4616 – Métodos Numéricos Computacionais

Larissa Oliveira
oliveira.t.larissa@gmail.com

unesp

Na última aula...

MÉTODO DO PONTO FIXO (MPF)

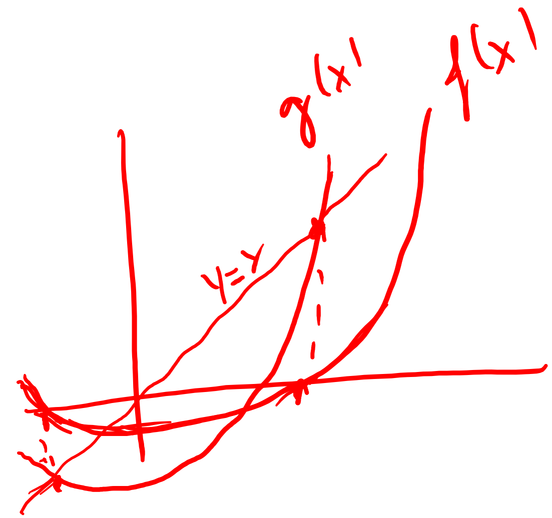
Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo [a,b] e tal que $f(a)f(b) < 0$.

- ✓ O MPF consiste em transformar uma equação $f(x) = 0$ em uma equação equivalente $x = \varphi(x)$ e a partir de uma aproximação inicial x_0, gerar uma sequência $\{x_k\}$ de aproximações para $\bar{x}$ pela relação $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ ($f(\bar{x}) = 0$ se, e somente se, $\varphi(\bar{x}) = \bar{x}$).

Assim, transformamos o problema de encontrar um zero de $f(x)$ no problema de encontrar um ponto fixo de $\varphi(x)$.

MÉTODO DO PONTO FIXO (MPF)

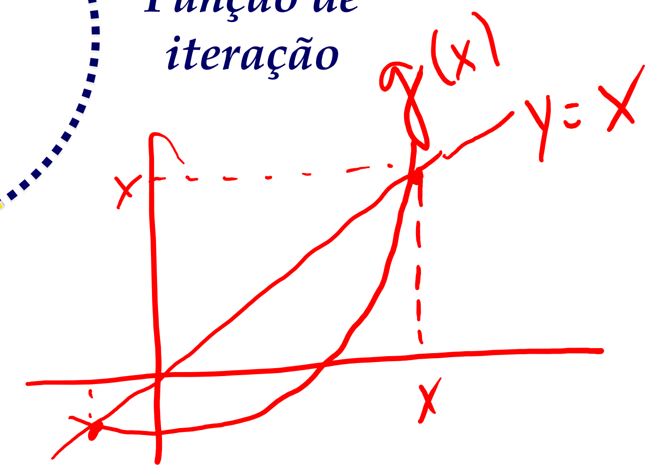
Implicação do procedimento:



Problema de determinação de um zero de *f(x)*

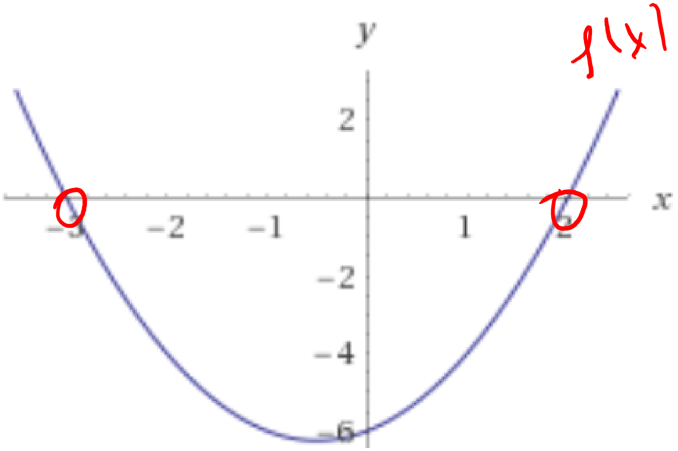
Problema de determinação de um ponto fixo de *g(x)*

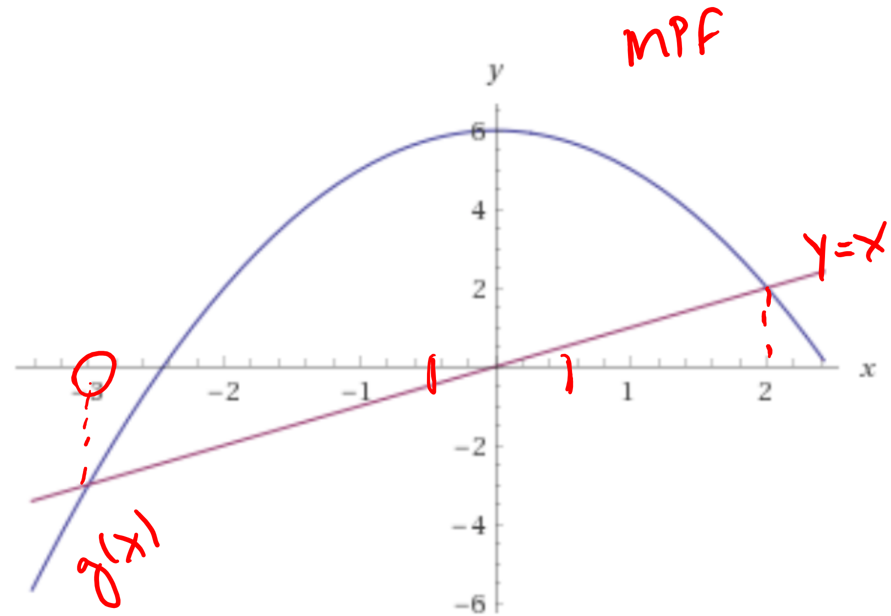
Função de iteração

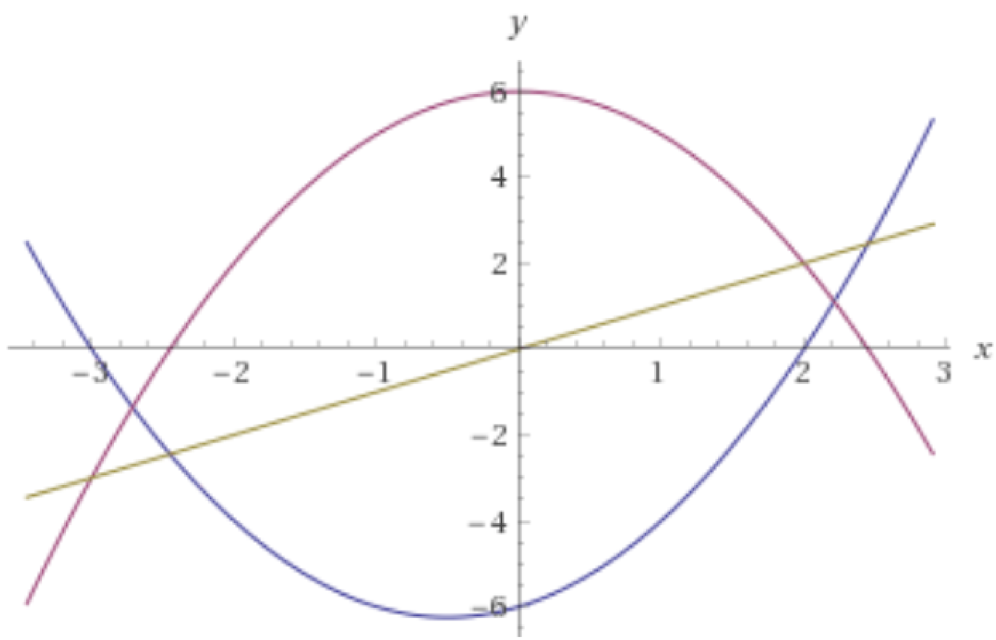


MÉTODO DO PONTO FIXO (MPF)

Seja a equação $x^2 + x - 6 = 0$.







MÉTODO DO PONTO FIXO (MPF)

Seja a equação $x^2 + x - 6 = 0$.

$x = \underbrace{6 - x^2}$

Funções de iteração possíveis:

$x = \varphi(x)$

- $g_1(x) = 6 - x^2$
- $g_2(x) = \pm\sqrt{6 - x}$
- $g_3(x) = \dfrac{6}{x+1}$

$x(x+1) - 6 = 0$

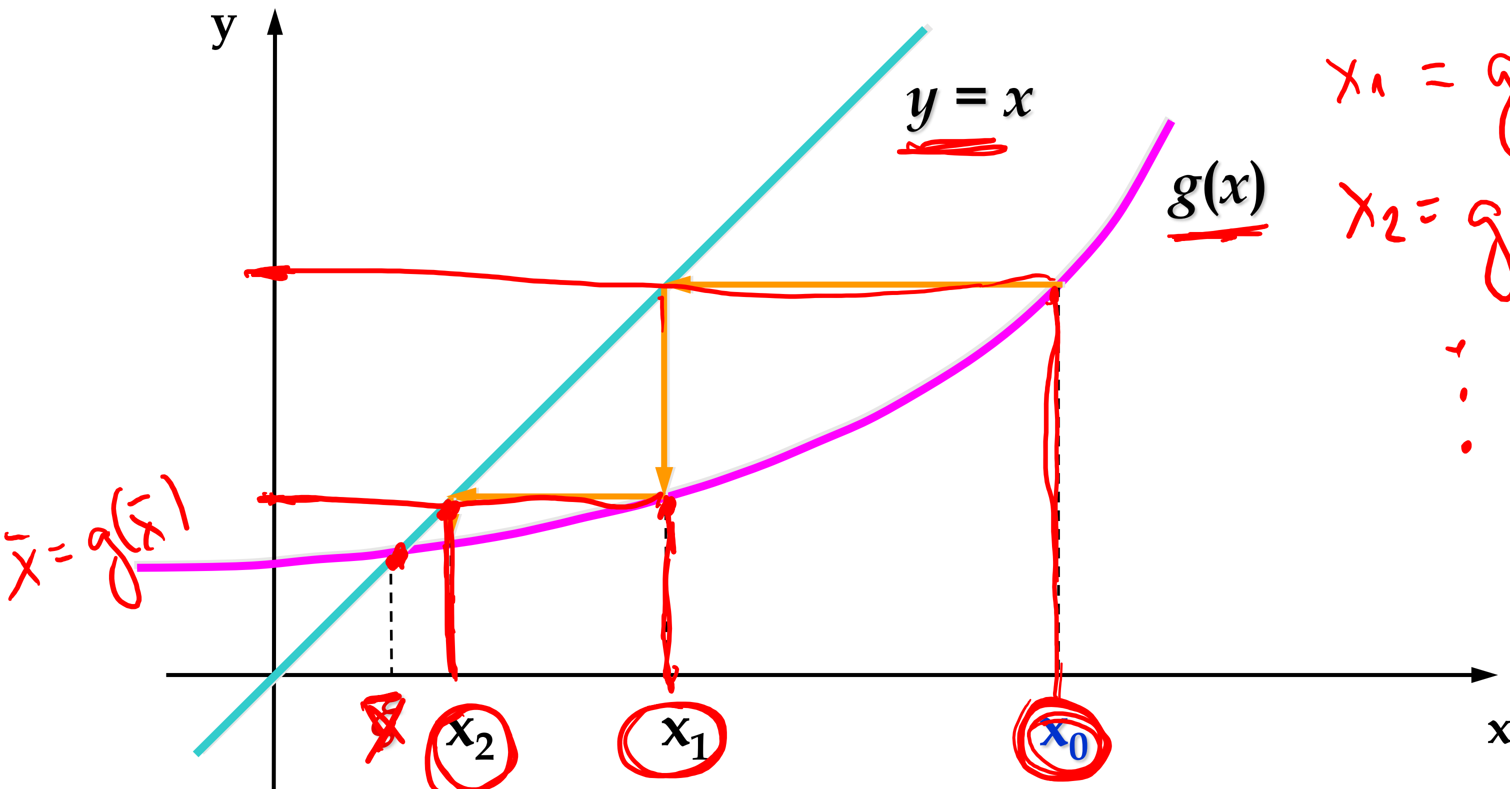
Dada uma equação do tipo $f(x) = 0$, há para tal equação *mais de uma função de iteração* $g(x)$, tal que: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x)$

A forma geral das funções de iteração $\varphi(x)$ é $\boxed{\varphi(x) = x + A(x)\, f(x)}$ com a condição de que em $\bar{x}$, ponto fixo de $\varphi(x)$, se tenha $A(\bar{x}) \neq 0$.

MÉTODO DO PONTO FIXO (MPF)

✓ Análise Gráfica da Convergência

Graficamente, uma raiz da equação $x = g(x)$ é a abcissa do ponto de intersecção da reta $y = x$ e da curva $y = g(x)$



$x_1 = g(x_0)$

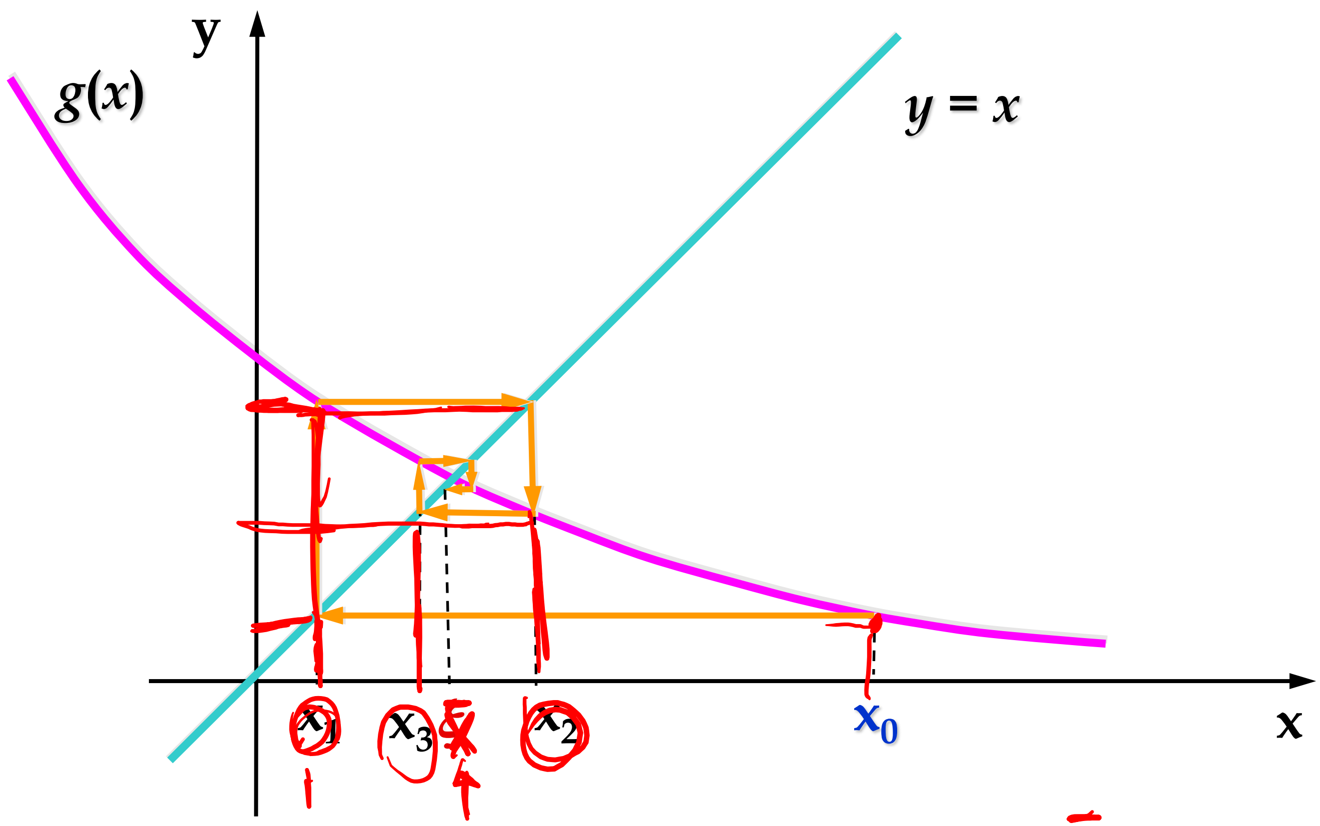
$x_2 = g(x_1)$

$\vdots$

$\{x_k\} \to \xi$ quando $k \to inf$

MÉTODO DO PONTO FIXO (MPF)

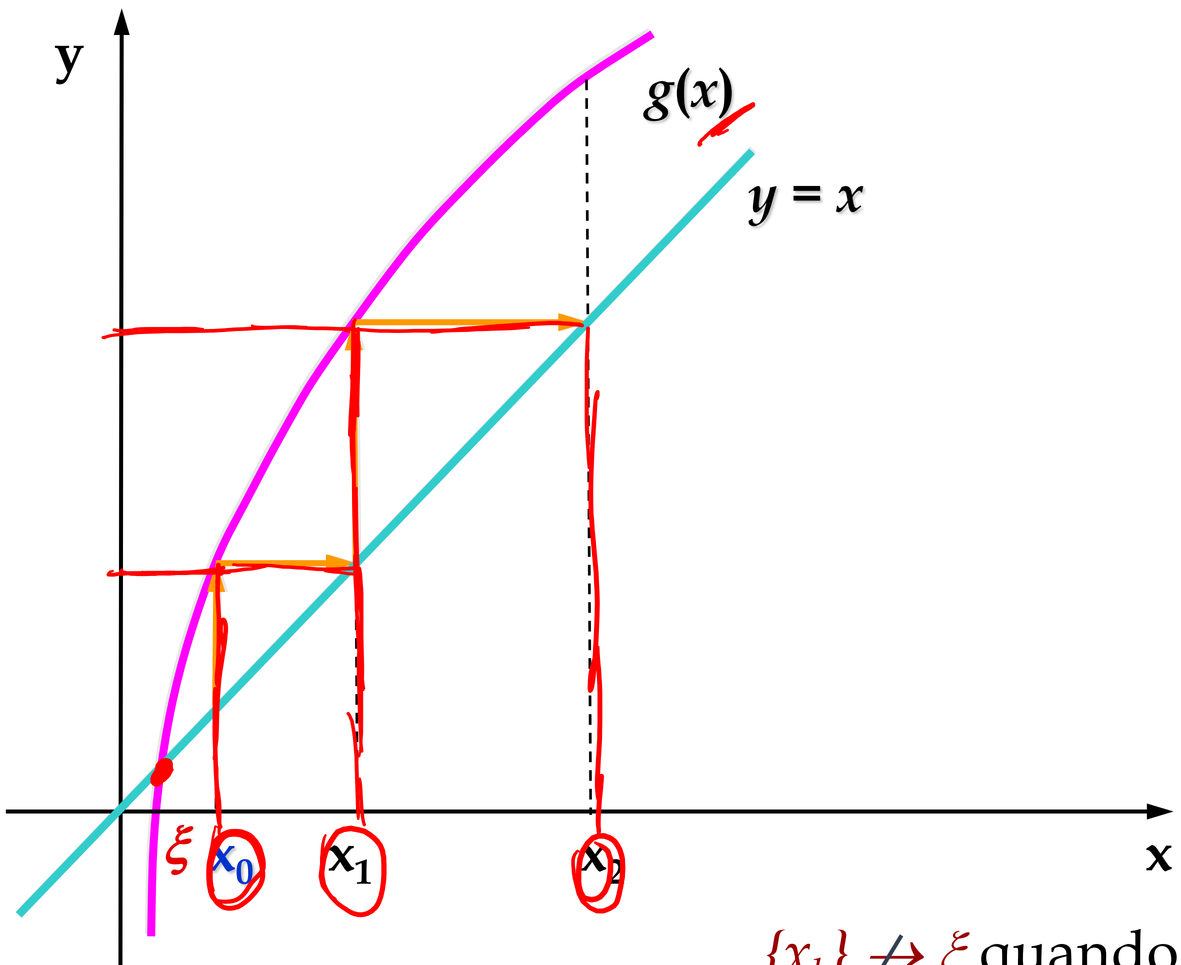
✓ **Análise Gráfica da Convergência**



$\{x_k\} \rightarrow \xi$ quando $k \rightarrow inf$

MÉTODO DO PONTO FIXO (MPF)

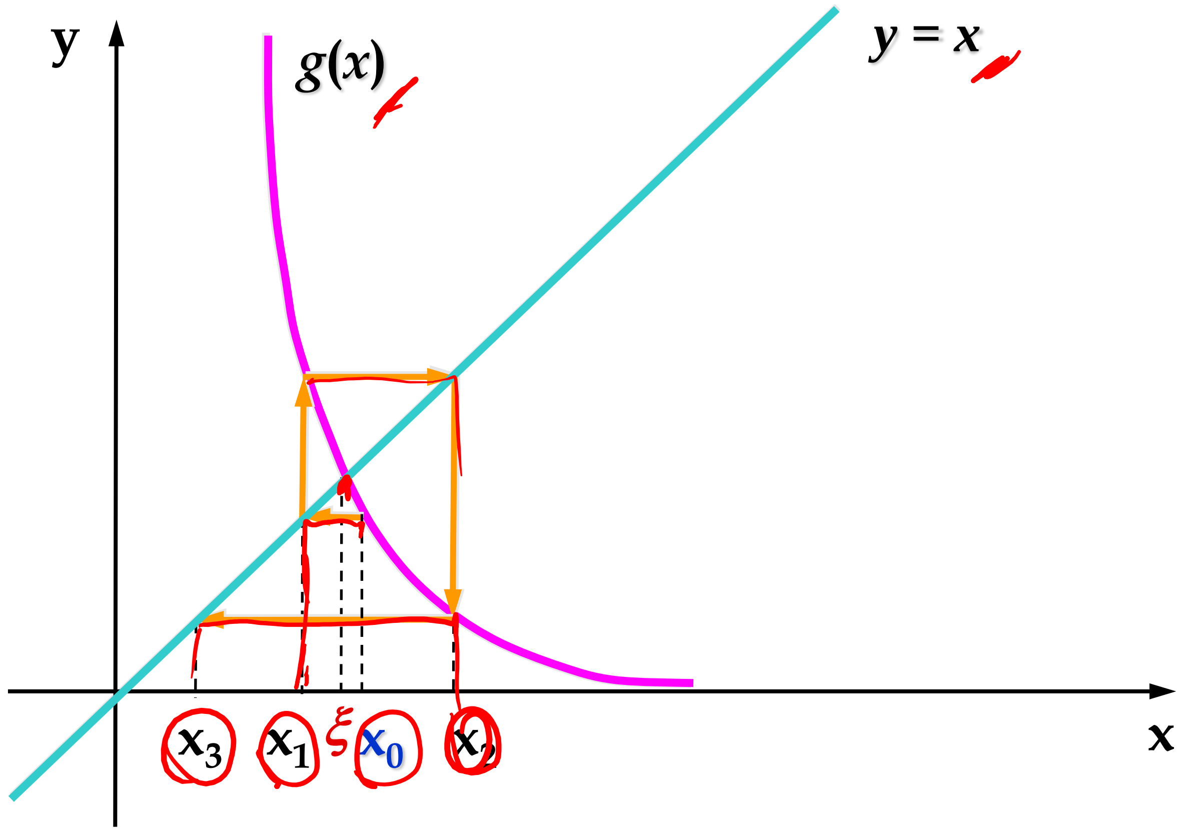
✓ Análise Gráfica da Convergência



$\{x_k\} \not\to \xi$ quando $k \to inf$

MÉTODO DO PONTO FIXO (MPF)

✓ **Análise Gráfica da Convergência**



$\{x_k\} \not\to \xi$ quando $k \to inf$

MÉTODO DO PONTO FIXO (MPF)

Teorema:

Sendo $\bar{x}$ uma raiz de $f(x) = 0$, isolada em um intervalo I centrado em $\bar{x}$ e $g(x)$ uma função de iteração para $f(x) = 0$. Se

i. $g(x)$ e $g'(x)$ são contínuas em I

ii. $|g'(x)| \leq M < 1$, $\forall\, x \in I$ e

iii. $x_0 \in I$

então a sequência $\{x_k\}$ gerada pelo processo iterativo $\boxed{x_{k+1} = g(x_k)}$ convergirá para $\bar{x}$.

$f(\bar{x}) = 0$

$\bar{x} = g(\bar{x})$

MÉTODO DO PONTO FIXO (MPF)

Exemplo

Seja $x^2 + x - 6 = 0$

Funções de iteração possíveis:

- ✓ $g_1(x) = 6 - x^2$
- ✓ $g_2(x) = \sqrt{6 - x}$

$g_1(x)$ ⇨ geração de uma sequência divergente de $\overline{x_2} = 2$

$g_2(x)$ ⇨ geração de uma sequência convergente para $\overline{x_2} = 2$

MÉTODO DO PONTO FIXO (MPF)

Analisando g_1

$\bar{x}$

i) $g_1(x) = 6 - x^2$ e $g'_1(x) = -2x \Rightarrow$ contínuas em I

ii) $|g'_1(x)| < 1 \Leftrightarrow |-2x| < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ $\quad$ I

Não existe um intervalo I centrado em $\bar{x}_2 = 2$, tal que $|g'(x)| < 1, \forall\, x \in I \Rightarrow g_1(x)$ não satisfaz a condição 2 do Teorema com relação a $\bar{x}_2 = 2$.

MÉTODO DO PONTO FIXO (MPF)

Analisando g_2

$\bar{x} \approx 2$

✓ i) $\underbrace{g_2(x) = \sqrt{6-x}}$ e $\underbrace{g'_2(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{6-x}}}$

⇨ $g_2(x)$ é contínua em S = $\{x \in \mathbb{R} \mid x \le 6\}$

⇨ $g'_2(x)$ é contínua em S′ = $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 6\}$

✓ ii) $|g'_2(x)| < 1 \Leftrightarrow \left|-\dfrac{1}{2\sqrt{6-x}}\right| < 1 \Leftrightarrow x < 5{,}75$

2 5,75

iii) É possível obter um intervalo I centrado em $\bar{x}_2 = 2$, tal que todas as condições do Teorema sejam satisfeitas.

MÉTODO DO PONTO FIXO (MPF)

Condições de Parada

✓ $$\frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|} < \varepsilon$$

$$\frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n|} < \varepsilon$$

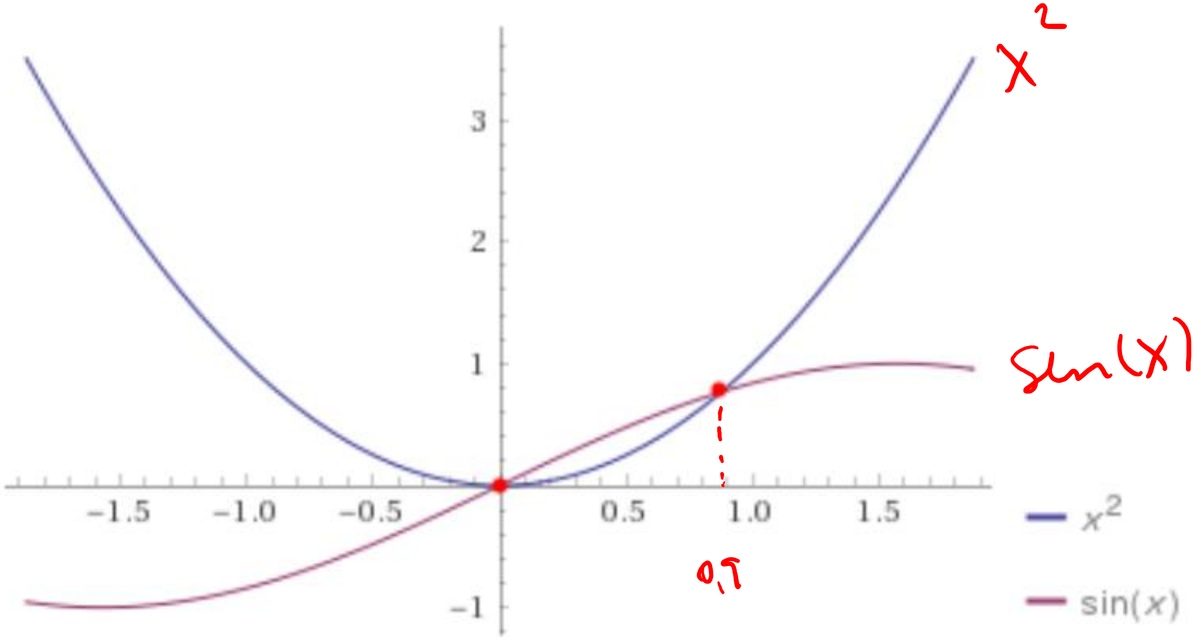
ERRO RELATIVO

$x_n \approx \bar{x}$

MÉTODO DO PONTO FIXO (MPF)

Exemplo:

Utilizando o MPF, determine a raiz positiva e diferente de zero da equação x^2 – sen $(x) = 0$, com $\varepsilon = 0.004$



$\bar{x} \in [0.5, 1.3]$

$$\varphi(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$$

$$\varphi'(x) = \frac{x\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{x^2}$$

$$x^2 - \operatorname{sen}(x) = 0$$

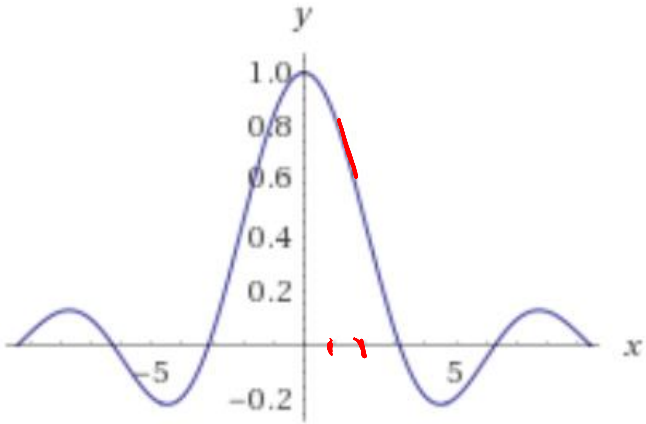
$$x^2 = \operatorname{sen}(x)$$

$$x\,x = \operatorname{sen}(x)$$

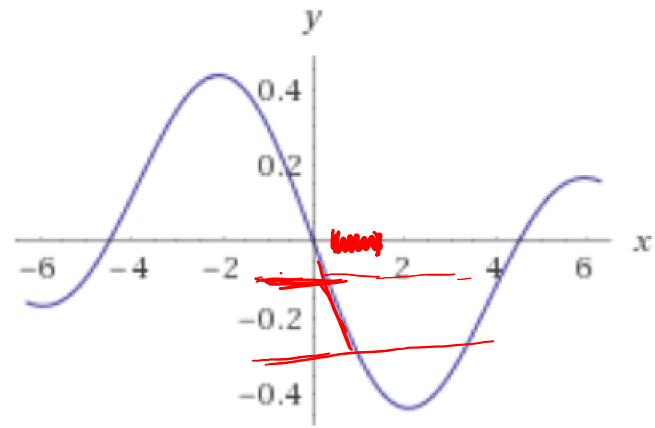
$$x = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$$

$$x = \varphi(x)$$

i) continuar: sim



$$\frac{\sin(x)}{x}$$



$$\boxed{\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2}}$$

ii) $|\varphi'(x)| < 1 \quad \forall x \in [0.5, 1.3]$

$\varphi'(0.5) = -0{,}1625$

$\varphi'(1{,}3) = -0{,}3644$

$-0{,}4 < \varphi'(1.3) \leq \varphi'(x) \leq \varphi'(0.5) < -0{,}2$

$|\varphi'(x)| < 0{,}4 < 1$

iii) $x_0 \in [0.5 , 1.3]$

$$\varphi(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

$x_0 = 1$

$x_1 = \varphi(x_0) = 0,8415$ ERRO $= \dfrac{|0,8415 - 1|}{|0,8415|} = 0,1884 > \varepsilon$

$x_2 = \varphi(x_1) = 0,8635$ ERRO $= \dfrac{|0,8635 - 0,8415|}{|0,8635|} = 0,0255 > \varepsilon$

$x_3 = \varphi(x_2) = 0,8718$ ERRO $= \dfrac{|0,8718 - 0,8635|}{|0,8718|} = 0,0095 > \varepsilon$

$x_4 = \varphi(x_3) = 0,8749$ ERRO $= \dfrac{|0,8749 - 0,8718|}{|0,8749|} = 0,0035 < \varepsilon$

PARE

$\bar{x} \cong 0,8749$

RELATIVO

$|x_k - x_{k-1}|$

ERRO ABSOL.

Hoje…

MÉTODO DE NEWTON

Ideia de aproximantes

Seja $\bar{x}$ a raiz da equação f(x) = 0, tal que $\bar{x} \in [a, b]$, finito e que f´(x) e f´´(x) sejam funções contínuas que preservam o sinal em [a,b]. Seja x_k, tal que $x_k \approx \bar{x}$, $x_k \in [a, b]$ e h_k uma pequena tolerância positiva tal que:

$$\bar{x} = x_k + h_k$$

Aplicando a fórmula de Taylor em torno de $\bar{x}$ temos:

$$f(\bar{x}) = f(x_k + h_k) = f(x_k) + h_k f'(x_k) + \frac{(h_k)^2}{2!} f''(x_k) + \cdots + Erro$$

MÉTODO DE NEWTON

Truncando-se a série no termo de ordem 2 obtemos uma aproximação linear para $f(\bar{x})$:

$$f(\bar{x}) \cong f(x_k) + h_k f'(x_k)$$

Como $f(\bar{x}) = 0$, temos que $f(x_k) + h_k f'(x_k) \cong 0$ e daí

$$h_k \cong \frac{-f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Ao usarmos $\bar{x} = x_k + h_k$ temos que:

$$\bar{x} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$\bar{x} - x_k \cong \frac{-f(x_k)}{f'(x_k)}$$

MÉTODO DE NEWTON

Se substituirmos $\bar{x}$ por um novo valor x_{k+1} temos:

$\bar{x}$

$$\bar{x} \leftarrow x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, k = 0,1,2,..$$

$\bar{x}$ $\quad$ x_1 $\quad$ x_0

x_1

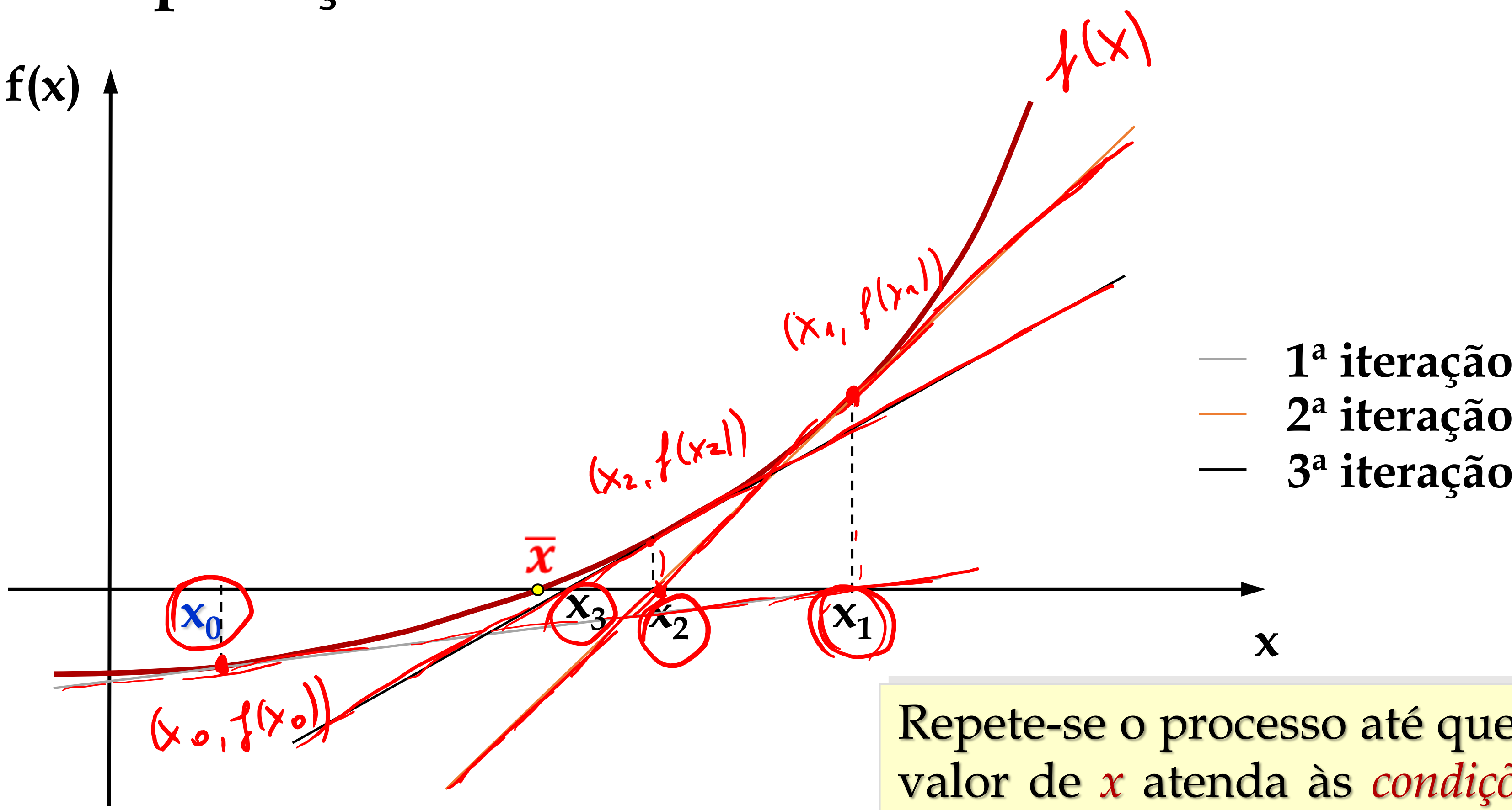
$\bar{x}$ $\quad$ x_2

$\vdots$

$\boxed{\text{MÉTODO DE NEWTON}}$

MÉTODO DE NEWTON

Interpretação Geométrica



Repete-se o processo até que o valor de *x* atenda às *condições de parada*.

MÉTODO DE NEWTON

Convergência

Seja $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ contínuas num intervalo I que contém a raiz de $f(x)$. Se $f'(\bar{x}) \neq 0 \; e \; f''(x) \neq 0$, então o Método de Newton converge, sendo sua convergência de ordem quadrática.

MÉTODO DE NEWTON

critério de parada

- ✓ A cada iteração, testa-se se a aproximação encontrada poderá ser considerada como a solução do problema.

  - ✓ $$\frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|} < \varepsilon$$

$x_{k+1} \approx \bar{x}$

MÉTODO DE NEWTON

Vantagens:

- ✓ Rapidez processo de convergência;
- ✓ Desempenho elevado.

NEWTON

MOD.

$f'(x_0)$

Desvantagens:

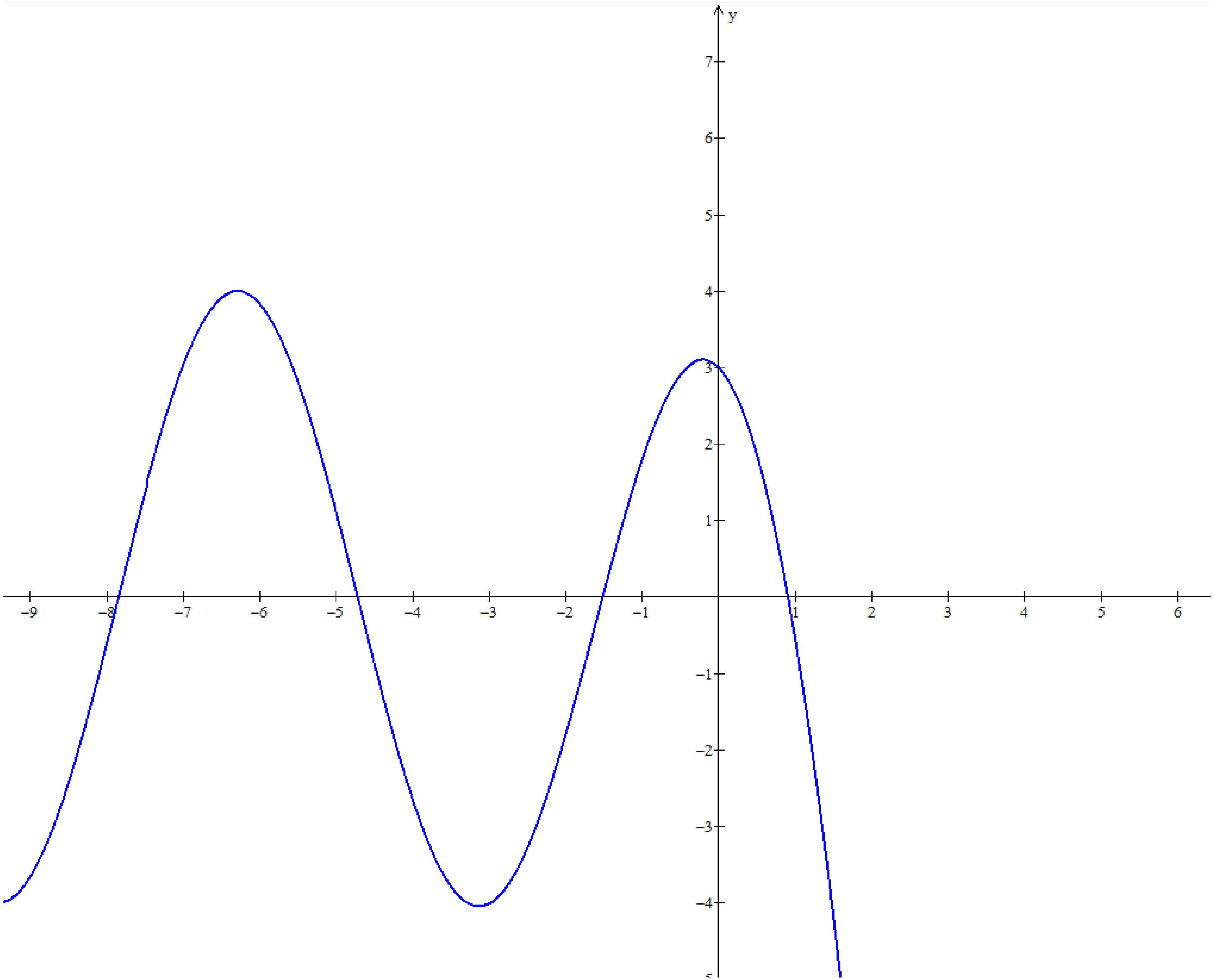
- ✓ Necessidade da obtenção de $f'(x)$;
- ✓ O cálculo do valor numérico de $f'(x)$ a cada iteração;

MÉTODO DE NEWTON

Exemplo

Utilizando o método de Newton, determine a raiz positiva da função $f(x) = 4\cos(x) - e^x = 0$ com $\varepsilon = 10^{-2}$. 0,01

MÉTODO DE NEWTON



$$f(x) = 4\cos(x) - e^x \qquad \bar{x} \in [0, 1]$$

$$f'(x) = -4\sin(x) - e^x \qquad x_0 = 0{,}5$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0{,}5 - \frac{1{,}8616}{(-3{,}5664)} = 1{,}0220$$

$$\text{ERRO} = \frac{|1{,}0220 - 0{,}5|}{|1{,}0220|} = 0{,}5108 > \varepsilon = 0{,}01$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1{,}0220 - \frac{(-0{,}6921)}{(-6{,}1914)} = 0{,}9102$$

$$\text{ERRO} = \frac{|0{,}9102 - 1{,}0220|}{|0{,}9102|} = 0{,}1228 > \varepsilon$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0{,}9102 - \frac{(-0{,}0305)}{(-5{,}6433)} = 0{,}9048$$

$$\text{ERRO} = \frac{|0{,}9048 - 0{,}9102|}{|0{,}9048|} = 0{,}0006 < \varepsilon$$

PARE

$$\bar{x} \cong 0{,}9048$$

MÉTODO DE NEWTON

Exercício para presença

Utilizando o método de Newton, resolva a equação $\ln(x) + x - 4 = 0$, com $\varepsilon = 0{,}0001$ e $x_0 = 1{,}5$. Apresente os valores com 4 casas decimais.