28.09.20

Nome: Davi Augusto Neves Leite RA: 191027383

1ª Lista de Exercícios
P.O.

(1) 1) Variáveis

X_1, X_2, X_3, X_4 e X_5: item "i" (com $i \in \mathbb{N}^*$ e $1 \leq i \leq 5$) conduzido pelo excursionista

2) Função Objetivo

MAX Valor total

$\Leftrightarrow$

$$MAX \ Vt(X) = 100X_1 + 60X_2 + 70X_3 + 15X_4 + 15X_5$$

3) Restrições técnicas

$$s.a. \{ 52X_1 + 23X_2 + 35X_3 + 15X_4 + 7X_5 \leq 60$$

4) Restrições Implícitas

X_1, X_2, X_3, X_4 e X_5: inteiros, podendo ser 0 ou 1 (booleana)

(3) 1) Variáveis

B_1, B_2, B_3, B_4 e B_5: quantidade de galões de cada tipo de bebida.

FORONI

2) Função Objetivo

MIN Custo

$\Leftrightarrow$

$$MIN\ C(B) = 1{,}5B_1 + 0{,}75B_2 + 2B_3 + 1{,}75B_4 + 0{,}25B_5$$

3) Restrições Técnicas

$$s.a. \begin{cases} 0{,}4B_1 + 0{,}05B_2 + B_3 \geq (0{,}2).(500) \\ 0{,}4B_1 + 0{,}1B_2 + B_4 \geq (0{,}1).(500) \\ 0{,}2B_2 \geq (0{,}05).(500) \\ B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5 = 500 \\ B_1 \leq 200 \\ B_2 \leq 400 \\ B_3 \leq 100 \\ B_4 \leq 50 \\ B_5 \leq 800 \end{cases}$$

4) Restrições Implícitas

B_1, B_2, B_3, B_4, B_5: inteira, com $B_i \geq 0$ $(1 \leq i \leq 5$ e $i \in \mathbb{N}^*)$

5) 1) Variáveis

P_1, P_2 e P_3: capacidade de produção de cada artigo, por hora

2) Função Objetivo

MAX Lucro Líquido

$\Leftrightarrow$

$$MAX\ LL(P) = (4.50)P_1 + (12.25)P_2 + (3.75)P_3$$

3) Restrições Técnicas

$$s.a. \begin{cases} P_1 + P_2 + P_3 \leq 45 \\ 50P_1 \leq 100 \\ 25P_2 \leq 500 \\ 75P_3 \leq 1500 \end{cases}$$

4) Restrições Implícitas

P_1, P_2 e $P_3 \geq 0$ e inteiro

7) 1) Variáveis

X_{ij}: número de passageiros transportados do ônibus da garagem "i" e do hotel "j"

2) Função Objetivo

MIN Custo Distribuição

$\Leftrightarrow$

$$MIN\ CD(X) = 100X_{11} + 110X_{12} + 120X_{13} + 130X_{21} + 120X_{22} + 125X_{23}$$

FORONI

___:___:___

3) Restrições técnicas

s.a. $\begin{cases} X_{11} + X_{12} + X_{13} = 4.(30) \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} = 3.(30) \\ X_{11} + X_{21} = 60 \\ X_{12} + X_{22} = 90 \\ X_{13} + X_{23} = 60 \end{cases}$

4) Restrições Implícitas

$X_{ij} \geq 0$ e inteira

10) 1) Variáveis

S: quantidade de sapatos produzidos
C: quantidade de cintos produzidos

2) Função Objetivo

MAX Lucro

MAX $L(S,C) = 5S + 2C$

*

3) Restrições Técnicas

s.a. $\begin{cases} 2S + C \leq 6 \\ 10S + 12C \leq 60 \end{cases}$ (conversão de tempo)

4) Restrições Implícitas

$0 \leq S \leq 6 \; ; \; 0 \leq C \leq 5$; inteira

19 1) Variáveis

P: quantidades produzidas de Padrão
M: quantidades produzidas de Média
G: quantidades produzidas de Grande

2) Função Objetivo

MAX Lucro

$\Leftrightarrow$

$MAX \; L(P, M, G) = 3{,}2P + 4M + 4{,}7G$

3) Restrições Técnicas

s.a. $\begin{cases} 10P + 10M + 12G \leq (4).(3600) \\ 10P + 15{,}5M + 17G \leq (6).(3600) \\ 12P + 16M + 19G \leq (6).(3600) \\ 19P + 21M + 24G \leq (8).(3600) \\ 19P + 21M + 22G \leq (8).(3600) \\ 25P + 32M + 45G \leq (200).(100).(2{,}5) \end{cases}$

FORONI

4) Restrições Implícitas

P, M e G ≥ 0 e inteiro

28 1) Variáveis

X_{ij}: área da cultura "i" plantada na fazenda "j", sendo: $i, j \in \mathbb{N}$ e $1 \leq i, j \leq 3$, com $i = 1$ p/ milho; $i = 2$ p/ arroz e $i = 3$ p/ feijão; em acres

2) Função Objetivo

$$\text{MAX Lucro} \Leftrightarrow \text{MAX } L(X) = 5000(X_{11} + X_{12} + X_{13}) + 4000(X_{21} + X_{22} + X_{23}) + 1800(X_{31} + X_{32} + X_{33})$$

3) Restrições Técnicas

$$\text{s.a.} \begin{cases} 440X_{11} + 650X_{12} + 350X_{13} \leq 660 \\ 440X_{21} + 650X_{22} + 350X_{23} \leq 880 \\ 440X_{31} + 650X_{32} + 350X_{33} \leq 400 \\ 5{,}5X_{11} + 4X_{21} + 3{,}5X_{31} \leq 1800 \\ 5{,}5X_{12} + 4X_{22} + 3{,}5X_{32} \leq 2200 \\ 5{,}5X_{13} + 4X_{23} + 3{,}5X_{33} \leq 950 \\ X_{11} + X_{21} + X_{31} \leq 400 \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} \leq 650 \\ X_{13} + X_{23} + X_{33} \leq 350 \\ \dfrac{X_{11} + X_{21} + X_{31}}{400} = \dfrac{X_{12} + X_{22} + X_{32}}{650} = \dfrac{X_{13} + X_{23} + X_{33}}{350} \end{cases}$$

4) Restrições Implícitas

$X_{ij} \geq 0$ e real

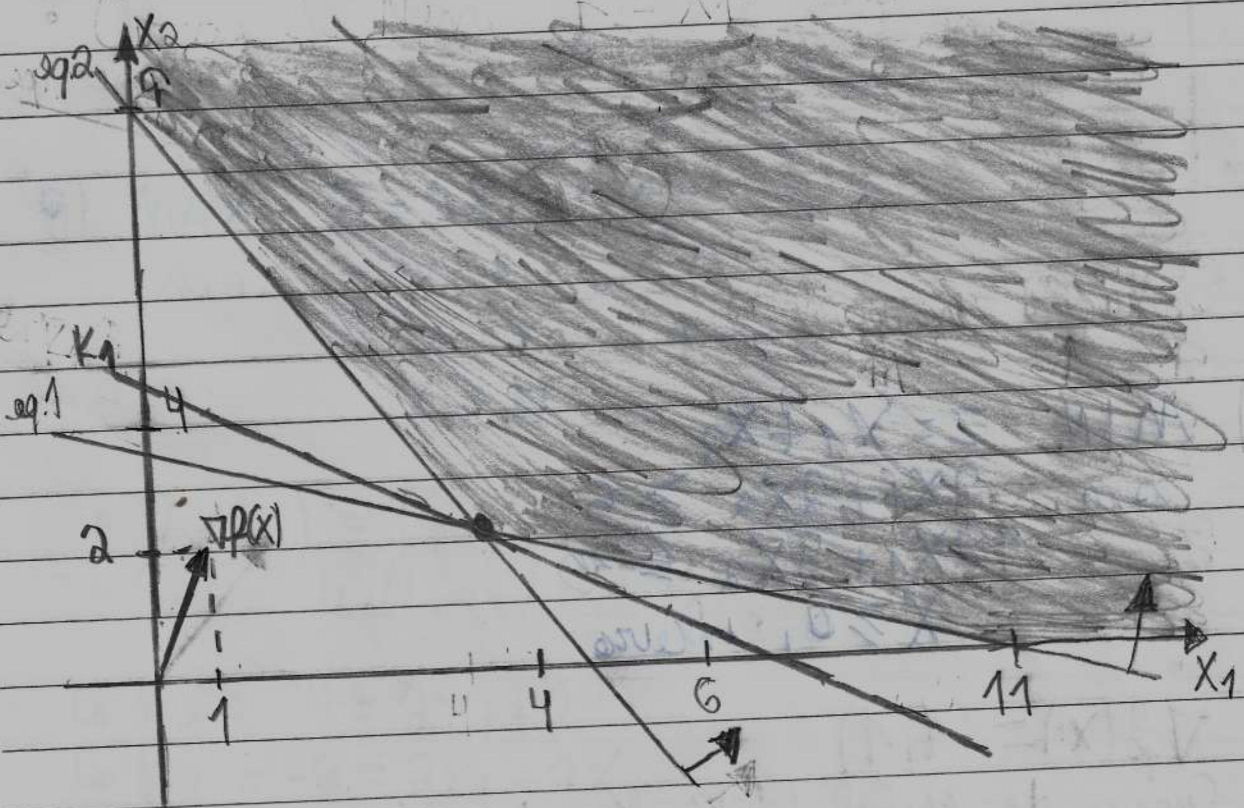
(29) a) MIN $Z = X_1 + 2X_2$

s.a. $X_1 + 3X_2 \geq 11$

$2X_1 + X_2 \geq 9$

$X \geq 0$

- $\nabla f(X) = (1, 2)$
- Curvas de Nível (K): $K = X_1 + 2X_2 \rightarrow K_1 = 8{,}4$



↳ $X^* = (3{,}2 ; 2{,}6)$

∴ Solução Única: $Z^* = 3{,}2 + 2 \cdot 2{,}6 = 8{,}4$

FORONI

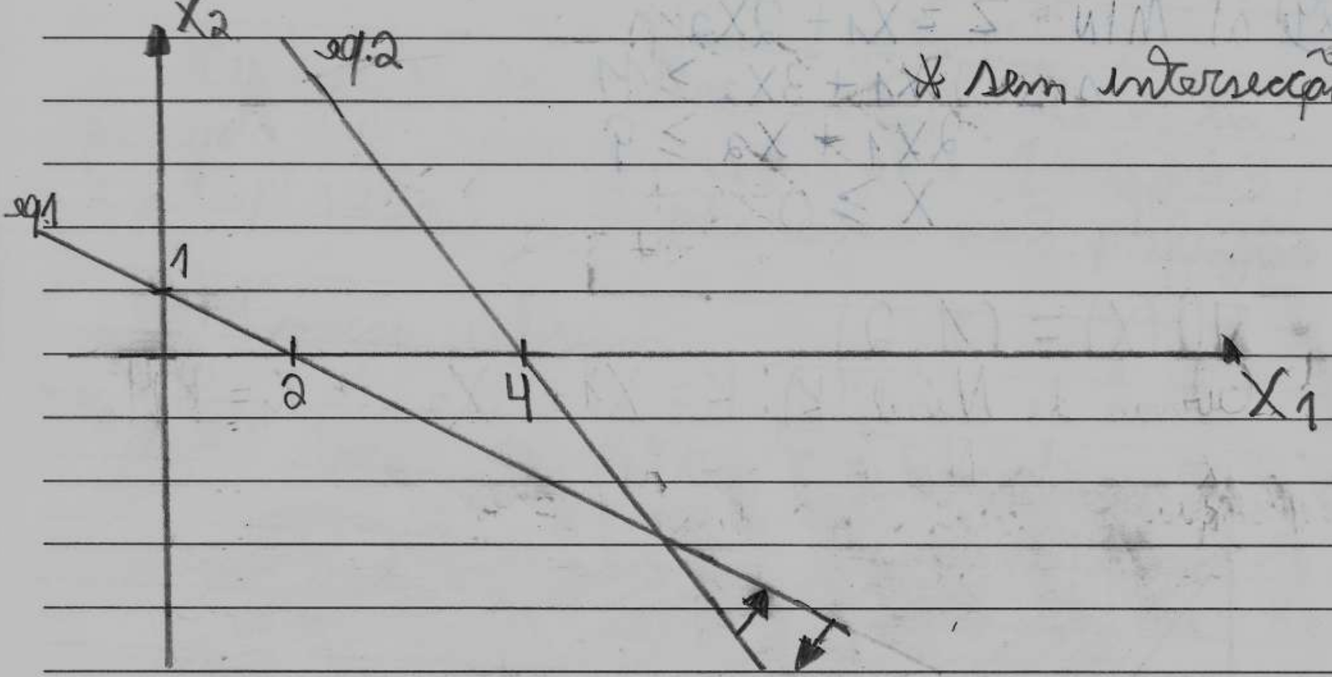
___ . ___ . ___

c) MAX $Z = 2X_1 + 3X_2$

s.a. $X_1 + 2X_2 \leq 2$

$6X_1 + 4X_2 \geq 24$

$X \geq 0$



* sem intersecção

∴ Solução inviável

f) MIN $Z = X_1 + X_2$

s.a. $2X_1 + 2X_2 \geq 5$

$12X_1 + 5X_2 \leq 30$

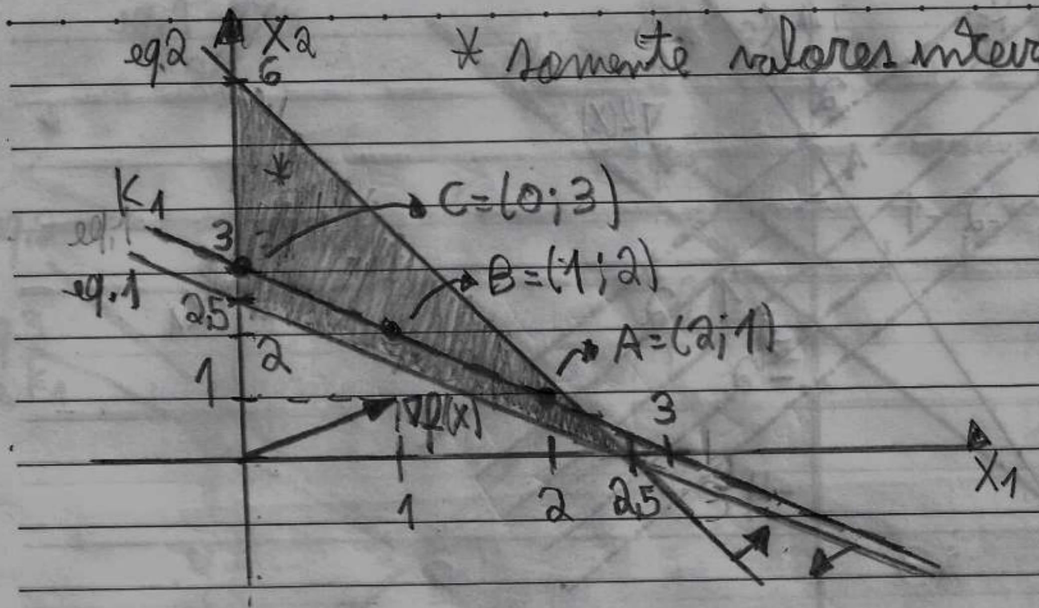
$X \geq 0$; inteira

- $\nabla f(x) = (1, 1)$
- Curvas de Nível (K): $K = X_1 + X_2$

↳ $K_1 = 3 = X_1 + X_2$

*

___:___:___



* somente valores inteiros

↳ Com base em K_1: soluções ótimas sendo os pontos A, B e C.

∴ Soluções múltiplas: $Z^*_A = Z^*_B = Z^*_C = 3$

g) MAX $Z = 2X_1 + 2X_2$

s.a. $-2X_1 + X_2 \leq 2$

$X_1 - X_2 \leq 1$

$X \geq 0$

- $\nabla f(X) = (2;2)$
- Curvas de Nível (K): $K = 2X_1 + 2X_2$

↳ $K_1 = -4 = 2X_1 + 2X_2$

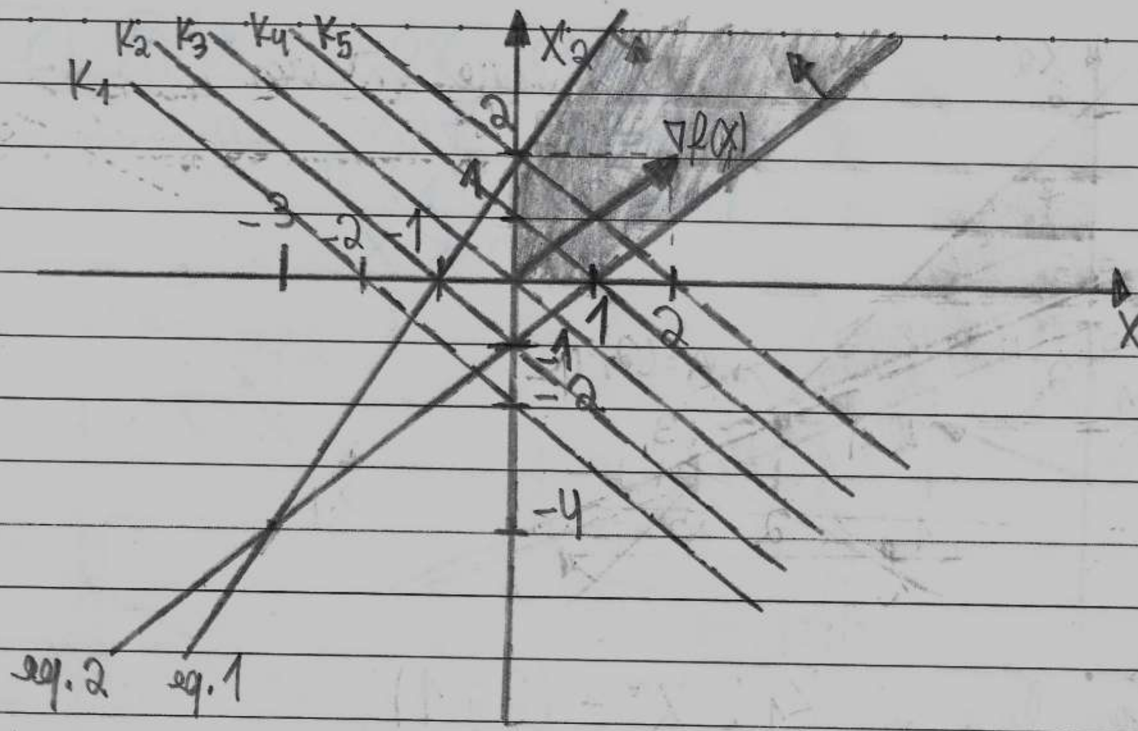
↳ $K_2 = -2 = 2X_1 + 2X_2$

↳ $K_3 = 0 = 2X_1 + 2X_2$

↳ $K_4 = 2 = 2X_1 + 2X_2$

↳ $K_5 = 4 = 2X_1 + 2X_2$

___.___.___



↳ Como $Z^* \to +\infty$, então a solução é ilimitada.

k) MIN $Z = 10X_1 + 12X_2$

s.a. $X_1 + X_2 \leq 20$

$X_1 + X_2 \geq 10$

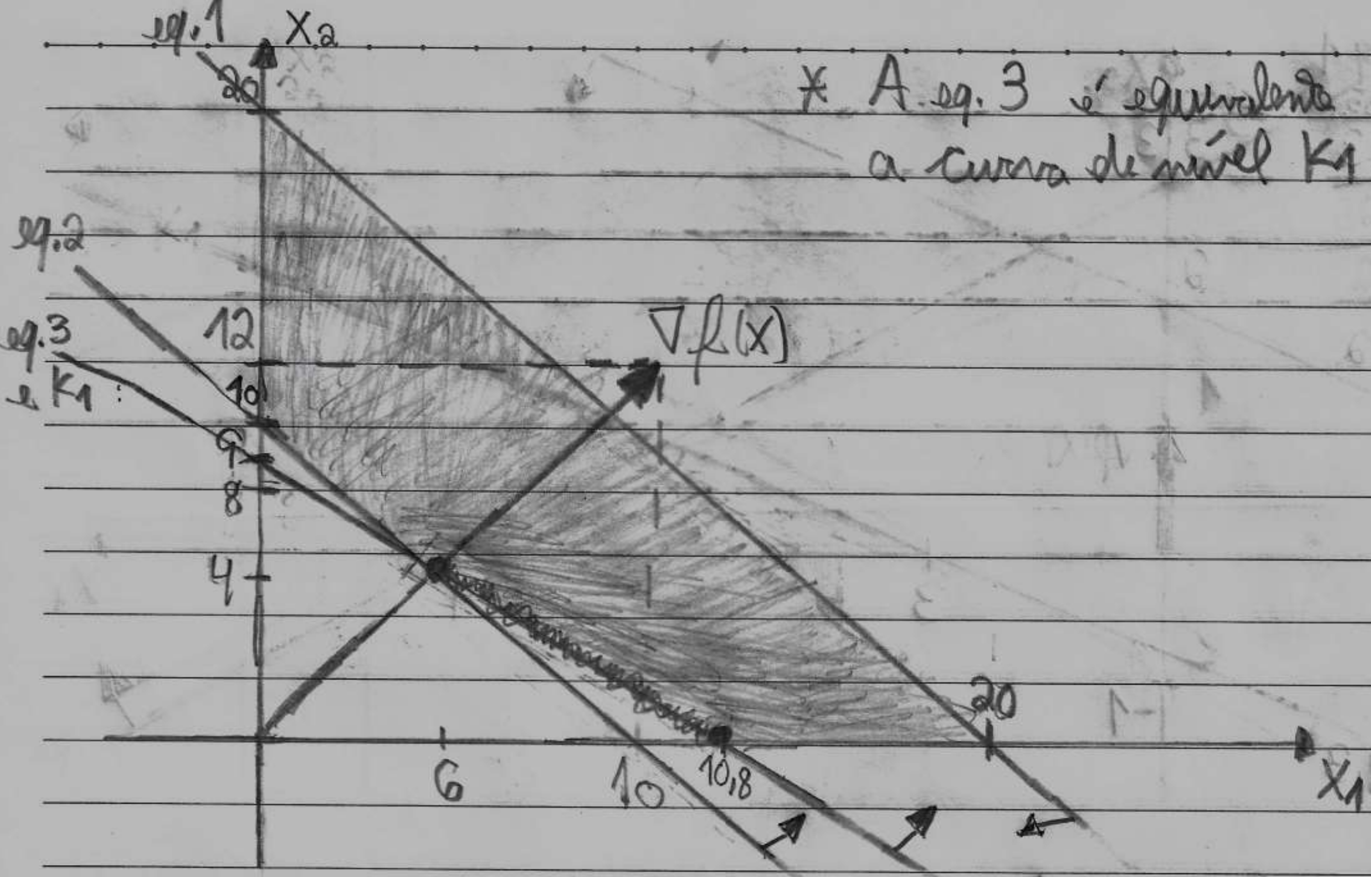
$5X_1 + 6X_2 \geq 54$

$X \geq 0$

- $\nabla f(x) = (10; 12)$
- Curvas de nível (K): $K = 10X_1 + 12X_2$

↳ $K_1 = 108 = 10X_1 + 12X_2$

*



* A eq. 3 é equivalente a curva de nível K_1.

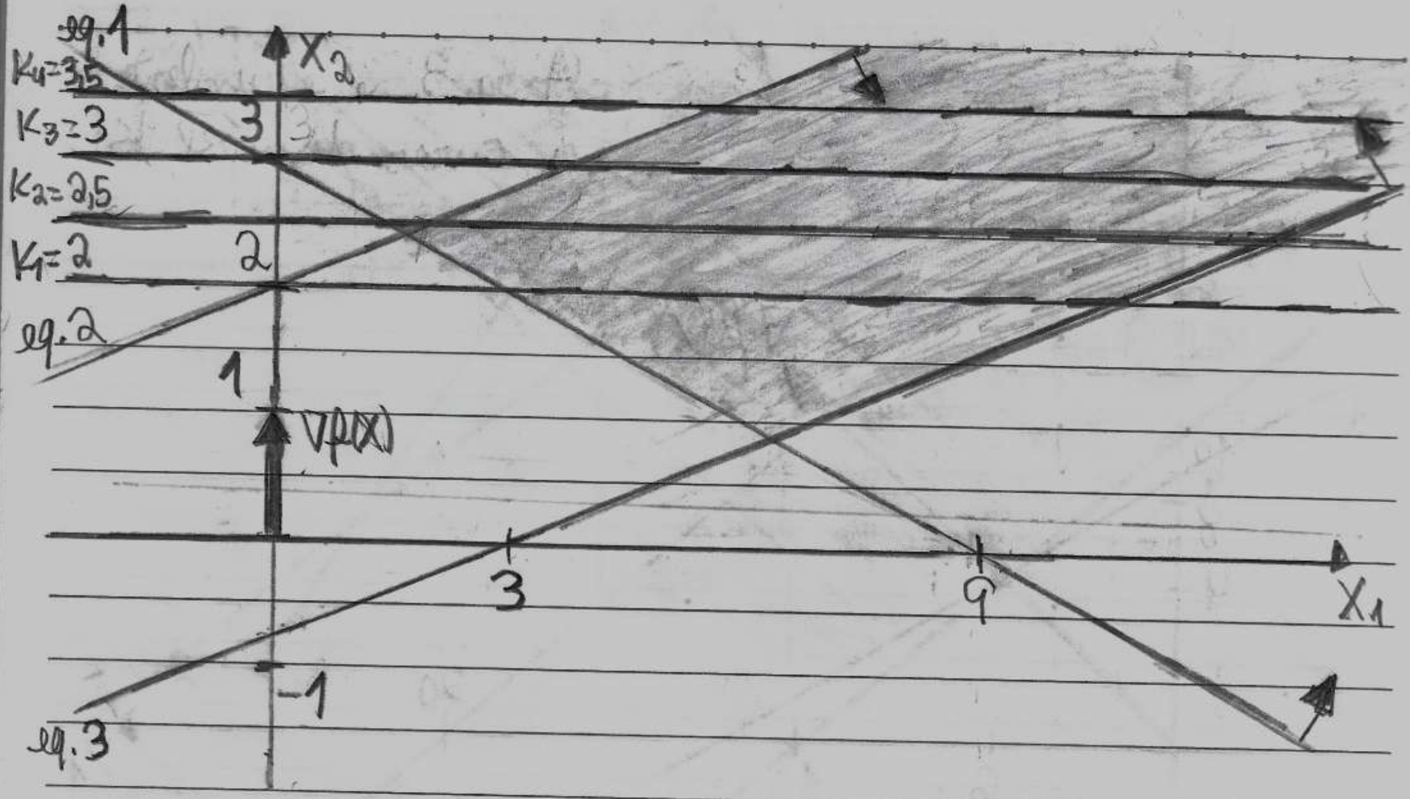
↳ Com base em K_1: as soluções ótimas estão em $5X_1 + 6X_2 = 54$ tal que $X_1 \in [6; 10,8]$. Ex: $X^* = (6;4)$

∴ Soluções Múltiplas: $Z^* = 10.6 + 12.4 = 108$

(30) Restrições (s.a.):
$$\begin{cases} X_1 + 3X_2 \geq 9 \\ -X_1 + 2X_2 \leq 4 \\ X_1 - 4X_2 \leq 3 \\ X \geq 0 \end{cases}$$

a) MAX $Z = X_2$

- $\nabla f(X) = (0;1)$
- Curvas de nível (K): $K = X_2$ (constantes)

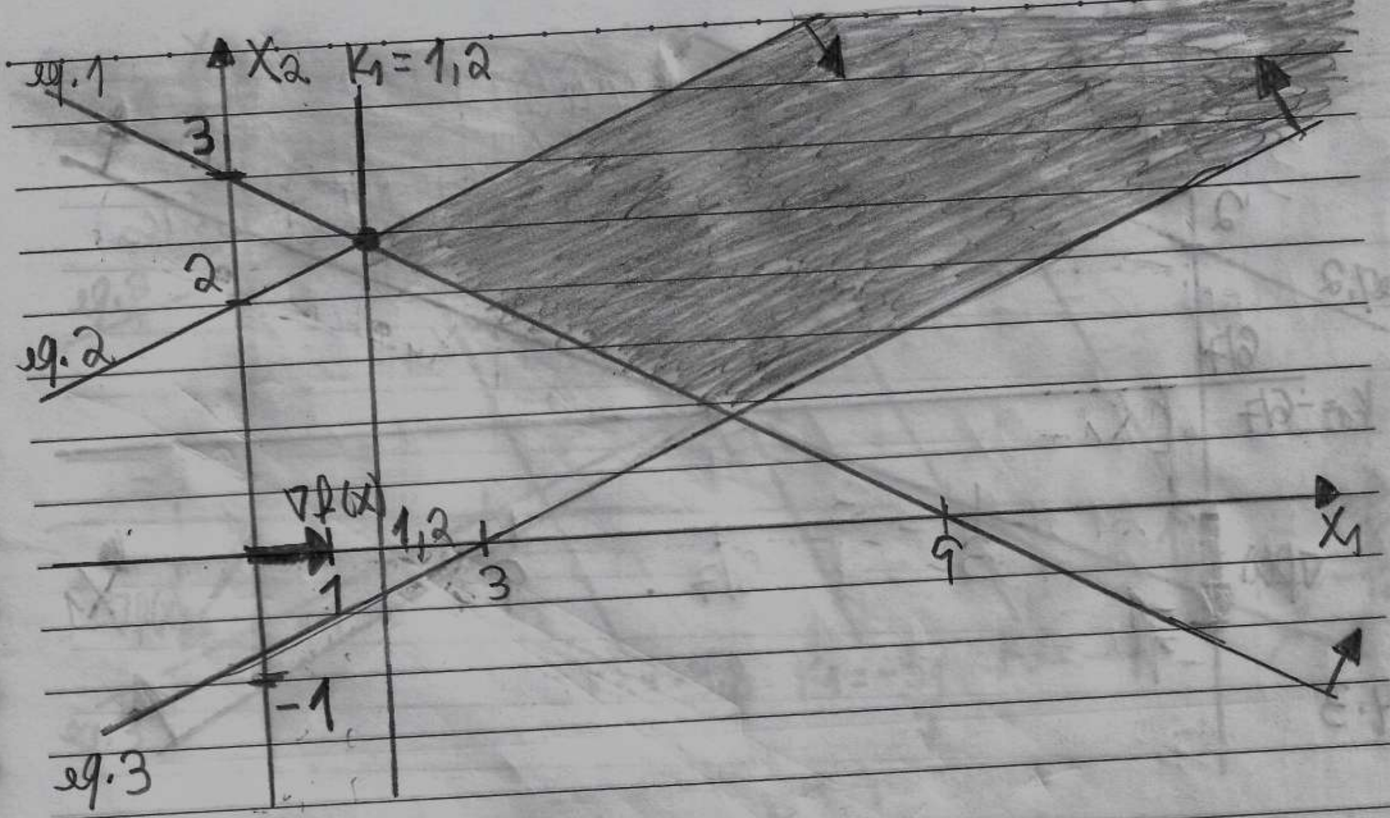


↳ Com base nas curvas de nível, tem-se que $Z^* \to +\infty$.

∴ Solução ilimitada.

b) MIN $Z = X_1$

- $\nabla f(x) = (1;0)$
- Curvas de Nível (K): $K = X_1$ (constantes)

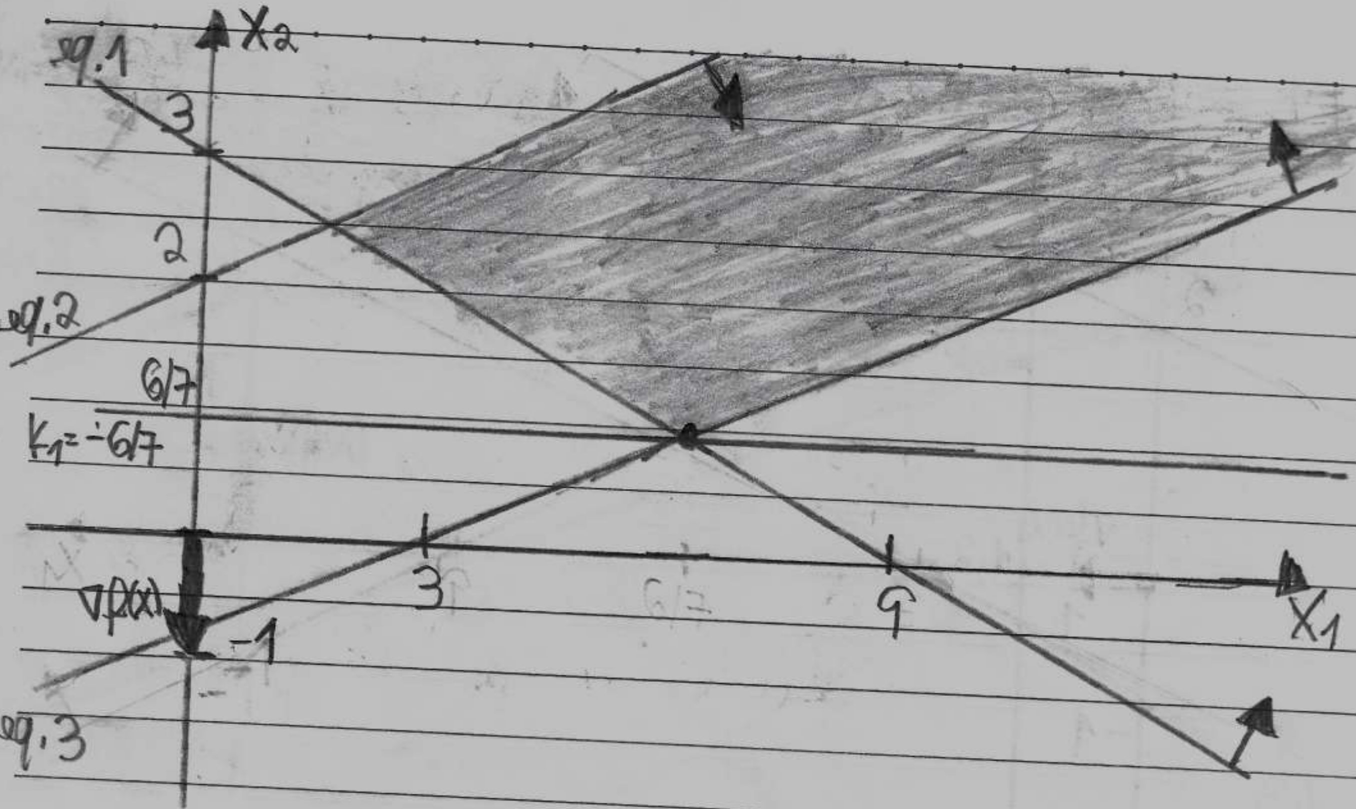


↳ Com base em K_1: $X^* = (1,2 ; 2,6)$

∴ Solução Única: $Z^* = 1,2$

e) MAX $Z = -X_2$

- $\nabla f(X) = (0 ; -1)$
- Curvas de Nível (K): $K = -X_2 \Leftrightarrow X_2 = -K$
  (Constantes com sinal trocado)



↳ Com base em K_1: $X^* = (45/7 \, ; \, 6/7)$

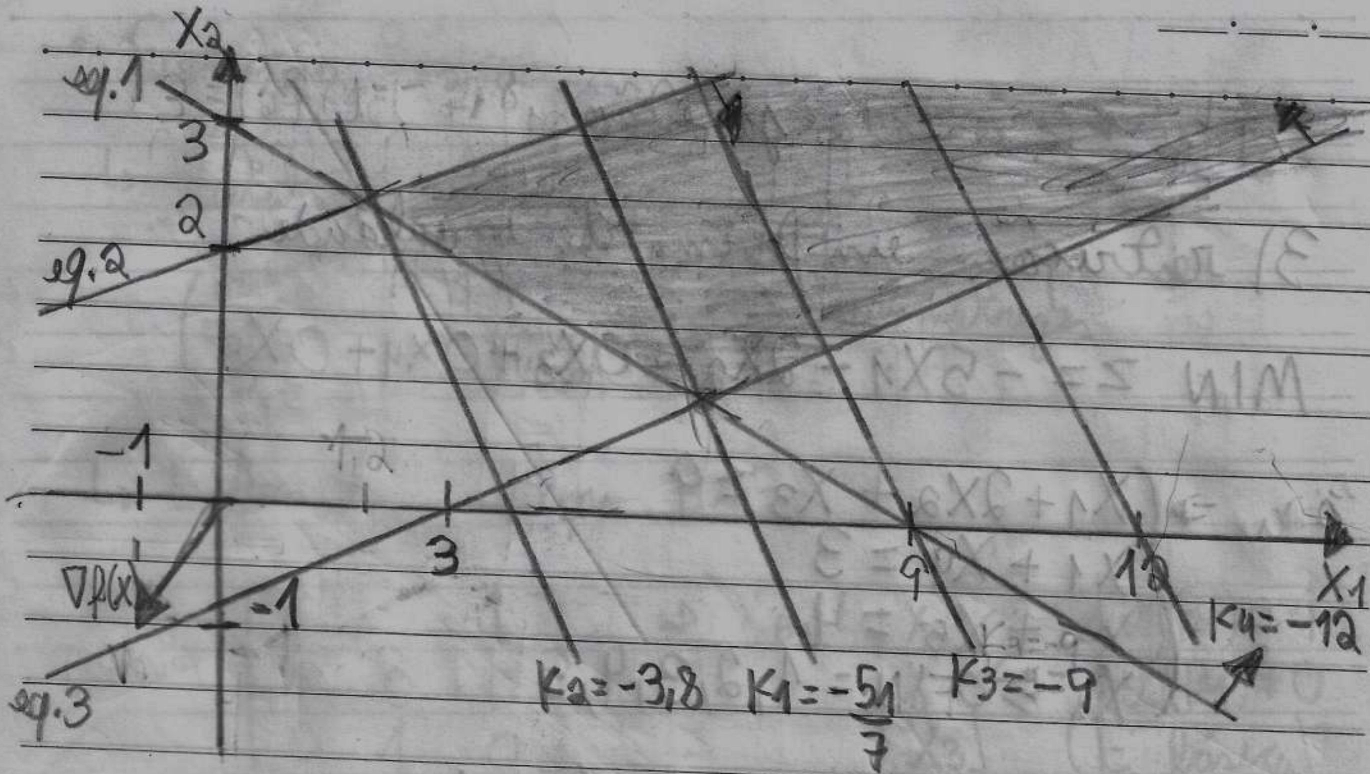
∴ Solução Única: $Z^* = -6/7$

d) MIN $Z = -X_1 - X_2$

- $\nabla f(x) = (-1 \, ; -1)$
- Curvas de Nível (K): $K = -X_1 - X_2$

$$\Leftrightarrow$$

$$X_1 + X_2 = -K$$



↳ Como deseja-se minimização (z) com base nas curvas de nível e vetor gradiente), tem-se que $Z^* \to +\infty$. Portanto, a solução é ilimitada.

32) b) MAX $Z = 5X_1 + 2X_2$

s.a.:

$X_1 + 2X_2 \leq 9$

$X_1 \leq 3$

$X_2 \leq 4$

$X. \geq 0$

• Forma Padrão

1) Minimização de Z

MAX $Z = 5X_1 + 2X_2 \to$ MIN $Z = -5X_1 - 2X_2$

___.___.___

*

2) $b_i \geq 0$: todos já estão

3) restrições em forma de igualdade

MIN $Z = -5X_1 - 2X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5$

$$\text{s.a.} \Rightarrow \begin{cases} X_1 + 2X_2 + X_3 = 9 \\ X_1 + X_4 = 3 \\ X_2 + X_5 = 4 \\ X_i \geq 0;\ i = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

4) $X \geq 0$ e não livre: já está

∴ Forma Padrão: MIN $Z = -5X_1 - 2X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5$

$$\text{s.a.} \begin{cases} X_1 + 2X_2 + X_3 \quad\quad\quad = 9 \\ X_1 \quad\quad + X_4 \quad = 3 \\ \quad X_2 \quad\quad + X_5 = 4 \\ X_i \geq 0;\ i = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

∴ Forma Padrão Matricial

MIN $= Z(X) = c^t X$

$$\text{s.a.} \begin{cases} Ax = b \\ b \geq 0 \\ X \geq 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$b^t = [9 \quad 3 \quad 4]$

$c^t = [-5 \quad -2 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$

$X^t = [X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad X_4 \quad X_5]$

• Soluções Básicas

↳ total de submatrizes

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)!\,3!} = 10 \text{ submatrizes}$$

↳ Submatrizes (tipo 3×3)

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow X_{B1} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(B_1) = 1$$

$\det(B_1) \neq 0$

(É básica)

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow X_{B2} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(B_2) = -1$$

$\det(B_2) \neq 0$

(É básica)

$$B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X_{B3} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(B_3) = -2$$

$\det(B_3) \neq 0$

(É básica)

$$B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow X_{B4} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(B_4) = 0$$

(Não é básica)

$$B_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X_{B5} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_3 \\ X_5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(B_5) = -1$$

$\det(B_5) \neq 0$

(É básica)

$$B_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X_{B6} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(B_6) = 1$$

$\det(B_6) \neq 0$

(É básica)

$$B_7 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow X_{B7} = \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(B_7) = 1$$

$\det(B_7) \neq 0$

(É básica)

$$B_8 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X_{B8} = \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(B_8) = 0$$

(Não é básica)

$$B_9 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X_{B9} = \begin{bmatrix} X_2 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(B_9) = 2$$

$\det(B_9) \neq 0$

(É básica)

$$B_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X_{B10} = \begin{bmatrix} X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(B_{10}) = 1$$

$\det(B_{10}) \neq 0$

(É básica)

↳ Soluções Básicas

$$B_1: \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \bar{X}_{B1} = (3 \quad 4 \quad -2 \quad 0 \quad 0)^t \ngeq 0$

↳ Solução Básica Inviável

B_2: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \bar{X}_{B2} = (1 \quad 4 \quad 0 \quad 2 \quad 0)^t \geq 0$

↳ Solução Básica Viável

B_3: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \bar{X}_{B3} = (3 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 1)^t \geq 0$

↳ Solução Básica Viável

B_5: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_3 \\ X_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \bar{X}_{B5} = (3 \quad 0 \quad 6 \quad 0 \quad 4)^t \geq 0$

B_6: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \bar{X}_{B6} = (9 \quad 0 \quad 0 \quad -6 \quad 4)^t \not\geq 0$

↳ Solução Básica Inviável

B_7: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \bar{X}_{B7} = (0 \quad 4 \quad 1 \quad 3 \quad 0)^t \geq 0$

↳ Solução Básica Viável

$$B_9: \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \bar{X}_{B9} = (0 \quad 9/2 \quad 0 \quad 3 \quad -1/2)^t \not\geq 0$

↳ Solução Básica Inviável

$$B_{10}: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \bar{X}_{B10} = (0 \quad 0 \quad 9 \quad 3 \quad 4)^t \geq 0$

↳ Solução Básica Viável

- Solução Ótima

$\bar{X}_{B2} = (1 \quad 4 \quad 0 \quad 2 \quad 0)^t \rightarrow Z_{\bar{X}B2} = 13$

$\bar{X}_{B3} = (3 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 1)^t \rightarrow Z_{\bar{X}B3} = 21$

$X_{B5} = (3 \quad 0 \quad 6 \quad 0 \quad 4)^t \rightarrow Z_{\bar{X}B5} = 15$

$\bar{X}_{B7} = (0 \quad 4 \quad 1 \quad 3 \quad 0)^t \rightarrow Z_{\bar{X}B7} = 8$

$\bar{X}_{B10} = (0 \quad 0 \quad 9 \quad 3 \quad 4)^t \rightarrow Z_{\bar{X}B10} = 0$

$\therefore$ Maximização: $X^* = \bar{X}_{B3} = (3 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 1)^t$

$Z^* = Z_{\bar{X}B3} = 21$