RECOLLEMENT DE SCHÉMAS

Davit Eghiazarian

Résumé

Étant donné que dans la littérature, la construction du recollement de schémas passe souvent à la trappe, ou en tout cas n'est jamais démontrée de manière détaillée, je propose une preuve complète que les schémas se recollent, avant d'enchaîner sur quelques corollaires pratiques pour faire des calculs.

1 Construction

Théorème 1.1

Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille de schémas, ainsi que pour tout $i,j\in I$, des ouverts $U_{ij}\subseteq X_i$ avec des isomorphismes $f_{ij}:U_{ij}\to U_{ji}$ (pour $i\neq j$) vérifiant :

1. $f_{ij}^{-1}=f_{ji}$,
2. $f_{ij}(U_{ij}\cap U_{ik})=U_{ji}\cap U_{jk}$,
3. $f_{ik}=f_{jk}\circ f_{ij}$ sur $U_{ij}\cap U_{ik}$.

Alors il existe un schéma X avec des morphismes $\psi_i:X_i\to X$ tels que

1. $X=\bigcup\psi_i(X_i)$.
2. $\psi_i=\psi_j\circ f_{ij}$ sur U_{ij} pour tous $i\neq j\in I$.
3. $\psi_i(U_{ij})=\psi_i(X_i)\cap\psi_j(X_j)$ pour tous $i\neq j\in I$.
4. Pour tout ouvert $U\subseteq X_i$, on a $\psi_j^{-1}(\psi_i(U))=f_{ji}^{-1}(U\cap U_{ij})$ pour tous $i\neq j\in I$.
5. En posant pour $V\subseteq X$ ouvert
$$\mathscr{O}_X(V)=\{(s_i)_i\in\prod_i\mathscr{O}_{X_i}(\psi_i^{-1}(V))\ \mid\ f_{ij}^{\#}(s_j|_{\psi_j^{-1}(V)\cap U_{ji}})=s_i|_{\psi_i^{-1}(V)\cap U_{ij}}\},$$
et pour toute inclusion d'ouverts $V'\subseteq V$, et $s=(s_i)_i\in\mathscr{O}_X(V)$, $s|_{V'}:=(s_i|_{\psi_i^{-1}(V')})_i$, on obtient un faisceau d'anneaux sur X.
6. ψ_i est un isomorphisme de X_i vers un ouvert de X.

Démonstration. On pose d'abord $X'=\coprod X_i$, avec $\iota_i:X_i\to X'$ les morphismes canoniques. On munit X' de la topologie du coproduit, c'est-à-dire que $V\subseteq X'$ est ouvert si, et seulement si, pour tout $i\in I$, $\iota_i^{-1}(V)$ est un ouvert de X_i.
On pose ensuite sur X' la relation binaire suivante :
Si $x=\iota_i(x')$, et $y=\iota_j(y')$, alors $x\sim y\Leftrightarrow[x'\in U_{ij},y'\in U_{ji}$ et $y'=f_{ij}(x')$, ou, $x=y]$.
Montrons déjà que c'est une relation d'équivalence.On a $x\sim x$ pour tout $x\in X$ car $x=x$. Si $x\sim y$, alors avec les notations précédentes, $y'=f_{ij}(x')$, donc $x'=f_{ji}(y')$ donc $y\sim x$. Enfin, si $x\sim y$ et $y\sim z$, en reprenant les mêmes notations, $y'=f_{ij}(x')$ et $z'=f_{jk}(y')$, donc par l'hypothèse 3., on a $z'=f_{ik}(x')$ donc $x\sim z$.
On construit alors $X=X'/\sim$ et on note $p:X'\to X$ la projection canonique. On note enfin $\psi_i=p\circ\iota_i$ pour tout $i\in I$. La topologie sur X est bien sûr la topologie quotient, donc une partie $W\subseteq X$ est ouvert si, et seulement si, $p^{-1}(W)$ est un ouvert de X', si, et seulement si, pour tout $i\in I$, $\iota^{-1}(p^{-1}(W))$ est un ouvert de X_i. Ainsi, W est ouvert si, et seulement si, pour tout $i\in I$, $\psi_i^{-1}(W)$ est un ouvert de X_i.
On fait aussi la remarque utile suivante. Supposons que l'on ait $\psi_i(x)=\psi_j(y)$. Alors $\iota_i(x)\sim\iota_j(y)$. Ainsi,

par définition de $\sim$, il vient que $x \in U_{ij}$ et $y \in U_{ji}$ et $y = f_{ij}(x)$.
Ainsi, $\psi_i(x) = \psi_j(y) \Leftrightarrow [\ y = f_{ij}(x)$ ou $x = y]$ $(*)$.

1) C'est clair puisque tout élément de X est la classe d'équivalence d'un élément de X', et qu'un élément de X' c'est un $\iota_i(x)$ pour un certain $i \in I$ et $x \in X_i$. Ainsi c'est un élément $p(\iota_i(x)) = \psi_i(x)$.

2') On va montrer la relation annoncée ensemblistement (de toute façon, on n'a pas encore défini de faisceau sur X). On reviendra pour démontrer que cette relation tient aussi en tant que morphismes d'espaces annelés plus tard. Soit donc $x \in U_{ij}$. Par la remarque $(*)$, en notant $y = f_{ij}(x)$, on a $y = f_{ij}(x)$, donc $\psi_i(x) = \psi_j(y) = \psi_j(f_{ij}(x)$.

3) La preuve se fait par double inclusions.
Si $x \in U_{ij}$, alors comme $U_{ij} \subseteq X_i$, on a $\psi_i(x) \in \psi_i(X_i)$. De plus, $x = f_{ji}(f_{ij}(x)$, donc $\psi_i(x) = \psi_i(f_{ji}(f_{ij}(x)) = \psi_j(f_{ij}(x) \in \psi_j(X_j)$ par le point précédent.
Soit $z = \psi_i(x) = \psi_j(y)$. Alors par la remarque $(*)$, il vient que $y = f_{ij}(x)$ (avec donc en particulier $x \in U_{ij}$ et $y \in U_{ji}$). Mais alors $z = \psi_i(x) \in \psi_i(U_{ij})$.

4) On démontre la formule par double inclusions.
Soit $x \in \psi_j^{-1}(\psi_i(U))$. Alors il existe $y \in U$ tel que $\psi_j(x) = \psi_i(y)$. Alors par $(*)$, on a $x = f_{ij}(y)$. Mais alors $f_{ji}(x) = f_{ji}(f_{ij}(y)) = y \in U \cap U_{ij}$.
Si $x \in f_{ji}^{-1}(U \cap U_{ij})$, alors $f_{ji}(x) =: y \in U \cap U_{ij}$. Alors $\psi_j(x) = \psi_i(f_{ji}(x))$ par 2., et $f_{ji}(x) \in U_{ij}$, donc $x \in \psi_j^{-1}(\psi_i(U_{ij}))$.

5) Soit $V \subseteq X$ un ouvert, et donnons nous un recouvrement ouvert $\bigcup V_k$ de V, ainsi que, pour tout k, d'un élément $t_k \in \mathscr{O}_X(V_k)$, tels que pour tout k, k' on ait $t_k|_{V_k \cap V_{k'}} = t_{k'}|_{V_k \cap V_{k'}}$. On écrit $t_k = (t_{k,i})_i$ avec $t_{k,i} \in \mathscr{O}_{X_i}(\psi_i^{-1}(V_k))$, avec, par définition de $\mathscr{O}_X$,

$$f_{ij}^{\#}(t_{k,j}|_{\psi_j^{-1}(V_k) \cap U_{ji}}) = t_{k,i}|_{\psi_i^{-1}(V_k) \cap U_{ij}}.$$

Ainsi, selon la définition des restrictions que nous avons prise, on a $t_k|_{V_k \cap V_{k'}} = (t_{k,i}|_{\psi_i^{-1}(V_k \cap V_{k'})})_i$. Par hypothèse sur les t_k, on a donc, pour tout k, k', i, $t_{k,i}|_{\psi_i^{-1}(V_k \cap V_{k'})} = t_{k',i}|_{\psi_i^{-1}(V_k \cap V_{k'})}$. Puisque $\psi_i^{-1}(V) = \bigcup \psi_i^{-1}(V_k)$ et que $\mathscr{O}_{X_i}$ est un faisceau, il existe un unique $t^i \in \mathscr{O}_{X_i}(\psi_i^{-1}(V))$ tel que

$$\forall k \quad t^i|_{\psi_i^{-1}(V_k)} = t_{k,i}.$$

Il faut alors juste montrer que $(t^i)_i \in \mathscr{O}_X(V)$, donc que

$$\forall i, j \quad f_{ij}^{\#}(t^j|_{\psi_j^{-1}(V) \cap U_{ji}}) = t^i|_{\psi_i^{-1}(V) \cap U_{ij}}.$$

Pour cela, on va utiliser la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{O}_{X_j}(\psi_j^{-1}(V) \cap U_{ji}) \arrow[r, "f_{ij}^{\#}"] \arrow[d, "\text{restr.}"'] & \mathscr{O}_{X_i}(\psi_i^{-1}(V) \cap U_{ij}) \arrow[d, "\text{restr.}"] \\
\mathscr{O}_{X_j}(\psi_j^{-1}(V_k) \cap U_{ji}) \arrow[r, "f_{ij}^{\#}"'] & \mathscr{O}_{X_i}(\psi_i^{-1}(V_k) \cap U_{ij})
\end{tikzcd}$$

Ce diagramme n'est rien de plus que le diagramme disant qu'un morphisme de faisceaux commute aux restrictions, en remarquant que $f_{ij}^{-1}(\psi_j^{-1}(V) \cap U_{ji}) = \psi_i^{-1}(V) \cap U_{ij}$ par le point 4. en inversant i et j et en l'appliquant à $U = \psi_j^{-1}(V)$.
Prenons maintenant la section $t^j|_{\psi_j^{-1}(V) \cap U_{ji}} \in \mathscr{O}_{X_j}(\psi_j^{-1}(V) \cap U_{ji})$. Son image par $f_{ij}^{\#}$ est une section de $\mathscr{O}_{X_i}(\psi_i^{-1}(V) \cap U_{ij})$ que nous noterons t, et sa restriction à $\psi_j^{-1}(V_k) \cap U_{ji}$ est $t^j|_{\psi_j^{-1}(V_k) \cap U_{ji}}$. Or, cette dernière est par construction égale à $t_{k,j}|_{\psi_j^{-1}(V_k) \cap U_{ji}}$. Maintenant, comme $(t_{k,\alpha})_\alpha \in \mathscr{O}_X(V_k)$, on sait que $f_{ij}^{\#}(t^j|_{\psi_j^{-1}(V_k) \cap U_{ji}}) = t_{k,i}|_{\psi_i^{-1}(V_k) \cap U_{ij}}$. Or, la section $t^i|_{\psi_i^{-1}(V_k) \cap U_{ij}}$ de $\mathscr{O}_{X_i}(\psi_i^{-1}(V) \cap$

U_{ij}) a aussi ces mêmes restrictions. Comme $\mathcal{O}_{X_i}$ est un faisceau, on déduit donc que les deux sections $t^i|_{\psi_i^{-1}(V_k)\cap U_{ij}}$ et $f_{ij}^{\#}(t^j|_{\psi_j^{-1}(V)\cap U_{ji}})$ sont égales. Donc $(t^i)_i$ est bien un élément de $\mathcal{O}_X(V)$ qui vérifie la propriété d'être le recollement des t_k, et est unique par unicité à chaque étape. AInsi, $\mathcal{O}_X$ est un faisceau.
Que les $\mathcal{O}_X(V)$ soient des anneaux est évident.

6) Montrons d'abord que ψ_i est un homéomorphisme sur son image. Il est ouvert en vertu de la topologie choisie sur X. Il est injectif par $(*)$. Il est ouvert car si $U \subseteq X_i$ est ouvert, alors pour tout $j \in I$, on a $\psi_j^{-1}(\psi_i(U)) = f_{ji}^{-1}(U \cap U_{ij})$ par 4. donc est ouvert. Ainsi, ψ_i est bien un homéomorphisme sur son image.
Montrons maintenant que c'est un isomorphisme d'espaces annelés. Pour ça, il suffit de définir l'action de ψ_i sur les faisceaux de manière convenable. Si V est un ouvert de $\psi_i(X_i)$, on veut définir un morphisme d'anneaux $\mathcal{O}_X(V) \to \mathcal{O}_{X_i}(\psi_i^{-1}(V))$. Or, un élément de $\mathcal{O}_X(V)$ est un élément de $\prod_j \mathcal{O}_{X_j}(\psi_j^{-1}(V))$. Ainsi, on définit le morphisme $\mathcal{O}_X(V) \to \mathcal{O}_{X_i}(\psi_i^{-1}(V))$ comme étant la projection sur la i-ème coordonnée.
Définissons son potentiel inverse. Son action sur les espaces topologiques va simplement être l'inverse noté φ_i de ψ_i puisque ce dernier est un homéomorphisme. Cette fois, pour un ouvert U de X_i, on veut définir un morphisme $\mathcal{O}_{X_i}(U) \to \mathcal{O}_X(\varphi_i^{-1}(U)) = \mathcal{O}_X((\psi_i^{-1})^{-1}(U)) = \mathcal{O}_X(\psi_i(U))$. Soit $s \in \mathcal{O}_{X_i}(U)$. Alors on pose $\varphi_i^{\#}(s) = (\delta_{ij})_j$ où $\delta_{ij} = f_{ji}^{\#}(s|_{U\cap U_{ij}})$ si $i \neq j$, et $\delta_{ij} = s$ sinon. Montrons déjà que c'est bien un élément de $\mathcal{O}_X(\psi_i(U))$. Comme $s|_{U\cap U_{ij}} \in \mathcal{O}_{X_i}(U \cap U_{ij})$, $f_{ji}^{\#}$ l'envoie vers un élément de $\mathcal{O}_{X_j}(f_{ji}^{-1}(U\cap U_{ij})) = \mathcal{O}_{X_j}(\psi_j^{-1}(\psi_i(U)))$ par 4.. Donc c'est bien défini.
Montrons maintenant que φ_i et ψ_i sont inverses l'un de l'autre.
Soit $U \subseteq X_i$ un ouvert, et $s \in \mathcal{O}_{X_i}(U)$.
Alors comme par définition, la i-ème coordonnée de $\varphi_i^{\#}(s)$ est s, alors $\psi_i^{\#}(\varphi_i^{\#}(s)) = s$.
Soit $V \subseteq \psi_i(X_i)$ un ouvert, et $t \in \mathcal{O}_X(V)$, avec $t = (t_i)_i$.
D'abord, $\psi_i^{\#}(t) = t_i$.
Ensuite, $\varphi_i^{\#}(\psi_i^{\#}(t)) = (\delta_{ij})$ avec $\delta_{ii} = \psi_i^{\#}(t) = t_i$, et si $i \neq j$, on a $\delta_{ij} = f_{ji}^{\#}(t_i|_{\psi_i^{-1}(V)\cap U_{ij}}) = t_j|_{\psi_j^{-1}(V)\cap U_{ji}}$ car $t \in \mathcal{O}_X(V)$ (c.f. sa définition). Or, comme $V \subseteq \psi_i(X_i)$, on peut écrire $V = \psi_i(W)$ avec $W \subseteq X_i$. On obtient donc que $\psi_j^{-1}(V) = \psi_j^{-1}(\psi_i(W)) = f_{ji}^{-1}(W \cap U_{ij}) \subseteq U_{ji}$. Ainsi, l'intersection $\psi_j^{-1}(V) \cap U_{ji}$ vaut en fait $\psi_j^{-1}(V)$, et comme $t_j \in \mathcal{O}_{X_j}(\psi_j^{-1}(V))$, il vient que $t_j|_{\psi_j^{-1}(V)\cap U_{ji}} = t_j$. D'où $\varphi_i^{\#}(\psi_i^{\#}(t)) = t$.
Ainsi, ψ_i est un isomorphisme d'espaces annelés.

bonus Le fait que les ψ_i soient des isomorphismes nous montre aussi que X est bien un schéma, puisque par le point 1. il est réunion des $\psi_i(X_i)$, donc chaque point x de X est dans un $\psi_i(X_i)$. En prenant $y \in X_i$ tel que $\psi_i(y) = x$, comme X_i est un schéma, il existe un schéma affine U autour de y dans X_i. Ainsi, $x \in \psi_i(U)$ et $\psi_i(U)$ est un ouvert isomorphe à l'ouvert affine U (car ψ_i est un isomorphisme), ce qui nous fournit un recouvrement affine de X.

□

2 Corollaires : techniques de calcul

2.1 Fibres du faisceau structural recollé

Proposition 2.1

Soit X un schéma obtenu en recollant des schémas X_i le long d'ouverts U_{ij} par des isomorphismes f_{ij} et $\psi_i : X_i \to X$ les morphismes comme dans le théorème 1.
Si $x \in X$ avec $x = \psi_i(y)$, alors $\mathcal{O}_{X,x} \cong \mathcal{O}_{X_i,y}$.

Démonstration. D'après le théorème 1, ψ_i est un isomorphisme de X_i vers un ouvert U_i de X. De plus, comme $x = \psi_i(y)$, on a que U_i contient x. Ainsi, $\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{U_i,x}$. Or, l'isomorphisme $\psi_i : X_i \to U_i$ dit que $\mathcal{O}_{U_i,x} \cong \mathcal{O}_{X_i,y}$, ce qui conclut. □

2.2 Sections du faisceau structural recollé

Dans toute la suite, on suppose que X est un schéma obtenu en recollant des schémas X_i le long d'ouverts U_{ij} par des isomorphismes f_{ij} et $\psi_i : X_i \to X$ les morphismes comme dans le théorème 1, qui sont des isomorphismes vers un ouvert U_i de X.

Ouvert concentré dans un X_i

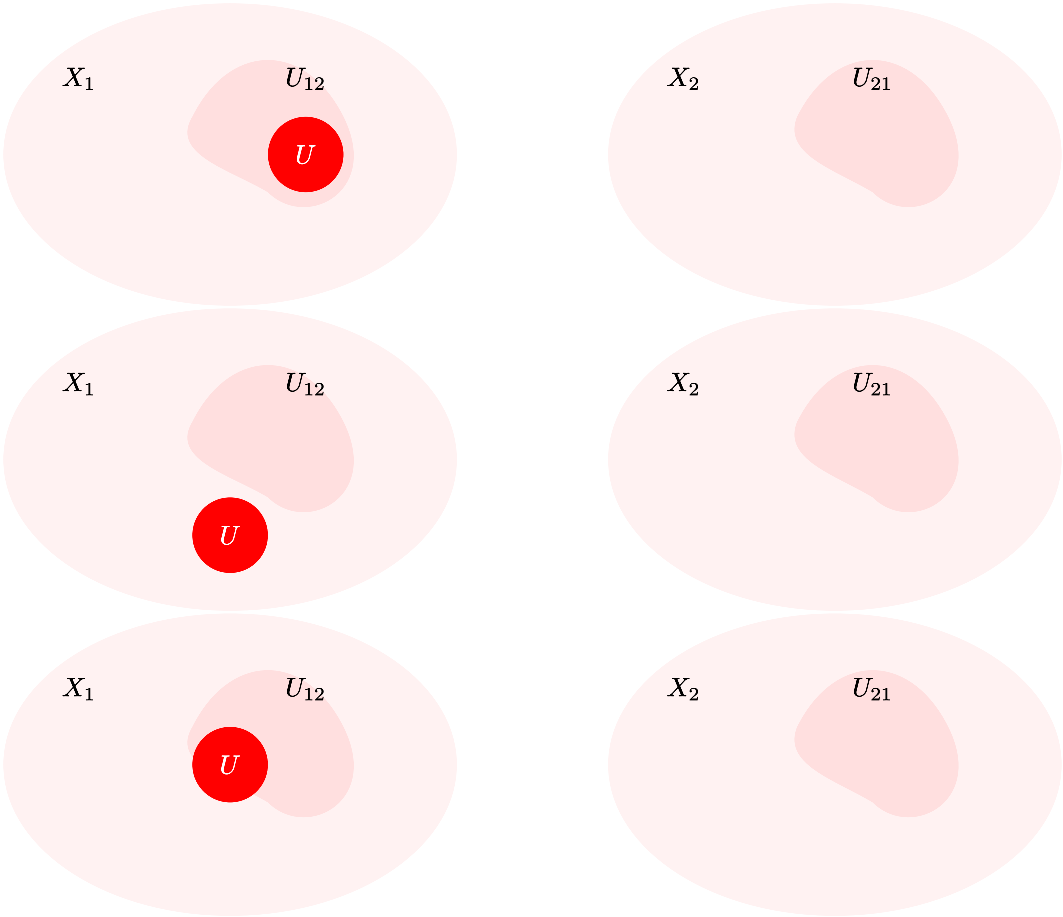

FIGURE 1 – Différents cas pris en charge par la proposition 2

Proposition 2.2

Soit U un ouvert de X tel que $U \subseteq U_i$ pour un certain $i \in I$. Alors $\mathscr{O}_X(U) \cong \mathscr{O}_{X_i}(\psi_i^{-1}(U))$.

Démonstration. On a $\mathscr{O}_X(U) = \mathscr{O}_{U_i}(U)$. Or, comme $\psi_i : X_i \to U_i$ est un isomorphisme, alors $\psi_i^\# : \mathscr{O}_{U_i} \to \psi_{i*}\mathscr{O}_{X_i}$ est un isomorphisme. On a donc un isomorphisme $\mathscr{O}_X(U) = \mathscr{O}_{U_i}(U) \to \psi_{i*}\mathscr{O}_{X_i}(U) = \mathscr{O}_{X_i}(\psi_i^{-1}(U))$. □

Ouvert transversal

Supposons pour la proposition suivante que pour tous $i, j, k \in I$, $U_{ij} = U_{ik}$. On note dans ce cas V la partie $\psi_i(U_{ij})$, qui ne dépend pas de i ni de j. En effet, V ne dépend pas de j car $U_{ij} = U_{ik}$ par hypothèse. Elle ne dépend pas non plus de i car pour tout $x \in U_{ij} = U_{ij} \cap U_{ik}$, $\psi_i(x) = \psi_j(f_{ij}(x))$ et $f_{ij}(x) = f_{kj}(f_{ik}(x))$, donc $\psi_i(x) = \psi_k(f_{ik}(x))$.

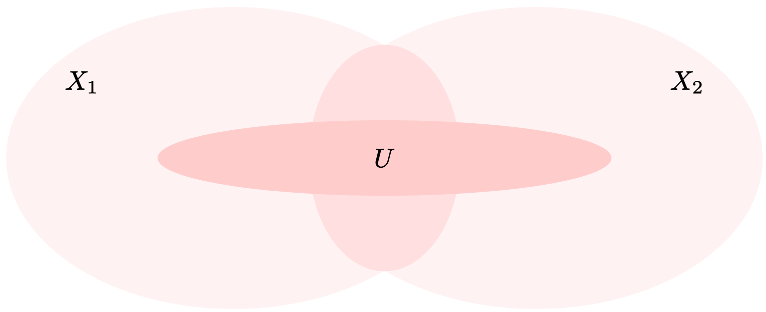

FIGURE 2 – Cas pris en charge par la proposition 3

Proposition 2.3

Soit U un ouvert de X. On note $U' := U \cap V$. Alors $U \setminus U' = \coprod U'_i$ où les U'_i sont dans $U_i \setminus V$ donc sont disjoints. Alors $\mathscr{O}_X(U) = \mathscr{O}_{X_i}(\psi_i^{-1}(U')) \times \prod_j \mathscr{O}_{X_j}(\psi_j^{-1}(U'_j))$ (où $i \in I$ est quelconque).

Démonstration. Cela provient de la proposition précédente et du fait que pour tout schéma, les sections sur une réunion disjointe d'ouverts sont le produit des sections sur ces ouverts. □