4616 – Métodos Numéricos Computacionais

Larissa Oliveira
oliveira.t.larissa@gmail.com

unesp

Na última aula...

CÁLCULO DE ZEROS DE FUNÇÕES REAIS

- ✓ Etapas usuais para a determinação de raízes a partir de Métodos Numéricos

MÉTODOS

FASE I

Isolamento das raízes

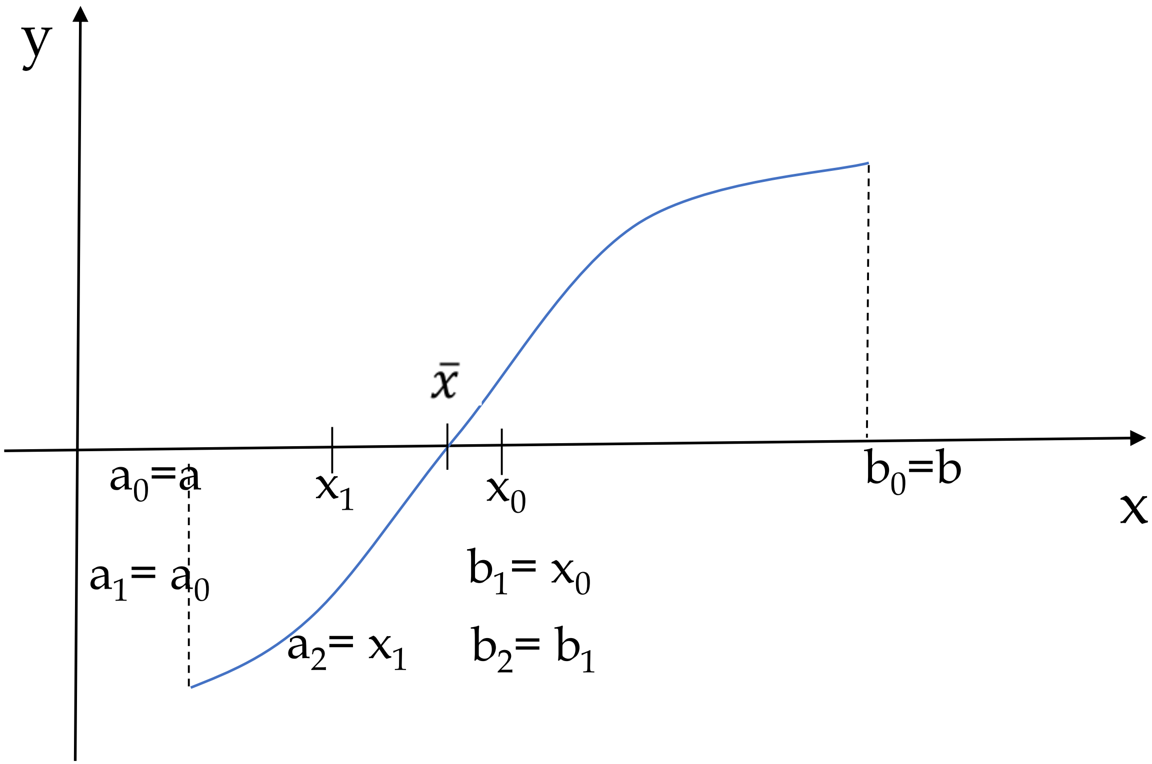
Determinação de um intervalo (o menor possível) que contenha apenas uma raiz

FASE II

Refinamento das raízes

Melhora do valor da raiz aproximada (refinamento até a precisão desejada).

MÉTODO DA BISSECÇÃO



MÉTODO DA BISSECÇÃO

As sequências a_i, b_i e x_i são construídas da seguinte maneira:

1- Determinar um intervalo inicial $[a_0, b_0]$ tal que $f(a_0)f(b_0) < 0$;

2- Calcular $x_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$ (ponto médio do intervalo);

3- Se $\dfrac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_k|} < \varepsilon$ ou $|f(x_k)| < \varepsilon$ PARE, x_k é uma raiz de $f(x)$;

4- Se $f(a_k)f(x_k)$ **<** 0, então $a_{k+1} = a_k$ e $b_{k+1} = x_k$;

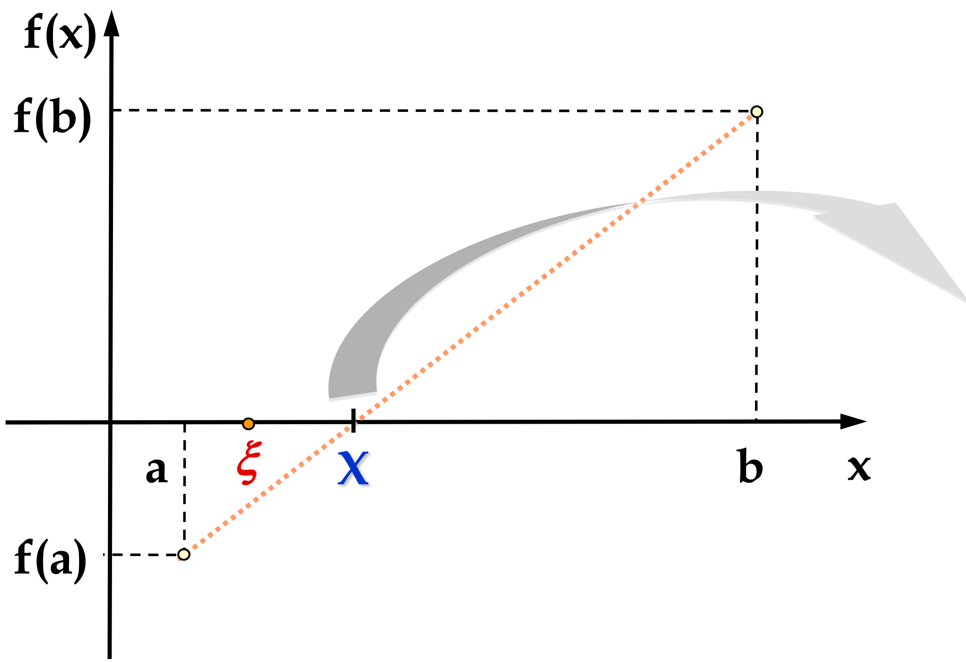
5- Se $f(a_k)f(x_k)$ **>** 0, então $a_{k+1} = x_k$ e $b_{k+1} = b_k$.

Hoje…

MÉTODO DA POSIÇÃO FALSA

Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo [a,b] e tal que $f(a)f(b) < 0$.

Calcula a média ponderada entre a e b com pesos |f(b)| e |f(a)|, respectivamente:



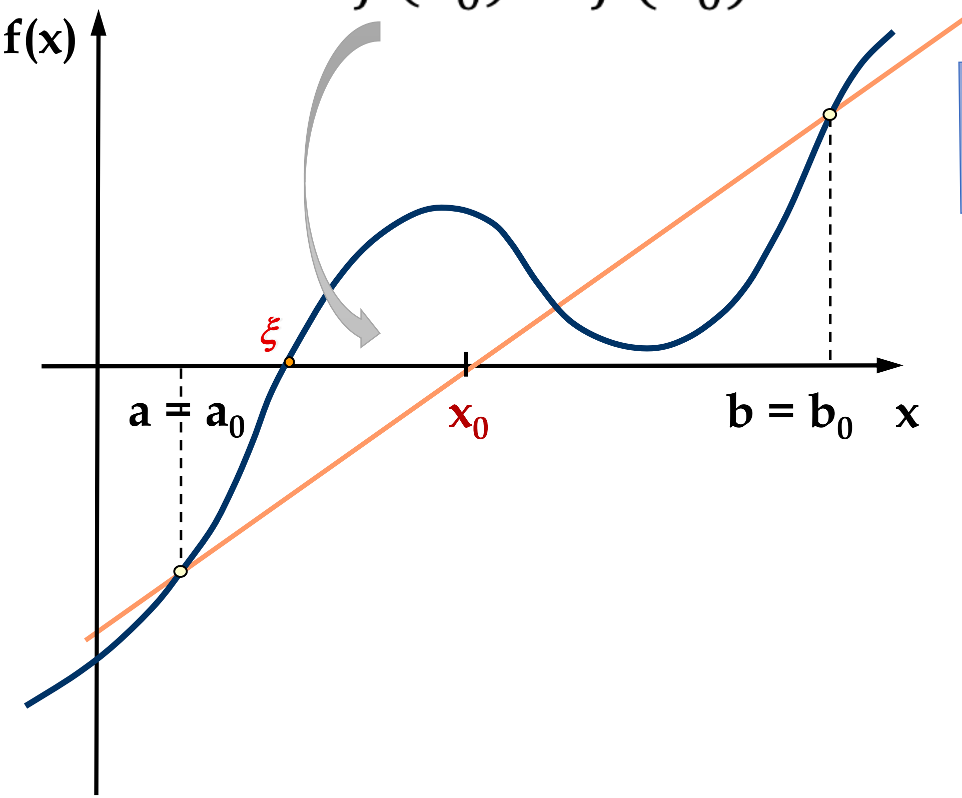
$$X = \frac{a|f(b)| + b|f(a)|}{|f(b)| + |f(a)|}$$

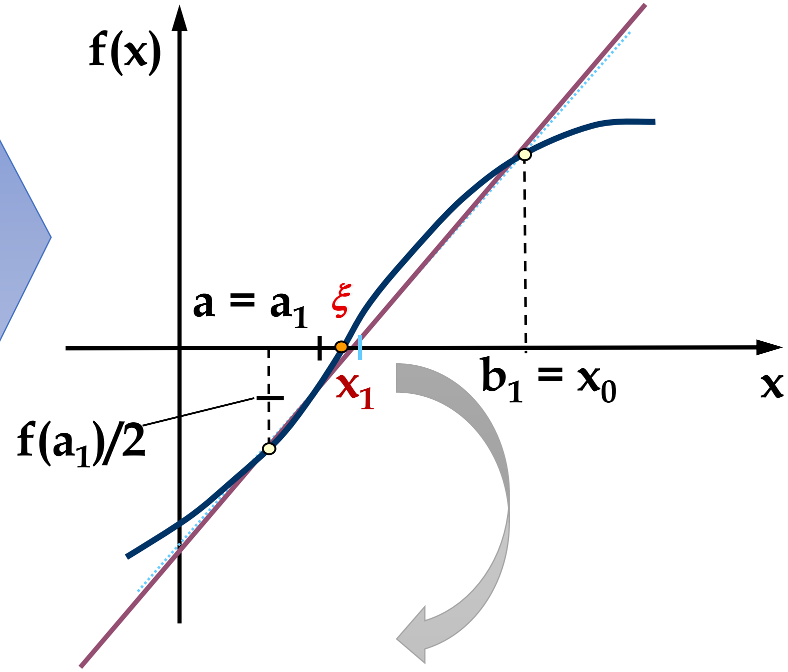
$$X = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

(já que f(a) e f(b) tem sinais opostos)

ANÁLISE GRÁFICA

$$x_0 = \frac{a_0 f(b_0) - b_0 f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)}$$





$$x_1 = \frac{a_1 f(b_1) - b_1 f(a_1)}{f(b_1) - f(a_1)}$$

Graficamente, o valor de *x* é o ponto de intersecção entre o eixo e a reta *r(x)* que passa por *(a,f(a)) e (b,f(b))*

Repete-se o processo até que o valor de *x* atenda às *condições de parada*.

MÉTODO DA POSIÇÃO FALSA

Graficamente, o valor de *x* é o ponto de intersecção entre o eixo e a reta *r(x)* que passa por *(a,f(a)) e (b,f(b))*

$$m_s = \frac{f(b_k) - f(a_k)}{b_k - a_k} \quad \text{e} \quad y - f(a_k) = \frac{f(b_k) - f(a_k)}{b_k - a_k} \cdot (x - a_k)$$

$$(x, y) = (x_k, 0)$$

$$0 - f(a_k) = \frac{f(b_k) - f(a_k)}{b_k - a_k}(x_k - a_k)$$

$$f(b_k)a_k - f(a_k)b_k = \big(f(b_k) - f(a_k)\big)x_k$$

E portanto, $x_k = \frac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}$, $k=0,1,2,\ldots$

MÉTODO DA POSIÇÃO FALSA

Definição do Intervalo Inicial

Atribui-se *[a,b]* como *intervalo inicial*

- ✓ $a_0 = a$
- ✓ $b_0 = b$

Condições de Aplicação

- ✓ $f(a)f(b) < 0$
- ✓ Sinal da derivada *constante no intervalo [a,b]*

MÉTODO DA POSIÇÃO FALSA

Definição dos Subintervalos

- ✓ Subdivide-se o intervalo [a,b] pelo *ponto de intersecção* da reta secante, que passa pelos pontos (a,f(a)) e (b, f(b)) e o eixo das abscissas.

- ✓ Verifica-se se, através do teste de parada, se x_0 é uma *aproximação da raiz* ξ da equação.

  - Se *verdadeiro* ⇨ x_0 é a *raiz* procurada
  - Caso *contrário* ⇨ define-se um *novo* intervalo

MÉTODO DA POSIÇÃO FALSA

Definição do Novo Intervalo

Determina-se qual subintervalo $[a_0, x_0]$ ou $[x_0, b_0]$ contém a raiz ξ

- ✓ Calcula-se o produto $f(a)f(x_0)$
- ✓ Verifica-se se $f(a_0)f(x_0) < 0$
  - ➢ Se *verdadeiro* $\Rightarrow \xi \in (a_0, x_0)$
    $a_1 = a_0$ e $b_1 = x_0$
  - ➢ Caso *contrario* $\Rightarrow \xi \in (x_0, b_0)$
    $a_1 = x_0$ e $b_1 = b_0$

- Repete-se o processo até que o valor de x atenda às *condições de parada*.

MÉTODO DA POSIÇÃO FALSA

As sequências a_i, b_i e x_i são construídas da seguinte maneira:

1- Determinar um intervalo inicial $[a_0, b_0]$ tal que $f(a_0)f(b_0) < 0$;

2- Calcular $x_k = \dfrac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}$

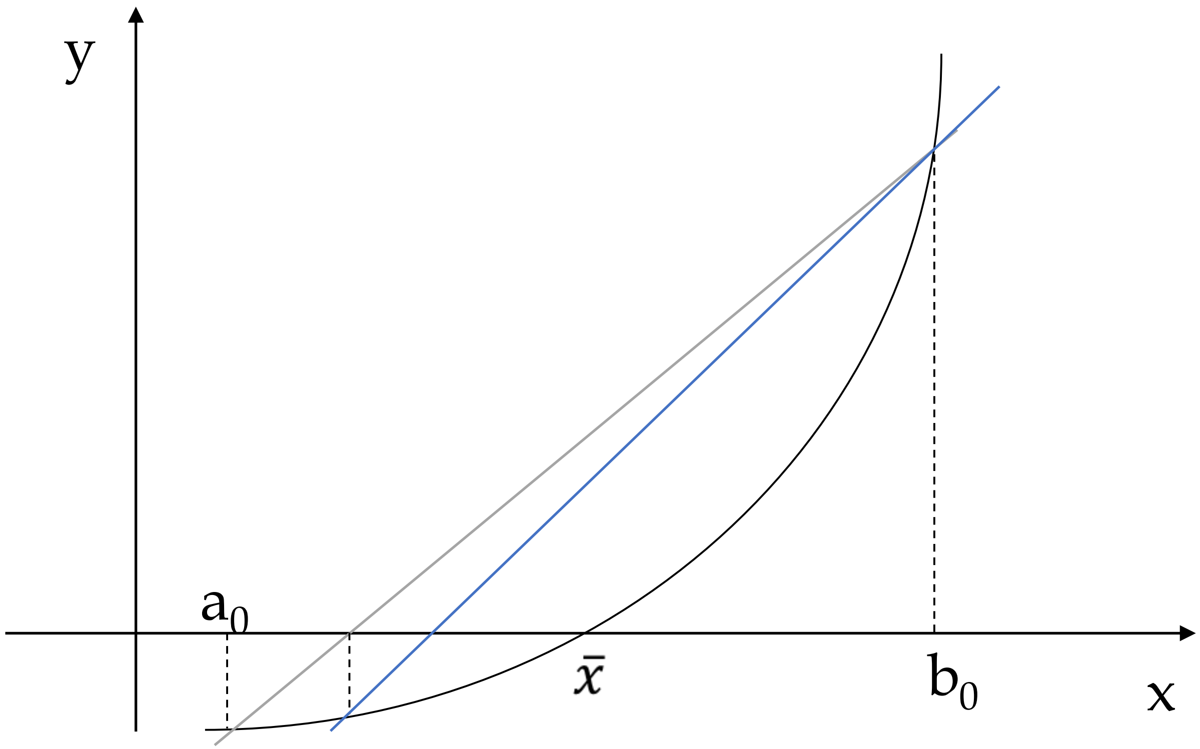
3- Se $\dfrac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_k|} < \varepsilon$ ou $|f(x_k)| < \varepsilon$ PARE, x_k é uma raiz de $f(x)$;

4- Se $f(a_k)f(x_k)$ **<** 0, então $a_{k+1} = a_k$ e $b_{k+1} = x_k$;

5- Se $f(a_k)f(x_k)$ **>** 0, então $a_{k+1} = x_k$ e $b_{k+1} = b_k$.

MÉTODO DA POSIÇÃO FALSA

Casos especiais: Se uma função é côncava ou convexa em [a, b], isto é, $f''(x)<0$ ou $f''(x)>0$, então no Método da Posição Falsa uma das extremidades permanece fixa.



MÉTODO DA POSIÇÃO FALSA

Um cuidado...

Geralmente, o Método da Posição Falsa obtém como raiz aproximada um ponto $\bar{x}$, no qual $|f(\bar{x})| < \varepsilon$, sem que o intervalo [a,b] seja "pequeno" o suficiente. Portanto, se for exigido que os dois critérios de parada (isto é, $|f(\bar{x})| < \varepsilon$ e $|b - a| < \varepsilon$) sejam satisfeitos simultaneamente, o método pode não convergir.

MÉTODO DA POSIÇÃO FALSA

Vantagens:

- ✓ Estabilidade e convergência para a solução procurada;
- ✓ Desempenho regular e previsível;
- ✓ Cálculos simples.

Desvantagens:

- ✓ Lentidão do processo de convergência (requer o cálculo de $f(x)$ em um elevado número de iterações);
- ✓ Necessidade de conhecimento prévio da região na qual se encontra a raiz de interesse (o que nem sempre é possível).

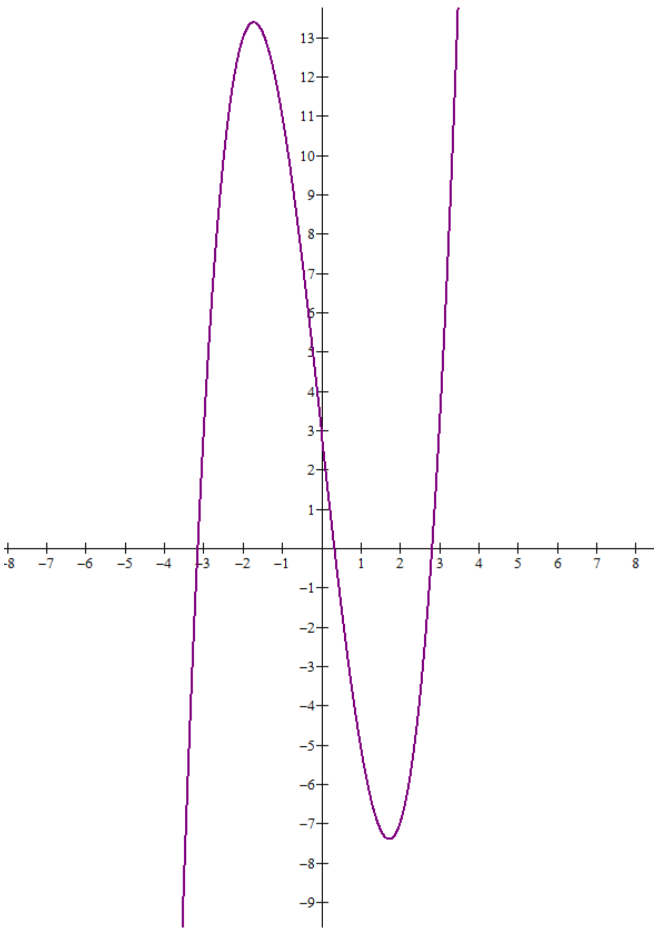
MÉTODO DA POSIÇÃO FALSA

Exemplo:

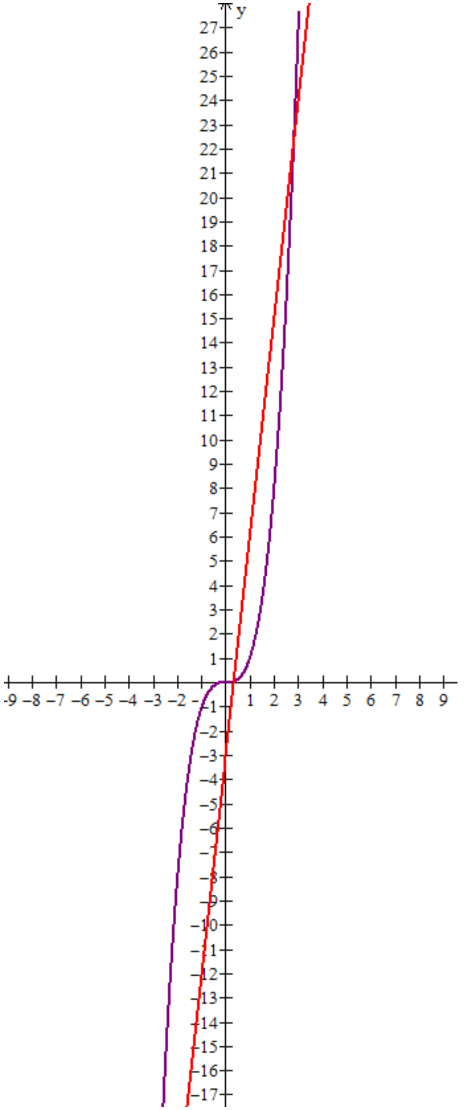
Utilizando o Método da Posição Falsa, determine a primeira raiz positiva da função $f(x) = x^3 - 9x + 3$ com $\varepsilon = 5x10^{-4}$

MÉTODO DA POSIÇÃO FALSA

$f(x) = x^3 - 9x + 3$



$x^3 = 9x - 3$



MÉTODO DA POSIÇÃO FALSA

Determinar a primeira raiz positiva de $f(x) = x^3 - 9x + 3$

com $\varepsilon = 5 \times 10^{-4}$ $\varepsilon = 0,0005$ (vou usar 5 casas)   erro $= \dfrac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|}$

1° Determinar o intervalo (nos slider) $[a,b] = [0,1]$

$a_0 = 0$ $x_0 = \dfrac{a_0 f(b_0) - b_0 f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)} = \dfrac{0(-5) - 1(3)}{-5-3} = \dfrac{-3}{-8} = 0,375$

$x_0 = 0,375$

$b_0 = 1$

$f(a_0) = 3$

$f(x_0) = -0,32227$

$f(b_0) = -5$

$f(a_0) f(x_0) < 0$

$a_1 = a_0 = 0$

$b_1 = x_0 = 0,375$

na iteração 0 não calculamos o erro

$a_1 = 0$ $\quad x_1 = \dfrac{a_1 f(b_1) - b_1 f(a_1)}{f(b_1) - f(a_1)} = 0{,}33862$

$x_1 = 0{,}33862$

$b_1 = 0{,}375$

$\left.\begin{array}{l} f(a_1) = 3 \\ f(x_1) = -0{,}00875 \end{array}\right]$ $\quad f(a_1)f(x_1) < 0$ $\quad \text{erro} = \dfrac{|0{,}33862 - 0{,}375|}{|0{,}33862|}$

$f(b_1) = -0{,}32227$

$a_2 = a_1 = 0$

$b_2 = x_1 = 0{,}3386$

$\text{erro} = 0{,}10744 > \varepsilon$

$a_2 = 0$ $\quad x_2 = \dfrac{a_2 f(b_2) - b_2 f(a_2)}{f(b_2) - f(a_2)} = 0{,}33763$

$x_2 = 0{,}33763$

$b_2 = 0{,}33862$

$\left.\begin{array}{l} f(a_2) = 3 \\ f(x_2) = -0{,}00018 \end{array}\right]$ $\quad f(a_2)f(x_2) < 0$ $\quad \text{erro} = \dfrac{|0{,}33763 - 0{,}33862|}{|0{,}33763|}$

$f(b_2) = -0{,}00875$

$a_3 = a_2 = 0$

$b_3 = x_2 = 0{,}33763$

$\text{erro} = 0{,}00293 > \varepsilon$

$a_3 = 0$

$x_3 = 0{,}33761$

$b_3 = 0{,}33763$

$$x_3 = \frac{a_3 f(b_3) - b_3 f(a_3)}{f(b_3) - f(a_3)} = 0{,}33761$$

$f(a_3) = 3$

$f(x_3) = -0{,}00001$

$f(b_3) = -0{,}00018$

$f(a_3) f(x_3) < 0$

$$\text{erro} = \frac{|0{,}33761 - 0{,}33763|}{|0{,}33761|}$$

$\text{erro} = 0{,}0000.6 < \varepsilon$

$\therefore \bar{x} \cong 0{,}33761$

MÉTODO DA BISSECÇÃO

Exercício para presença:

Usando o método da posição falsa, resolva a equação $x^3 - \frac{1}{2} = 0$, com $\varepsilon = 0{,}01$. Considere o critério de parada: $\frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|}$. Apresente os valores com 4 casas decimais.

Exercício:

Utilizando o Método da Posição Falsa, resolva a equação $x^3 - \text{sen}(x) = 0$, com $\varepsilon = 0.001$.

Sol.: $\bar{x} \cong 0.9287$