

## Capítulo 1

# CONTROL PID DE MÓDULOS ANALÓGICOS

### 1.1 INTRODUCCIÓN

El objetivo de esta práctica es el estudio de las características temporales y frecuenciales de sistemas de primer y segundo orden, integradores etc. (tanto en bucle abierto como realimentados) , así como el diseño de controladores clásicos: proporcional (**P**), proporcional+integral (**PI**) proporcional+derivativo (**PD**) y proporcional+integral+derivativo (**PID**).

Con esa finalidad se dispone de unos dispositivos de simulación analógicos cuyo comportamiento se asimila al de sistemas de primer orden e integradores, así como al de controladores de los distintos tipos anteriormente mencionados.

Los aspectos básicos que debe desarrollar el alumno en el laboratorio son los siguientes:

1. Estudio e identificación de la respuesta temporal de un sistema de primer orden en bucle abierto.
2. Análisis de la respuesta frecuencial de un sistema de primer orden en bucle abierto.
3. Estudio y caracterización de la respuesta temporal de un sistema de primer orden en serie con un integrador en bucle cerrado.
4. Análisis de la respuesta frecuencial de un sistema de segundo orden subamortiguado.
5. Diseño de controladores tipo **PID** por las reglas de Ziegler-Nichols.
6. Diseño de controladores tipo **PID** por métodos analíticos o técnicas de cancelación polo-cero.

## 7. Respuesta a las preguntas básicas que se exponen al final del capítulo.

Para generar las señales de prueba (escalones, rampas, señales senoidales, etc.) se dispone de generadores de señal de frecuencia variable. Cuando se quiera introducir un escalón a la entrada de uno de los módulos se puede elegir una onda cuadrada de frecuencia mínima para que le de tiempo al sistema en su evolución a alcanzar el régimen permanente antes del siguiente cambio (lo mismo es aplicable a la rampa). Para analizar la evolución de las variables del sistema (en general entrada y salida) se utilizarán osciloscopios, escalándolos adecuadamente y situando las sondas en los puntos cuya evolución temporal se desee analizar.

A lo largo de la descripción de la práctica se van introduciendo a modo de ejemplo resultados experimentales obtenidos con los módulos para unos valores determinados de los parámetros que definen la evolución del sistema. El alumno puede realizar la práctica con dichos valores o bien variándolos (recomendable). Los resultados obtenidos pueden diferir sensiblemente de un módulo a otro para la misma elección de los parámetros de diseño.

## 1.2 REQUERIMIENTOS DE LA PRÁCTICA

- Módulo de simulación analógico de sistemas de primer orden e integradores (Fig. 1.1) de LEYBOLD DIDACTIC, número 734 09 (*Simulated Control System*).
- Módulo de simulación analógico de controladores **PID** (Fig. 1.2) de LEYBOLD DIDACTIC, número 734 06 (*PID Controller*).
- Generador de señal.
- Osciloscopio.
- Cables de conexión.
- Fuente de alimentación a +15, 0 y -15 V. (se pueden utilizar las de la marca FEEDBACK-PS150E).

## 1.3 BREVE DESCRIPCIÓN DE LOS EQUIPOS

Para el correcto funcionamiento de los módulos de simulación es preciso alimentarlos a +15, -15 y 0 V. (los operacionales internos necesitan tensiones positivas y negativas).

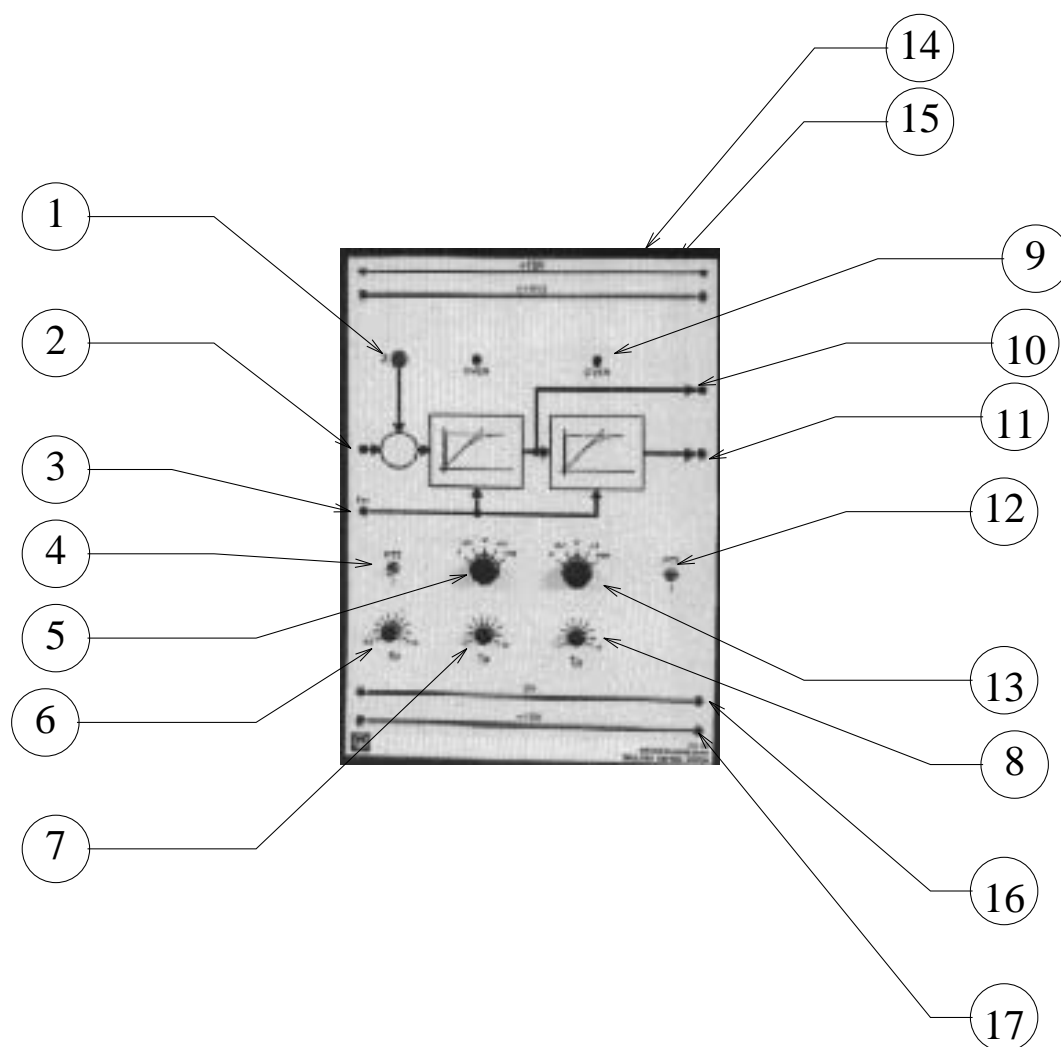


Figura 1.1: Módulo de simulación de sistemas analógicos

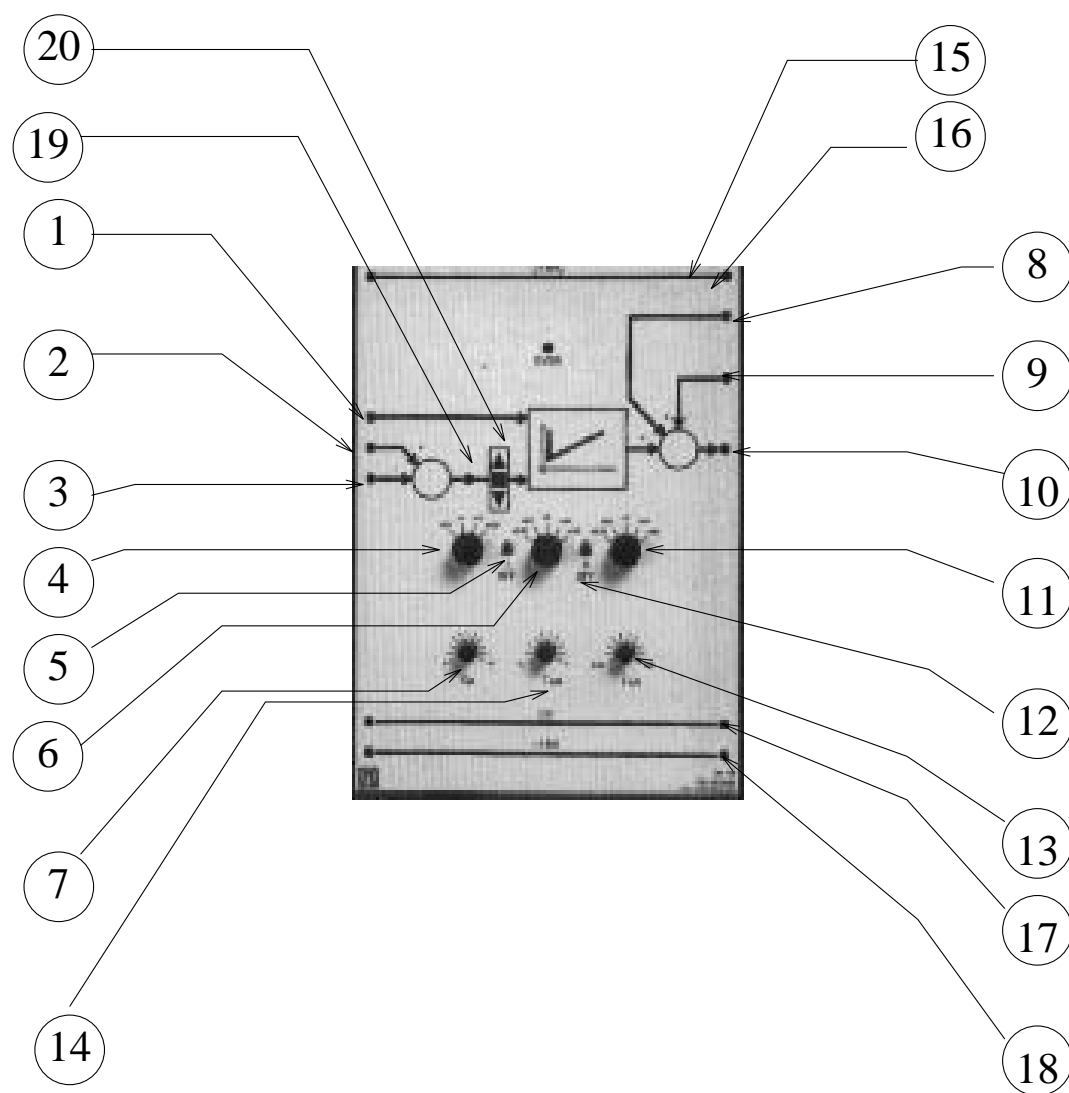


Figura 1.2: Módulo de control **PID** analógico

### 1.3.1 Módulo de simulación de sistemas analógicos

#### Descripción técnica

1. Rango de tensión de la señal:  $-10... + 10$  V.
2. Este módulo puede ser utilizado como simulador de sistemas tipo proporcional (**P**), de primer orden (**PT1**, **PT2**) e integradores (**I**, **I<sup>2</sup>**).
3. Las variables de perturbación pueden ser alimentadas mediante un pulsador en la entrada **Z** (nodo (1) de la Fig. 1.1).
4. Poseen indicadores de saturación.
5. Poseen una entrada adicional **I<sub>OFF</sub>** para efectuar la desconexión o descarga de los integradores.
6. Los rangos de las variables características son: ganancia  $K_s : 0.2...1.5$ ; constantes de tiempo  $\tau_{1,2} : 0.1\text{ s}...1000\text{ s}$ .

#### Descripción funcional

El sistema modular está representado en la Fig. 1.1. Se resumen a continuación sus características funcionales principales:

1. Contiene básicamente dos elementos simuladores de sistemas de primer orden que pueden ser también conectados como integradores actuando sobre los interruptores (4) y (12).
2. El coeficiente de acción proporcional del sistema controlado  $K_s$  puede ser ajustado con el botón (6) desde 0.2 (atenuación) a 1.5 (amplificación).
3. Las constantes de tiempo, medidas en segundos, se pueden ajustar (ajuste grueso) con los botones (5) y (13) ( $\times 0$ ,  $\times 0.1$ ,  $\times 1$ ,  $\times 10$ ,  $\times 100$ ) y el ajuste fino con (7) y (8) desde 1 a 10.
4. La variable de control  $u$  se introduce por el punto (2) como entrada. Una perturbación en forma de pulso de 2 V (DC) se obtiene pulsando el botón (1).
5. Los indicadores marcados como **OVER** (9) indican si los elementos de simulación se han saturado. Esto es importante cuando están operando como integradores.
6. La señal de *reset* de los integradores está accesible en la entrada **I<sub>OFF</sub>** (3) donde se les puede dar una condición (voltaje) inicial.
7. Las salidas de los módulos de simulación pueden ser medidas en (10) (un solo elemento) y (11) (dos elementos en cascada).
8. La alimentación viene dada por: 15 V. (14); 0 V. (16);  $-15$  V. (17).

### 1.3.2 Módulo de controladores PID analógicos

#### Descripción técnica

1. Controlador compacto estándar.
2. Rango de tensión de la señal:  $-10... + 10$  V.
3. 3 entradas con nodo de suma y nodo de prueba.
4. Indicador del rango de operación frente al controlador.
5. Posee un nodo de suma a la salida para añadir o sustraer señales de tensión.
6. Los controladores tipo **I** (acción integral) y **D** (acción derivada) pueden ser desconectados independientemente con el fin de obtener toda la gama (**P**, **PI**, **PD**, **PID**).
7. Los rangos de las variables características son: constante proporcional  $K_p$  : 0...1000; tiempo derivativo  $T_v$  ( $T_d$  en la notación seguida): 0.2 ms...20 s; tiempo integral  $T_n$  ( $T_i$  en la notación seguida): 1 ms...100 s (todos con ajuste fino y grueso, además de indicador de saturación).

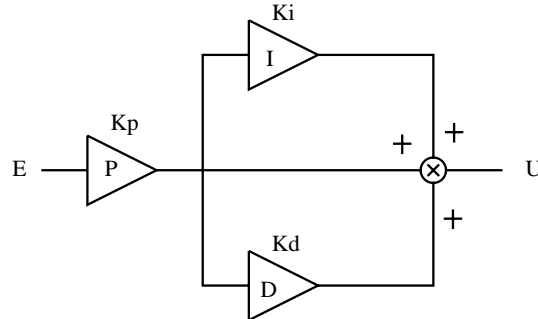
**Nota:** En lo que sigue, y dada la notación empleada en los módulos, se denotará indistintamente la constante de tiempo integral como  $T_i = T_n$  y la de tiempo derivativo como  $T_d = T_v$ .

#### Descripción funcional

Para el módulo **PID** (Fig. 1.2), al igual que con el módulo de simulación, se describen a continuación sus características funcionales principales:

1. Contiene los siguientes elementos:
  - (a) Un controlador proporcional (**P**), otro integral (**I**) y otro derivativo (**D**).
  - (b) Una entrada negativa (3) y otra positiva (2), que constituye un amplificador diferencial a la entrada del controlador. La señal de error puede ser medida en (19).
  - (c) Un indicador del signo de la señal de error (20).
  - (d) Un punto de suma (8) y otro de resta (9) a la salida.
2. La ganancia del controlador proporcional  $K_p$  puede ser ajustada - ajuste grueso - en pasos  $\times 0.1, \times 1, \times 10, \times 100$  con el botón (4) y de modo fino mediante un ajuste continuo actuando sobre el botón (7) de 0 a 10.

3. La acción integral, descrita por el tiempo integral  $T_n$ , medido en segundos, puede ser activada con el interruptor **I/OFF** (5). El tiempo integral se puede ajustar - ajuste grueso - con el botón (6) en pasos de  $\times 0.01, \times 0.1, \times 1, \times 10, \times 100$  y el ajuste fino viene dado por el botón (14) de 0.1 a 1.
4. La acción derivada, descrita por el tiempo derivativo  $T_v$ , medido en segundos, puede ser activada con el interruptor **D/OFF** (12). El ajuste grueso se consigue actuando sobre el botón (11) y el ajuste fino sobre el (13) desde 0.02 hasta 0.2.
5. La señal de referencia se introduce por el punto (2), pudiendo utilizarse la entrada (3) para realimentar la salida del sistema controlado y compararla con la referencia (bucle de realimentación). El indicador (20) señala si la salida actual del sistema es mayor o menor que la referencia.
6. Las entradas (8) y (9) en el punto de suma a la salida del controlador permiten la conexión de cargas para el estudio del efecto de las mismas en el bucle de realimentación. Con la entrada (1) se puede descargar el término integral o darle un valor inicial (carga del condensador interno).
7. La configuración del controlador es la que se muestra en la Fig. 1.3. Como puede observarse, la constante proporcional es común a los términos proporcional, integral y derivativo ( $G_{PID}(s) = K_p(1 + 1/(T_i s) + T_d s) = K_p(1 + 1/(T_n s) + T_v s)$ ).
8. La alimentación viene dada por: 15 V. (15); 5 V. (16); 0 V. (17); -15 V. (18).

Figura 1.3: Configuración del controlador **PID**

## 1.4 ESTUDIO DE LOS SISTEMAS A CONTROLAR

### 1.4.1 Sistema de primer orden

En este apartado se trata de caracterizar las respuestas temporal y frecuencial de un sistema de primer orden. La respuesta temporal se puede estudiar analizando la evolución del sistema tras someterlo a una entrada en escalón. Dicha respuesta se puede caracterizar por los llamados tiempos de retraso ( $\tau_d$ ), constante de tiempo del sistema ( $\tau$ ) y ganancia estática ( $K$ ) que, como aparece en la Fig. 1.4, se definen:

- $\tau_d$ : Tiempo transcurrido desde que se da el escalón a la entrada hasta que la salida alcanza el 5 % del valor final de la respuesta.
- $\tau$ : Tiempo transcurrido desde  $\tau_d$  hasta que se alcanza el 63 % del valor final de la respuesta.
- $K = Y/X$ , donde  $Y$  es el valor final de la respuesta y  $X$  es el valor del escalón.

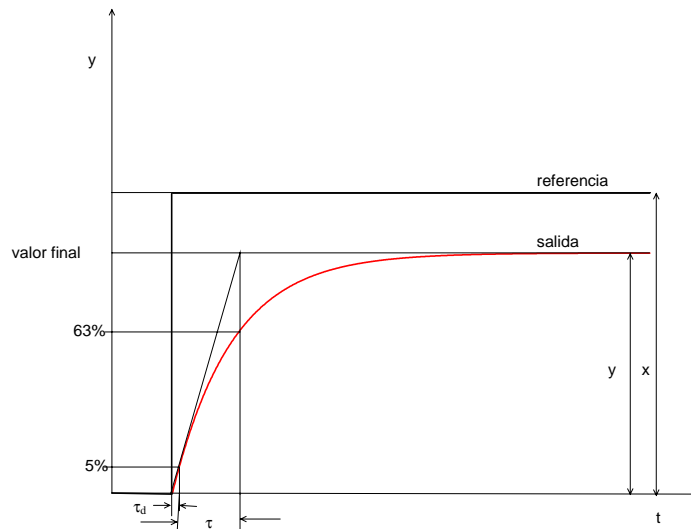


Figura 1.4: Caracterización de la respuesta temporal de un sistema de primer orden

La caracterización del sistema en el dominio frecuencial vendrá dada, por ejemplo, en forma de diagrama de Bode (magnitud y fase) o de Nyquist.

El estudio en frecuencia en sistemas lineales invariantes en el tiempo estables consiste en excitar al dispositivo con una onda senoidal pura ( $u(t)$ ) y observar en la salida la atenuación y el desfase producidos por el sistema ( $y(t)$ ). Es decir, al introducir una entrada de la forma  $u(t) = A \text{sen}(wt)$  a un sistema lineal invariante en el tiempo, la salida, en régimen permanente, será otra onda de la misma frecuencia desfasada y atenuada o amplificada  $y(t) = B \text{sen}(wt + \phi)$  (ver Figura 1.5). De aquí se tiene que para cada frecuencia:

$$|G(jw)| = \frac{B}{A}$$

$$\angle G(jw) = w T_{desf} \frac{180^\circ}{\pi} \quad (1.1)$$

Donde el tiempo  $T_{desf}$  es el retraso entre la onda de entrada y la de salida, como queda definido en la Fig. 1.6. Los símbolos  $| \cdot |$  y  $\angle$  indican módulo y argumento respectivamente. A la hora de convertir en la relación (1.1) el desfase temporal, que puede medirse en el osciloscopio, en desfase en grados, que será el que se represente en el diagrama de Bode, lo



que se ha hecho es usar una regla de proporcionalidad, haciendo corresponder el periodo de la señal, en segundos, con un ciclo de 360 grados, y el desfase en segundos con el desfase en grados:

$$\frac{T}{T_{desf}} = \frac{360^\circ}{desf^\circ}$$

Con todo esto, introduciendo consecutivamente señales senoidales de distintas frecuencias  $w$  se pueden ir obteniendo puntos para construir el diagrama de Bode en magnitud (midiendo cociente entre amplitud de la onda de salida y la de entrada y expresándolo en dB) y fase (midiendo desfase entre ondas de entrada y salida y pasando a grados).

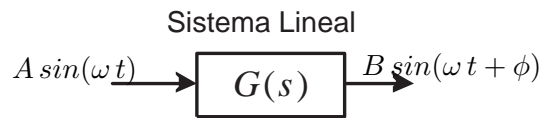


Figura 1.5: Respuesta en régimen permanente ante senoide de un sistema lineal

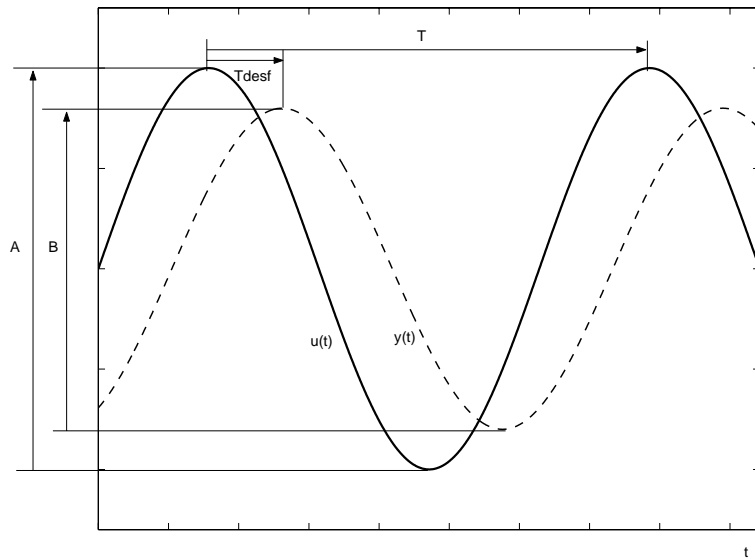


Figura 1.6: Caracterización de la respuesta frecuencial de un sistema lineal

## Caso práctico

### Respuesta temporal

Se trata de obtener los parámetros  $\tau_d, \tau$  y  $K$  experimentalmente utilizando los módulos de simulación analógicos del laboratorio. Para ello se conecta uno de los módulos como sistema de primer orden con ganancia  $K_s = 1$  y constante de tiempo  $\tau_1 = 0.1$  s. (el alumno puede

escoger estos mismo valores). La función de transferencia que modela el sistema es:

$$G(s) = \frac{K_s}{(1 + s \tau_1)}$$

Tomando estos valores e introduciendo una onda cuadrada de frecuencia mínima (0.2 Hz) y amplitud 2 Vpp en (2), los resultados experimentales aproximados obtenidos para la respuesta temporal - punto (10) - fueron los siguientes:

- $\tau_1 = 1\text{div} \cdot 0.1 \text{ segundos/div} = 0.1 \text{ segundos}$ .
- $\tau_d = 0.01 \text{ s}$ .
- $K_s = 1$ .

Lógicamente el resultado es el esperado. En los casos en que no esté claro que exista retardo  $\tau_d$  o éste sea muy pequeño no se tiene en cuenta.

### Respuesta frecuencial

Del mismo modo, introduciendo una entrada senoidal de distintas frecuencias y midiendo cociente de magnitudes y desfase entre entrada y salida se obtuvo aproximadamente la tabla siguiente:

FRECUENCIA (Hz)	$\log_{10}(w)$	$ G(jw) _{dB}$	$\angle G(jw)$
0.2	0.099	0.00	$-6^\circ$
0.4	0.333	-0.44	$-17^\circ$
0.6	0.576	-0.72	$-21^\circ$
1.0	0.798	-1.93	$-30^\circ$
2.0	1.099	-4.15	$-50^\circ$
6.0	1.640	-12.04	$-64^\circ$
10.0	1.798	-15.40	$-72^\circ$
40.0	2.400	-20.00	$-78^\circ$

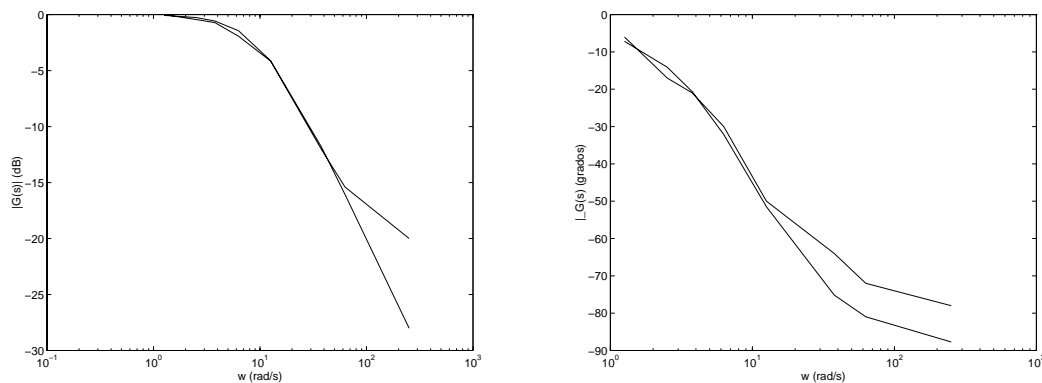


Figura 1.7: Respuesta en frecuencia real y teórica

En la Fig. 1.7 se comprueba que la respuesta en frecuencia coincide con la teórica en la mayoría de los puntos, produciéndose la mayor diferencia a altas frecuencias (aumenta la

incertidumbre sobre el sistema y los ruidos en la medida). La magnitud permanece aproximadamente plana hasta llegar a la frecuencia de corte ( $1/\tau_1$  rad/s), en que comienza a decrecer con una pendiente de -20 dB/década como consecuencia de la existencia de un polo en dicha frecuencia. La fase será negativa y variará entre  $0^\circ$  y  $-90^\circ$ , ángulo este último al que tenderá asintóticamente cuando la frecuencia tiende a infinito.

### 1.4.2 Sistemas de segundo orden: modelado del motor de continua

Frecuentemente, los motores de corriente continua controlados por armadura, como se comprobará en una práctica posterior, tomando como salida la posición angular de los mismos, se modelan como un sistema de primer orden en serie con un integrador. Si se realimenta unitariamente el conjunto como aparece en la Fig. 1.8, se puede obtener la función de transferencia típica de un sistema de segundo orden.

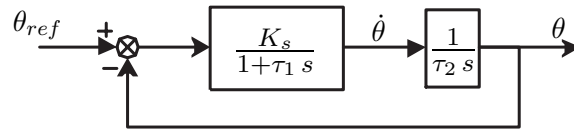


Figura 1.8: Modelo del motor de corriente continua realimentado unitariamente

La función de transferencia de la cadena directa viene dada por:

$$G_{cd}(s) = \frac{K_s}{(1 + s \tau_1)} \frac{1}{\tau_2 s}$$

En bucle cerrado:

$$G_{BC}(s) = \frac{K_s}{K_s + \tau_2 s (1 + s \tau_1)} = \frac{K w_n^2}{s^2 + 2 \delta w_n s + w_n^2}$$

Identificando parámetros se obtiene:

- Ganancia estática:

$$K = 1$$

- Frecuencia natural del sistema:

$$w_n = \sqrt{\frac{K_s}{\tau_1 \tau_2}}$$

- Factor de amortiguamiento:

$$\delta = 0.5 \sqrt{\frac{\tau_2}{K_s \tau_1}}$$

### Especificaciones clásicas en el dominio del tiempo para el caso subamortiguado

Las especificaciones indican el comportamiento que se desea que tenga el sistema en bucle cerrado. En el caso sencillo objeto de estudio, la cadena directa la constituye el sistema en sí (la posibilidad de elección de la ganancia hace que sea equivalente a un sistema de control con un controlador proporcional simple). Como se ha analizado en el capítulo 3, dichas especificaciones suelen ser definidas por una serie de parámetros:

- **Sobreoscilación:**  $SO = e^{\frac{-\delta \pi}{\sqrt{1-\delta^2}}}$
- **Tiempo de subida:**  $t_s = \frac{\pi-\theta}{w_n \sqrt{1-\delta^2}}$ , donde  $\tan(\theta) = \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}$ .
- **Tiempo de pico:**  $t_p = \frac{\pi}{w_n \sqrt{1-\delta^2}}$ .
- **Tiempo de establecimiento** (del 5 %):  $t_e = \frac{\pi}{\delta w_n}$

En cuanto a la respuesta en frecuencia se puede obtener exactamente igual que en el caso de primer orden.

### Caso práctico:

#### Respuesta temporal

Se escogen en los módulos los valores siguientes para la función de transferencia:

- $K_s = 1.5$ .
- $\tau_1 = 0.5 \text{ s}$
- $\tau_2 = 0.1 \text{ s}$

Tomando estos valores y realizando el análisis anterior, cabe esperar que el sistema realimentado unitariamente cumpla las siguientes especificaciones:

- Valores teóricos ( $w_n = 5.4772 \text{ rad/s}$ ,  $\delta = 0.1826$ ):
  - $SO_{\%} = 55.8\%$  (lo normal es que se exija  $SO$  inferior al 30 %),
  - $t_s = 0.3258 \text{ s}$ ,
  - $t_p = 0.5834 \text{ s}$ ,
  - $t_e = 3.1416 \text{ s}$

Como se observa, con los valores escogidos se espera obtener una respuesta muy oscilatoria (Fig. 1.9). Lo normal sería haber escogido un valor menor para  $K_s$  (que puede considerarse como un controlador proporcional en serie con el sistema), de forma que se consiga disminuir

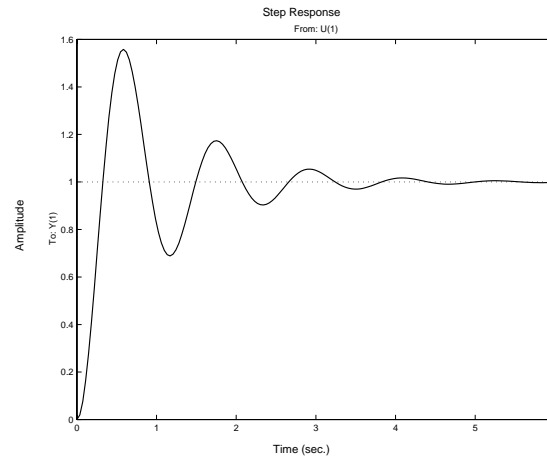


Figura 1.9: Respuesta temporal del sistema realimentado unitariamente

la sobreoscilación. También puede conectarse el módulo PID y usar un sólo controlador proporcional (se ha realizado el experimento sólo con un módulo de simulación por sencillez).

Dado que el sistema a la entrada no tiene ningún punto en el que se puedan restar señales, se utiliza el punto de suma que el otro módulo (**PID**) tiene en su salida. Para evitar ruidos, se desconectan los términos derivativo e integral de dichos módulos. La referencia en escalón se introduce por el punto (8) del módulo **PID**, y la señal de realimentación procedente de la salida del sistema (punto (11) del módulo de simulación) se introduce en el punto de suma (9) del módulo **PID**. El error entre la salida y la referencia (10) se conecta con la entrada del módulo de simulación en (2), habiendo de esta forma realimentado el sistema. Si tras conectar de esta forma se introduce una onda cuadrada de baja frecuencia se obtiene en el osciloscopio:

- Valores experimentales:

- $SO_{\%} = 58\%$ ,
- $t_s = 0.3\text{ s}$ ,
- $t_p = 0.57\text{ s}$ ,
- $t_e = 3.1\text{ s}$

## Respuesta frecuencial

La respuesta en frecuencia del sistema en bucle cerrado se obtiene por el mismo procedimiento empleado con el sistema de primer orden en bucle abierto. Los valores experimentales obtenidos para los parámetros seleccionados fueron los siguientes:

Frec(Hz)	Frec(rad/s)	$ G(jw) _{dB}$	$ G(jw) $ (°)
0.2	1.2566	0.4827	-7.2
0.4	2.5133	0.9661	-14.4
0.6	3.7699	4.1777	-21.6
0.8	5.0265	9.3704	-63.36
1.0	6.2832	6.5171	-133.2
1.2	7.5398	0	-146.88
1.4	8.7965	-4.6090	-161.28
1.6	10.0531	-7.4022	-161.28
1.8	11.3097	-10.2058	-162.0
2.0	12.5664	-12.5678	-164.16

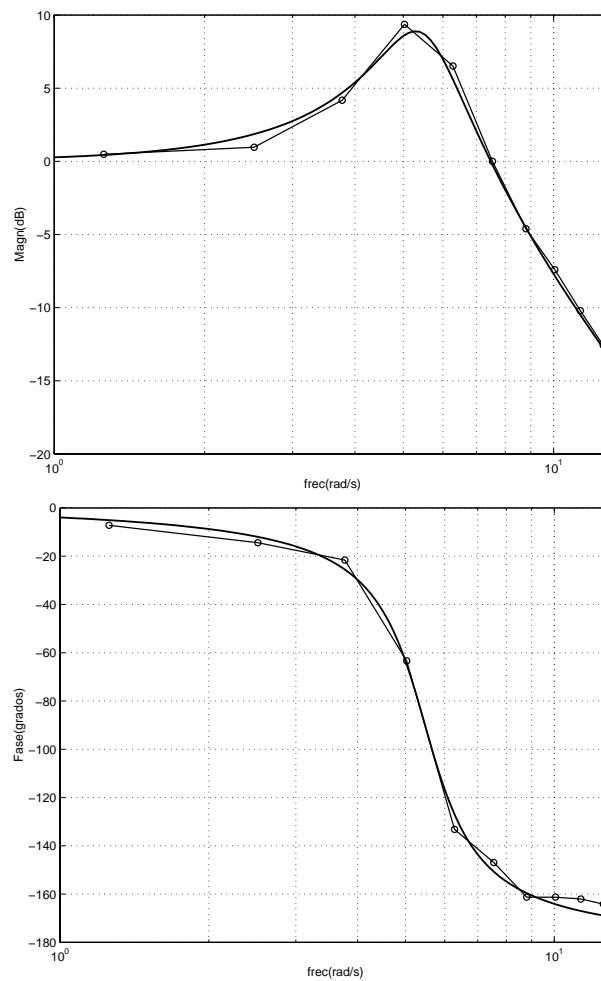


Figura 1.10: Respuesta en frecuencia real y teórica

En este caso, al tratarse de un sistema de segundo orden subamortiguado, se observa el efecto de la resonancia cerca de la frecuencia natural del sistema. A partir de entonces la magnitud decrece con una pendiente de 40 dB/década.

La fase llega esta vez a alcanzar ( $w \rightarrow \infty$ ) los  $-180^\circ$  debido a que el aporte de fase es de

dos polos (complejos conjugados). Al igual que se hizo en el caso de un sistema de primer orden, en la Fig. 1.10 aparece el diagrama de Bode obtenido comparado con el teórico para los parámetros seleccionados.

## 1.5 COMPENSACIÓN

En este apartado se van a analizar distintos algoritmos de control que se pueden implantar usando el módulo **PID**.

### 1.5.1 Control por cancelación de polos usando un controlador **PI**

Se va a utilizar un controlador **PI** para eliminar el error en régimen permanente ante entrada en escalón y aumentar la rapidez de respuesta de un sistema de primer orden controlado. Como es bien sabido, al ser un sistema de primer orden de tipo cero, tiene en general, cuando se realimenta unitariamente, un error en régimen permanente ante entrada escalón no nulo. Por medio del controlador **PI** se elimina este error, consiguiendo además una respuesta más rápida. El esquema de control viene dado en la Fig. 1.11.

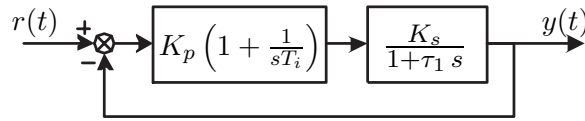


Figura 1.11: Esquema de control de un sistema de primer orden usando un controlador **PI**

La función de transferencia de la cadena directa viene dada por:

$$G_{ba}(s) = \frac{K_p (1 + T_i s)}{s T_i} \frac{K_s}{(1 + \tau_1 s)}$$

siendo  $K_p$  la ganancia del controlador **PI** y  $T_i$  el tiempo integral.

La compensación por cancelación de polos consiste en igualar el tiempo integral del **PI** con la constante de tiempo del sistema de primer orden ( $T_i = \tau_1$ ). Con esto queda (si la cancelación es exacta):

$$G_{ba}(s) = \frac{K_p K_s}{s T_i}$$

Y cerrando el bucle:

$$G_{bc}(s) = \frac{1}{1 + \frac{T_i}{K_p K_s} s}$$

El sistema en bucle cerrado se reduce a un sistema de primer orden con constante de tiempo equivalente  $\tau_{eq} = T_i/(K_p K_s)$  y ganancia estática unidad.

### Caso práctico

Tomando como valores para el sistema y el controlador **PI**:

- $K_s = 1.5$ ,
- $\tau_1 = 1\text{ s}$ ,
- $T_n = 1\text{ s}$  (para cancelar),
- Término derivativo desactivado.

Al aumentar la ganancia  $K_p$ , se consigue aumentar la rapidez de respuesta del sistema realimentado.

- Teóricamente:

$$K_p = 10 \rightarrow \tau_{eq} = 0.066\text{ s}$$

$$K_p = 0.66 \rightarrow \tau_{eq} = 1.0\text{ s}$$

Como se observa, tomando  $K_p$  menores de 0.66 no se consigue aumentar la rapidez de respuesta del sistema realimentado respecto al sistema original. Sin embargo, el error en régimen permanente ante entrada en escalón sí se anula siempre.

- Valores experimentales:

$$K_p = 10 \rightarrow \tau_{eq} = 0.06\text{ s}$$

$$K_p = 0.66 \rightarrow \tau_{eq} = 0.95\text{ s}$$

Los resultados experimentales resultan muy próximos a los teóricos que se pueden observar en la Fig. 1.12 donde se muestra la salida del sistema realimentado con  $K_p = 10$ . Además de una considerable mejora en la rapidez de respuesta, el sistema no tiene error en régimen permanente.

### 1.5.2 Control PID por el Método de Ziegler-Nichols en bucle abierto y Lugar de las Raíces

Los métodos de Ziegler-Nichols [?] constituyen un mecanismo heurístico para la compensación de sistemas. El método de Z-N en bucle abierto, en particular, se utiliza cuando la respuesta



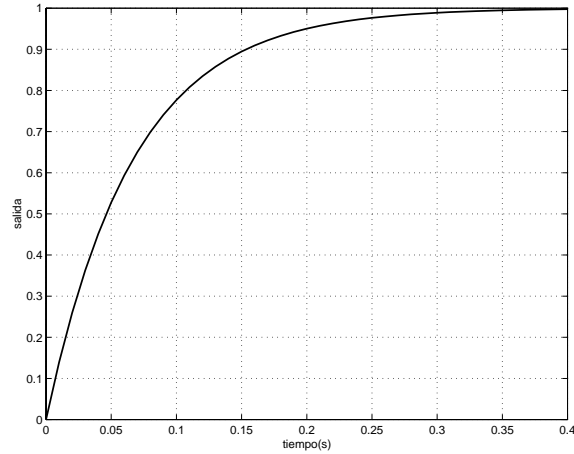


Figura 1.12: Respuesta a escalón simulada del sistema de primer orden controlado con un **PI** diseñado por cancelación polo-cero.

ante escalón del sistema (en BA y sin compensar) es de tipo sobreamortiguado, es decir, no presenta sobreoscilación.

El método consiste en aproximar la dinámica del sistema por un modelo de primer orden con constante de tiempo  $\tau$  y ganancia  $K$ , y con un retardo puro  $\tau_d$ , para después aplicar una regla heurística que permite obtener una primera aproximación para los parámetros del controlador. El procedimiento es el siguiente:

1. Tomar el sistema en bucle abierto y estudiar la respuesta temporal al escalón. De esta forma determinar una aproximación al comportamiento de primer orden, calculando los mencionados parámetros característicos  $\tau_d, \tau$  y  $K$ .
2. Con estos datos se puede aproximar la función de transferencia del sistema de la siguiente forma:

$$G(s) = \frac{K}{1 + \tau s} e^{-\tau_d s}$$

3. Se aplica la regla heurística según el tipo de controlador que se vaya a utilizar en la compensación:

Controlador	$K_p$	$T_i$	$T_d$
<b>P</b>	$\frac{\tau}{K\tau_d}$	—	—
<b>PI</b>	$\frac{0.9\tau}{K\tau_d}$	$\frac{\tau_d}{0.3}$	—
<b>PID</b>	$\frac{1.2\tau}{K\tau_d}$	$2\tau_d$	$0.5\tau_d$

**Caso práctico**

Considerar el sistema cuya función de transferencia viene dada por:

$$G(s) = K_s \frac{1}{(1 + \tau_1 s)} \frac{1}{(1 + \tau_2 s)}$$

Asignando a los parámetros del módulo de simulación los valores:

- $\tau_1 = 1 \text{ s}$ ,
- $\tau_2 = 0.1 \text{ s}$ ,
- $K_s = 1.5$

se obtienen experimentalmente los equivalentes:

- $\tau_d = 0.1 \text{ s}$ ,
- $\tau = 0.9 \text{ s}$ ,
- $K = 1.5$

en la respuesta ante escalón en bucle abierto.

Para compensar este sistema se pueden utilizar tres controladores en el método de Ziegler-Nichols:

a) **Caso del controlador P.** (Ver Fig. 1.13).

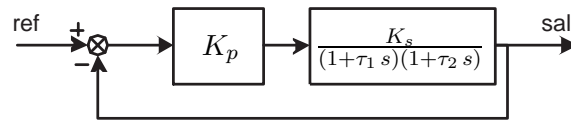


Figura 1.13: Esquema con controlador proporcional **P** diseñado con las reglas de Ziegler-Nichols

De acuerdo con la regla heurística dada, y para los valores antes determinados, resulta  $K_p = 6$ . Con este dato se puede determinar el error en régimen permanente teórico ante entrada en escalón del sistema ya compensado:

$$erp = \lim_{s \rightarrow 0} (sE(s)) = \frac{1}{(1 + K_p K)} = 11\%$$

resultando el experimental del orden del 7%.

La función de transferencia en bucle cerrado resulta:

$$G_{bc}(s) = K_p K_s \frac{1}{\tau_1 \tau_2 s^2 + s(\tau_1 + \tau_2) + (1 + K_p K_s)}$$

Identificando parámetros se obtiene:

$$\delta = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2 \sqrt{\tau_1 \tau_2 (1 + K_p K_s)}} = 0.55$$

$$w_n = \sqrt{\frac{1 + K_p K_s}{\tau_1 \tau_2}} = 10 \text{ rad/s}$$

con los que se puede obtener unos valores teóricos de sobreoscilación y tiempo de subida:

- $SO_{\%} = 12\%$ ,
- $t_s = 0.26 \text{ s}$

Por otro lado, sobre el osciloscopio los datos obtenidos son:

- $SO = 15.8\%$ ,
- $t_s = 0.3 \text{ s}$

Se observa que el tiempo de subida es bastante menor que la constante de tiempo equivalente del sistema original. Además, el error en régimen permanente ante entrada en escalón ahora es sólo del 7% frente al 40 % del sistema sin compensar. El resultado de la respuesta a escalón del sistema compensado puede verse en la Fig. 1.14.

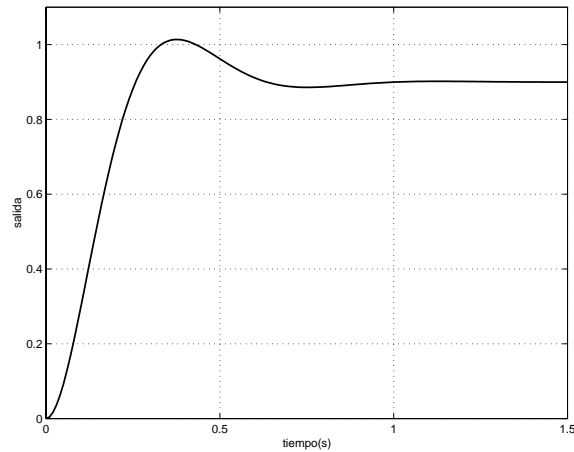


Figura 1.14: Respuesta del sistema controlado por un controlador proporcional diseñado con el método de Ziegler-Nichols

b) **Caso del controlador PI.** (Fig. 1.15).

El sistema es el mismo que en el caso anterior, sólo que esta vez la regla heurística permite calcular tanto la ganancia como el tiempo  $T_i$ .

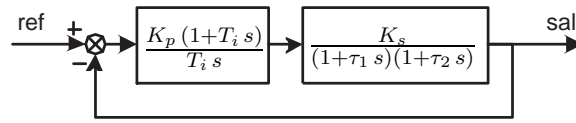


Figura 1.15: Sistema a controlar con el **PI** diseñado con las reglas de Ziegler-Nichols

- $K_p = (0.9\tau / (K \cdot \tau_d)) = 5.4$
- $T_i = \tau_d / 0.3 = 0.33$

La ventaja de utilizar el **PI** es que anula por completo el error en régimen permanente debido a su acción integral.

De la respuesta experimental obtener la sobreoscilación y el tiempo de subida. Manipular manualmente los parámetros  $K_p$  y  $T_i$ , para conseguir una mejora de la respuesta, teniendo en cuenta los efectos que cabe esperarse de cada uno de ellos:

- $K_p$ : Aumentar la ganancia proporcional permitirá, en general, aumentar la rapidez de la respuesta, al tiempo que aumenta la sobreoscilación.
- $T_i$ : Un aumento del tiempo integral, provocará una disminución del efecto integral. Como consecuencia se tardará más en anular el error en régimen permanente, pero la respuesta será menos sobreoscilante.

A continuación, como método alternativo para el diseño del **PI**, puede auxiliarse de la herramienta `rltool` de MATLAB para ver el efecto que tendrá sobre el lugar de las raíces una modificación del parámetro  $T_i$  y para elegir un valor apropiado de la ganancia. En primer lugar, introducir en la ventana de comandos de MATLAB:

```
Ks = 1.5;
tau1 = 1;
tau2 = 0.1;
N = Ks;
D = conv([tau1,1],[tau2,1]);
sys = tf(N,D);
```

A continuación, abrir la aplicación de lugar de las raíces interactivo para nuestro sistema con:

```
rltool(sys)
```

Añadir el polo en el origen y el cero en  $-\frac{1}{T_i}$  del controlador **PI**. Mover libremente el cero, por ejemplo a la posición  $-1.5$ , y elegir un valor de ganancia apropiado, por ejemplo  $K = K_p/T_i = 2$ . Ver la situación de los polos y ceros en bucle cerrado. Aplicar estos valores de los parámetros al sistema físico (el valor de  $T_i$  es el inverso del valor absoluto del cero), y caracterizar la respuesta obtenida.

### c) Caso del controlador PID.

A partir de los datos conocidos, por la regla heurística de la tabla, se pueden determinar los parámetros del **PID**:

- $K_p = (1.2 \tau / (K \cdot \tau_d)) = 7.2$
- $T_i = 2 \tau_d = 0.2$
- $T_d = 0.5 \tau_d = 0.05$

Medir la sobreoscilación y el tiempo de subida de la respuesta obtenida en el osciloscopio. Posteriormente, realizar un ajuste manual de los parámetros. A los comentarios que se hicieron en el apartado anterior respecto a los efectos de una variación en los parámetros  $K_p$  y  $T_i$ , cabe añadir que:

- $T_d$ : Un aumento del tiempo derivativo, significa un aumento del efecto derivativo, que supondrá, en general, un mayor amortiguamiento de la respuesta. No podemos abusar de esta acción porque se pueden producir amplificación de los ruidos.

Es interesante comentar que, como en el caso del **PI**, por la acción integral este sistema tampoco tiene error en régimen permanente ante entrada en escalón, mientras que su sobreoscilación es menor que en el caso de controladores **P** y **PI** gracias al efecto beneficioso en este caso del término derivativo.

Como segundo método de diseño, se puede recurrir al lugar de las raíces. El diseño de puede hacer de forma que los dos ceros que añade el **PID** estén en  $-6.5$  y  $-0.3$ , y una ganancia de 7. Calcular los valores que corresponderían a los parámetros  $K_p$ ,  $T_i$ ,  $T_d$ :

$$G_{pid} = \frac{K(s + c_1)(s + c_2)}{s} = K_p \frac{T_d T_i s^2 + T_i s + 1}{T_i s}$$

donde  $c_1 = 6.5$  y  $c_2 = 0.3$ , para el caso particular visto. La correspondencia es:

$$T_i = \frac{c_1 + c_2}{c_1 c_2}$$

$$T_d = \frac{1}{c_1 + c_2}$$

$$K_p = K \frac{c_1 + c_2}{c_1^2 c_2^2}$$

## 1.6 CUESTIONES SOBRE LA PRÁCTICA

1. *Comentar todos los resultados de los experimentos realizados.*
2. *Indique alguna posible causa por la que el esquema de control PI de sistemas de primer orden por cancelación de polos pueda provocar una respuesta que difiera de la esperada teóricamente.*
3. *Justifique si se puede controlar un sistema analógico constituido por un sistema de primer orden en serie con un integrador por el método de Ziegler-Nichols en bucle cerrado.*

4. *Indique algún motivo por el que, en el caso considerado, el método de Ziegler-Nichols en bucle abierto puede dar lugar a un sistema en bucle cerrado con un comportamiento muy poco aceptable.*