QUELQUES ADJONCTIONS UTILES

Résumé

Ces notes rassemblent quelques résultats d'adjonction rencontrés lors de lectures personnelles. Ils sont rassemblés dans ces notes dédiées pour faciliter leur accès à l'auteur, et on espère qu'elles seront aussi utiles à d'autres. L'ordre de présentation n'a aucune motivation. Les notations sont parfois rappelées, mais peuvent être retrouvées normalement sans difficulté.

1 Notations

Dans toute la suite, lorsque l'on écrit que l'on a une **adjonction** $F : \mathscr{C} \rightleftarrows \mathscr{D} : G$, on entend que F est adjoint à gauche de G, que l'on note aussi parfois $F \dashv G$. Une catégorie **bicomplète** possède toutes les petites limites et toutes les petites colimites.

2 Adjonctions

Théorème 2.1

Supposons qu'on ait une adjonction $F : \mathscr{C} \rightleftarrows \mathscr{D} : G$, et soit I une petite catégorie. Alors on a une adjonction $F_* : \mathrm{Fun}(I, \mathscr{C}) \rightleftarrows \mathrm{Fun}(I, \mathscr{D}) : G_*$, où F_* et G_* sont la post-composition par F et G respectivement.

Démonstration. Soit $\varepsilon : \mathbb{1} \to GF$ et $\eta : FG \to \mathbb{1}$ les unités et coünités de l'adjonction. On souhaite alors définir $\varepsilon' : \mathbb{1} \to G_*F_*$ et $\eta' : F_*G_* \to \mathbb{1}$. Soit $\varphi \in \mathrm{Fun}(I, \mathscr{C})$. On veut alors une transformation naturelle $\varphi \to GF\varphi$. On pose alors $\varepsilon'_\varphi := (\varepsilon_{\varphi(i)} : \varphi(i) \to GF(\varphi(i)))_{i \in I}$. Similairement, pour $\psi \in \mathrm{Fun}(I, \mathscr{D})$, on prend la transformation naturelle $\eta'_\psi := (\eta_{\psi(i)} : FG(\psi(i)) \to \psi(i))_{i \in I}$. On vérifie alors aisément que les cohérences sont vérifiées. $\square$

Rappelons la définition des catégories slices. Soit $\mathscr{D}$ une catégorie et $x \in \mathscr{D}$. La catégorie $\mathscr{D}_{/x}$ est la catégorie dont les objets sont les pairs $(d \in \mathscr{D}, \alpha : d \to x)$ et les morphismes sont les triangles commutatifs

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r] \arrow[dr] & d' \arrow[d] \\ & x \end{tikzcd}$$

Si $\mathscr{C}_0 \subseteq \mathscr{C}$ est une sous-catégorie, et $x \in \mathscr{C}$, on définit $(\mathscr{C}_0)_{/x}$ comme le tiré en arrière dans le diagramme

$$\begin{tikzcd} (\mathscr{C}_0)_{/x} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathscr{C}_{/x} \arrow[d] \\ \mathscr{C}_0 \arrow[r, hook] & \mathscr{C} \end{tikzcd}$$

Théorème 2.2

Soit $\mathscr{C}_0 \subseteq \mathscr{C}$ une petite sous-catégorie d'une catégorie, et $\mathscr{D}$ une catégorie bicomplète. Alors le foncteur de restriction $i^* : \mathrm{Fun}(\mathscr{C}, \mathscr{D}) \to \mathrm{Fun}(\mathscr{C}_0, \mathscr{D})$ admet un adjoint à gauche $i_!$ et un adjoint à droite i_*. Ils sont donnés par les formules suivantes :

$$i_! F(x) = \operatorname*{colim}_{c \in (\mathscr{C}_0)_{/x}} F(c),$$

$$i_* F(x) = \lim_{c \in (\mathscr{C}_0)_{x/}} F(c).$$

On a donc des adjonctions

$$i_! : \mathrm{Fun}(\mathscr{C}_0, \mathscr{D}) \rightleftarrows \mathrm{Fun}(\mathscr{C}, \mathscr{D}) : i^* : \mathrm{Fun}(\mathscr{C}, \mathscr{D}) \rightleftarrows \mathrm{Fun}(\mathscr{C}_0, \mathscr{D}) : i_*.$$

Démonstration. Il suffit de voir que pour $F \in \mathrm{Fun}(\mathscr{C}_0, \mathscr{D})$, et $c \in \mathscr{C}_0$, $i_! F(c) = i_* F(c) = F(c)$ (ce qui vient du fait que $F(c)$ est un élément final dans un cas, et initial dans l'autre, du diagramme). Ainsi, une transformation naturelle $i_! F \to G$ en induit une $F \to i^* G$ en sélectionnant les $i_! F(c) \to G(c)$ avec $c \in \mathscr{C}_0$, et inversement, une transformation naturelle $F \to i^* G$ en induit une $i_! F \to G$ par propriété universelle des colimites. Le cas avec i_* est clair. $\square$

Pour I une petite catégorie et $\mathscr{C}$ une catégorie, on peut définir un foncteur de "foncteur constant"

$$\mathrm{const} : \mathscr{C} \to \mathrm{Fun}(I, \mathscr{C})$$

qui a un objet envoie le foncteur constant en cet objet.

Théorème 2.3

Soit I une petite catégorie et $\mathscr{C}$ une catégorie bicomplète. On a alors des adjonctions

$$\operatorname*{colim}_I : \mathrm{Fun}(I, \mathscr{C}) \rightleftarrows \mathscr{C} : \mathit{const} : \mathscr{C} \rightleftarrows \mathrm{Fun}(I, \mathscr{C}) : \lim_I .$$

Démonstration. On montre l'adjonction de gauche, celle de droite se fait avec exactement les mêmes idées. Soit $F \in \mathrm{Fun}(I, \mathscr{C})$. Alors on a une transformation naturelle $F \Rightarrow \mathrm{const}\,\mathrm{colim}_I F$. En effet, les morphismes $F(i) \to \mathrm{colim}_I F$ pour $i \in I$ donnent pour tout $i \to j$ des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} F(i) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{colim}_I F \\ F(j) \arrow[ur] & \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} F(i) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{const}\,\mathrm{colim}_I F(i) \arrow[d] \\ F(j) \arrow[r] & \mathrm{const}\,\mathrm{colim}_I F(j) \end{tikzcd}$$

ce qui correspond à la transformation naturelle annoncée. Soit maintenant $F \in \mathrm{Fun}(I, \mathscr{C})$ et $X \in \mathscr{C}$. Alors la composition

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{colim}_I F, X) \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(I,\mathscr{C})}(\mathrm{const}\,\mathrm{colim}_I F, \mathrm{const} X) \arrow[d] \\ & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(I,\mathscr{C})}(F, \mathrm{const} X) \end{tikzcd}$$

est une bijection par propriété universelle de la colimite. Ainsi, colim_I est adjoint à gauche à const. $\square$

Théorème 2.4

Soit X un ensemble simplicial. Alors le foncteur $\mathbf{sSet} \to \mathbf{sSet}, Y \mapsto Y \times X$ admet un adjoint à droite $Y \mapsto \underline{\mathrm{Hom}}(X, Y)$.

Démonstration. On définit $\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)_n := \mathrm{Hom}(\Delta^n \times X, Y)$. Par Yoneda, on a un isomorphisme

$$\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y))_n \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, \underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n \times X, Y),$$

donc la formule d'adjonction tient pour les Δ^n. Mais comme tout préfaisceau est colimite de représentables, et comme on a des relations de permutation entre Hom et colim, on peut étendre cette formule à tous les ensembles simpliciaux, ce qui montre l'adjonction. □

Théorème 2.5

On a une adjonction $|-| : \mathbf{sSet} \rightleftarrows \mathbf{Top} : \mathrm{Sing}$ entre la réalisation géométrique et l'ensemble simplicial singulier.

Démonstration. Soit X un ensemble simplicial, et Y un espace topologique. En bon préfaisceau, X est colimite de représentables, et plus précisément

$$X = \operatorname*{colim}_{[n]\in\Delta_{/X}} \Delta^n.$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(|X|, Y) &= \lim_{[n]\in\Delta_{/X}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(|\Delta^n|, Y) \\
&= \lim_{[n]\in\Delta_{/X}} \mathrm{Sing}(Y)_n \\
&= \mathrm{Fun}(X, \mathrm{Sing}(Y)) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(X, \mathrm{Sing}(Y)).
\end{aligned}$$

□

On considère l'inclusion $i : \Delta_{\leqslant n} \to \Delta$. On rappelle (cf. 2) que l'on a des adjonctions $i_! \dashv i^* \dashv i_*$. On définit avec cela les foncteurs $\mathbf{sSet} \to \mathbf{sSet}$ suivants :

$$\mathrm{sk}_n : X \mapsto i_! i^* X,$$

$$\mathrm{cosk}_n : X \mapsto i_* i^* X.$$

Théorème 2.6

On a une adjonction $\mathrm{sk}_n : \mathbf{sSet} \rightleftarrows \mathbf{sSet} : \mathrm{cosk}_n$.

Démonstration. Immediat à partir de l'adjonction 2. En effet, pour X, Y des ensembles simpliciaux, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\mathrm{sk}_n X, Y) &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(i_! i^* X, Y) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(X, i_* i^* Y) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(X, \mathrm{cosk}_n Y).
\end{aligned}$$

□

On va définir un foncteur $h : \mathbf{sSet} \to \mathbf{Cat}$ qui à un ensemble simplicial associe une catégorie, appelée *catégorie d'homotopie*. Soit $X \in \mathbf{sSet}$. Alors $h(X)$ est la catégorie dont les objets sont donnés par X_0. Les morphismes sont engendrés par X_1, soumis aux relations suivantes :
- $s_0(x) = \mathrm{id}_x$.
- S'il existe $\sigma \in X_2$ tel que $d_2(\sigma) = f$, $d_1(\sigma) = h$ et $d_0(\sigma) = g$, alors on impose $h = gf$.
- Si $f \sim f'$, alors $fg \sim f'g$ et $gf \sim gf'$.

Théorème 2.7

On a une adjonction $h : \mathbf{sSet} \rightleftarrows \mathbf{Cat} : N$ entre le foncteur nerf et le foncteur de catégorie d'homotopie.

Définissons les foncteurs de la prochaine adjonction. A un ensemble S, on peut associer une catégorie $d(S)$ appelée *catégorie discrète associée à* S, dont les objets sont les éléments de S, et les uniques morphismes sont les identités. Ceci définit de manière évidente un foncteur $d : \mathbf{Set} \to \mathbf{Cat}$. A l'inverse, on peut définir un foncteur $\mathrm{Ob}(-) : \mathbf{Cat} \to \mathbf{Set}$ qui à une petite catégorie associe l'ensemble de ses objets.

Théorème 2.8

On a une adjonction $d : \mathbf{Set} \rightleftarrows \mathbf{Cat} : \mathrm{Ob}(-)$ entre le foncteur catégorie discrète et le foncteur d'objets.

Démonstration. Soit X un ensemble et $\mathscr{C}$ une catégorie. Alors $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(dX, \mathscr{C})$ est l'ensemble des foncteurs entre dX et $\mathscr{C}$. Or, un tel foncteur est uniquement déterminé par son action sur les objets, puisque les uniques morphismes de dX sont les identités, et qu'un foncteur envoie les identités sur les identités. Ainsi, on a une bijection $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(dX, \mathscr{C}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, \mathrm{Ob}(\mathscr{C}))$, et il est clair que c'est naturel en X et en $\mathscr{C}$. □

Rappelons que lorsque l'on a un foncteur lax monoïal $F : V \to W$ entre catégories monoïdales, alors cela induit un foncteur $F_* : \mathbf{Cat}_V \to \mathbf{Cat}_W$ entre les catégories enrichies.
On définit ainsi trois foncteurs :
On a un foncteur $c : \mathbf{Cat} \to \mathbf{Cat}_\Delta$ induite par $c : \mathbf{Set} \to \mathbf{sSet}$ le foncteur ensemble simplicial constant.
On a aussi $\pi : \mathbf{Cat}_\Delta \to \mathbf{Cat}$ induit par $\pi_0 : \mathbf{sSet} \to \mathbf{Set}$, le foncteur de catégorie d'homotopie.
Enfin, $u : \mathbf{Cat}_\Delta \to \mathbf{Cat}$ induit par $ev_0 = \mathrm{Hom}(\Delta^0, -) : \mathbf{sSet} \to \mathbf{Set}$, le foncteur de catégorie sous-jacente.

Théorème 2.9

On a une adjonction
$$\pi : \mathbf{Cat}_\Delta \rightleftarrows \mathbf{Cat} : c : \mathbf{Cat} \rightleftarrows \mathbf{Cat}_\Delta : u.$$

Démonstration. Il suffit de prouver les adjonctions
$$\pi_0 : \mathbf{sSet} \rightleftarrows \mathbf{Set} : c : \mathbf{Set} \rightleftarrows \mathbf{sSet} : ev_0.$$
□

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on peut définir une catégorie simplicialement enrichie $\mathfrak{C}[\Delta^n]$. Comme la catégorie $\mathbf{Cat}_\Delta$ admet toutes les colimites finies, on peut étendre cette construction en un foncteur préservant les colimites $\mathfrak{C}[-] : \mathbf{sSet} \to \mathbf{Cat}_\Delta$.
On définit aussi le foncteur *nerf simplicial* $N : \mathbf{Cat}_\Delta \to \mathbf{sSet}$, qui à une catégorie simplicialement enrichie $\mathscr{C}$ associe l'ensemble simplicial $n \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}_\Delta}(\mathfrak{C}[\Delta^n], \mathscr{C})$.

Théorème 2.10

On a une adjonction
$$\mathfrak{C}[-] : \mathbf{sSet} \rightleftarrows \mathbf{Cat}_\Delta : N.$$

Démonstration. C'est la même idée que pour 2. Soit $X \in \mathbf{sSet}$ et $\mathscr{C} \in \mathbf{Cat}_\Delta$. On a une chaîne de bijections canoniques
$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}_\Delta}(\mathfrak{C}[X], \mathscr{C}) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}_\Delta}(\mathfrak{C}[\operatorname*{colim}_{[n]\in\Delta_{/X}} \Delta^n], \mathscr{C}) \\
&\cong \lim_{[n]\in\Delta_{/X}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}_\Delta}(\mathfrak{C}[\Delta^n], \mathscr{C}) \\
&\cong \lim_{[n]\in\Delta_{/X}} N(\mathscr{C})_n \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(X, N(\mathscr{C})).
\end{aligned}$$
□

Définissons deux foncteurs :

$$O : \mathbf{sSet}_{S/} \to \mathbf{sSet}, (p : S \to X) \mapsto X_{p/},$$

$$U : \mathbf{sSet}_{/S} \to \mathbf{sSet}, (p : S \to X) \mapsto X_{/p}.$$

Rappelons que $X_{p/}$ est définie comme ayant pour n-simplexes l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_{S/}}(S \star \Delta^n, X)$.

Théorème 2.11

Soit S un ensemble simplicial. On a des adjonctions

$$S \star - : \mathbf{sSet} \rightleftarrows \mathbf{sSet}_{S/} : O,$$

$$- \star S : \mathbf{sSet} \rightleftarrows \mathbf{sSet}_{/S} : U.$$

Démonstration. Par définition, l'adjonction est vraie sur les représentables. De plus, $S \star -$ et $- \star S$ préservent les colimites, donc on étend l'adjonction à tous les ensembles simpliciaux. □