

ECUACIONES DE MAXWELL

Las leyes experimentales de la electricidad y del magnetismo se resumen en una serie de expresiones conocidas como *ecuaciones de Maxwell*.

Estas ecuaciones relacionan los vectores intensidad de *campo eléctrico* (**E**) e *inducción magnética* (**B**), con sus fuentes, que son las *cargas eléctricas*, las *corrientes* y los *campos variables*.

Una clase importante de acción mutua o interacción entre las partículas fundamentales que forman la materia es la *interacción electromagnética*.

Esta depende de una propiedad característica la *carga eléctrica*.

La modificación del espacio por presencia o movimiento de cargas lo llamamos campo electromagnético, caracterizado por los vectores **E** y **B**, de tal forma que la fuerza que aparece sobre una carga eléctrica es : $\mathbf{F} = q_0 (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$.

Los campos **E** y **B** quedan determinados por las posiciones de las cargas y por sus movimientos (o corrientes), es por esto que se las denominan *fuentes* del campo electromagnético, ya que conocidas ellas, a través de las ecuaciones de Maxwell podemos calcular **E** y **B**.

Debemos tener presente que las ecuaciones de Maxwell tal como las veremos tienen sus limitaciones. Funcionan muy bien para tratar interacciones entre gran número de cargas, como los circuitos eléctricos, las antenas y aún los rayos de átomos o de moléculas ionizados. Las interacciones electromagnéticas entre partículas elementales (especialmente de alta energía) se deben tratar conforme a las leyes de la electrodinámica cuántica.

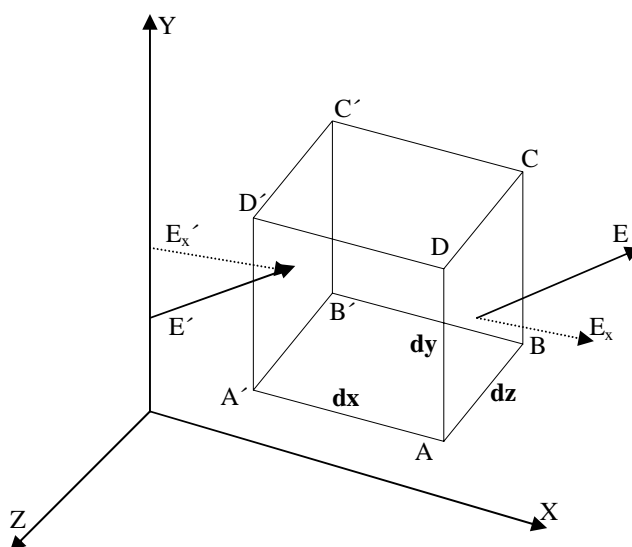
Primera ley de Maxwell o ley de Gauss para el campo Eléctrico

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = q/\epsilon_0$$

El flujo eléctrico a través de una superficie cerrada que encierra las cargas q_1, q_2, \dots, q_n , está dado por la expresión anterior. Donde $q = q_1 + q_2 + \dots + q_n$, es la carga total en el interior de la superficie.

Si no hay cargas en el interior de la superficie cerrada, o si la carga neta es cero, entonces el flujo eléctrico (Φ_E) total a través de ella es cero.

Las cargas que están fuera de la superficie cerrada no contribuyen a ese flujo total o neto. La ley de Gauss es útil para calcular el campo **E** producido por distribuciones de cargas que tienen cierta simetría.



$$\Phi_{ABCD} = \oint_S E \cdot ds \cdot \cos \theta = E \cdot \cos \theta \cdot dZ \cdot dY \Rightarrow \Phi_{ABCD} = E_X \cdot dZ \cdot dY$$

$$\Phi_{A'B'C'D'} = \oint_S E' \cdot ds \cdot \cos \theta = -E' \cdot \cos \theta \cdot dZ \cdot dY \Rightarrow \Phi_{A'B'C'D'} = -E'_X \cdot dZ \cdot dY$$

$$\text{El flujo total en la dirección X será } \Phi_X = E_X \cdot dZ \cdot dY - E'_X \cdot dZ \cdot dY = (E_X - E'_X) \cdot dZ \cdot dY$$

Como la distancia entre A y A' es muy pequeña (d_X), entonces la variación del campo entre ambas caras es infinitesimal $\Rightarrow (E_X - E'_X) = dE_X = \frac{\partial E_X}{\partial x} \cdot dx \Rightarrow \Phi_X = \frac{\partial E_X}{\partial x} \cdot dx \cdot dZ \cdot dY$

$$\Rightarrow \Phi_X = \frac{\partial E_X}{\partial x} \cdot dv \quad (dv = \text{volumen del cubo})$$

Se obtienen resultados análogos para las otras dos direcciones, por lo que el flujo eléctrico que atraviesa la superficie será : $\Phi_E = \frac{\partial E_X}{\partial x} \cdot dv + \frac{\partial E_Y}{\partial y} \cdot dv + \frac{\partial E_Z}{\partial z} \cdot dv$

Si dq es la carga dentro del volumen dv , por la ley de Gauss nos queda:

$$\Phi_E = \left(\frac{\partial E_X}{\partial x} + \frac{\partial E_Y}{\partial y} + \frac{\partial E_Z}{\partial z} \right) dv = dq/\epsilon_0 \Rightarrow \text{si } dq/dv = \rho, \text{ obtenemos}$$

$$\left(\frac{\partial E_X}{\partial x} + \frac{\partial E_Y}{\partial y} + \frac{\partial E_Z}{\partial z} \right) = \rho/\epsilon_0 \Rightarrow \underline{\text{div } \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0}$$

La ley de Gauss en forma diferencial relaciona el campo eléctrico (\mathbf{E}) en un punto del espacio con la distribución de cargas en el mismo punto (ρ). Es decir expresa una relación *local* entre esas dos magnitudes físicas.

Vemos que las cargas eléctricas son las fuentes del campo eléctrico, y que la distribución y magnitud de las cargas determinan el campo en cada punto del espacio.

Segunda ley de Maxwell o ley de Gauss para el campo Magnético

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

El flujo magnético a través de una superficie cerrada es siempre nulo. Como no hay masas magnéticas o polos aislados, siempre se encuentran formando dipolos, entonces las líneas del campo \mathbf{B} son cerradas. Es decir, el flujo entrante a través de cualquier superficie cerrada es igual al flujo saliente.

En forma diferencial, por analogía con la ley de Gauss para el campo eléctrico, obtenemos :

$$\frac{\partial B_X}{\partial x} + \frac{\partial B_Y}{\partial y} + \frac{\partial B_Z}{\partial z} = 0 \quad \text{ó} \quad \underline{\text{div } \mathbf{B} = 0}$$

Las líneas de campo magnético (\mathbf{B}) no divergen ni convergen desde ningún punto (relación local), es decir los polos aislados no existen.

Tercera ley de Maxwell o ley de Faraday - Henry

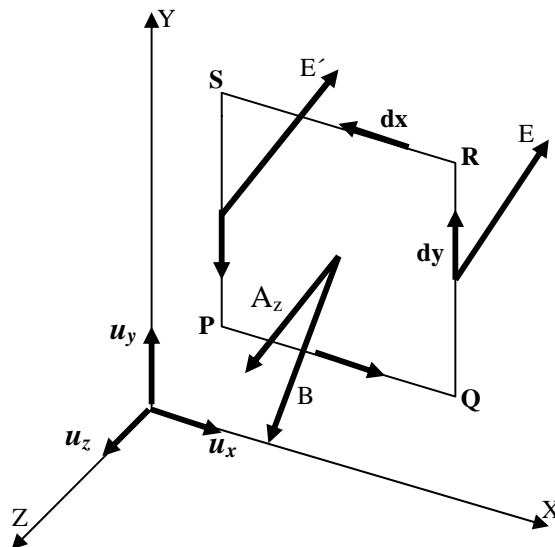
$$\int_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

Un campo magnético dependiente del tiempo implica la existencia de un campo eléctrico, tal que su circulación a lo largo de un camino arbitrario cerrado es igual a menos la derivada con respecto al tiempo del flujo magnético a través de una superficie limitada por el camino.

Esta superficie no es cerrada, y por lo tanto el flujo magnético que la atraviesa no tiene porque ser necesariamente cero.

Esta ley describe como son las líneas de \vec{E} que rodean un área donde el flujo magnético que la atraviesa, está variando.

La ley de la inducción electromagnética según vimos, se puede aplicar a caminos de cualquier forma. Supongamos un camino rectangular infinitesimal PQRS sobre el plano xy



$$\int_{PQRS} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{PQ} + \int_{QR} + \int_{RS} + \int_{SP}$$

$$\int_{QR} E \cdot dl \cdot \cos \theta = E_Y \cdot dy \quad \int_{SP} E \cdot dl \cdot \cos \theta = -E'_Y \cdot dy$$

$\Rightarrow \int_{QR} + \int_{SP} = (E_Y - E'_Y) dy$ Como la distancia entre PQ es muy pequeña (dx), entonces la variación del campo $\Delta E = (E_Y - E'_Y)$ vale dE_Y .

$$\Rightarrow \int_{QR} + \int_{SP} = (E_Y - E'_Y) dy = dE_Y dy = \frac{\partial E_Y}{\partial x} dx dy$$

Análogamente, $\int_{PQ} + \int_{RS} = -\frac{\partial E_X}{\partial y} dy dx$ La suma de las cuatro integrales valen:

$$\int_{PQRS} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{PQ} + \int_{QR} + \int_{RS} + \int_{SP} = \left(\frac{\partial E_Y}{\partial x} - \frac{\partial E_X}{\partial y} \right) dx dy$$

Por otro lado, el flujo a través de la superficie es : $\Phi_{PQRS} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = B_Z dx dy$

Sustituyendo en la expresión de la ley de Faraday-Henry $\int_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$ se obtiene:

$$\left(\frac{\partial E_Y}{\partial x} - \frac{\partial E_X}{\partial y} \right) dx dy = -\frac{d}{dt} (B_Z dx dy) \Rightarrow \frac{\partial E_Y}{\partial x} - \frac{\partial E_X}{\partial y} = -\frac{\partial B_Z}{\partial t}$$

colocando el rectángulo infinitesimal en los planos yz y zx :

$$\frac{\partial E_Z}{\partial y} - \frac{\partial E_Y}{\partial z} = -\frac{\partial B_X}{\partial t} \quad y \quad \frac{\partial E_X}{\partial z} - \frac{\partial E_Z}{\partial x} = -\frac{\partial B_Y}{\partial t}$$

La combinación de estas tres expresiones dan la ley de Faraday en forma diferencial, que se puede escribir como : $\text{Rot} \cdot \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Expresa las relaciones que deben existir entre la derivada respecto del tiempo del campo magnético en el *punto* y el campo eléctrico existente en ese mismo punto del espacio.

Cuarta ley de Maxwell

La carga eléctrica se conserva en todos los procesos que ocurren en el universo, la cantidad de carga neta siempre permanece constante.

Supongamos tener una superficie arbitraria y cerrada (S), llamaremos (q) a la carga neta dentro de ella en un instante determinado de tiempo. Consideraremos un sistema dinámico por lo que cargas libres (e⁻ en los metales) se mueven a través del medio atravesando (S).

-A veces pueden existir mas cargas salientes que entrantes, originando una disminución de la carga neta (q).

-Otras veces la situación se puede invertir, de forma que las cargas que entran ,pueden exceder a las que salen, dando como resultado que la carga neta (q) aumenta.

-Si los flujos de carga entrantes y salientes de (S) son iguales, la carga neta será constante.

El principio de conservación de la carga exige que:

pérdida de carga = flujo saliente – flujo entrante = flujo neto de carga saliente.

El flujo neto de carga saliente (miembro de la derecha de la igualdad), o sea la carga que sale a través de la superficie cerrada por unidad de tiempo vale: $I = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$

La pérdida de carga por unidad de tiempo dentro de la superficie cerrada (S) vale : $-\frac{dq}{dt} = I$
 $\Rightarrow -\frac{dq}{dt} = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$ (principio de conservación de la carga)

Recordando la ley de Gauss $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = q/\epsilon_0$, y derivando, $\Rightarrow \frac{dq}{dt} = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}$
 $\Rightarrow \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$ cuando los campos son estáticos $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \text{no depende del tiempo}$, y su derivada es nula $\Rightarrow \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = 0$, esto significa que para campos estáticos, no existe acumulación o pérdida de carga en ninguna región del espacio, por lo que la corriente neta a través de la superficie cerrada vale cero.

Maxwell sugirió la incorporación de un segundo término a la ley de Ampère, cuando se tienen campos variables en el tiempo.

Esta ley dice que la circulación del campo magnético está expresada por :

$\mu_0 I = \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$ donde S es cualquier superficie limitada por L, e I representa la corriente total enlazada por la trayectoria L

La sugerencia de Maxwell fue reemplazar $\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$ por $\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}$ con lo que la expresión de Ampère queda $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} \right)$

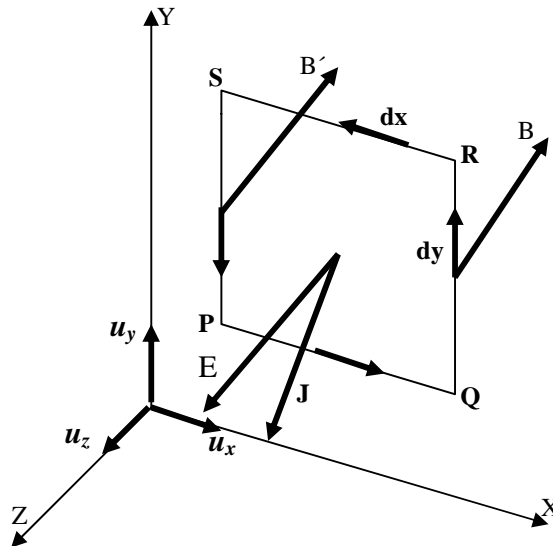
$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

La ley de Ampère relaciona una corriente estacionaria con el campo magnético que ella produce.

La ley de Ampère-Maxwell indica *además*, que un campo eléctrico dependiente del tiempo también contribuye al campo magnético.

En ausencias de corrientes, entonces : $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}$

“ Un campo eléctrico variable en el tiempo implica la existencia de un campo magnético en el mismo lugar”.



Utilizando un análisis similar a la empleada para la ley de Faraday :

$$\oint_{PQRS} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) dx \cdot dy \quad \text{el flujo de la densidad de corriente vale}$$

$$\oint \vec{J} \cdot d\vec{s} = J \cos \theta \, dx \cdot dy = J_z \, dx \cdot dy$$

El flujo del campo eléctrico vale : $\int_{PQRS} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_z \cdot dx \cdot dy$, y su derivada vale:

$$\frac{d}{dt} \int_{PQRS} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\partial E_z}{\partial t} dx \cdot dy$$

Reemplazando en la ley de Ampère-Maxwell las expresiones anteriores, y cancelando el factor común $dx \cdot dy$, resulta :

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \mu_0 J_z + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad , \text{colocando el rectángulo en los planos } yz \text{ e } zx :$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 J_x + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 J_y + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

que se puede expresar como $\text{Rot.}\mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$

Relación entre la corriente eléctrica en un punto del espacio y los campos eléctricos y magnéticos en ese mismo punto.

En el vacío donde no hay corrientes ($\mathbf{J} = 0$), entonces : $\text{Rot.}\mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Relación entre el campo magnético y la derivada del campo eléctrico respecto del tiempo en el mismo punto.