizada

A regra 1/3 de Simpson generalizada consiste na subdivisão do intervalo de integração e n subintervalos iguais, cada qual de amplitude $h = \dfrac{x_0 - x_n}{n}$, em que n é um número **par** de subintervalos, de forma que $a = x_0$ e $b = x_n$ e a aplicação da Regra 1/3 de Simpson a cada 2 subintervalos consecutivos.



Aplicando a regra 1/3 de Simpson a cada 2 subintervalos, temos que:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \cong \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) \right] + + \frac{h}{3}\left[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4) \right] +$$

$$+ \ldots + \frac{h}{3}\left[f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n) \right] =$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n) \right]$$

Erro na regra 1/3 de Simpson generalizada

$$E = \frac{-h^4}{180}(x_n - x_0) f^{(4)}(\xi), x_0 \le \xi \le x_n$$

Limitante superior para o erro

$$| E | \le \frac{h^4}{180}(x_n - x_0) \max\{| f^{(4)}(x) |, x_0 \le x \le x_n\}$$

Exemplo:

Calcule o valor aproximado da integral $\int_0^3 (xe^x + 1)dx$ usando a regra 1/3 de Simpson generalizada para 2, 4 e 6 subintervalos e um limitante superior para o erro.

Exercícios

1 Calcule o valor de $\int_{-1}^{1}(x^3+1)\,dx$ pela Regra 1/3 de Simpson usando 5 divisões no intervalo [a,b].

2 Usando a Regra 1/3 de Simpson determine o valor de $\int_{1}^{3}\frac{dx}{x}$ com 6 subintervalos. Compare o resultado com o valor de ln(3).

Regra 3/8 de Simpson

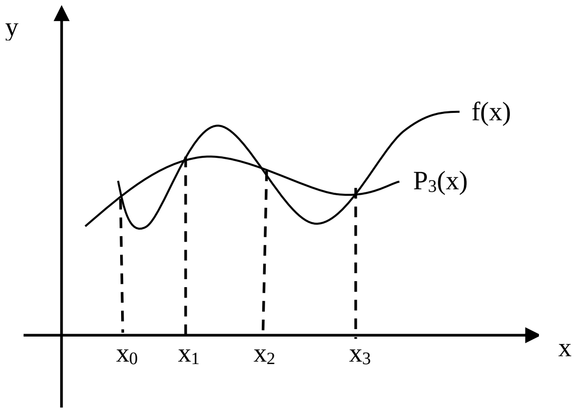
Considere uma função $f(x)$ contínua no intervalo [a,b], definida em x_0, x_1, x_2 , x_3, 4 pontos distintos e equidistantes. Para determinar a Regra 1/3 de Simpson utiliza-se o polinômio de Newton-Gregory de grau 3, que é dado por:

$$P_3(x) = f(x_0) + (x - x_0)\,\Delta f(x_0) + (x - x_0)(x - x_1)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2} + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\frac{\Delta^3 f(x_0)}{3!h^3}$$

Fazendo $a = x_0$ e $b = x_n$, temos:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_3} p_3(x)dx = h\int_0^3 P_3 ds$$

em que $s = \dfrac{x - x_0}{h}$ e $h = \dfrac{x_n - x_0}{n}$.



Integrando $P_3(s)$, obtemos uma fórmula de integração da seguinte forma:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \cong h\int_0^3\left[\Delta^0 f(x_0) + u\Delta f(x_0) + u(u-1)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!} + u(u-1)(u-2)\frac{\Delta^3 f(x_0)}{3!}\right]du =$$

$$= h\int_0^3 \Delta^0 f(x_0)du + h\int_0^3 u\Delta f(x_0)du + \frac{h}{2}\int_0^3 u(u-1)\Delta^2 f(x_0)du + \frac{h}{6}\int_0^3 u(u-1)(u-2)\Delta^3 f(x_0)du =$$

$$= h\, f(x_0)u\Big|_0^3 + h[f(x_1) - f(x_0)]\frac{u^2}{2}\Bigg|_0^3 + \frac{h}{2}[f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)]\left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2}\right)\Bigg|_0^3 +$$

$$+\frac{h}{6}[f(x_3) - 3f(x_2) + 3f(x_1) - f(x_0)]\left(\frac{u^4}{4} - u^3 + u^2\right)\Bigg|_0^3 = \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

Portanto: $\displaystyle\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$

Erro na regra 3/8 de Simpson

Para esta regra de integração, o intervalo [a, b] foi subdividido em um número n = 3, ímpar, de subintervalos, portanto:

$$E_3 = \frac{h^5}{4!} f^{(4)}(\xi)\int_0^3 u(u-1)(u-2)(u-3)du \Rightarrow E_3 = -\frac{3}{80} h^5 \max\{| f^{(4)}(x)|, x_0 \leq x \leq x_3\}$$

Limitante superior para o erro

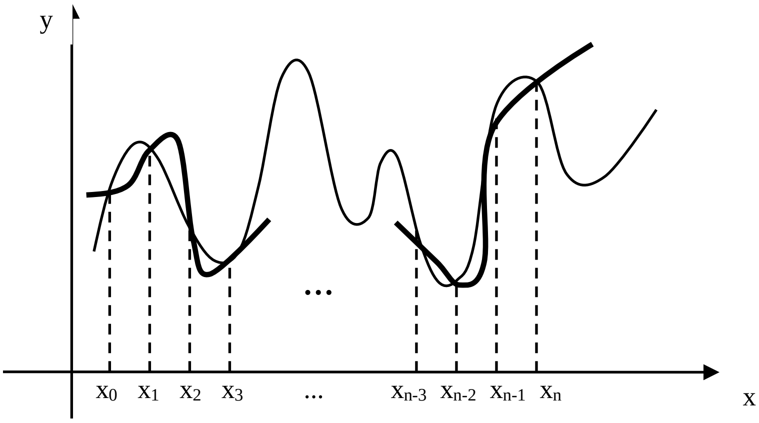
$$| E_3(x)| \leq \frac{3}{80} h^5 \max\{| f^{(4)}(x)|, x_0 \leq \xi \leq x_3\}$$

Exemplo:

Calcule o valor aproximado de $\int_{0,3}^{1,2} (e^x + 5x)dx$ usando a Regra 3/8 de Simpson e um Limitante Superior para o erro.

Regra 3/8 de Simpson generalizada

A regra 3/8 de Simpson generalizada consiste na subdivisão do intervalo [a, b] de integração e n subintervalos iguais, cada qual de amplitude $h = \frac{x_0 - x_n}{n}$, em que n é um número múltiplo de 3, de forma que a = x_0 e b = x_n e a aplicação da Regra 3/8 de Simpson a cada 4 pontos consecutivos, ou 3 subintervalos consecutivos.



Aplicando a regra 3/8 de Simpson a cada 2 subintervalos, temos que:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{3h}{8}\left[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)\right]+\frac{3h}{8}\left[f(x_3)+3f(x_4)+3f(x_5)+f(x_6)\right]+$$

$$+\ldots+\frac{3h}{8}\left[f(x_{n-3})+3f(x_{n-2})+3f(x_{n-1})+f(x_n)\right]=$$

$$\therefore \frac{3h}{8}\left\{f(x_0)+3\left[f(x_1)+f(x_2)+f(x_4)+\ldots+f(x_{n-2})+f(x_{n-1})\right]+2\left[f(x_3)+f(x_6)+\ldots+f(x_{n-3})+f(x_n)\right]\right\}$$

Erro na regra 3/8 de Simpson generalizada

$$E = \frac{h^4}{80}(x_n - x_0)f^{(4)}(\xi), x_0 \le \xi \le x_n$$

Limitante superior para o erro

$$|E| \le \frac{h^4}{80}(x_n - x_0)\max\{|f^{(4)}(x)|, x_0 \le x \le x_n\}$$

Exemplo:

Calcule o valor aproximado da integral $\int_1^7 \ln(x+9)dx$ usando a regra 3/8 de Simpson generalizada para 3, 6 e 9 subintervalos e um limitante superior para o erro.

Exercícios

1 Calcule o valor de $\int_{-1}^{1}(x^3+1)\,dx$ pela Regra 3/8 de Simpson usando 5 divisões no intervalo [a,b].

2 Usando a Regra 3/8 de Simpson determine o valor de $\int_{1}^{3}\frac{dx}{x}$ com 6 subintervalos. Compare o resultado com o valor de ln(3).

Fórmula de quadratura gaussiana

A Fórmula de Gauss para o cálculo de integral numérica, ou como é mais conhecido, Fórmula de Quadratura Gaussiana, fornece um resultado bem mais preciso do que as fórmulas anteriormente vistas, para um número de pontos semelhantes.

Na aplicação da Quadratura Gaussiana, os pontos não são mais escolhidos pela pessoa que utiliza o método, mas seguem um critério bem definido.

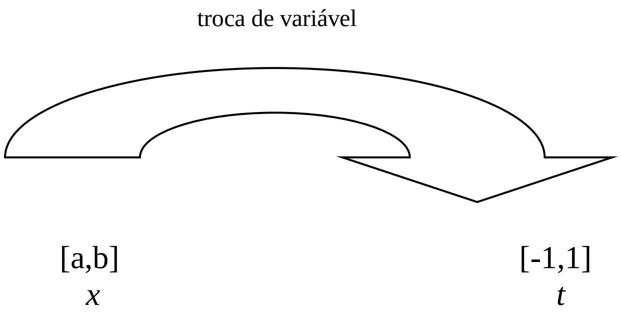
O problema continua sendo calcular

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

A Fórmula de Gauss fornece valores exatos para a integração de polinômios de grau $\leq$ *2n – 1*, sendo *n* é o número de pontos.

A seguir será feita a dedução do Método de Gauss para *dois pontos*; para mais pontos, o procedimento é análogo.

Inicialmente o intervalo de integração deve ser mudado de [a,b] para [-1,1]. Isto pode ser conseguido mediante uma troca de variável.



$$x = \frac{1}{2}\left[(b-a)t + (b+a)\right]$$

$$1dx = \frac{1}{2}(b-a)dt \Rightarrow dx = \frac{1}{2}(b-a)dt$$

Então,

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{1}{2}\left[(b-a).t + (b+a)\right]\right)\frac{1}{2}(b-a)dt$$

$$\therefore I = \int_{-1}^{1} F(t)dt$$

onde $F(t) = \frac{1}{2}(b-a)\,f\left(\frac{1}{2}(b-a)t + \frac{b+a}{2}\right)$

Para dois pontos de Gauss tem-se:

$$I = \int_{-1}^{1} F(t)dt = A_o F(t_0) A_1 F(t_1)$$

pesos de Gauss

pontos de Gauss

em que A_o, A_1, t_o e t_1 são incógnitas a serem determinadas e independem da função F escolhida. Para a determinação destas quatro incógnitas, são necessárias quatro equações, as quais podem ser facilmente obtidas se considerarmos $F(t) = t^k$, k = 0,1,2,3, já que, conforme dito acima A_o, A_1, t_o e t_1 independem da função F.

Então,

$$\int_{-1}^{1} t^k dt = A_o t_o^k + A_1 t_1^k, \quad \text{k} = 0,1,2,3$$

k = 0

k = 1

k = 2

k = 3

Assim, obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 2 \\ A_0 t_0 + A_1 t_1 = 0 \\ A_0 t_0^2 + A_1 t_1^2 = \dfrac{2}{3} \\ A_0 t_0^3 + A_1 t_1^3 = 0 \end{cases}$$

cuja solução é

$$\begin{cases} A_0 = A_1 = 1 \\ t_0 = \dfrac{-\sqrt{3}}{3} \\ t_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Então,

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{1} F(t)dt = 1F\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) + 1F\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

com $F(t) = \frac{1}{2}(b-a) f\left(\frac{1}{2}(b-a)t + \frac{b+a}{2}\right)$.

Observação: Essa fórmula é *exata* para o cálculo com polinômios até grau 3.

Exemplo

Calcule o valor de $\int_{-1}^{1} (x^3 + 1)\, dx$ pela Quadratura Gaussiana usando 2 pontos.

Exercício

Usando a Quadratura Gaussiana, determine o valor de $\int_1^3 \frac{dx}{x}$ com 2 pontos. Compare o resultado com o valor de ln(3).

Generalização

A Fórmula de Quadratura Gaussiana para *n* pontos é dado por:

$$I = \int_{-1}^{1} F(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} A_i F(t_i)$$

sendo A_i e t_i, pesos e pontos de Gauss respectivamente, que variam dependendo do número de pontos n.

A seguir, é fornecida uma tabela de pontos de Gauss com seus respectivos pesos, para $1 \leq n \leq 8$. A Fórmula de Quadratura de Gauss oferece, com vantagem de *n* não muito grande, boa precisão. Sempre que possível, é aconselhável a sua utilização. Entretanto, em situações práticas em que a forma analítica da função não é conhecida, ela não pode ser utilizada.

Assim,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{1} F(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} A_i F(t_i)$$

com $F(t) = \frac{1}{2}(b-a) f\left(\frac{1}{2}(b-a)t + \frac{b+a}{2}\right)$.

n	***i***	***t_i***	***A_i***
1	0	0	2
2	0;1	±0.57735027	1
3	0;2 1	±0.77459667 0	0.55555556 0.88888889
4	0;3 1;2	±0.86113631 ±0.33998104	0.34785484 0.65214516
5	0;4 1;3 2	±0.90617985 ±0.53846931 0	0.23692688 0.47862868 0.56888889
6	0;5 1;4 2;3	±0.93246951 ±0.66120939 ±0.23861919	0.17132450 0.36076158 0.46791394
7	0;6 1;5 2;4 3	±0.94910791 ±0.74153119 ±0.40584515 0	0.12948496 0.27970540 0.38183006 0.41795918
8	0;7	±0.96028986	0.10122854

	1;6 2;5 3;4	±0.79666648 ±0.52553242 ±0.18343464	0.22238104 0.31370664 0.36268378

Exemplo

Calcule o valor de $\int_{-1}^{1}(x^3+1)\,dx$ pela Quadratura Gaussiana usando 4 pontos.

Exercícios

1 Calcule as integrais a seguir pela Regra dos Trapézios, 1/3 de Simpson e 3/8 de Simpson, usando quatro e seis divisões de [a,b]. Compare os resultados.

a) $\int_0^1 e^x\,dx$

b) $\int_{-1}^{1}(3x^3-3x+1)\,dx$

c) $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$

d) $\int_2^{14}\frac{dx}{\sqrt{x}}$

2 Em que sentido a Regra de Simpson é melhor do que a Regra dos Trapézios?

3 Dada tabela

x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$f(x)$	1,0	1,2408	1,5735	2,0333	2,6965	3,7183

e sabendo que a Regra 1/3 de Simpson é, em geral, mais precisa que a Regra dos Trapézios, qual seria o modo mais adequado de calcular $\int_0^1 f(x)\,dx$, usando a tabela acima? Aplique este processo para determinar o valor da integral.

4 Usando a Regra de Simpson determine o valor de $\int_1^2\frac{dx}{x}$ com 8 subintervalos. Compare o resultado com o valor de *ln*(2).

5 Considere a integral I = $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

a) Estime I pela Regra de Simpson usando h = 0,25.
b) Estime I por Quadratura Gaussiana com 2 pontos.
c) Sabendo que o valor exato de I (usando 5 casas decimais) é 0,74682, compare as estimativas obtidas de (a) e (b).

6 Calcule π da relação $\frac{\pi}{4}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$ utilizando a Regra de Simpson com 6 subintervalos.

7 As fórmulas de Newton-Cotes são todas obtidas a partir da aproximação da função integranda por um polinômio interpolador de Newton-Gregory. Aplicando a mesma sistemática adotada para a obtenção das regras dos Trapézios e de Simpson, determine uma fórmula de integração utilizando o polinômio interpolador de Newton-Gregory de 4º grau.

8 Aplique a fórmula obtida no exercício anterior para calcular I = $\int_1^2 \ln(x+\sqrt{x+1})\,dx$.

9 Utilize a Regra 1/3 de Simpson para integrar a função abaixo entre 0 e 2 com o menor esforço computacional possível. Justifique.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, se\ 0 \le x \le 1 \\ (x+2)^3, se\ 1 < x \le 2 \end{cases}$$

10 Calcule, pela Regra de Simpson (n=8) e Quadratura Gaussiana (n=3), calcule cada uma das integrais abaixo. Compare os resultados obtidos.

a) $\int_0^{\pi} e^{sen(x)}\,dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{sen(x)}\,dx$

11 Calcule $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$, utilizando a Fórmula da Quadratura Gaussiana com n=4.

12 Sabendo-se que a quantidade de calor necessária para elevar a temperatura de um certo corpo de massa m de t_0 a t_1 é

$$Q = m\int_{t_0}^{t_1} C(\theta)\,d\theta$$

onde C(θ) é o calor específico do corpo à temperatura θ, calcule a quantidade de calor necessária para se elevar 20 kg de água de 0ºC a 100ºC. Para a água tem-se:

θ (ºC)	C(θ) (kcal/kgºC)
0	999,9
10	999,7
20	998,2
30	995,3
40	992,3
50	988,1
60	983,2
70	977,8
80	971,8
90	965,3
100	958,4

13 De um velocímetro de um automóvel foram obtidas as seguintes leituras de velocidade instantânea:

t (min)	V (km/h)
0	23
5	25
10	28

15	35
20	40
25	45
30	47
35	52
40	60
45	61
50	60
55	54
60	50

Calcule a distância, em quilômetros, percorrida pelo automóvel.

14 Calcule o trabalho realizado por um gás sendo aquecido segundo a tabela:

$V(m^3)$	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5
$P(kg/m^2)$	80	72	64	53	44	31	22

Sabe-se que $W = \int_{v_i}^{v_f} P\, dV$.

15 Uma linha reta foi traçada de modo a tangenciar as margens de um rio nos pontos A e B. Para medir a área do trecho entre o rio e a reta AB foram traçadas perpendiculares em relação a AB com um intervalo de 0,05m. Qual é esta área?

Perpendiculares	Comprimento (m)
1	3,28
2	4,02
3	4,64
4	5,26
5	4,98
6	3,62
7	3,82
8	4,68
9	5,26
10	3,82
11	3,24

16 Usando a Quadratura Gaussiana, determine o valor de $\int_1^3 \frac{dx}{x}$ com 3 pontos. Compare o resultado com o valor de $ln(3)$.