04.12.20

Nome: Davi Augusto Neves Leite RA: 191027383

4ª Atividade Avaliativa
(P.O. - B.C.C.)

~~1 MAX = U~~

1) $\max z(x) = 4x_1 + 6x_2 + 2x_3$

$$\text{s.a.}\begin{cases} 4x_1 - 4x_2 \leq 5 \\ -x_1 + 6x_2 \leq 5 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 \\ x \geq 0 \text{ e inteira} \end{cases}$$

↳ Resolução pelo Quadro Simplex (após relaxamento)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	4	-4	0	1	0	0	5
x_5	-1	6	0	0	1	0	5
x_6	-1	1	1	0	0	1	5
	-4	-6	-2	0	0	0	$-z$

↳ $x = (0 \ 0 \ 0 \ 5 \ 5 \ 5)$
$z(x) = 0$

↳ Entra na base: x_2
↳ Sai da base: $\min(5/6; 5) = 5/6 \Rightarrow x_5$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	10/3	0	0	1	2/3	0	25/3
x_2	-1/6	1	0	0	1/6	0	5/6
x_6	-5/6	0	1	0	-1/6	1	25/6
	-5	0	-2	0	1	0	$-z+5$

↳ Entra na base: X_1
↳ Sai da base: $MIN(25/10) = 25/10 \Rightarrow X_4$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
X_1	1	0	0	3/10	1/5	0	5/2
X_2	0	1	0	1/20	1/5	0	5/4
X_6	0	0	1	1/4	0	1	25/4
	0	0	−2	3/2	2	0	−Z + 35/2

↳ Entra na base: X_3
↳ Sai da base: $MIN(25/4) = 25/4 \Rightarrow X_6$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
X_1	1	0	0	3/10	1/5	0	5/2
X_2	0	1	0	1/20	1/5	0	5/4
X_3	0	0	1	1/4	0	1	25/4
	0	0	0	2	2	2	−Z + 30

↳ Como $\nexists c_j < 0$ para $j \in NB$, o quadro atual é ótimo.

↳ $X = (5/2 \quad 5/4 \quad 25/4 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$
$Z(X) = 30$

↳ Contudo, a solução não é inteira. Dessa forma, aplicando Gomory em X_1:

$\Rightarrow 1X_1 + 0X_2 + 0X_3 + (3/10)X_4 + (1/5)X_5 + 0X_6 = 5/2$

$\Rightarrow (1+0)X_1 + 0X_2 + 0X_3 + (0 + 3/10)X_4 + (0 + 1/5)X_5 + 0X_6 = 2 + 1/2$

$\Rightarrow 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + (3/10)x_4 + (1/5)x_5 + 0x_6 \geq 1/2$

↳ Atualizando e continuando o Quadro Simplex

• Fase I

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8^a	
x_1	1	0	0	3/10	1/5	0	0	0	5/2
x_2	0	1	0	1/20	1/5	0	0	0	5/4
x_3	0	0	1	1/4	0	1	0	0	25/4
x_8^a	0	0	0	3/10	1/5	0	-1	1	1/2
	0	0	0	2	2	2	0	M	$-Z+30$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8^a	
x_1	1	0	0	3/10	1/5	0	0	0	5/2
x_2	0	1	0	1/20	1/5	0	0	0	5/4
x_3	0	0	1	1/4	0	1	0	0	25/4
x_8^a	0	0	0	3/10	1/5	0	-1	1	1/2
	0	0	0	2	2	2	0	0	$-Z+30$
	0	0	0	-3/10	-1/5	0	1	0	$W-1/2$

↳ $X = (5/2 \;\; 5/4 \;\; 25/4 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1/2)$
$Z(X) = 30$ e $W(X) = 1/2$

↳ Entra na base: x_4
↳ Sai da base: $MIN(25/6; 25; 25; 5/3) = 5/3 \Rightarrow x_8^a$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8^a	
X_1	1	0	0	0	0	0	1	-1	2
X_2	0	1	0	0	$1/6$	0	$1/6$	$-1/6$	$7/6$
X_3	0	0	1	0	$-1/6$	1	$5/6$	$-5/6$	$35/6$
X_4	0	0	0	1	$2/3$	0	$-10/3$	$10/3$	$5/3$
	0	0	0	0	$2/3$	2	$20/3$	$-20/3$	$-z + 80/3$
	0	0	0	0	0	0	0	1	$w - 0$

↳ Como $\nexists\, c_j < 0$ para $j \in NB$, é marcado o fim da Fase I.

↳ $X = (2 \quad 7/6 \quad 35/6 \quad 5/3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$
$Z(X) = 80/3$ e $\boxed{W^*(X) = 0}$

• Fase II

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	
X_1	1	0	0	0	0	0	1	2
X_2	0	1	0	0	$1/6$	0	$1/6$	$7/6$
X_3	0	0	1	0	$-1/6$	1	$5/6$	$35/6$
X_4	0	0	0	1	$2/3$	0	$-10/3$	$5/3$
	0	0	0	0	$2/3$	2	$20/3$	$-z + 80/3$

↳ Como $\nexists\, c_j < 0$ para $j \in NB$, o quadro atual é ótimo.

↳ $X = (2 \quad 7/6 \quad 35/6 \quad 5/3 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$
$Z(X) = 80/3$

↳ Contudo a solução não é inteira. Dessa forma, aplicando Gomory em X_3:

$\Rightarrow 0x_1 + 0x_2 + (1+0)x_3 + 0x_4 + (-1 + 5/6)x_5 + (1+0)x_6 + (0 + 5/6)x_7 = 5 + 5/6$

$\Rightarrow 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + \frac{5}{6}x_5 + 0x_6 + \frac{5}{6}x_7 \geq \frac{5}{6}$

↳ Atualizando e continuando o quadro Simplex

• Fase I

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9^a	
x_1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	2
x_2	0	1	0	0	1/6	0	1/6	0	0	7/6
x_3	0	0	1	0	-1/6	1	5/6	0	0	35/6
x_4	0	0	0	1	2/3	0	-10/3	0	0	5/3
x_9^a	0	0	0	0	5/6	0	5/6	-1	1	5/6
	0	0	0	0	2/3	2	20/3	0	M	$-Z+80/3$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9^a	
x_1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	2
x_2	0	1	0	0	1/6	0	1/6	0	0	7/6
x_3	0	0	1	0	-1/6	1	5/6	0	0	35/6
x_4	0	0	0	1	2/3	0	-10/3	0	0	5/3
x_9^a	0	0	0	0	5/6	0	5/6	-1	1	5/6
	0	0	0	0	2/3	2	20/3	0	0	$-Z+80/3$
	0	0	0	0	-5/6	0	-5/6	1	0	$W-5/6$

↳ $X = (2 \;\; 7/6 \;\; 35/6 \;\; 5/3 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 5/6)$
$Z(X) = 80/3$ e $W = 5/6$

↳ Entra na base: x_5 (arbitrária)
↳ Sai da base: $MIN(7; 5/2; 1) = 1 \Rightarrow x_9^a$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
x_1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	2
x_2	0	1	0	0	0	0	0	1/5	-1/5	1
x_3	0	0	1	0	0	1	1	-1/5	1/5	6
x_4	0	0	0	1	0	0	-4	4/5	-4/5	1
x_5	0	0	0	0	1	0	1	-6/5	6/5	1
	0	0	0	0	0	2	6	4/5	-4/5	$-z+26$
	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$w-0$

↳ Como $\nexists\, c_j < 0$ para $j \in NB$, é marcado o fim da Fase I.

↳ $x = (2 \quad 1 \quad 6 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$
$z(x) = 26$ e $\boxed{w^*(x) = 0}$

• Fase II

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
x_1	1	0	0	0	0	0	1	0	2
x_2	0	1	0	0	0	0	0	1/5	1
x_3	0	0	1	0	0	1	1	-1/5	6
x_4	0	0	0	1	0	0	-4	4/5	1
x_5	0	0	0	0	1	0	1	-6/5	1
	0	0	0	0	0	2	6	4/5	$-z+26$

↳ Como $\nexists\, c_j < 0$ para $j \in NB$, o quadro atual é ótimo.

↳ $x = (2 \quad 1 \quad 6 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$
$z(x) = 26$

∴ Como a solução é inteira e, portanto, válida para o problema original, tem-se:

$x^* = (2 \quad 1 \quad 6)$
$z^* = 26$ ⇒ Solução ótima e única

(2) Geometricamente, o método Branch and Bound acrescenta restrições limitantes ao problema original, de tal forma a excluir a região entre as restrições. Essas restrições são alteradas em caso da solução do quadro final não estar inteira, sendo elas exprimidas como intervalo dos limites inteiros da variável não inteira do problema original. Essa é a ideia de bifurcar, ou seja, dividir em dois intervalos limitantes, excluindo a região do problema original. Além disso, o acréscimo das restrições é acumulativo.

Já o método de Gomory, geometricamente, consiste em realizar cortes na região do problema original, de tal forma que estes cortes tornem menor a região do problema original.

A principal diferença entre os métodos, relacionado a geometria, está nas restrições: o primeiro método realiza duas divisões com base nos limites inteiros da variável não inteira, enquanto que o segundo realiza cortes paralelos de forma a diminuir a região de viabilidade do problema original.