



Profesores

Ph.D. Victor Grisales P. (Teoría)

M.Sc. Horacio Coral E. (Lab)

Guía de Laboratorio No. 2 Modelado e Identificación

1. DESCRIPCIÓN

En esta práctica, el estudiante obtendrá la respuesta en velocidad del motor LEGO ante una entrada tipo escalón, con el fin de analizar sus características dinámicas y estáticas en el dominio temporal. Además, aplicando diferentes métodos/técnicas, obtendrá la función de transferencia del motor a partir de la respuesta experimental obtenida, y se analizará la precisión de los modelos obtenidos respecto a los datos experimentales.

Por otro lado, el estudiante utilizará una herramienta de Matlab® para la identificación de sistemas dinámicos a partir de respuestas experimentales, analizará sus ventajas y desventajas, y la aplicará en la identificación del motor LEGO.

2. OBJETIVOS

- Analizar la respuesta transitoria de sistemas dinámicos sobreamortiguados y subamortiguados.
- Obtener gráficamente la función de transferencia aproximada de un sistema a partir de su respuesta al escalón.
- Conocer y utilizar herramientas de Matlab® que ayuden a obtener y validar modelos matemáticos a partir de respuestas experimentales.
- Simular sistemas dinámicos en Matlab/Simulink®.

3. MARCO TEÓRICO

3.1. Motores de Corriente Directa

Hoy en día los motores de corriente directa(DC) son uno de los actuadores más ampliamente usados en la industria. Hace años, la mayoría de los servomotores pequeños usados para propósitos de control eran AC, a pesar de tener características no lineales y ser difíciles de controlar especialmente en el lazo de posición. Por otro lado, los motores DC son más costosos debido a su sistema de escobillas y de conmutación, y además los motores DC de flujo variable son apropiados solo para cierto tipo de aplicaciones de control.

Antes de que la tecnología de imán permanente fuera totalmente desarrollada, el torque por unidad de volumen o el peso de un motor dc con imán permanente(PM) era lejos de lo que se deseaba. Hoy, con el desarrollo de los imanes de tierras raras (rare-earth magnet), es posible obtener torques muy altos por unidad de volumen en motores DC de imán permanente a un costo razonable. Además, los avances hechos en las tecnologías de conmutación han dejado ciertas partes casi libres de mantenimiento, así como los avances

realizados en electrónica de potencia han hecho que los motores DC sin escobillas sean ampliamente populares en sistemas de control de alto desempeño.

El motor DC de imán permanente es básicamente un transductor de torque que convierte energía eléctrica en energía mecánica y se puede representar mediante el diagrama del circuito equivalente de la Figura 1 [2, p. 202].

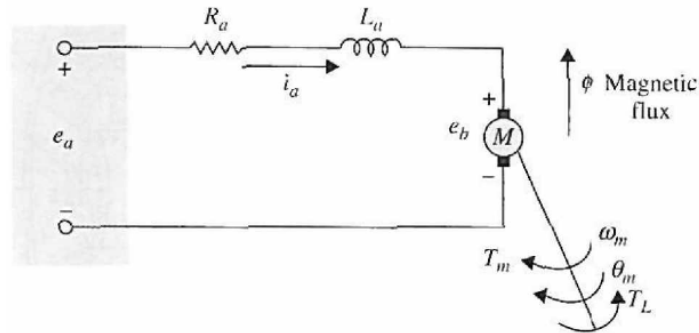


Figura 1: Circuito equivalente del motor DC de imán permanente.

3.2. Sistemas de Primer Orden

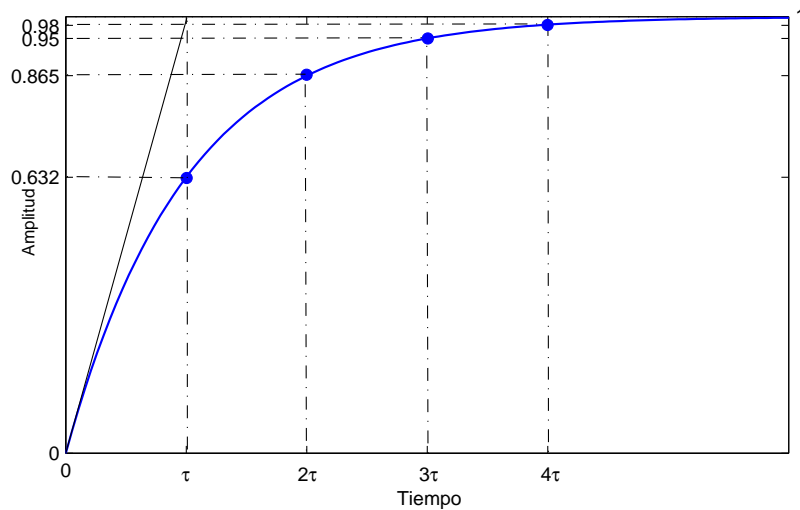


Figura 2: Respuesta de un sistema de primer orden ante un escalón unitario.

La señal de prueba más común para excitar sistemas dinámicos, es la señal tipo escalón por exigir dinámica y estáticamente al sistema. Los sistemas de primer orden tienen la siguiente forma general (vea detalles en [2,



p. 274-275], [3, p. 161-164]):

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{\tau s + 1} \quad (1)$$

Donde, k es la ganancia estática del sistema, y se determina por:

$$k = \frac{\Delta salida_{ss}}{\Delta entrada_{ss}} \quad (2)$$

τ es la constante de tiempo del sistema y es el tiempo que tarda la respuesta en llegar al 63.2% de su valor final (ver Figura 2).

Aplicando transformada inversa de Laplace a $Y(s)$ asumiendo que $U(s)$ es un escalón unitario, se obtiene la respuesta del sistema en el tiempo $y(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$, de donde se puede analizar que la respuesta es una curva de forma exponencial cuyo tiempo de estabilización se puede aproximar a 4τ tomando una banda de tolerancia del 2%.

3.3. Sistemas de Segundo Orden

Los sistemas de segundo orden tienen la siguiente forma general (vea detalles en [2, p. 275-288], [1, p. 308-314], [3, p. 164-179]):

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3)$$

Donde, k es la ganancia estática del sistema, y se determina por:

$$k = \frac{\Delta salida_{ss}}{\Delta entrada_{ss}} \quad (4)$$

ω_n es la frecuencia natural no amortiguada del sistema. ξ es el coeficiente de amortiguamiento del sistema $0 < \xi < 1$ (Polos complejos).

Al excitar un sistema de segundo orden con un escalón se obtiene la respuesta de la Figura 3. De esta respuesta experimental se pueden obtener ciertas características de la respuesta en el tiempo, como son:

Tiempo de retardo t_d : Tiempo que tarda la respuesta en alcanzar por primera vez la mitad del valor final. Este tiempo se puede expresar de forma aproximada así:

$$t_d \cong \frac{1 + 0.7\xi}{\omega_n}, \quad 0 < \xi < 1 \quad (5)$$

O se puede obtener una mejor aproximación de t_d con:

$$t_d \cong \frac{1.1 + 0.125\xi + 0.469\xi^2}{\omega_n}, \quad 0 < \xi < 1 \quad (6)$$

Tiempo de subida t_r : Tiempo que tarda la respuesta en alcanzar desde el 10% al 90% del valor final y se puede expresar mediante una simple aproximación:

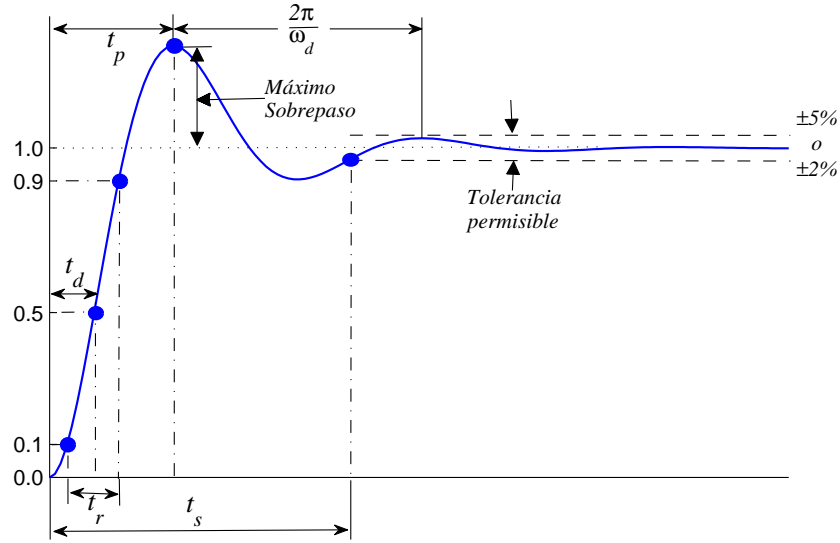


Figura 3: Respuesta de un sistema de segundo orden ante un escalón unitario.

$$t_r \cong \frac{0.8 + 2.5\xi}{\omega_n}, \quad 0 < \xi < 1 \quad (7)$$

O se puede obtener una mejor aproximación de t_r con:

$$t_r \cong \frac{1 - 0.4167\xi + 2.917\xi^2}{\omega_n}, \quad 0 < \xi < 1 \quad (8)$$

Tiempo de pico t_p : Tiempo requerido para alcanzar el primer pico de sobrepaso y se puede expresar de la siguiente manera:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad (9)$$

Tiempo de estabilización t_s : Tiempo requerido para que la respuesta alcance y permanezca dentro de determinado rango del valor final $\pm 5\%$:

$$t_s \cong \frac{3.2}{\xi\omega_n}, \quad 0 < \xi < 0.69 \quad (10)$$

$$t_s \cong \frac{4.5\xi}{\omega_n}, \quad \xi > 0.69 \quad (11)$$

Sobrepaso M_p : Es el porcentaje de rebase máximo de la respuesta respecto al cambio total en estado estable de la salida, y este término está relacionado con el coeficiente de amortiguamiento así:

$$M_p = \frac{\text{Maximo Sobrepasso}}{\Delta y_{ss}} \quad (12)$$

$$M_p = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (13)$$

Frecuencia natural amortiguada ω_d : Es la frecuencia de oscilación amortiguada de la respuesta del sistema ante el escalón, y se puede expresar por la siguiente ecuación:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (14)$$

$$\xi = \cos\theta \quad (15)$$

3.4. Curva de Reacción

Las funciones de transferencia mostradas en las ecuaciones 1 y 3 caracterizan un proceso con diferentes parámetros: k , t_m , τ , ω_n , ξ , entre otros. Sin embargo, para obtener estas relaciones entrada-salida es necesario obtener la respuesta del sistema mediante una prueba dinámica en el proceso real. La prueba se realiza en dos pasos (vea detalles en [4, p. 310-314]):

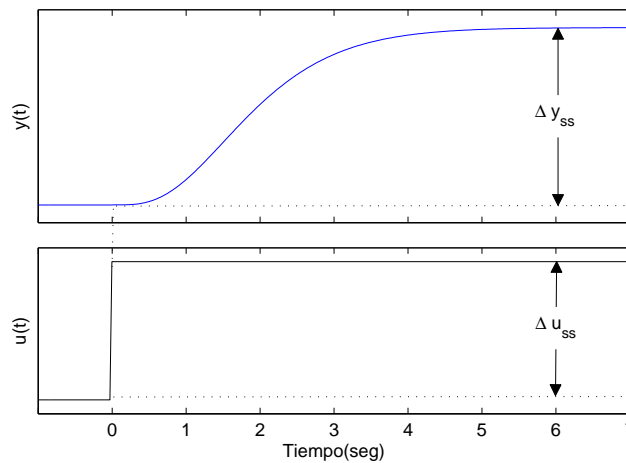


Figura 4: Curva de reacción del proceso o respuesta al escalón en lazo abierto.

Paso 1: Con el controlador en 'manual' (sistema en lazo abierto) aplique un escalón a la señal de control que va al proceso. La magnitud de este cambio debería ser lo suficientemente grande como para que el transmisor sea capaz de medir la respuesta obtenida, pero no debería ser tan grande como para que la respuesta se vea distorsionada por no linealidades del proceso.

Paso 2: Registre la respuesta que entrega el transmisor en un dispositivo donde se pueda observar toda la señal desde donde ocurrió el escalón de entrada hasta donde el sistema alcanza un nuevo valor de estado estable. Comúnmente, una prueba al escalón puede durar entre unos minutos hasta varias horas, dependiendo de la velocidad de respuesta del proceso.

Una respuesta típica ante el escalón, también llamada *curva de reacción* del proceso, se puede observar en la Figura 4. El siguiente paso es ajustar la curva de reacción a un modelo o función de transferencia usando las ecuaciones 1 a 14 según sea el caso.

3.5. Herramienta de Identificación de Sistemas de Matlab®

Escriba *ident* en la ventana de comandos de Matlab®. A continuación aparece una ventana llamada herramienta de identificación de sistemas (System Identification Tool), que de ahora en adelante se nombrará como *ident*.

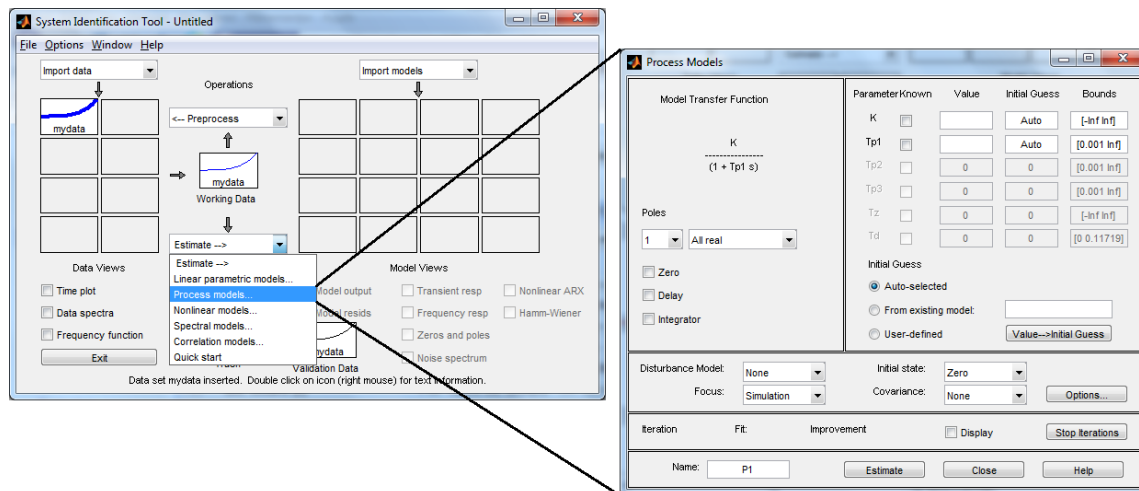


Figura 5: Herramienta de identificación de sistemas en Matlab®.

En la pestaña *import data* seleccione *Time domain data...*, luego en la ventana que sale a la derecha, escriba en el campo *input* el nombre del vector que contiene los datos de la entrada del sistema y en el campo *output* el nombre del vector que contiene los datos de la salida del sistema. Configure *Starting time* y *Sampling interval* igual al tiempo de muestreo del experimento en segundos, luego de clic en *import*. Con este paso, acaba de cargar la información del experimento (entrada y salida) a la herramienta de identificación de sistemas de Matlab®. Cierre la ventana que utilizó para importar los datos del experimento.

Luego, en la ventana *ident* ubique la pestaña llamada *Estimate...* y seleccione la opción *Process models...*, e inmediatamente se va a abrir una ventana llamada *Process Models*, en donde se podrán seleccionar diferentes funciones de transferencia (primer, segundo o tercer orden) con el fin de que Matlab® realice una estimación del modelo seleccionado a partir de los datos experimentales cargados. Este paso se puede observar en las Figuras 5 y 6.

En la ventana *Process Models* (ver Figura 6), seleccione diferentes modelos matemáticos cambiando el número de polos y adicionando ceros. Para cada modelo seleccionado realice la identificación del modelo matemático dando clic en el botón *Estimate*.

Una vez se estimen modelos, éstos van apareciendo en la ventana *ident* representados como pequeñas imágenes tal como se observa en la Figura 7 (izquierda). Si se desea observar la función de transferencia

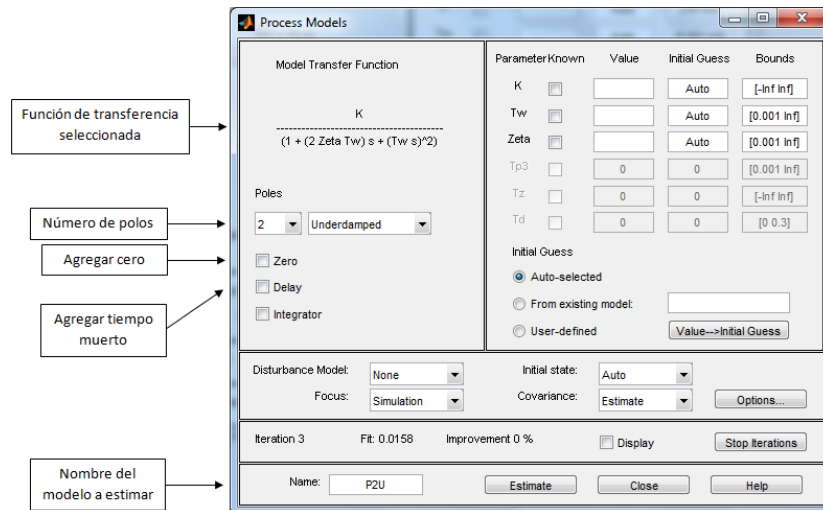


Figura 6: Ventana Process Models de Ident en Matlab®.

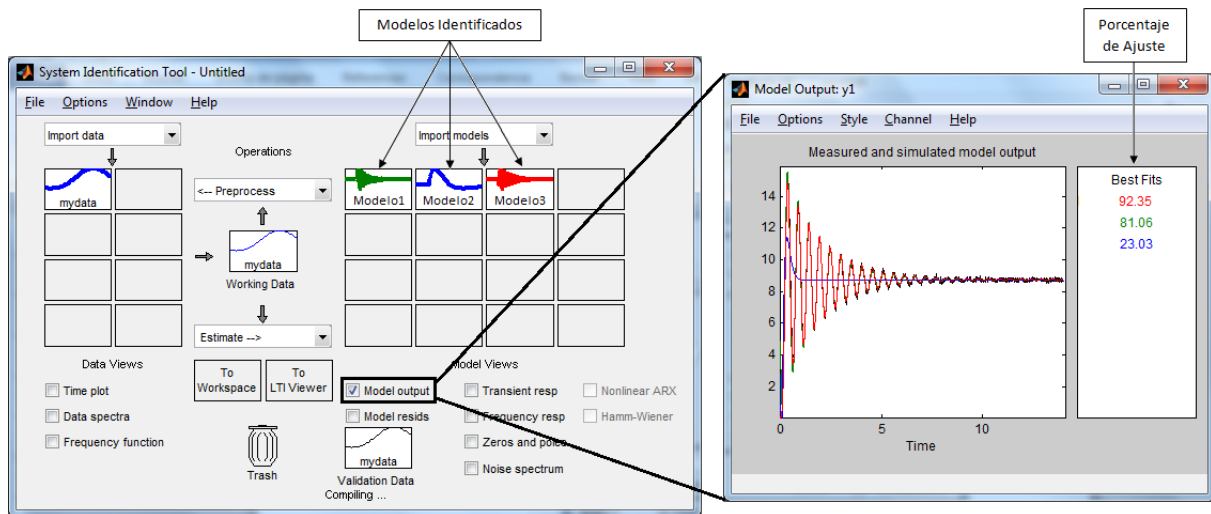


Figura 7: Validación de los modelos identificados con Matlab®.



obtenida, basta con dar clic derecho sobre cada modelo estimado y se abrirá una ventana que detalla el modelo obtenido. Si se desea observar el porcentaje de ajuste de cada modelo estimado comparado con los datos experimentales, puede activar la opción *Model output* y podrá observar una gráfica que provee esta información (ver Figura 7 derecha).

4. PROCEDIMIENTO

Esta práctica se divide en tres partes las cuales se desarrollarán en tres semanas (21, 28 de Agosto y 4 de Septiembre de 2012): Análisis y modelado usando Matlab®, Análisis de respuesta transitoria y modelado experimental del motor LEGO, y Modelado de motores DC. Los puntos a continuación deberán ser desarrollados en grupos y entregados en un informe la semana siguiente a la culminación de las actividades (vea detalles en las secciones 5 y 6). Los puntos prácticos deberán ser sustentados en clase de laboratorio. A continuación se detalla el procedimiento a realizar en cada parte:

4.1. Análisis y modelado usando Matlab®

En esta parte el estudiante utilizará una herramienta de Matlab® para la identificación de sistemas dinámicos a partir de respuestas experimentales, y analizará sus ventajas y desventajas. En los archivos adjuntos a este documento, se encuentra un archivo llamado *datos1.txt* que contiene información de la respuesta experimental de un proceso ante una entrada tipo escalón. La información del archivo es la siguiente: La primera columna del archivo es el vector de tiempo, la segunda es la respuesta del proceso y la tercera columna es la entrada o señal de excitación al proceso.

1. Inicie Matlab® y a continuación escriba en la ventana de comandos el siguiente código:

```
load datos1.txt
tiempo = datos1(:,1);
salida = datos1(:,2);
entrada = datos1(:,3);
plot(tiempo,salida,'b',tiempo,entrada,'r')
title('Respuesta ante una entrada escalón'), grid on
legend('Respuesta del sistema','Señal de entrada al sistema'),xlabel('Tiempo (s)')
```

2. De acuerdo a la respuesta mostrada, obtenga de manera gráfica/manual los parámetros del sistema como: k , M_p , ξ , ω_n , y t_s . Construya una función de transferencia y almacénela en $G_1(s)$.
3. Compare la respuesta del modelo que obtuvo en el punto anterior con la respuesta real, use el siguiente código:

```
figure, plot(tiempo,salida,'b')
hold on
step(G1,'r',25)
legend('Respuesta del Sistema Real','Respuesta del Sistema Aproximado a 2do Orden')
```

4. Las respuestas son parecidas? ¿Cree que el sistema real es de segundo orden? Qué podría agregar (ceros, polos, etc.) al modelo matemático obtenido para que la respuesta sea más parecida a los datos del experimento? Por qué?



5. Con ayuda de Matlab® usando la herramienta *Ident*, obtenga una función de transferencia a partir de los datos experimentales dados en el archivo *datos1.txt*. Almacene la función de transferencia en $G_2(s)$.
6. Construya un diagrama en Simulink® que le permita comparar y validar los modelos obtenidos anteriormente $G_1(s)$ y $G_2(s)$ con los datos experimentales.

4.2. Análisis de respuesta transitoria y modelado experimental del motor LEGO

Esta segunda parte corresponde al análisis de respuesta transitoria mediante la caracterización dinámica y estática del motor LEGO usando una prueba experimental (curva de reacción). Adicionalmente, el estudiante debe aplicar otros métodos de modelado usando los datos experimentales de la respuesta del motor para obtener dos funciones de transferencia y comparar su ajuste respecto a los datos experimentales mediante un índice de desempeño.

1. Obtener la curva de reacción del motor LEGO para la salida en velocidad (grados/seg) usando el archivo *registrovel.nxc*, identificar sus características estáticas y dinámicas k , τ , t_s (Ver Figura 2), y obtener una función de transferencia aproximada $G_{LEGO1}(s)$.
2. Investigar y describir otro método de modelado para sistemas de primer orden con o sin tiempo muerto que se base en la curva experimental del motor, y aplicarlo para obtener una nueva función de transferencia $G_{LEGO2}(s)$ del motor LEGO.
3. Obtener una nueva función de transferencia $G_{LEGO3}(s)$ del motor LEGO a partir de los datos experimentales, utilizando la herramienta de identificación de sistemas de Matlab®.
4. Validar y comparar en Simulink® las tres funciones de transferencia obtenidas del motor LEGO (incluir los datos experimentales en dicha comparación), y por medio de un índice de desempeño evaluar cuál de los tres modelos es el más aproximado al sistema real.

4.3. Modelado de Motores DC

En motores DC, la armadura del motor es modelada como un circuito con una resistencia R_a conectada en serie con una inductancia L_a , y una fuente de voltaje e_b que representa la fuerza contra-electromotriz en la armadura cuando el rotor gira.

Las variables y parámetros del motor se definen así (ver Figura 1): $i_a(t)$ = corriente de armadura, L_a = inductancia de armadura, R_a = resistencia de armadura, $e_a(t)$ = voltaje aplicado, $e_b(t)$ = fuerza contra-electromotriz, K_b = constante de fuerza contra-electromotriz, $T_L(t)$ = torque de carga, ϕ = flujo magnético en el entre-hierro, $T_m(t)$ = torque del motor, $\omega_m(t)$ = velocidad angular del rotor, $\theta_m(t)$ = desplazamiento del rotor, J_m = inercia del rotor, K_i = constante de torque, B_m = coeficiente de fricción viscosa.

Al aplicar voltaje $e_a(t)$ en los terminales de la armadura del motor, se desarrolla un torque en el eje del motor que es directamente proporcional al flujo del campo y la corriente de armadura. En consecuencia,

$$T_m(t) = K_m(t)\phi i_a(t) = K_i i_a(t) \quad (16)$$

donde K_i es la constante de torque en $N.m/A$, $lb.ft/A$, o $oz.in/A$ y ϕ es la magnitud del flujo del campo magnético en el entre-hierro.



Aplicando principios fundamentales al sistema de la Figura 1, las ecuaciones diferenciales (causa-efecto) que modelan el comportamiento dinámico del motor DC son:

$$\frac{di_a(t)}{dt} = \frac{1}{L_a}e_a(t) - \frac{R_a}{L_a}i_a(t) - \frac{1}{L_a}e_b(t) \quad (17)$$

$$T_m(t) = K_i i_a(t) \quad (18)$$

$$e_b(t) = K_b \frac{d\theta_m(t)}{dt} = K_b \omega_m(t) \quad (19)$$

$$\frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} = \frac{1}{J_m}T_m(t) - \frac{1}{J_m}T_L(t) - \frac{B_m}{J_m} \frac{d\theta_m(t)}{dt} \quad (20)$$

Las ecuaciones 17 a 20 consideran que el voltaje aplicado $e_a(t)$ es la causa; la ecuación 17 considera que $di_a(t)/dt$ es el efecto inmediato debido a $e_a(t)$; en la ecuación 18, $i_a(t)$ causa el torque del motor $T_m(t)$; la ecuación 19 define la fuerza contra-electromotriz; y finalmente, en la ecuación 20, el torque del motor $T_m(t)$ causa la velocidad angular $\omega_m(t)$ y el desplazamiento del rotor $\theta_m(t)$.

De acuerdo a las anteriores ecuaciones, la función de transferencia del motor DC entre la velocidad del rotor y el voltaje de entrada, asumiendo $T_L(t) = 0$, es:

$$\frac{\Omega_m(s)}{E_a(s)} = \frac{K_i}{L_a J_m s^2 + (R_a J_m + B_m L_a)s + (K_b K_i + R_a B_m)} \quad (21)$$

1. De acuerdo al modelo matemático de motores DC de imán permanente mostrado en las ecuaciones 17 a 20, simule, analice y justifique por qué a pesar de tener más de un polo, la respuesta experimental del motor LEGO en velocidad muestra una respuesta característica de primer orden. Para la simulación use los siguientes parámetros: $L_a = 0.01H$, $R_a = 2\Omega$, $K_b = 0.3V.s/rad$, $J_m = 0.1kg.m^2$, $K_i = 0.7N.m/A$, $B_m = 0.01N.m.s$.
2. Use la función de transferencia del motor DC (Ec. 21) y realice una reducción de orden. Analice y contraste las respuestas del sistema de orden completo y reducido. ¿Qué parte de las dinámicas del motor dc, descritas por las ecuaciones 17 a 20, es la que permite ser despreciada para realizar la reducción de orden?. Si se considera la salida del motor dc como la posición angular, ¿aún es posible despreciar dicha parte y realizar una reducción de orden?, realice la reducción y valide su respuesta.

5. INFORME

Desarrollar un informe de la práctica usando el formato IEEE, que contenga los siguientes ítems:

- Título, Autores y Resumen en español.
- Introducción.
- Desarrollo de la sección PROCEDIMIENTO.
- Análisis y discusión de los resultados.
- Conclusiones.
- Bibliografía.



6. EVALUACIÓN

Entregar informe de la práctica según lineamientos dados en la sección 5. El informe se debe entregar únicamente vía e-mail a la dirección *horacio.unal@gmail.com* como máximo el *10 de septiembre de 2012*. La evaluación sería de la siguiente manera:

- Presentación del Informe (P_{INF}) (organización, redacción, ortografía, claridad, formato): **Valor 1.0**.
- Punto 4.1: **Valor 1.5**.
- Punto 4.2: **Valor 1.5**.
- Punto 4.3: **Valor 1.0**.
- Análisis y discusión de los resultados (ADR): **Valor 0.5**.
- Conclusiones (C): **Valor 0.5**.
- Ecuación de evaluación:

$$\text{Nota} = (P_{4.1} + P_{4.2} + P_{4.3} + ADR + C)P_{INF}$$

7. REFERENCIAS

- [1] DORF, Richard C. ; BISHOP, Robert H.: *Modern control systems*. 12th. Prentice Hall : Pearson, 2010. – xxi, 1082 p. p.
- [2] GOLNARAGHI, M. F. ; KUO, Benjamin C.: *Automatic control systems*. 9th. Hoboken, NJ : Wiley, 2010. – 786 p. p.
- [3] OGATA, Katsuhiko: *Modern control engineering*. 5th. Boston : Prentice-Hall, 2010 (Prentice-Hall electrical engineering series Instrumentation and controls series). – x, 894 p. p.
- [4] SMITH, Carlos A. ; CORRIPIO, Armando B.: *Principles and practice of automatic process control*. 2nd. Wiley, 1997. – 784 p.