4616 – Métodos Numéricos Computacionais

Larissa Oliveira
oliveira.t.larissa@gmail.com

Na última aula...

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES

Generalizando

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \quad \cdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{F(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = 0;$$

$$\text{em que, } F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \cdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES

O processo iterativo de Newton é dado por:

$k = 0, 1, \ldots$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}}_{J} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1^{k+1} - x_1^k \\ x_2^{k+1} - x_2^k \\ \vdots \\ x_n^{k+1} - x_n^k \end{pmatrix}}_{d^k} = \underbrace{\begin{pmatrix} -f_1(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k) \\ -f_2(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k) \\ \vdots \\ -f_n(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k) \end{pmatrix}}$$

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES

Simplificando:

$$J(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)\begin{pmatrix} x_1^{k+1} - x_1^k \\ x_2^{k+1} - x_2^k \\ \vdots \\ x_n^{k+1} - x_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) \\ -f_2(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) \\ \vdots \\ -f_n(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) \end{pmatrix}$$

$$J(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)\begin{pmatrix} d_1^k \\ d_2^k \\ \vdots \\ d_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) \\ -f_2(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) \\ \vdots \\ -f_n(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) \end{pmatrix} \Leftrightarrow J(x^{(k)})\left(d^{(k)}\right) = -F(x^{(k)})$$

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES

Critério de Parada:

- *Análise de* $F(x_1, x_2, ..., x_n) = F(x) = 0$:

$$\left\| F(x^{(k)}) \right\|_{\infty} = \max_{1 \le i \le n} \left| f_i(x^{(k)}) \right| < \varepsilon$$

- *Análise do Erro absoluto*:

$$\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\|_{\infty} = \max_{1 \le i \le n} \left| x_i^{k+1} - x_i^{k} \right| < \varepsilon$$

- *Análise do Erro relativo*:

- $$\left\| \frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{x^{(k+1)}} \right\|_{\infty} = \max_{1 \le i \le n} \left| \frac{x_i^{k+1} - x_i^{k}}{x_i^{k+1}} \right| < \varepsilon \, .$$

Nas expressões acima as fórmulas podem ser simplificadas considerando-se:

$$x^{(k+1)} - x^{(k)} = d^{(k)} \;\; e \;\; x_i^{k+1} - x_i^{k} = d_i^{k}$$

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES

Atividade para presença – 26/08/2020 (reposição).

Resolver o sistema de equações não-lineares utilizando o método de Newton com $(x_0, y_0) = (1, 5)$ e $\varepsilon = 10^{-1}$. Considerar 4 casas decimais.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1^2 + x_2^2 = 9 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{matrix} 0 \\ 3 \end{matrix}} \quad \begin{matrix} 3 \\ 0 \end{matrix}$$

Hoje...

SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Uma equação diferencial é uma equação que envolve uma função desconhecida e algumas de suas derivadas.

Equações Diferenciais

EDO: a função depende de uma só variável

EDP: a função tem uma variável que depende de duas ou mais variáveis independentes e as derivadas (parciais)

SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Uma equação diferencial que envolve derivadas até a ordem n é chamada de *equação diferencial ordinária* (*EDO*) de ordem n e pode ser escrita na forma:

$$\boxed{y^{(n)}(x) = f(x, y, y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)),} \quad a \le x \le b \qquad (1)$$

EDO de ordem 1:

$$y'(x) = f(x, y), \quad a \le x \le b \qquad (2)$$

$y'''(x) = f(x, y, y', y'') = 0$

SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

- Equação diferencial de 1ª ordem e lineares

$$\boxed{xy' = x - y} \rightarrow y' = \frac{x-y}{x}$$

$f(x,y)$

$y' = f(x,y)$

- Equação diferencial de 2ª ordem e lineares

$$y'' = y \qquad f(x,y,y') = y$$

- Equação diferencial de 2ª ordem e não-lineares

$$y'' + (1 - y^2)y' + y = 0$$

- Equação diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y^2} = 0, \text{ com } u \equiv \underbrace{u(x, y)}$$

SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

A solução de uma EDO é qualquer função y = F(x) definida em [a,b] e tem n derivadas neste intervalo que satisfaz

$$\boxed{y^{(n)}(x) = f(x, y, y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)),} \quad a \leq x \leq b \qquad (1)$$

isto é, é uma função da variável independente que satisfaz a equação. Uma equação diferencial possui uma família de soluções.

Exemplos

$y = 2e^x$

$y' = y,$ *tem por solução a família de funções* $\boxed{: y = ae^x}, \ a \in R$

$y''' = 0,$ *tem por solução a família de funções* $: y = p_2(x)$

SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Como uma equação diferencial não possui solução única, para individualizar uma solução tem-se que impor condições suplementares. Em geral uma equação de ordem *n* requer *n-1* condições adicionais a fim de ter uma única solução.

$$\begin{cases} y' = y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

PVI

Problema de Valor Inicial

Dada uma equação de ordem n, a função e suas derivadas até ordem *n-1* são especificadas em um mesmo ponto.

SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Exemplos

$$\begin{cases} \boxed{y''=3y'-2y} \\ y(0)=-1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{PVI de ordem 2}}$

$$\begin{cases} \boxed{y'=y+2} \\ y(0)=1 \end{cases}$$

PVI de ordem 1

OBS: Dada uma equação diferencial de ordem n, n ≥ 2 se as condições fornecidas para a busca da solução única não são dadas num mesmo ponto temos um ***problema de valor de contorno*** *(PVC)*.

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA EDO

Problema de Valor Inicial (P.V.I.)

Como nem sempre é possível obter a solução numérica de uma EDO, pode-se usar métodos numéricos para resolvê-la. Usaremos métodos numéricos para se conseguir os valores de y(x) em pontos distintos daqueles das condições iniciais associadas ao PVI.

P.V.I. de 1ª ordem

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (x_0, y_0)$$

A solução deste problema é uma função $y = y(x)$ contínua e derivável que satisfaz a equação e passa pelo ponto (x_0,y_0)

em que $a \leq x \leq b$, y $\in$ R

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA EDO

Esse problema será resolvido numericamente. O primeiro passo é discretizar o intervalo [a,b], isto é, subdividir o intervalo [a,b] em n subintervalos, definido pelos ponto igualmente espaçados:

$$x_j = x_0 + j\,h$$

$$h = \frac{b-a}{n}, \; j = 0, \ldots, n$$

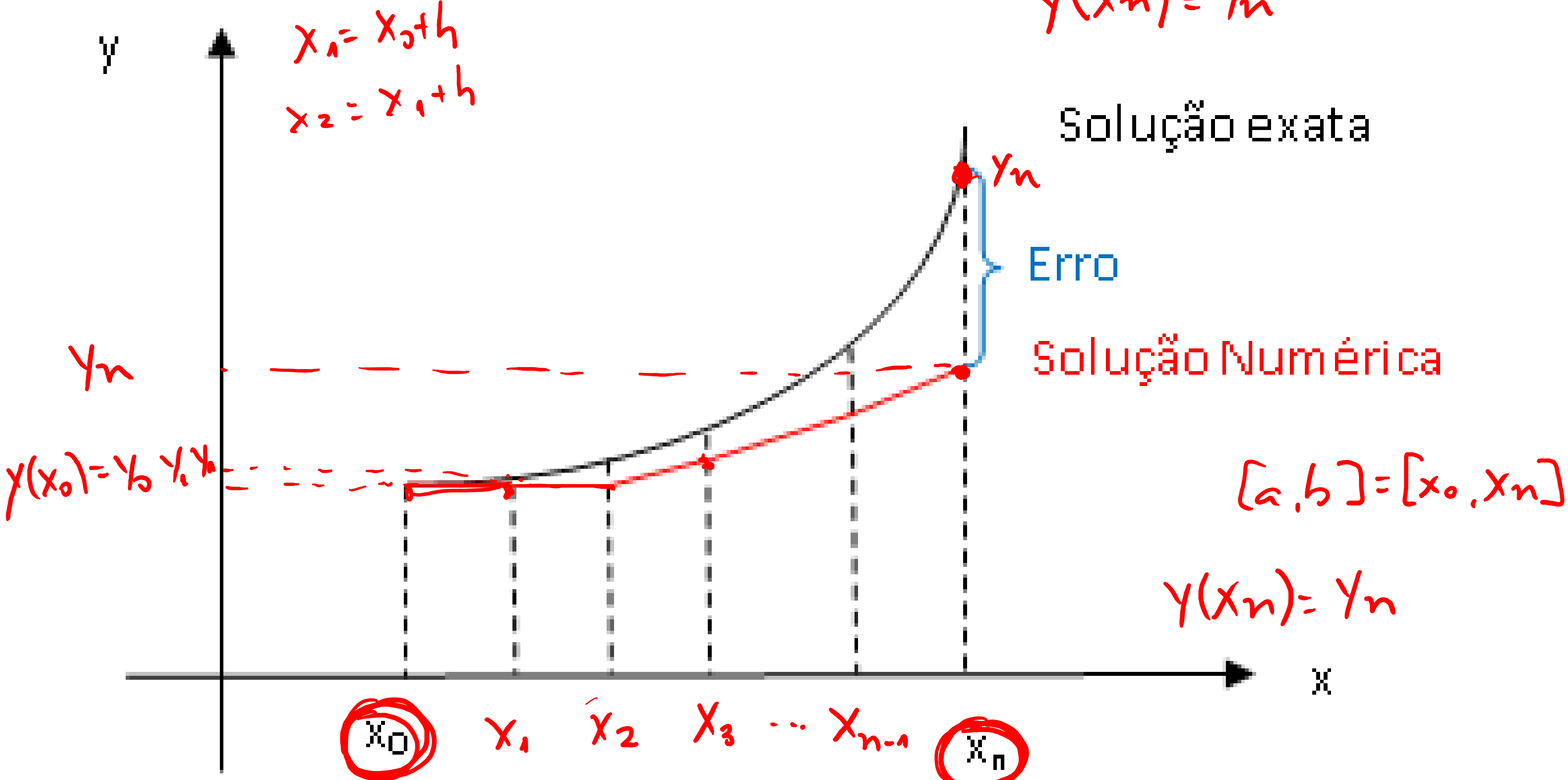
$$x_0 = a \;\; e \;\; x_n = b$$

O conjunto obtido desta forma denomina-se de rede ou malha de [a,b].

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA EDO

A solução numérica $y_n(x)$ é a função linear por partes cujo gráfico é uma poligonal com vértices nos pontos (x_j,y_j), sendo que y_j deve ser calculado utilizando algum método numérico

$y(x_n) = y_n$



MÉTODOS NUMÉRICOS PARA EDO

Métodos de Passo Simples

Definição: Um método para resolver um P.V.I. é denominado de *passo simples* se cada aproximação y_{k+1} é calculado somente a partir da aproximação anterior y_k.

$$y_{k+1} = y_k + h.\Phi(x_k, y_k, h)$$

$y(x_{k+1})$

$y(x_k)$

$$\boxed{f(x_k, y_k)}$$

MÉTODO DE EULER

Seja o PVI de ordem 1:

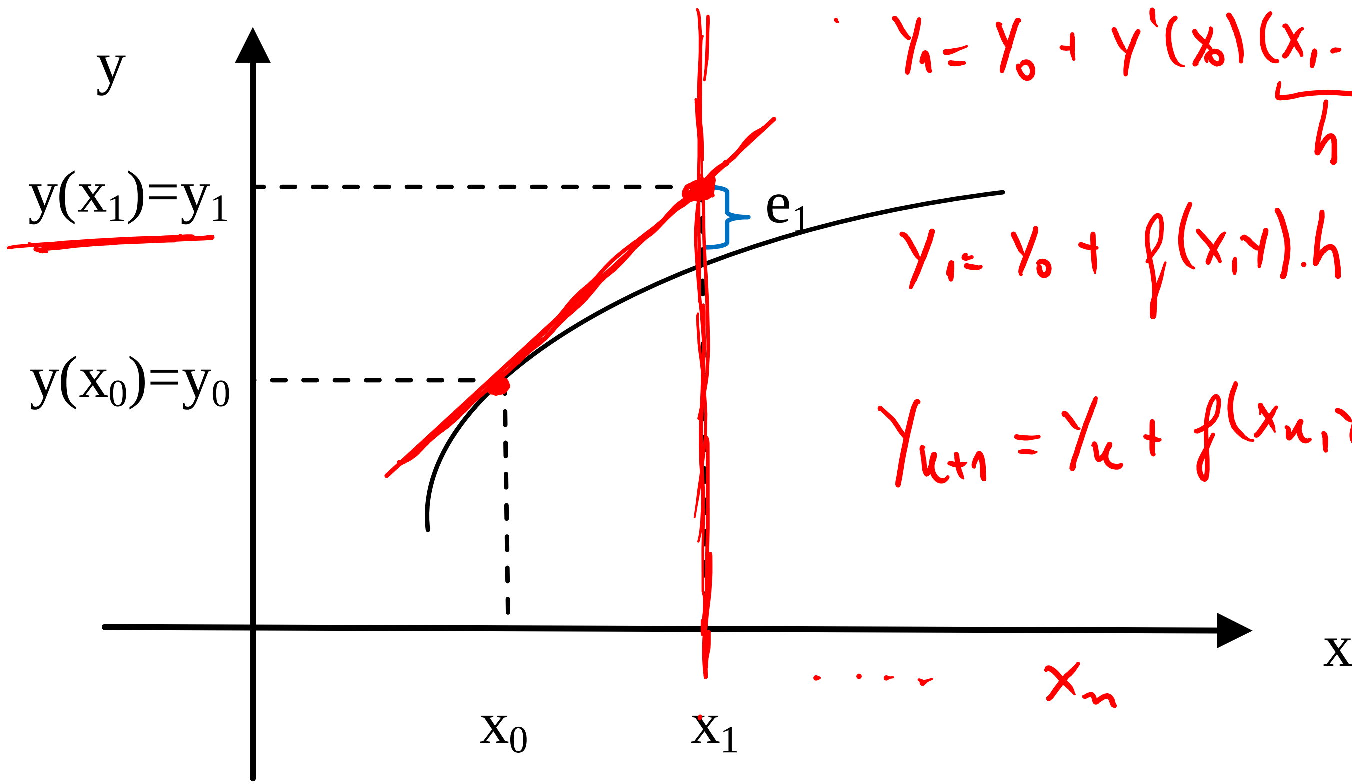
$$\begin{cases} \boxed{y' = f(x, y)} \\ y(x_0) = y_o \end{cases}$$

Deseja-se determinar aproximações $y_1, \ldots, y_n$ para as soluções exatas $y(x_1), \ldots, y(x_n)$.

MÉTODO DE EULER

Procurando y_1:

Como $y(x_1)$ não é conhecido y_1 será uma aproximação para $y(x_1)$. Traça-se a tangente T à curva y(x) no ponto $(x_0, y(x_0))$ cuja equação é dada por: $y(x) - y(x_0) = y'(x_0)(x - x_0)$



$$y_1 = y_0 + y'(x_0)\underbrace{(x_1 - x_0)}_{h}$$

$$y_1 = y_0 + f(x,y).h$$

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)\,h$$

MÉTODO DE EULER

Fazendo $x = x_1$ e lembrando que:

$$y(x_0) = y_0 \qquad y'(x_0) = f(x_0, y(x_0))$$

$$y(x_1) = y_1 \qquad (x_1 - x_0) = h$$

$y(x_{n+1})$

Temos:

$$\boxed{y_1 = y_0 + h\ f(x_0, y_0)}$$

$$y_{n+1} = y_n + h\ f(x_n, y_n)$$

O erro cometido na aproximação de $y(x_1)$ por y_1 é

$$e_1 = y_1 - y(x_1)$$

solução numérica

solução exata

MÉTODO DE EULER

Procurando y_2:

Faz-se a mesma coisa a partir de x_1 e obtem-se a fórmula:

$$\boxed{y_2 = y_1 + h\ f(x_1, y_1)}$$

Erro: $e_2 = y_2 - y(x_2)$

E assim sucessivamente obtem-se:

$$\boxed{y_{j+1} = y_j + h\ f(x_j, y_j),\ j = 0,1,\ldots,n-1}$$

Erro: $e_{j+1} = y_{j+1} - y(x_{j+1}),\ j = 0,1,\ldots,n-1$

MÉTODO DE EULER

Usando Série de Taylor:

Supõe uma expansão da solução $y(x)$ em série de Taylor em torno do ponto x_j:

*

$$y(x) = y(x_j) + h\,y'(x_j) + \frac{h^2}{2!} y''(x_j) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_j) + \ldots + \frac{h^q}{q!} y^{(q)}(x_q) + E_{q+1}(x)$$

Truncando-se a série no termo de primeiro grau e desprezando o erro tem-se:

$$\boxed{y(x) \cong y(x_j) + h\,y'(x_j)}$$

MÉTODO DE EULER

Fazendo-se $x = x_{j+1}$ tem-se:

$$y(x_{j+1}) = y(x_j) + h\, y'(x_j)$$

Logo:

$$\boxed{y_{j+1} = y_j + h\, f(x_j, y_j),\ j = 0,1,\dots,n-1}$$

OBS: O método de Euler é um método de Série de Taylor de ordem 1.

MÉTODO DE EULER

Exemplo

$y(x_n) = y_{n+1} = y_n + h\, f(x_n, y_n)$

Usando o Método de Euler, encontre uma solução aproximada para o P.V.I.:

$y' = f(x,y)$

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases};$$

② $f(x,y) = x+y$

$\Rightarrow y' = x+y$

$x_0 = 0$

$y_0 = 1$

$x_0 = 0$

no intervalo [0,1], sobre 5 subintervalos igualmente espaçados.

① $h = \dfrac{(x_n - x_0)}{n} = \dfrac{1-0}{5} = 0{,}2$

$x_0 = 0$ $\quad x_1 = 0{,}2$ $\quad x_2 = 0{,}4$ $\quad x_3 = 0{,}6$ $\quad x_4 = 0{,}8$ $\quad 1 = x_5$

$y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4 \quad y_5$

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n)$$

ⓐ y_1 $\quad x_0 = 0 \; ; \; y_0 = 1$

$$f(x_0, y_0) = x_0 + y_0 = 0 + 1 = 1$$

$$y_1 = y_0 + h \underbrace{f(x_0, y_0)} = 1 + 0,2(1) = 1,2 \qquad \boxed{y_1 \simeq 1,2}$$

ⓑ y_2 $\quad x_1 = 0,2 \qquad \boxed{y_1 = 1,2}$

$$f(x_1, y_1) = x_1 + y_1 = 0,2 + 1,2 = \boxed{1,4}$$

$$y_2 = y_1 + h f(x_1, y_1) = 1,2 + 0,2(1,4) = 1,48 \qquad \boxed{y_2 \simeq 1,48}$$

★ y_3 $\quad x_2 = 0{,}4 \quad y_2 = 1{,}48$

$$f(x_2, y_2) = x_2 + y_2 = 0{,}4 + 1{,}48 = \boxed{1{,}88}$$

$$y_3 = y_2 + h\, f(x_2, y_2) = 1{,}48 + 0{,}2(1{,}88) = 1{,}856$$

$$\boxed{y_3 \approx 1{,}856}$$

★ y_4 $\quad x_3 = 0{,}6 \quad y_3 = 1{,}856$

$$f(x_3, y_3) = x_3 + y_3 = 0{,}6 + 1{,}856 = 2{,}456$$

$$y_4 = y_3 + h\, f(x_3, y_3) = 1{,}856 + 0{,}2(2{,}456) = 2{,}3472$$

$$\boxed{y_4 \approx 2{,}3472}$$

★ y_5 $\quad x_4 = 0{,}8 \quad y_4 = 2{,}3472$

$$f(x_4, y_4) = x_4 + y_4 = 0{,}8 + 2{,}3472 = 3{,}1472$$

$$y_5 = y_4 + h\, f(x_4, y_4) = 2{,}3472 + 0{,}2(3{,}1472) = \underline{2{,}9766}$$

$$y_5 = y(x_5) \simeq \underline{2{,}9766}\ !$$

MÉTODO DE EULER

Atividade para presença - Aula sobre EDO – 31/08/2020.

Usando o método de Euler, calcule a solução aproximada do seguinte PVI, $x \in [a, b] = [0, 1]$ e 5 subintervalos.

$$\begin{cases} y' = f(x, y) = x - y + 2 \\ y(x_0) = y(0) = 2 \end{cases}$$