Simplificación de Sistemas Lineales

Para estudiar sistemas con funciones de transferencia de ordenes altos, se utilizan diversos métodos para reducir estos sistemas a ordenes menores.

Por ejemplo, si se tiene una sistema con una función de transferencia

$$G(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+30)}$$

Se puede despreciar el efecto del polo en ***s* = –30**, conservando la respuesta en estado estacionario del sistema, entonces

$$G(s) = \frac{(K/30)}{s(s+2)}$$

Simplificación de Sistemas Lineales

Un método, mas sofisticado, que intenta hacer coincidir lo máximo posible la respuesta en frecuencia de la función de transferencia de orden reducido con la respuesta en frecuencia de la función de transferencia original es el siguiente:

Sea la función de transferencia ***estable*** de orden alto

$$G_H(s) = K\frac{a_m s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \cdots + a_1 s + 1}{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + 1}, \quad m \le n$$

La función de transferencia de orden reducido es:

$$G_L(s) = K\frac{c_p s^p + \cdots + c_1 s + 1}{d_g s^g + \cdots + d_1 s + 1}, \quad p \le g < n$$

Note que la ganancia constante, ***K***, es la misma en ambos casos… ¿?

-> Esto asegura

Simplificación de Sistemas Lineales

Los coeficientes ***c*** y ***d*** se obtienen de:

$$M^{(k)}(s)=\frac{d^k}{ds^k}M(s) \quad \text{y} \quad \Delta^{(k)}(s)=\frac{d^k}{ds^k}\Delta(s)$$

donde ***M(s)*** y ***Δ(s)*** son lo polinomios del numerador y del denominador de $G_H(s)/G_L(s)$, respectivamente. También se define

$$M_{2q}=\sum_{k=0}^{2q}\frac{(-1)^{k+q}M^{(k)}(0)M^{(2q-k)}(0)}{k!(2q-k)!}, \qquad q=0, 1, 2\ldots$$

y una ecuación similar para Δ_{2q}. Las soluciones para los coeficientes ***c*** y ***d*** se obtienen igualando $M_{2q}=\Delta_{2q}$, para ***q = 0, 1, 2,...*** hasta el número requerido para resolver los coeficientes desconocidos.

Simplificación de Sistemas Lineales

Ejemplo: Obtener el Modelo Simplificado para el sistema definido por

$$G_H(s)=\frac{6}{s^3+6s^2+11s+6}=\frac{1}{1+\frac{11}{6}s+s^2+\frac{1}{6}s^3}$$

Utilizando el modelo de segundo orden

$$G_L(s)=\frac{1}{1+d_1s+d_2s^2}$$

Se obtiene

$$M(s)=1+d_1s+d_2s^2 \quad \text{y} \quad \Delta(s)=1+\frac{11}{6}s+s^2+\frac{1}{6}s^3$$

Entonces sabemos que

$$M^{(0)}(s)=1+d_1s+d_2s^2 \qquad \text{y} \quad M^{(0)}(0)=1.$$

Simplificación de Sistemas Lineales

De forma similar

$$M^{(1)}(s) = \frac{d}{ds}\left(1 + d_1 s + d_2 s^2\right) = d_1 + 2d_2 s$$

Entonces $\boldsymbol{M^{(1)}(0) = d_1}$. Continuando se obtiene

$$\begin{array}{ll} M^{(0)}(0) = 1 & \Delta^{(0)}(0) = 1 \\ M^{(1)}(0) = d_1 & \Delta^{(1)}(0) = 11/6 \\ M^{(2)}(0) = 2d_2 & \Delta^{(2)}(0) = 2 \\ M^{(3)}(0) = 0 & \Delta^{(3)}(0) = 1 \end{array}$$

Ahora se hace $\boldsymbol{M_{2q} = \Delta_{2q}}$ para $\boldsymbol{q = 1}$ y **2**. Para $\boldsymbol{q = 1}$ se tiene

$$M_2 = (-1)\frac{M^{(0)}(0)M^{(2)}(0)}{2} + \frac{M^{(1)}(0)M^{(1)}(0)}{1} + (-1)\frac{M^{(2)}(0)M^{(0)}(0)}{2}$$
$$= -d_2 + d_1^2 - d_2 = -2d_2 + d_1^2$$

Simplificación de Sistemas Lineales

Para $\boldsymbol{\Delta_2}$ se tiene

$$\Delta_2 = (-1)\frac{\Delta^{(0)}(0)\Delta^{(2)}(0)}{2} + \frac{\Delta^{(1)}(0)\Delta^{(1)}(0)}{1} + (-1)\frac{\Delta^{(2)}(0)\Delta^{(0)}(0)}{2}$$
$$= -1 + \frac{121}{36} - 1 = \frac{49}{36}$$

Igualando $\boldsymbol{M_2 = \Delta_2}$

$$-2d_2 + d_1^2 = \frac{49}{36}$$

De manera similar se obtiene para $\boldsymbol{M_4 = \Delta_4}$

$$d_2^2 = \frac{7}{18}$$

Simplificación de Sistemas Lineales

Resolviendo se obtiene d_1 **= 1.615** y d_2 **= 0.624**. (Otras posibles soluciones se descartan porque producen polos inestables).

$$G_L(s) = \frac{1}{1 + 1.615s + 0.624s^2} = \frac{1.6}{s^2 + 2.584s + 1.6}$$

Los polos de $G_H(s)$ son $s = -1, -2, -3$, mientras los polos de $G_L(s)$ están en $s = -1.029$ y -1.555. El modelo en orden reducido tiene una respuesta ligeramente sobreamortiguada con t.rta aprox. de 3 seg.

En algunos casos es deseable conservar los polos dominantes del sistema original $G_H(s)$ en el modelo reducido.

Esto se logra especificando el denominador de $G_L(s)$ como los polos dominantes de $G_H(s)$ y permitiendo el numerador de $G_L(s)$ esté sujeto a aproximaciones.

Linealización de Sistemas Dinámicos

En el contexto de control de sistemas dinámicos, linealización es un término general usado para referirse al proceso por el cual un sistema no lineal es aproximado en algún grado por un modelo lineal del proceso

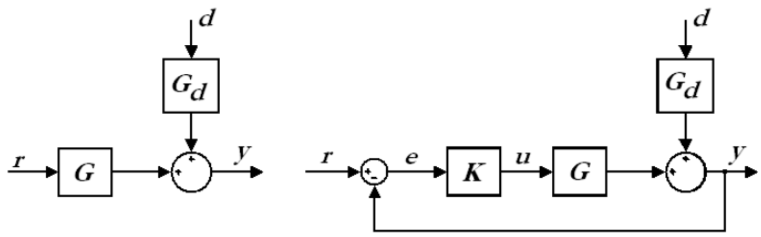
La técnica mas popular para obtener la aproximación está basada en la expansión en series de Taylor de las funciones no lineales del modelo del proceso **alrededor del punto de operación**.

Para sistemas dinámicos:

1. Identificar las funciones responsables de la no linealidad en el modelo del sistema.
2. Expandir la función no lineal como una serie de Taylor alrededor de una condición de estado estacionario (**punto de operación**) y luego truncar después del término de primer orden.
3. Reintroducir la función linealizada en el modelo, simplificar y expresar el modelo resultante en términos de **variables de desviación**.

Error en Estado Estacionario

Error en Estado Estacionario: Error presente después de que la respuesta transitoria haya decaído, permaneciendo únicamente la respuesta de estado estacionario.



- Error en Lazo Abierto: $E_o(s) = R(s) - Y(s) = [1 - G(s)]R(s)$
- Error en Lazo Cerrado: $E_o(s) = \dfrac{1}{1 + K(s)G(s)} R(s)$

Error en Estado Estacionario

Considerando una entrada paso, para el sistema de lazo abierto:

$$e_o(\infty) = \lim_{s \to 0} s[1 - G(s)]\frac{1}{s} = 1 - G(0)$$

Para el sistema de lazo cerrado:

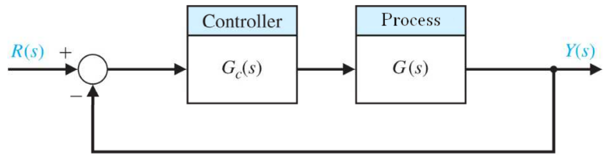
$$e_o(\infty) = \lim_{s \to 0} s\left[\frac{1}{1 + K(s)G(s)}\right]\frac{1}{s} = \frac{1}{1 + K(0)G(0)}$$

G(0) suele denominarse ganancia de DC (ganancia estática) y podría eventualmente ajustarse para ser mayor que la unidad. Entonces,

- Lazo Abierto: Error en estado estacionario de magnitud significativa.
- Lazo Cerrado: Error Pequeño.

Error en Estado Estacionario

Una de las razones más poderosas para utilizar la retroalimentación, es la reducción del error en estado estacionario.



$$E(s) = \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)} R(s)$$

El error en estado estacionario del sistema es

$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} \left[s \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)} R(s) \right]$$

Nota: Esto es válido solo para sistemas que alcanzan un estado estable!

Error en Estado Estacionario

Entrada Escalón:

$$e_{ss} = e_p = \lim_{s \to 0} \left[\frac{s(A/s)}{1 + G_c(s)G(s)} \right] = \frac{A}{1 + \lim_{s \to 0} [G_c(s)G(s)]}$$

Se define la *Constante de Error de Posición*, $\boldsymbol{K_p}$, como

$$K_p = \lim_{s \to 0} [G_c(s)G(s)]$$

y el *Error de Posición* sería

$$\boxed{e_p = \frac{A}{1 + K_p}}$$

Error en Estado Estacionario

Entrada Rampa:

$$e_{ss} = e_v = \lim_{s\to 0}\left[\frac{s(m/s^2)}{1+G_c(s)G(s)}\right] = \lim_{s\to 0}\frac{m}{s+sG_c(s)G(s)} = \lim_{s\to 0}\frac{m}{sG_c(s)G(s)}$$

Se define la *Constante de Error de Velocidad*, K_v, como

$$K_v = \lim_{s\to 0}[sG_c(s)G(s)]$$

y el *Error de Velocidad* sería

$$\boxed{e_v = \frac{m}{K_v}}$$

Error en Estado Estacionario

Entrada Parábola:

$$e_{ss} = e_a = \lim_{s\to 0}\left[\frac{s(\alpha/s^3)}{1+G_c(s)G(s)}\right] = \lim_{s\to 0}\frac{\alpha}{s^2G_c(s)G(s)}$$

Se define la *Constante de Error de Aceleración*, K_a, como

$$K_a = \lim_{s\to 0}[s^2G_c(s)G(s)]$$

y el *Error de Aceleración* sería

$$\boxed{e_a = \frac{\alpha}{K_a}}$$

Error en Estado Estacionario

Clasificación "Tipo" de Sistemas

En general, la función de transferencia de lazo tiene la forma

$$G_c(s)G(s)=\frac{K\prod_{i=1}^{M}(s+z_i)}{S^N\prod_{k=1}^{Q}(s+p_k)}$$

Los sistemas se pueden clasificar dependiendo del número de polos en el origen que posean (número de integradores puros), como sigue:

- Sistemas Tipo ***0*** $\leftrightarrow$ ***N = 0***
- Sistemas Tipo ***1*** $\leftrightarrow$ ***N = 1***
- Sistemas Tipo **2** $\leftrightarrow$ ***N* = 2 …**

Error en Estado Estacionario

Ejemplos clasificación "tipo"

1)

2)

3)

Error en Estado Estacionario

Sistemas Tipo ***0***:

$$K_p = \lim_{s\to 0}\left[\frac{K\prod_{i=1}^{M}(s+z_i)}{\prod_{k=1}^{Q}(s+p_k)}\right] = \frac{K\prod_{i=1}^{M}z_i}{\prod_{k=1}^{Q}p_k} = \text{cte} \quad \to \quad ¿e_p?$$

$$K_v = \lim_{s\to 0}\left[s\frac{K\prod_{i=1}^{M}(s+z_i)}{\prod_{k=1}^{Q}(s+p_k)}\right] = 0 \quad \to \quad ¿e_v?$$

$$K_a = \lim_{s\to 0}\left[s^2\frac{K\prod_{i=1}^{M}(s+z_i)}{\prod_{k=1}^{Q}(s+p_k)}\right] = 0 \quad \to \quad ¿e_a?$$

Error en Estado Estacionario

Sistemas Tipo ***1***:

$$K_p = \lim_{s\to 0}\left[\frac{K\prod_{i=1}^{M}(s+z_i)}{s\prod_{k=1}^{Q}(s+p_k)}\right] = \frac{K\prod_{i=1}^{M}z_i}{s\prod_{k=1}^{Q}p_k} = \infty \quad \to \quad ¿e_p?$$

$$K_v = \lim_{s\to 0}\left[s\frac{K\prod_{i=1}^{M}(s+z_i)}{s\prod_{k=1}^{Q}(s+p_k)}\right] = \text{cte} \quad \to \quad ¿e_v?$$

$$K_a = \lim_{s\to 0}\left[s^2\frac{K\prod_{i=1}^{M}(s+z_i)}{s\prod_{k=1}^{Q}(s+p_k)}\right] = 0 \quad \to \quad ¿e_a?$$

Error en Estado Estacionario

Sistemas Tipo **2**:

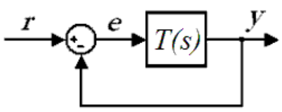
$$K_p = \lim_{s\to 0}\left[\frac{K\prod_{i=1}^{M}(s+z_i)}{s^2\prod_{k=1}^{Q}(s+p_k)}\right] = \frac{K\prod_{i=1}^{M} z_i}{s^2\prod_{k=1}^{Q} p_k} = \infty \quad \rightarrow \quad ¿e_p?$$

$$K_v = \lim_{s\to 0}\left[s\,\frac{K\prod_{i=1}^{M}(s+z_i)}{s^2\prod_{k=1}^{Q}(s+p_k)}\right] = \infty \quad \rightarrow \quad ¿e_v?$$

$$K_a = \lim_{s\to 0}\left[s^2\,\frac{K\prod_{i=1}^{M}(s+z_i)}{s^2\prod_{k=1}^{Q}(s+p_k)}\right] = \text{cte} \quad \rightarrow \quad ¿e_a?$$

Error en Estado Estacionario

Resumen Error de Estado Estacionario y Clasificación Tipo



T(s) bajo retroalimentación unitaria!

T(s)	e_p: $e_{ss\,p} = \frac{A}{1+K_p}$	e_v: $e_{ss\,v} = \frac{m}{K_v}$	e_a: $e_{ss\,a} = \frac{\alpha}{K_a}$
Type 0	kte	∞	∞
Type 1	0	kte	∞
Type 2	0	0	kte
Type 3	0	0	0

No obstante, debe recordarse el compromiso con estabilidad!

Error en Estado Estacionario

Ejemplo: Control de Dirección de un Robot Móvil

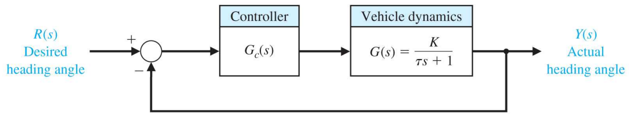


Figure: 05-19

El controlador de dirección es

$$G_c(s) = K_1 + K_2/s$$

El error en estado estacionario para una entrada paso cuando $K_2 = 0$ y $G_c(s) = K_1$ es:

$$e_p = \frac{1}{1 + K_p}$$

donde $K_p = KK_1$.

Error en Estado Estacionario

Cuando $K_2 > 0$ tenemos un sistema tipo ¿?, → ¿e_p?

Por otra parte, si la entrada es una rampa tenemos

$$e_v = \frac{m}{K_v} \quad \text{y} \quad K_v = \lim_{s \to 0}[sG_c(s)G(s)] = K_2 K$$

La respuesta transitoria del sistema a una entrada triangular es:

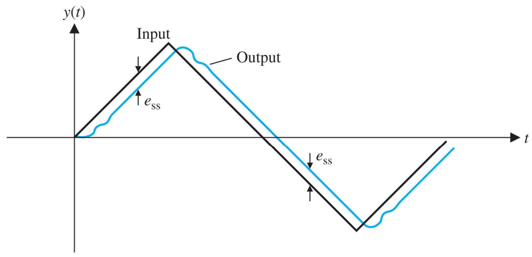


Figure: 05-20

Error en Estado Estacionario

Error en Estado Estacionario con Realimentación No Unitaria

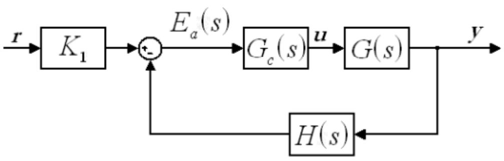
Para el caso general, el error de estado estacionario puede determinarse a partir de la expresión:

$$E(s) = R(s) - Y(s) = [1 - G_{LC}(s)]R(s)$$

La expresión de error está dada en términos de $G_{LC}(s)$, de manera que puede aplicarse al caso sin o con retroalimentación unitaria.

Error en Estado Estacionario

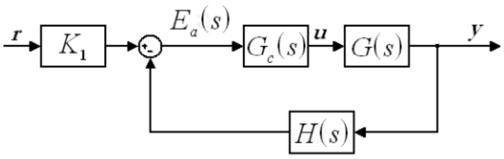
Ejemplo: Error en Estado Estacionario



Para el sistema anterior, determinar el valor apropiado de K_1 y calcular el error de posición. Cuando

$$G_c(s) = 40 \quad , \quad G(s) = \frac{1/5}{s+1} \quad \text{y} \quad H(s) = \frac{10}{s+5} = \frac{2}{0.2s+1}$$

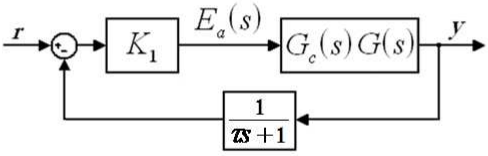
Error en Estado Estacionario



Para el caso

$$H(s) = \frac{K_2}{\tau s + 1} \quad \rightarrow \quad \lim_{s \to 0} H(s) = K_2$$

Si se fija $\boldsymbol{K_2 = K_1}$, entonces se tiene el siguiente sistema



Error en Estado Estacionario

El Error del sistema es ***E(s)***, donde $\boxed{E(s) = R(s) - Y(s) = [1 - G_{LC}(s)]R(s)}$

$$G_{LC}(s) = \frac{K_1 G_c(s) G(s)}{1 + H'(s) G_c(s) G(s)} = \frac{K_1 G_c(s) G(s)(\tau s + 1)}{K_1 G_c(s) G(s) + \tau s + 1}$$

$$E(s) = \frac{1 + \tau s\left(1 - K_1 G_c(s) G(s)\right)}{K_1 G_c(s) G(s) + \tau s + 1} R(s)$$

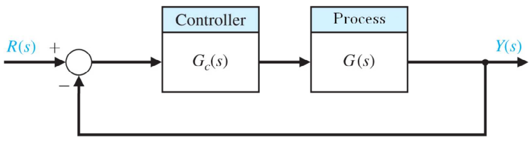
Haciendo $\boldsymbol{K_1 = K_2 = 2}$, se tiene ante entrada paso unitario,

$$e_p = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} s \frac{A}{s} \frac{1 + \tau s\left(1 - K_1 G_c(s) G(s)\right)}{K_1 G_c(s) G(s) + \tau s + 1} = \frac{A[1 - \tau K_1 \lim_{s \to 0} s G_c(s) G(s)]}{1 + K_1 \lim_{s \to 0} G_c(s) G(s)}$$

$$e_p = \lim_{s \to 0} sE(s) = \frac{A[1 - \tau K_1 \lim_{s \to 0} s G_c(s) G(s)]}{1 + K_1 \lim_{s \to 0} G_c(s) G(s)} = \frac{1}{1 + 2(40)(1/5)} = \frac{1}{17} \Rightarrow e_p(\%) = 5.9\%$$

Error en Estado Estacionario

Ejercicios: Determinar e_{ssp}



En donde $T(s) = G_c(s).G(s)$

Nótese que $T(s) \neq G_{LC}(s)$!!!

1) $T(s) = \dfrac{K}{s^2(s+12)}$

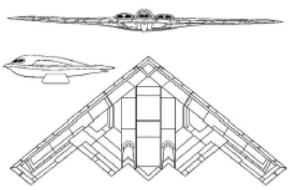
2) $T(s) = \dfrac{K(s+3.15)}{s(s+1.5)(s+0.5)}$

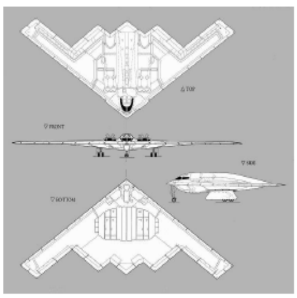
Concepto de Estabilidad

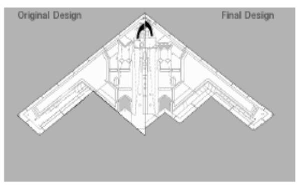
Cuando se considera el análisis de sistemas realimentados, la *estabilidad* es la característica más importante.

Muchos sistemas físicos son intrínsecamente inestables en lazo abierto y sin un control realimentado activo no pueden funcionar.

Ejemplo: Bombardero B–2.







Concepto de Estabilidad

La caracterización de *estable* o *inestable* de un sistema en lazo cerrado está dado por:

Estabilidad Absoluta → Define si el sistema es ***estable*** o ***inestable***.

- Es necesario definir un criterio (***BIBO***, Posición de las raíces de la ecuación característica).
- Se utilizan diferentes métodos (Plano '*s*', respuesta en frecuencia '*jw*', dominio del tiempo).

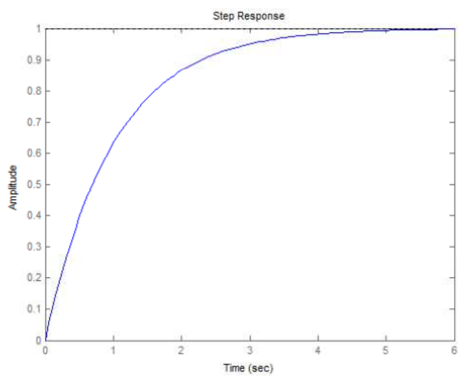
Estabilidad Relativa → Si el sistema es estable, entonces se busca definir el *grado de estabilidad* del mismo (eje desplazado, márgenes de fase y ganancia).

Concepto de Estabilidad

Sistemas Estables, Inestables y Marginalmente Estables:

Un sistema, según el criterio ***BIBO (Bounded Input – Bounded Output)***, se define como:

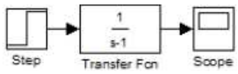
Estable: Si tiene una respuesta con magnitud limitada en presencia de una entrada o perturbación exógena de magnitud limitada.

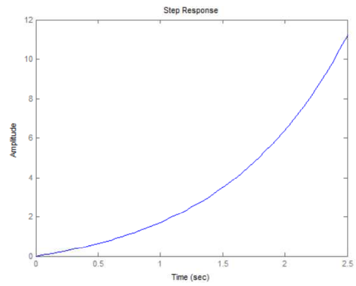


No es un criterio infalible → Ejemplo: Cancelación de polos y ceros.

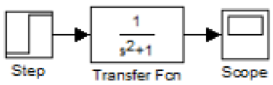
Concepto de Estabilidad

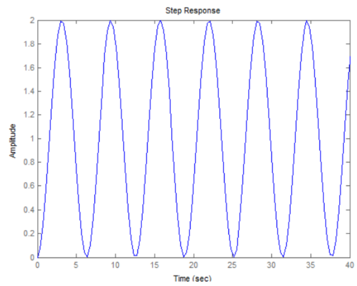
Inestables: Si se tiene una respuesta no acotada en presencia de una entrada o perturbación exógena de magnitud limitada.





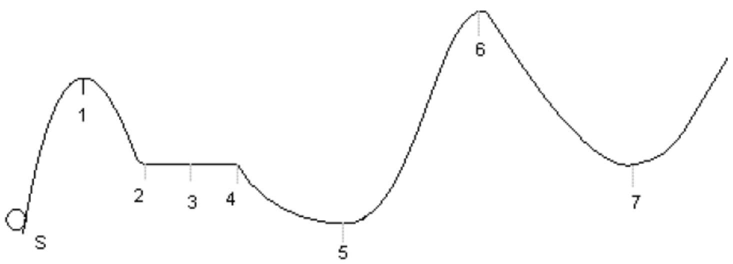
Marginalmente Estable: Si presenta oscilaciones sostenidas en presencia de una entrada acotada.





Concepto de Estabilidad

Analogía:



La esfera puede rodar libremente y se puede detener en los puntos indicados y cada uno de ellos se define como ***puntos de equilibrio.***

- Los puntos ***1*** y ***6*** se definen como puntos de equilibrio inestables.
- Los puntos **5** y ***7*** se definen como puntos de equilibrio estables.
- El punto **3** se define como punto naturalmente estable.

Concepto de Estabilidad

Para los sistemas lineales, la estabilidad está definida a partir de la ubicación de los polos de la función de transferencia en lazo cerrado.

La función se puede expresar de la siguiente forma:

$$T(s)=\frac{p(s)}{q(s)}=\frac{K\prod_{i=1}^{M}(s+z_i)}{s^N\prod_{k=1}^{Q}(s+\sigma_k)\prod_{m=1}^{R}\left[s^2+2\alpha_m+(\alpha_m^2+\omega_m^2)\right]}$$

Donde $\boldsymbol{q(s)=\Delta(s)}$ es la ecuación característica.

- Para que exista ***estabilidad***, todos los polos de la función de transferencia del sistema deben tener parte real negativa.
- Cuando los polos tienen parte real positiva, el sistema es ***inestable***.
- Cuando los polos se posicionan sobre el eje imaginario, el sistema es ***marginalmente estable***, y presenta oscilaciones sostenidas mientras la entrada no tenga componentes en la frecuencia natural.

Criterio de Estabilidad de Routh - Hurwitz

Éste método considera la ecuación característica del sistema para dar respuesta al problema de estabilidad absoluta, sin calcular las raíces.

$$\Delta(s)=q(s)=a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0=0$$

A partir de $\boldsymbol{q(s)}$ se verifica si existen las raíces en la parte derecha del semiplano complejo.

El ***Criterio de Routh-Hurwitz*** permite verificar si todas las raíces de un polinomio tienen parte real negativa, siendo este una condición necesaria y suficiente para la estabilidad de sistemas lineales.

Criterio de Estabilidad de Routh - Hurwitz

Algoritmo de Routh – Hurwitz:

Se parte de la ecuación característica del sistema

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

Se construye la tabla de Routh- Hurwitz de la siguiente forma

$$\begin{array}{c|ccc} s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ s^{n-2} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} \\ s^{n-3} & c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s^0 & h_{n-1} & & \end{array}$$

Criterio de Estabilidad de Routh - Hurwitz

donde

$$b_{n-1} = \frac{(a_{n-1})(a_{n-2}) - a_n(a_{n-3})}{a_{n-1}} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$b_{n-3} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix} \qquad c_{n-3} = \frac{-1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix}$$

Y así sucesivamente para los demás coeficientes.

El criterio de Routh- Hurwitz establece que el número de raíces de $\boldsymbol{q(s)}$ con partes reales positivas es igual al número de cambios de signo de la primera columna de la tabla.

Es decir, para que un sistema sea estable se requiere que no haya cambios de signo en la primera columna.

Criterio de Estabilidad de Routh - Hurwitz

Configuraciones de la Primera Columna:

Se pueden presentar cuatro casos diferentes en la primera columna de la tabla, que determina variaciones en el cálculo de los diferentes coeficientes.

- *Caso 1:* Ningún elemento en la primera columna es cero.
- *Caso 2:* Hay un cero en la primera columna y algunos de los coeficientes asociados a la fila de este elemento son diferentes de cero.
- *Caso 3:* Hay un cero en la primera columna y los otros coeficientes de fila asociada a este elemento son también nulos.
- *Caso 4:* Como el tercer caso, pero con raíces repetidas sobre el eje $j\omega$.

Criterio de Estabilidad de Routh - Hurwitz

Caso 1: Ningún elemento en la primera columna es cero.

Ejemplo 1: Sistema de Segundo Orden.
Ecuación característica

$$q(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

Tabla de Routh – Hurwitz

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & a_2 & a_0 \\ s^1 & a_1 & 0 \\ s^0 & b_1 & 0 \end{array} \qquad b_1 = \frac{a_1 a_0 - 0 a_2}{a_1} = \frac{-1}{a_1}\begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_1 & 0 \end{vmatrix} = a_0$$

El requisito para un sistema de segundo orden es que todos sus coeficientes sean positivos, o todos sean negativos.

Criterio de Estabilidad de Routh - Hurwitz

Ejemplo 2: Sistema de Tercer Orden

Ecuación característica:

$$q(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s^1 + a_0$$

Tabla de Routh – Hurwitz

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & a_3 & a_1 \\ s^2 & a_2 & a_0 \\ s^1 & b_1 & 0 \\ s^0 & c_1 & 0 \end{array} \qquad b_1 = \frac{a_2 a_1 - a_0 a_3}{a_2} \quad \text{y} \quad c_1 = \frac{b_1 a_0}{b_1} = a_0$$

Para que el sistema sea estable es necesario que los coeficientes sean positivos y cumplir la condición $a_2 a_1 > a_0 a_3$. Si $a_2 a_1 = a_0 a_3$, el sistema es marginalmente estable.

Criterio de Estabilidad de Routh - Hurwitz

Caso 2: Hay un cero en la primera columna y algunos de los coeficientes asociados a la fila de este elemento son diferentes de cero.

Consideremos el siguiente polinomio característico:

$$q(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10$$

Tabla de Routh – Hurwitz

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 2 & 11 \\ s^4 & 2 & 4 & 10 \\ s^3 & \varepsilon & 6 & 0 \\ s^2 & c_1 & 10 & 0 \\ s^1 & d_1 & 0 & 0 \\ s^0 & 10 & 0 & 0 \end{array}$$

$$c_1 = \frac{4\varepsilon - 12}{\varepsilon} = \frac{-12}{\varepsilon}$$

$$d_1 = \frac{6c_1 - 10\varepsilon}{c_1} \to 6$$

El sistema es inestable debido a que hay un numero negativo grande en la primera columna, $-12/\varepsilon$.

Criterio de Estabilidad de Routh - Hurwitz

Ejemplo 3: Sistema Inestable

Ecuación característica:

$$q(s) = s^4 + s^3 + s^2 + s + K$$

Tabla de Routh – Hurwitz

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 1 & K \\ s^3 & 1 & 1 & 0 \\ s^2 & \varepsilon & K & 0 \\ s^1 & c_1 & 0 & 0 \\ s^0 & K & 0 & 0 \end{array}$$

$$c_1 = \frac{\varepsilon - K}{\varepsilon} \to \frac{-K}{\varepsilon}$$

Si ***K* > *0*** → Sistema Inestable.

Si ***K* < *0*** → Sistema Inestable.

Entonces el sistema es inestable para todos los valores de ***K***.

Criterio de Estabilidad de Routh - Hurwitz

Caso 3: Hay un cero en la primera columna y los otros coeficientes de fila asociada a este elemento son también nulos.

Consideremos el siguiente polinomio característico:

$$q(s) = s^3 + 2s^2 + 4s + K$$

Tabla de Routh – Hurwitz

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 4 \\ s^2 & 2 & K \\ s^1 & \dfrac{8-K}{2} & 0 \\ s^0 & K & 0 \end{array}$$

Para que el sistema sea estable se necesita que

***0* < *K* < *8*.**

Cuando ***K* = *8*** el sistema tiene estabilidad marginal y además presenta una fila ceros en la matriz, por lo tanto se necesita de un polinomio auxiliar para solucionar esto.

Criterio de Estabilidad de Routh - Hurwitz

Polinomio Auxiliar

$$U(s) = 2s^2 + Ks^0 = 2\left(s^2 + 4\right) = 2(s + j2)(s - j2)$$

Por lo tanto, cuando ***k* = *8*** los factores de ***q*(*s*)** son:

$$q(s) = (s + 2)(s + j2)(s - j2)$$

El sistema es ***marginalmente estable***.

Criterio de Estabilidad de Routh - Hurwitz

Caso 4: Como el tercer caso, pero con raíces repetidas sobre el eje $j\omega$.
Consideremos el siguiente polinomio característico:

$$q(s) = (s + 1)(s + j)(s - j)(s + j)(s - j) = s^5 + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s + 1$$

Tabla de Routh – Hurwitz

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 2 & 1 \\ s^4 & 1 & 2 & 1 \\ s^3 & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ s^2 & 1 & 1 & \\ s^1 & \varepsilon & 0 & \\ s^0 & 1 & & \end{array}$$

$$\varepsilon \approx 0$$

Dado que no hay cambio de sigo se pensaría que el sistema es marginalmente estable, sin embargo los polinomios auxiliares en s^2 y s^4, $(s^2 + 1)$ y $(s^2 + 1)^2$ respectivamente, muestran raíces repetidas en el eje jw.

Criterio de Estabilidad de Routh - Hurwitz

Ejemplo 4: Control de un Robot

El sistema es un robot de 6 extremidades, que puede llegar a ser inestable u oscilatorio.

La ecuación característica es:

$$q(s) = s^5 + s^4 + 4s^3 + 24s^2 + 3s + 63$$

Tabla de Routh – Hurwitz

s^5	1	4	3
s^4	1	24	63
s^3	-20	-60	0
s^2	21	63	0
s^1	0	0	0

Polinomio Auxiliar:

$$U(s) = 21s^2 + 63 = 21\left(s^2 + 3\right)$$

$$U(s) = 21\left(s + j\sqrt{3}\right)\left(s - j\sqrt{3}\right)$$

Para examinar las raíces restantes se divide ***q*(*s*)** entre ***U*(*s*)**

$$\frac{q(s)}{s^2 + 3} = s^3 + s^2 + s + 21$$

Criterio de Estabilidad de Routh - Hurwitz

Tabla de Routh – Hurwitz

s^3	1	1
s^2	1	21
s^1	-20	0
s^0	21	0

El cambio de signo indica la presencia de dos raíces en el semiplano derecho del plano, dichas raíces son $s = 1 \pm j\sqrt{6}$.

Criterio de Estabilidad de Routh - Hurwitz

Ejemplo 5: Control de Soldadura

El sistema se puede representar mediante el siguiente diagrama:

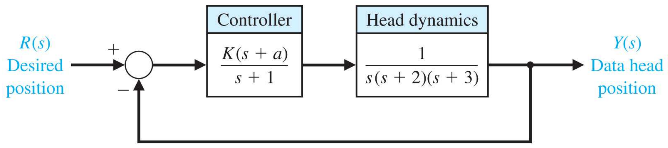


Figure: 06-05

La ecuación característica del sistema es:

$$1 + G(s) = 1 + \frac{K(s+a)}{s(s+1)(s+2)(s+3)} = 0$$

$$q(s) = s^4 + 6s^3 + 11s^2 + (K+6)s + Ka$$

Criterio de Estabilidad de Routh - Hurwitz

Tabla de Routh – Hurwitz

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 11 & Ka \\ s^3 & 6 & (K+6) & \\ s^2 & b_3 & Ka & \\ s^1 & c_3 & & \\ s^0 & Ka & & \end{array}$$

$$b_3 = \frac{60-K}{6}$$

$$c_3 = \frac{b_3(K+6) - 6Ka}{b_3}$$

El coeficiente c_3 establece el intervalo aceptable de K y a. Mientras que en b_3 se requiere que K sea menor que 60. Si $c_3 \geq 0$, se obtiene que:

$$(K-60)(K+6) + 36Ka \leq 0 \;\rightarrow\; a < \frac{(60-K)(K+6)}{36K},\; a > 0$$

Criterio de Estabilidad de Routh - Hurwitz

Criterio de estabilidad de Routh – Hurwitz

n	Ecuación Característica	Criterio
2	$s^2 + bs + 1 = 0$	$b > 0$
3	$s^3 + bs^2 + cs + 1 = 0$	$bc - 1 > 0$
4	$s^4 + bs^3 + cs^2 + ds + 1 = 0$	$bcd - d^2 - b^2 > 0$
5	$s^5 + bs^4 + cs^3 + ds^2 + es + 1 = 0$	$bcd + b - d^2 - b^2e > 0$
6	$s^6 + bs^5 + cs^4 + ds^3 + es^2 + fs + 1 = 0$	$(bcd + bf - d^2 - b^2e)e + b^2c - bd - bc^2f - f^2 + bfe + cdf > 0$

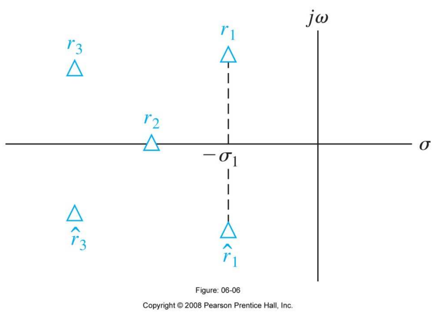
Estabilidad Relativa de Sistemas de Control Realimentados

El criterio de Routh – Hurwitz da una respuesta parcial al problema de la estabilidad y confirma la estabilidad absoluta. Es necesario determinar la estabilidad relativa del sistema.

La ***Estabilidad Relativa*** se puede definir:

- La propiedad medida por la parte real relativa de cada raíz o par de raíces.

- Como función de los coeficientes relativos de amortiguamiento ζ, de cada par de raíces.



Un primer método para hallar la estabilidad relativa, es extender el criterio de Routh – Hurwitz al plano ***s***.

Estabilidad Relativa de Sistemas de Control Realimentados

Ejemplo: Eje Desplazado

Consideremos la siguiente ecuación característica:

$$q(s) = s^3 + 4s^2 + 6s + 4$$

Inicialmente se supone $s_n = s + 2$ y se obtiene una tabla de Routh – Hurwitz si ceros en la primera columna.

Por otra parte si se hace $s_n = s + 1$ se obtiene:

$$\begin{array}{c|cc} s_n^3 & 1 & 1 \\ s_n^2 & 1 & 1 \\ s_n^1 & 0 & 0 \\ s_n^0 & 1 & 0 \end{array}$$

Concluyendo que hay dos raíces en el eje imaginario desplazado, las cuales se pueden obtener del polinomio auxiliar

$$U(s_n) = s_n^2 + 1 = (s_n + j)(s_n - j) = (s + 1 + j)(s + 1 - j)$$

Estabilidad Relativa de Sistemas de Control Realimentados

Ejemplo de Diseño: Sistema de lectura de una Unidad de Disco

Consideremos el siguiente sistema:

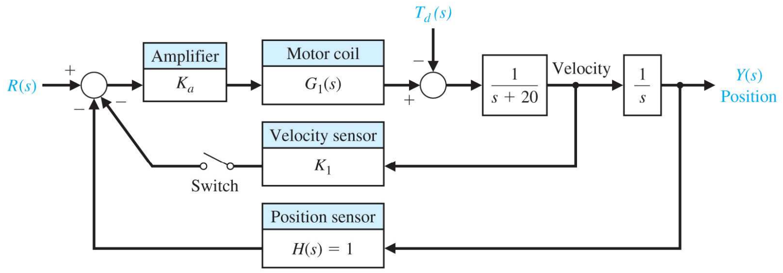


Figure: 06-28

Cuya función de transferencia de lazo cerrado es

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_a G_1(s) G_2(s)}{1 + K_a G_1(s) G_2(s)}$$

Estabilidad Relativa de Sistemas de Control Realimentados

donde

$$G_1(s) = \frac{5000}{s+1000} \quad y \quad G_2(s) = \frac{1}{s(s+20)}$$

La ecuación característica correspondiente es

$$s(s+20)(s+1000) + 5000Ka = s^3 + 1020s^2 + 20000s + 5000K_a = 0$$

Mediante el criterio de Routh – Hurwitz, procedemos a analizar la estabilidad del sistema:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 20000 \\ s^2 & 1020 & 5000K_a \\ s^1 & b_1 & 0 \\ s^0 & 5000K_a & 0 \end{array}$$

$$b_1 = \frac{(20000)1020 - 5000K_a}{1020}$$

$$\boxed{0 < K_a < 4080}$$

Estabilidad Relativa de Sistemas de Control Realimentados

Ahora se adiciona la realimentación de la velocidad cerrando el interruptor en el sistema. Su función de transferencia es:

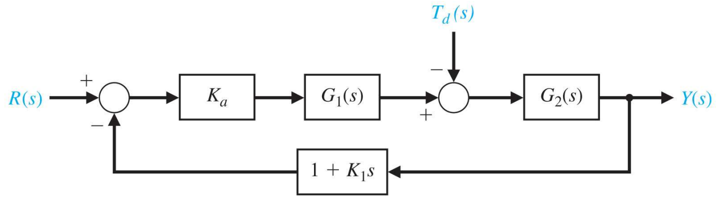


Figure: 06-29

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_a G_1(s) G_2(s)}{1 + [K_a G_1(s) G_2(s)](1 + K_1 s)}$$

Donde se puede observar que el factor de realimentación es igual a ***1 + K₁s***.

Estabilidad Relativa de Sistemas de Control Realimentados

La ecuación característica es

$$1+\left[K_a G_1(s) G_2(s)\right](1+K_1 s)=0$$

$$s(s+20)(s+1000)+5000K_a(1+K_1 s)=0$$

$$s^3+1020s^2+\left[20000+5000K_aK_1\right]s+5000K_a=0$$

Tabla de Routh – Hurwitz

s^3	1	$20000+5000K_aK_1$
s^2	1020	$5000K_a$
s^1	b_1	0
s^0	$5000K_a$	0

$$b_1=\frac{1020(20000+5000K_aK_1)-5000K_a}{1020}$$

Para que el sistema sea estable, debe haber una pareja (K_a,K_1) tal que el elemento $b_1>0$ y $K_a>0$. Esto ocurre cuando $K_1=0{,}05$ y $K_a=100$.

Estabilidad Relativa de Sistemas de Control Realimentados

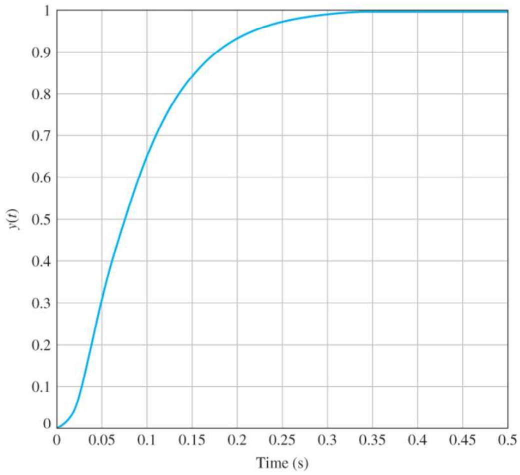
Ahora se puede implementar el sistema en Matlab mediante el siguiente código:

```
Ka=100; K1=0.05;
ng1=[5000]; dg1=[1 1000]; sys1=tf(ng1,dg1);
ng2=[1]; dg2=[1 20 0]; sys2=tf(ng2,dg2);
nc=[K1 1]; dc=[0 1]; sysc=tf(nc,dc);
syso=series(Ka*sys1,sys2);
sys=feedback(syso,sysc); sys=minreal(sys);
t=[0:0.001:0.5];
y=step(sys,t); plot(t,y)
ylabel('y(t)'),xlabel('Time (s)'),grid
```

Select the velocity feedback gain K_1 and amplifier gain K_a.

Estabilidad Relativa de Sistemas de Control Realimentados

Respuesta transitoria del sistema con realimentación de velocidad, con K_a = ***100*** y K_1 = ***0,05***.

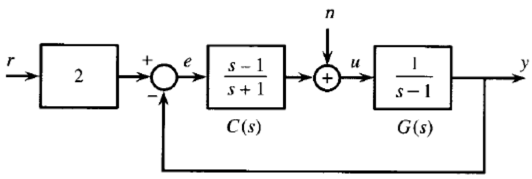


En la gráfica se puede ver que el tiempo de asentamiento (**2%**) es aproximadamente ***260*ms** y el porcentaje de sobrepaso es cero.

Estabilidad Total

En el diseño de sistemas de control el principal requisito es la estabilidad de la función de transferencia $G_0(s)$. Sin embargo esto no garantiza un buen desempeño.

Ejemplo:



$$G_o(s) = 2 \times \frac{\frac{s-1}{s+1} \cdot \frac{1}{s-1}}{1 + \frac{s-1}{s+1} \cdot \frac{1}{s-1}} = 2 \times \frac{\frac{1}{s+1}}{1 + \frac{1}{s+1}} = \frac{2}{s+2}$$

¿Desempeño?

Estabilidad Total

Por otra parte

$$G_{yn}(s) = \frac{\dfrac{1}{s-1}}{1+\dfrac{s-1}{s+1}\cdot\dfrac{1}{s-1}} = \frac{\dfrac{1}{s-1}}{1+\dfrac{1}{s+1}} = \frac{s+1}{(s-1)(s+2)}$$

¿Desempeño?

Definición: Se dice que un sistema es ***totalmente estable*** si las funciones de transferencia de cada par posible de entrada-salida son estables.

Si los polos de $G_0(s)$ son iguales en número a todos los polos de los subsistemas, se dice que el sistema en LC está caracterizado por $G_0(s)$.

La cancelación de polos inestables no está permitida. Solo se pueden cancelar polos estables dentro de la región deseada para los polos.

Términos y Conceptos

- Modelos matemáticos
- Transformada de Laplace
- Tiempo muerto
- Fracciones parciales
- Transformada Inversa de Laplace
- Diagrama de bloques
- Función de transferencia
- Desempeño
    - Respuesta temporal
    - Error de estado estacionario
    - Estabilidad

Referencias

1. Smith, C. & Corripio, A. *Principles and Practice of Automatic Process Control*, 2nd Ed. Wiley, 1997.

2. Ogata, K., *Ingeniería de Control Moderna,* Prentice Hall, 1998.

3. Kuo, B., *Automatic Control Systems*, 7th Ed., Prentice Hall, 1995.

4. Dorf, R. & Bishop, R. *Modern Control Systems*, 10th Ed. Upper Saddle River NJ: Pearson Prentice Hall, 2005.