Ejercicios resueltos

I. Determinar los siguientes límites, aplicando las propiedades

1) $\lim_{x\to 2}(x^3 + 2x^2 - x - 4) = \lim_{x\to 2} x^3 + \lim_{x\to 2} 2x^2 - \lim_{x\to 2} x - \lim_{x\to 2} 4$ Aplicar límite a cada término del polinomio.

$= (2)^3 + 2(2)^2 - (2) - 4$ Sustituir la "x" por el 2

$= 8 + 8 - 2 - 4$

$= 10$

2) $\lim_{h\to o} \dfrac{h}{(h^2 - 7h + 1)} = \dfrac{\lim_{h\to 0} h}{\lim_{h\to 0}(h^2 - 7h + 1)}$ $\textit{Aplicando límite de un cociente}$

$= \dfrac{0}{(0^2 - 7(0) + 1)} = 0$ $\textit{Se sustituye h por el número cero}$

3) $\lim_{x\to -5} \sqrt[3]{(x^2 + 2)} = \sqrt[3]{\lim_{x\to -5}[(x)^2 + 2]}$ $\textit{Aplicando límite de una raíz}$

$= \sqrt[3]{[(-5)^2 + 2]}$ $\textit{Se sustituye}$ "x" por el número 5

$= \sqrt[3]{27} = 3$ $\textit{realizar operaciones y simplificar}$

4) $\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2 + 3x - 10}{x - 2}\right) = \lim_{x\to 2} \dfrac{(x+5)(x-2)}{(x-2)}$ La sustitución directa hace cero a (x-2), en este caso se debe factorizar el numerador

$= \lim_{x\to 2}(x + 5)$ $\textit{Simplificar el factor } (x - 2)$

$= 2 + 5 = 7$ $\textit{Sustituir la x por el número 2}$

.

5) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to o}\dfrac{(x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3)-x^3}{\Delta x}$ Δx no puede ser cero. Desarrollar (x + Δx)^3

$= \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{3x^2\ \Delta x\ +\ 3x(\Delta x)^2\ \ +(\Delta x)^3}{\Delta x}$ $\quad Simplificar\ términos\ semejantes$

$= \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x(3x^2+3x(\Delta x)+\ (\Delta x)^2)}{\Delta x}$ $\quad Sacar\ factor\ común\ \Delta x$

$= \lim\limits_{\Delta x\to o}[3x^2+3x(\Delta x)+(\Delta x)]$ $\quad Simplificar\ \Delta x$

$= 3x^2+3x(0)+\ (0)^2$ $\quad Evaluar\ para\ \Delta x = 0$

$= 3x^2$

Nota: La fórmula que se aplica: $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ en donde Y se sustituye por Δx.

II. Hallar el límite de las siguientes expresiones, cuando X tiende al infinito.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^3\ +\ x}{2x^3\ +\ 3} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{4x^3+x}{x^3}}{\frac{2x^3+3}{x^3}}$ Se divide el numerador y el denominador entre la mayor potencia que aparece en el denominador: X^3

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{3}{x^3}}$ Efectuar las operaciones indicadas y simplificar los términos comunes

$= \dfrac{4+0}{2+\ 0} = 2$ $\quad aplicar\ limite\ de\ una\ constante\ y$ $\quad la\ prop.:\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^p} = 0$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\ -\ 1}{7-2x+8x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{x^2-1}{x^2}}{\frac{7-2x+8x^2}{x^2}}$ Se divide el numerador y el denominador entre la mayor potencia que aparece en el denominador: X^2

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{\frac{7}{x^2}-\frac{2}{x}+\ 8}$ Efectuar las operaciones indicadas y simplificar los términos comunes

$$= \frac{1-0}{0-0+8}$$

aplicar limite de una constante y

la prop.: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^p} = 0$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 5x + 6} - x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - 5x + 6} - x\right)\left(\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x\right)}{\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x}$

Se debe racionalizar la expresión dada, multiplicando por $(\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x)$ para obtener una función racional y de esta manera aplicar la técnica de límites al infinito.

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 5x + 6 - x^2}{\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x}$$

Después de realizar las operaciones indicadas y simplificar resulta:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-5x + 6}{\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{-5x}{x} + \frac{6}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{5x}{x^2} + \frac{6}{x^2}} + \frac{x}{x}}$$

Como X = $\sqrt{x}$, dividir numerador entre X y denominador entre $\sqrt{x}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-5 + \frac{6}{x}}{\sqrt{1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}} + 1}$$

Simplificar

$$= -\frac{5}{2}$$

aplicar limite de una constante y

la prop.: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^p} = 0$

$$4)\ \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 1}}{x-1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-\sqrt{\frac{9x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}}$$

Cuando $X \to -\infty$, dividir numerador entre $-\sqrt{x^2}$ y denominador entre X o bien dividir numerador entre $\sqrt{x^2}$ y denominador entre - X

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{-\sqrt{9 - \frac{1}{x^2}}}{1 - \frac{1}{x}}$$

Simplificar los términos semejantes

$$= -\frac{\sqrt{9}}{1} = -3 \qquad aplicar\ propiedades\ de\ limites$$

III. Encontrar las Asíntotas verticales y horizontales de las graficas de las siguientes funciones y trazar sus graficas:

$1)\ f(x) = \frac{5}{x^2 + 8x + 15}$

Solución:
Primero igualar a cero el denominador de la función para hallar la asíntota vertical x = a

$X^2 + 8X + 15 = 0$ → $(X + 5)(X + 3) = 0$ → $X + 5 = 0$ v $X + 3 = 0$

Por lo tanto **X = -5** ∧ **X = - 3** son las asíntotas verticales

Hallar los limites unilaterales correspondientes:

$$\lim_{x\to -5^+} \frac{5}{x^2 + 8x + 15} = \frac{5}{0} = -\infty$$

El numerador es positivo y el denominador tiende a cero a través de valores negativos

$$\lim_{x\to -5^-} \frac{5}{x^2 + 8x + 15} = \frac{5}{0} = +\infty$$

El numerador es positivo y el denominador tiende a cero a través de valores positivos

$$\lim_{x\to -3^+} \frac{5}{x^2 + 8x + 15} = \frac{5}{0} = +\infty$$

El numerador es positivo y el denominador tiende a cero a través de valores positivos

$$\lim_{x\to -3^-} \frac{5}{x^2 + 8x + 15} = \frac{5}{0} = -\infty$$

El numerador es positivo y el denominador tiende a cero a través de valores negativos

Ahora calcular los límites al infinito para determinar las asíntotas horizontales.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{5}{x^2 + 8x + 15} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{5}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{8x}{x^2} + \frac{15}{x^2}}$$

Se divide el numerador y el denominador entre la mayor potencia del denominador: X^2

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{5}{x^2}}{1 + \frac{8}{x} + \frac{15}{x^2}}$$

$simplificar\ términos\ comunes$

$$= \frac{0}{1+0+0} = 0$$

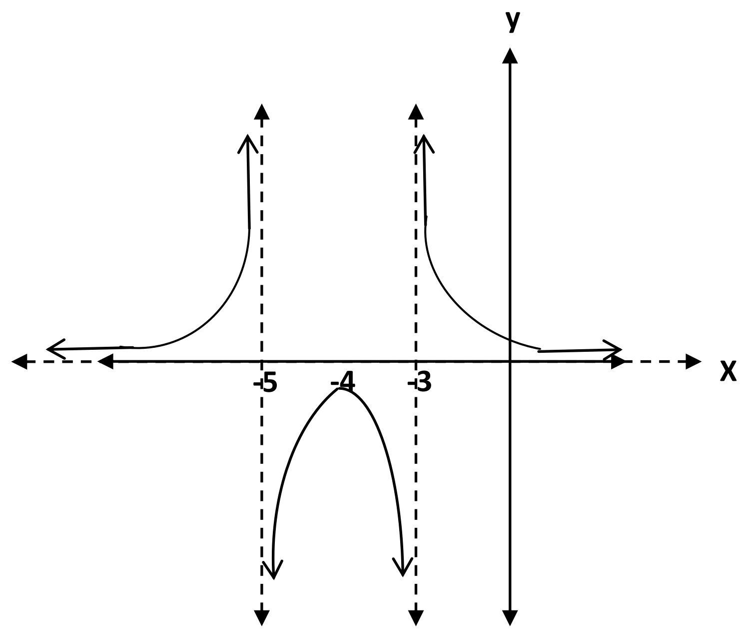
$aplicar\ la\ prop.: \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^p} = 0$

$De\ igual\ manera$: $$\lim_{x\to -\infty} \frac{5}{x^2 + 8x + 15} = 0$$

El límite cuando X→−∞ también es cero dado que X^2 se vuelve positiva

Por lo tanto se puede concluir que la recta Y = 0 es una asíntota horizontal

La gráfica sería de la siguiente forma:



$2)\ h(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ El denominador será cero si X = 1 ∧ X = -1

Asíntota vertical

$$\lim_{X \to 1^+} \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{2}{0^+} = +\infty \qquad \lim_{X \to 1^-} \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}} = N.E.$$

$$\lim_{X \to -1^+} \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}} = N.E. \qquad \lim_{X \to -1^-} \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

Por lo tanto X = 1 ∧ X = -1 son asíntotas verticales

Asíntota horizontal

$$\lim_{X \to +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{X \to +\infty} \frac{\frac{2x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}}$$

Dado que X = $\sqrt{x^2}$ se divide el término sin radical entre X y el término con radical entre $\sqrt{x^2}$

$$= \lim_{X \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}$$

Dado que X = $\sqrt{x^2}$ se divide el término sin radical entre X y el término con radical entre $\sqrt{x^2}$

= 2

Aplican propiedades de los limites

Conclusión y = 2 es una asíntota horizontal.

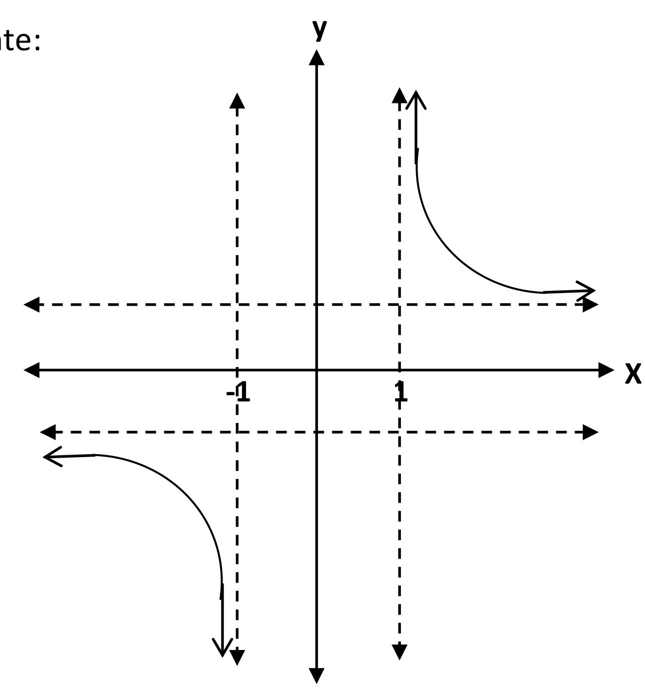
$$\lim_{X \to -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{X \to -\infty} \frac{\frac{2x}{-x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}}$$

Dado que $X \to -\infty$, dividir el numerador entre –X y el denominador entre $\sqrt{x^2}$ o bien el numerador entre X y el denominador entre $-\sqrt{x^2}$

$$= \lim_{X \to -\infty} \frac{-2}{\sqrt{1 - x^2}} = -2 \quad simplificar\ y\ aplicar\ prop.d\ limites$$

Se concluye que y = - 2 es una asíntota horizontal

La gráfica sería la siguiente:



Ejercicios propuestos:

Hallar las asíntotas de las graficas de las siguientes funciones y dibujar la grafica:

1) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 - 4}$

2) $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 5x - 6}$

3) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

4) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 2x - 3}$

5) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$

6) $f(x) = \dfrac{x}{4 - x}$

7) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

Nota: Realizar los ejercicios solo en su cuaderno como práctica para el examen.