Universidad Nacional de Colombia

Control v2012-03

2 – Desempeño de los Sistemas de Control

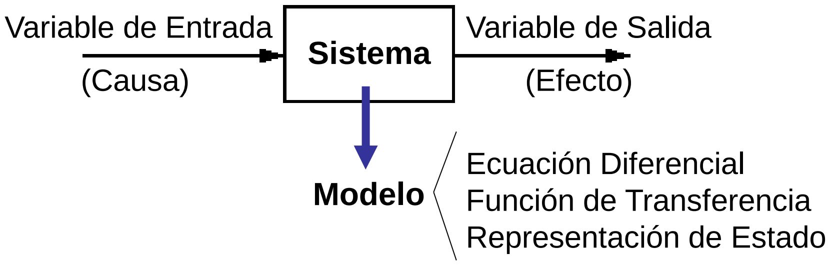
Prof. Victor Hugo Grisales
vhgrisalesp@unal.edu.co

Desempeño de Sistemas de Control

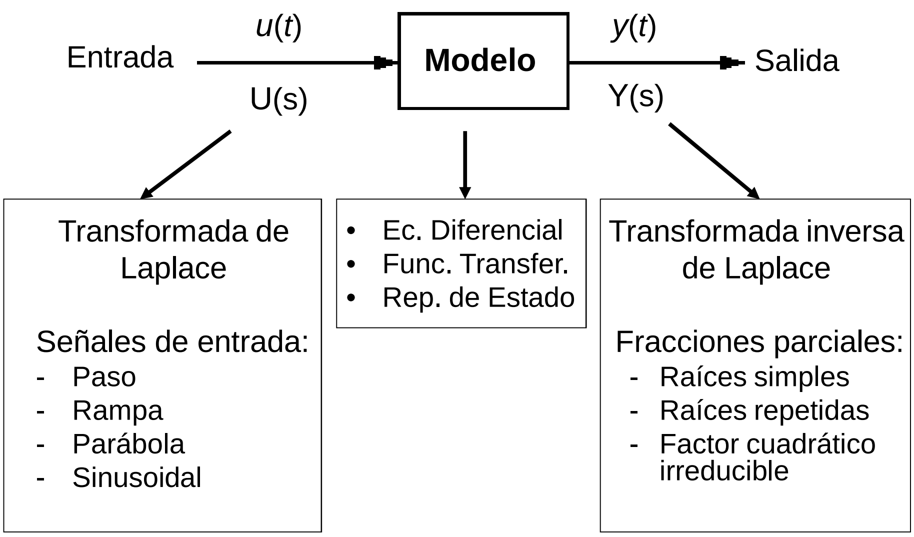
- Tratamiento matemático – Transformada de Laplace
- Modelos analíticos
- Paradigmas en control y concepto de Desempeño
- Respuesta temporal sistemas de primer orden
- Respuesta temporal sistemas de segundo orden
- Efectos de un tercer polo y un cero
- Localización de raíces y respuesta transitoria
- Simplificación de sistemas lineales
- Linealización
- Análisis de Error de estado estacionario
- Análisis de Estabilidad – Criterio de Routh-Hurwitz

Representación de Sistemas

Sistema: un sistema es una combinación de componentes que actúan juntos y realizan un objetivo determinado. Un sistema no necesariamente es físico. El concepto de sistema se aplica a fenómenos abstractos y dinámicos, tales como los que se encuentran en la economía. Por tanto, la palabra sistema debe interpretarse como una implicación de sistemas físicos, biológicos, económicos y similares.



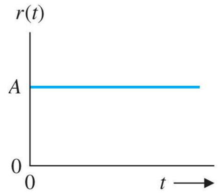
Tratamiento matemático



Transformada de Laplace

$$\boxed{F(s) = \mathscr{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt}$$

Transformada de Laplace entrada tipo Paso



$$\mathscr{L}[u(t)] = \int_0^{\infty} u(t)e^{-st}\,dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^{\infty}$$

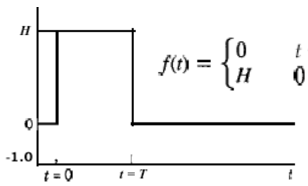
$$= -\frac{1}{s}(0-1) = \frac{1}{s}$$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

Caso general: $U(s) = \dfrac{A}{s}$

Transformada de Laplace

Transformada de Laplace entrada tipo Pulso



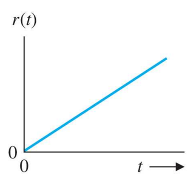
$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0,\ t \geq T \\ H & 0 \leq t < T \end{cases}$$

$$\mathscr{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt = \int_0^{T} He^{-st}\,dt$$

$$= -\frac{H}{s}e^{-st}\Big|_0^{T} = -\frac{H}{s}(e^{-sT}-1)$$

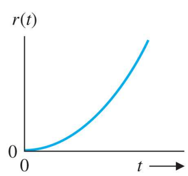
$$= \frac{H}{s}(1-e^{-sT})$$

Transformada de Laplace entradas tipo Rampa y Parábola



$$u(t) = mt$$

$$U(s) = \frac{m}{s^2}$$



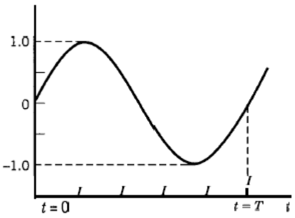
$$u(t) = \frac{\alpha}{2}t^2$$

$$U(s) = \frac{\alpha}{s^3}$$

Transformada de Laplace

Transformada de Laplace entrada tipo Senoidal

$$\sin\ \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$$



$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \int_0^\infty \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} e^{-st}\, dt$$

$$= \frac{1}{2i}\int_0^\infty [e^{-(s-i\omega)t} - e^{-(s+i\omega)t}]\, dt$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{e^{-(s-i\omega)t}}{s - i\omega} + \frac{e^{-(s+i\omega)t}}{s+i\omega} \right|_0^\infty$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{0-1}{s - i\omega} + \frac{0-1}{s+i\omega} \right]$$

$$= \frac{1}{2i}\frac{2iw}{s^2+\omega^2}$$

$$= \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Tabla de Transformadas de Laplace

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

[1] C. SMITH, A. CORRIPIO, Principles and Practice of Automatic Process Control, 2nd. Ed, Wiley, 1997.

Teoremas Transformada de Laplace

Teorema de Diferenciación Real

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - \left.\frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}}\right|_{t=0}$$

Teorema de Integración Real

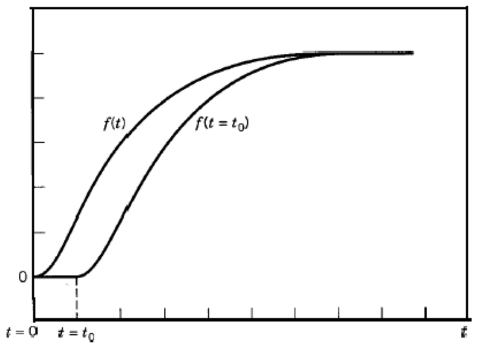
$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\, dt\right] = \frac{1}{s} F(s)$$

Teorema de Valor Final $\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$

Teorema de Valor Inicial $\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$

Teoremas Transformada de Laplace

Teorema de Traslación Real



$$\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-st_0} F(s)$$

Los retardos de tiempo (time delays) son causados típicamente por atrasos de transporte, fenómeno conocido como **tiempo muerto** (***dead time***).

Solución de Ecuaciones Diferenciales

Ejemplo

$$a_2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0y(t)=bx(t)$$

1. Transform the differential equation into an algebraic equation in the **Laplace** transform variable s.
2. Solve for the transform of the output (or dependent) variable.
3. Invert the transform to obtain the response of the output variable with time, t.

$$a_2\mathcal{L}\left[\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right]+a_1\mathcal{L}\left[\frac{dy(t)}{dt}\right]+a_0\mathcal{L}[y(t)]=b\mathcal{L}[x(t)]$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{dy(t)}{dt}\right]=sY(s)-y(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right]=s^2Y(s)-sy(0)-\frac{dy}{dt}\bigg|_{t=0}$$

$$\longrightarrow\quad (a_2s^2+a_1s+a_0)Y(s)-(a_2s+a_1)y(0)-a_2\frac{dy}{dt}\bigg|_{t=0}=bX(s)$$

Solución de Ecuaciones Diferenciales

Ejemplo

$$Y(s)=\frac{bX(s)+(a_2s+a_1)y(0)+a_2\frac{dy}{dt}\Big|_{t=0}}{a_2s^2+a_1s+a_0}$$

This equation shows the effect of the input variable, X(s), and of the initial conditions on the output variable. Our objective is to study how the output variable responds to the input **variable,** so the presence of the initial conditions complicates our analysis. To avoid this unnecessary complication, we assume that the initial conditions are at steady state, $dy/dt\,|_{t=0}=0$, and define the output variable as the *deviation* from its initial value, thus forcing $y(0)=0$. We will show in the next section how this can be done without loss of generality. With zero initial conditions, the equation is reduced to

Considerando condiciones iniciales nulas

$$Y(s)=\boxed{\frac{b}{a_2s^2+a_1s+a_0}}X(s)$$

Función de Transferencia

Solución de Ecuaciones Diferenciales

$$Y(s)=\frac{b}{a_2 s^2+a_1 s+a_0}X(s)$$

Considerando una entrada tipo Paso unitario => X(s)=1/s

Obtención de Transformada Inversa de Laplace

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{b}{a_2 s^2+a_1 s+a_0}\frac{1}{s}\right]$$

Inversión por Expansión en Fracciones Parciales

$$(a_2 s^2+a_1 s+a_0)s=(s-r_1)(s-r_2)s$$

Para el caso las raíces pueden determinarse analíticamente:

$$r_{1,2}=\frac{-a_1\pm\sqrt{a_1^2-4a_2a_0}}{2a_2}$$

Solución de Ecuaciones Diferenciales

$$Y(s)=\frac{b}{a_2 s^2+a_1 s+a_0}X(s)$$

Y(s) puede ahora ser expresado de la forma

$$\mathbf{Y(s)}=\frac{A_1}{s-r_1}+\frac{A_2}{s-r_2}+\frac{A_3}{s}$$

Aplicando transformada inversa de Laplace a cada término, se obtiene:

$$y(t)=\boxed{A_1e^{r_1t}+A_2e^{r_2t}}+A_3u(t)$$

Salida (Respuesta) **Aporte de la Raíces** **Aporte de la Entrada**

Casos Típicos de Raíces

Ejemplo con *X*(*s*) paso unitario

Caso 1. Raíces diferentes

$$Y(s)=\frac{1}{(s+1)(s-2)}X(s)=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s-2}+\frac{C}{s}\Rightarrow y(t)=Ae^{-t}+Be^{2t}+C$$

Caso 2. Raíces repetidas

$$Y(s)=\frac{1}{(s^2+2s+1)}X(s)=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{(s+1)^2}+\frac{C}{s}\Rightarrow y(t)=Ae^{-t}+Bte^{-2t}+C$$

Caso 3. Raíces imaginarias

$$Y(s)=\frac{2}{(s^2+4)}X(s)=\frac{A}{(s^2+4)}+\frac{B}{s}\Rightarrow y(t)=\frac{A}{2}\sin 2t+B$$

Caso 4. Raíces complejas conjugadas

$$Y(s)=\frac{2}{(s^2+2s+5)}X(s)=\frac{A}{(s+1)^2+4}+\frac{C}{s}\Rightarrow y(t)=\frac{A}{2}e^{-t}\sin 2t+C$$

Comportamientos Típicos de Respuesta

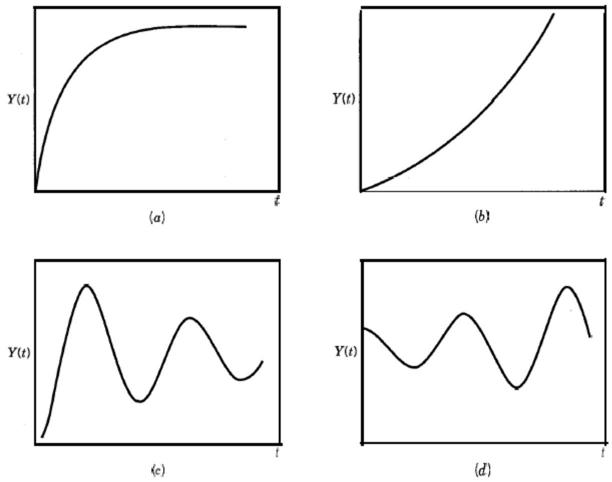


Figure 2-3.1 Examples of responses. (a) Stable, negative real root. (b) Unstable, positive real root. (c) Oscillatory stable, complex roots with negative real part. (d) Oscillatory unstable, complex roots with positive real part.

[1] C. SMITH, A. CORRIPIO, Principles and Practice of Automatic Process Control, 2nd. Ed, Wiley, 1997.

Transformada Inversa de Laplace

Caso general

$$Y(s) = \frac{A_1}{s - r_1} + \frac{A_2}{s - r_2} + \cdots + \frac{A_n}{s - r_n} + [\text{terms of } X(s)]$$

$$Y(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + \ldots + A_n e^{r_n t} + (\text{terms of } X)$$

Table 2-3.1 Relationship Between the **Laplace** Transform Y(s) and Its Inverse Y(t)

Denominator of Y(s)	Partial Fraction Term	Term of Y(t)
Umepeated real root	$\frac{A}{s - r}$	Ae^{rt}
Pair of complex conjugate roots where $D = \sqrt{B^2 + C^2}$, $\theta = \tan^{-1}\frac{B}{C}$	$\frac{Bs + C}{(s - \rho)^2 + \omega^2}$	$De^{\rho t}\sin(\omega t + \theta)$
Real root repeated m times	$\sum_{j=1}^{m} \frac{A_j}{(s - r)^j}$	$e^{rt}\sum_{j=1}^{m} \frac{A_j t^{j-1}}{(j-1)!}$

Solución de Ecuaciones Diferenciales

Otros Ejemplos

Ej. 1

$$30\frac{d^3Y(t)}{dt^3} + 43\frac{d^2Y(t)}{dt^2} + 14\frac{dY(t)}{dt} + Y(t) = 2.5X(t)$$

Las raíces son -0.1, -0,333 y -1.0 (Todas reales y negativas).
La respuesta es entonces monotónica y estable.

$$Y(t) = A_1 e^{-0.1t} + A_2 e^{-0.333t} + A_3 e^{-t} + (\text{terms of } X)$$

Ej. 2

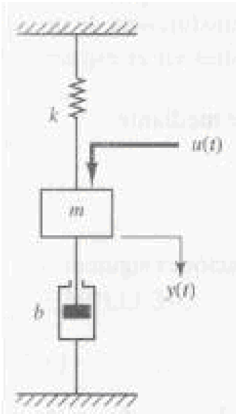
$$\frac{d^3Y(t)}{dt^3} + 5\frac{d^2Y(t)}{dt^2} + 11\frac{dY(t)}{dt} + 15Y(t) = 12X(t)$$

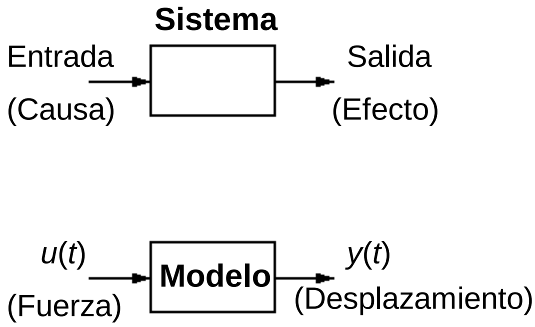
Las raíces son -1±j2 y -3 (Un par de raíces complejas conjugadas y una raíz real). La respuesta es entonces oscilatoria amortiguada.
El sistema es estable pues las raíces tienen parte real negativa.

$$Y(t) = De^{-t}\sin(2t + \theta) + A_3 e^{-3t} + (\text{terms of } X)$$

Modelos matemáticos: ejemplo

Sistema Mecánico





Ejemplo - Ecuación Diferencial

Ejemplo - Función de Transferencia

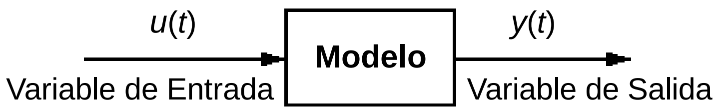
Ejemplo – Representación de Estado

Ecuación Diferencial y Función de Transferencia

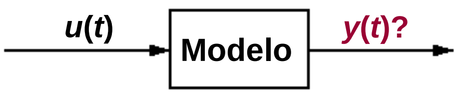
Ecuación Diferencial

Función de Transferencia

Paradigmas en Control

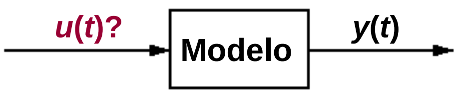


- **Respuesta** del Sistema

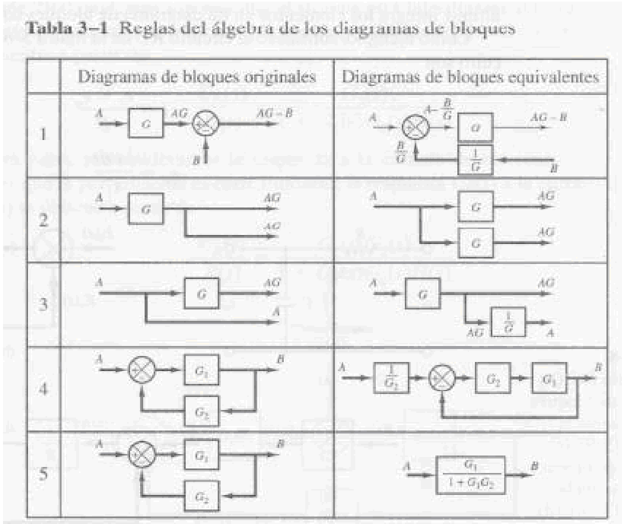


- **Identificación** del Sistema

- **Control** del Sistema

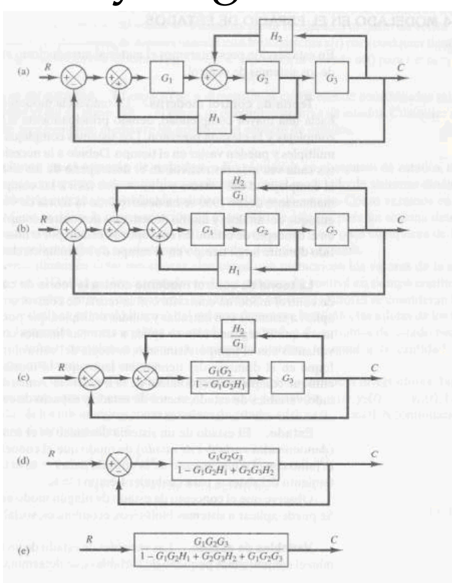


Diagramas y Álgebra de Bloques



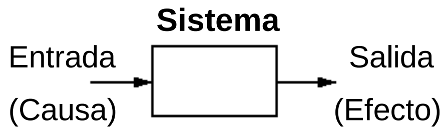
[2] OGATA, K., *Ingeniería de Control Moderna. Prentice Hall, 1998.*

Diagramas y Álgebra de Bloques



[2] OGATA, K., *Ingeniería de Control Moderna. Prentice Hall, 1998.*

Concepto de Desempeño de Sistemas de Control



Desempeño (*Performance*)

Respuesta Dinámica → Respuesta Transitoria

Respuesta Estática → Error de Estado Estacionario

Estabilidad

Introducción

La capacidad de ajustar el comportamiento transitorio y el estado estacionario de un sistema, es una ventaja de los sistemas de control con retroalimentación.

Con el objeto de analizar y diseñar sistema de control es necesario:

- Definir y medir el desempeño de un sistema.
- Basándose en el desempeño deseado del sistema, se deben ajustar los parámetros del sistema con el fin de obtener la respuesta deseada.

El desempeño de los sistemas de control se pueden estudiar a partir de la respuesta transitoria y de la respuesta en estado estacionario.

- *Respuesta Transitoria*: Es la respuesta que desaparece con el tiempo.
- *Respuesta en Estado Estacionario*: Es la respuesta que existe por un largo tiempo siguiendo una señal de entrada.

Introducción

Especificaciones de Diseño: normalmente incluyen varios índices de respuesta en el tiempo para señal de entrada específica, así como la exactitud deseada en estado estacionario.

En el transcurso del diseño, las especificaciones se revisan frecuentemente con el objeto de establecer un compromiso.

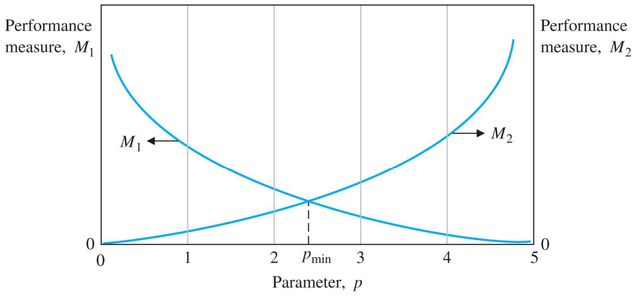


Figure: 05-01

Señales de Entrada de Prueba

Si el sistema es estable; la respuesta a una señal específica de entrada proporcionará varias medidas sobre el desempeño del sistema.

Cómo en la mayoría de casos se desconoce la señal real de entrada, entonces se escoge una señal estándar como ***entrada de prueba***, con el fin de encontrar la relación entre la respuesta del sistema y su entrada.

Las señales de pruebas mas utilizadas son:

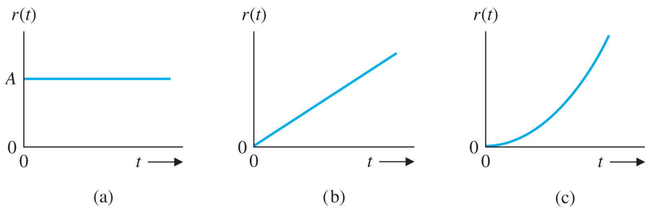
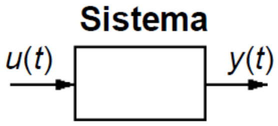


Figure: 05-02a-c

Respuesta Temporal Sistemas 1er Orden



Ecuación Diferencial Sistema SISO LTI de Primer Orden <First Order Lag>

$$a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

Reescribiendo

$$\frac{a_1}{a_0} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{b_0}{a_0} u(t)$$

De manera equivalente

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K u(t)$$

En donde

K : Ganancia estática $\frac{[Eng.\ Units\ Output]}{[Eng.\ Units\ Input]}$

τ : Constante de tiempo [seg]

Respuesta Temporal Sistemas 1er Orden

En el dominio de Laplace y considerando Condiciones Iniciales Nulas

$$\Im\left\{ \tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) \right\}\bigg|_{CI=0} = \Im\{Ku(t)\}\big|_{CI=0}$$

Se obtiene

$$\tau s Y(s) + Y(s) = KU(s)$$

Con lo cual la función de transferencia es entonces

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}$$

La salida $Y(s)$ ante entrada paso de amplitud A está dada por

$$Y(s) = G(s).U(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \cdot \frac{A}{s} = \frac{\alpha}{s + 1/\tau} + \frac{\beta}{s}$$

Aplicando transformada inversa de Laplace la respuesta $y(t)$ está dada por

$$y(t) = K.A.\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad , t \geq 0$$

Respuesta Temporal Sistemas 1er Orden

Respuesta temporal ante entrada paso

$$y(t) = K.A.\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad , t \geq 0$$

Tabla de Valores

t	$y(t)$
0	0
τ	$0.632KA$
2τ	
3τ	
4τ	
5τ	
$t \to \infty$	KA

Respuesta temporal

Caso general bajo CI no nulas -> Solución en espacio de estado

Respuesta Temporal Sistemas 2° Orden

Ecuación Diferencial Sistema SISO LTI de Segundo Orden

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

Que bajo una parametrización conveniente puede ser reescrita como

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = K\omega_n^2 u(t)$$

En donde

K: Ganancia estática $\dfrac{[Eng.\ Units\ Output]}{[Eng.\ Units\ Input]}$

ζ: Coeficiente de amortiguamiento <damping factor>

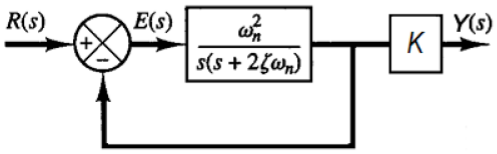
ω_n: Frecuencia natural [rad/seg]

En el dominio de Laplace y considerando CI Nulas se obtiene

$$\left(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2\right)Y(s) = K\omega_n^2 U(s)$$

Respuesta Temporal Sistemas 2° Orden

En forma de diagrama de bloques



Con lo cual la función de transferencia está dada por

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

Para una entrada tipo paso de amplitud A, la respuesta $Y(s)$ es

$$Y(s)=\frac{KA\omega_n^2}{s\left(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2\right)}$$

Las componentes de respuesta debidas a la naturaleza (personalidad) del sistema serán debidas al tipo de raíces que imponga la Ecuación Característica del sistema, de la forma $\Delta(s)=s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2=0$

Respuesta Temporal Sistemas 2° Orden

Ecuación Característica del sistema

$$\Delta(s)=s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2=0$$

Cuya solución general es de la forma

$$s_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$$

Se evidencia ahora la conveniencia de la parametrización inicial:
La naturaleza de las raíces depende del factor ζ, generándose varios casos:

1. $\zeta>1$ Caso sobreamortiguado <overdamped>
2. $\zeta=1$ Caso críticamente amortiguado <critically damped>
3. $0<\zeta<1$ Caso subamortiguado <underdamped>
4. $\zeta=0$ Caso no amortiguado <oscillatory>

Respuesta Temporal Sistemas 2° Orden

1. $\zeta > 1$ Caso Sobreamortiguado

→ Polos reales diferentes. $\Delta(s) = (\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} s_1 = -1/\tau_1 \\ s_2 = -1/\tau_2 \end{cases}$

Para una entrada tipo paso de amplitud A, la respuesta y(t) puede escribirse como

$$y(t) = KA\left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_1} - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} e^{-t/\tau_2}\right)$$

Ubicación en Plano s

Respuesta Temporal

Respuesta Temporal Sistemas 2° Orden

2. $\zeta = 1$ Caso Críticamente Amortiguado

→ Polos reales iguales. $\Delta(s) = (\tau s + 1)(\tau s + 1) = 0 \quad \Rightarrow s_{1,2} = -1/\tau = -\omega_n$

Para una entrada tipo paso de amplitud A, la respuesta y(t) puede escribirse como

$$y(t) = KA\left(1 - \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) e^{-t/\tau}\right)$$

Ubicación en Plano s

Respuesta Temporal

Respuesta Temporal Sistemas 2° Orden

3. $0<\zeta<1$ **Caso Subamortiguado**

→ Polos Complejos Conjugados $s_{1,2}=-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=-\underbrace{\sigma}_{\text{Re}}\pm j\underbrace{\omega_d}_{\text{Im}}$

En donde $\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ [rad/seg] es la Frecuencia amortiguada

Para una entrada tipo paso de amplitud A y desarrollando en fracciones parciales, la salida $Y(s)$ puede escribirse como

$$Y(s)=\left(\frac{1}{s}-\frac{s+\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_n^2(1-\zeta^2)}-\frac{\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_n^2(1-\zeta^2)}\right)$$

Aplicando transformada inversa de Laplace y después de algún álgebra se obtiene

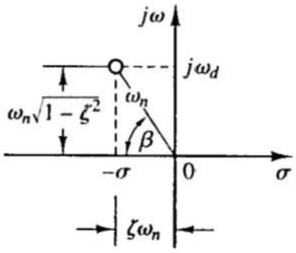
$$y(t)=KA\left(1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\operatorname{sen}\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\beta\right)\right)$$

En donde $\beta=\cos^{-1}\zeta \quad , \quad 0<\zeta<1$

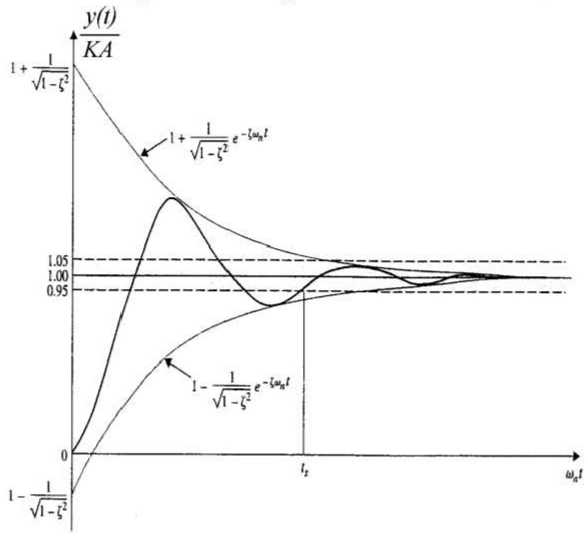
Respuesta Temporal Sistemas 2° Orden

3. $0<\zeta<1$ **Caso Subamortiguado**

Ubicación en Plano s



Respuesta Temporal (Normalizada)



Respuesta Temporal Sistemas 2° Orden

4. $\zeta = 0$ **Caso No Amortiguado**

→ Polos imaginarios. $\Delta(s) = (s^2 + \omega_n^2) \quad \Rightarrow s_{1,2} = \pm j\omega_n$

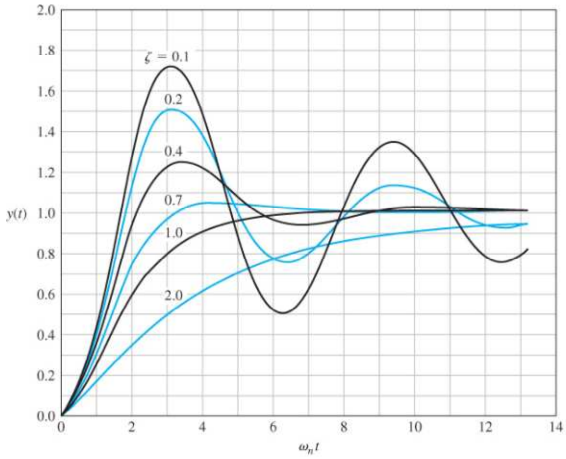
Para una entrada tipo paso de amplitud *A*, la respuesta y(t) puede escribirse como

$$y(t) = KA\left(1 - \cos(\omega_n t)\right)$$

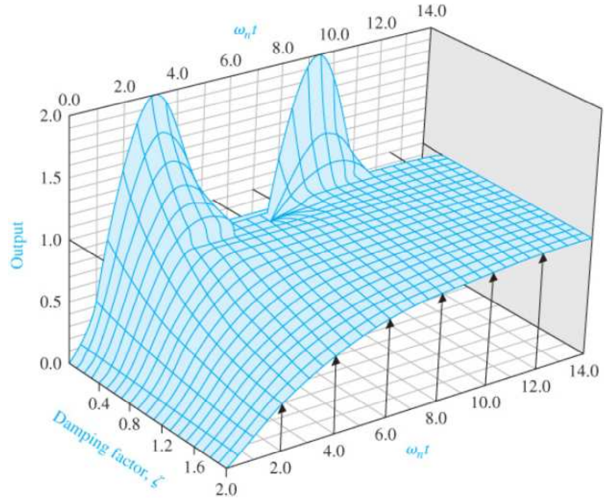
Ubicación en Plano *s* Respuesta Temporal

Respuesta Temporal Sistemas 2° Orden

La respuesta transitoria para varios valores de ζ se muestra a continuación.



Respuesta Temporal Sistemas 2° Orden



Respuesta Temporal Sistemas 2° Orden

Respuesta al impulso

Para ***R(s)* = *1*** o impulso unitario, la respuesta transitoria es

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad \rightarrow \quad y(t) = \frac{\omega_n}{\beta} e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen}(\omega_n \beta t)$$

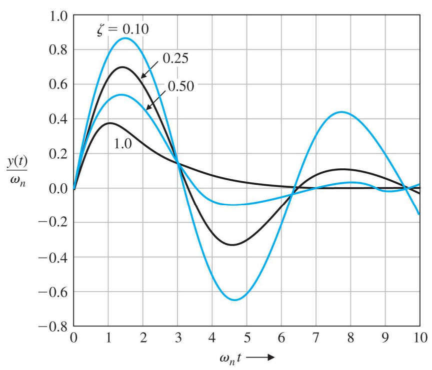


Figure: 05-06

Respuesta Temporal Sistemas 2° Orden

Las ***Medidas Estándar de Comportamiento*** se definen generalmente en términos de la respuesta paso.

- *Tiempo de Subida*: Indica la rapidez del cambio (T_r).
- *Tiempo de Pico*: El tiempo para el primer máximo (T_p).
- *Porcentaje de Sobrepico*: Es el porcentaje de sobrepaso (***PO***).
- *Tiempo de Establecimiento*: Corresponde a la duración del transitorio o tiempo de respuesta del sistema (T_s).

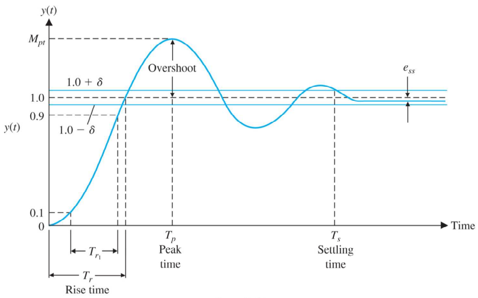


Figure: 05-07

Respuesta Temporal Sistemas 2° Orden

- ***Tiempo de Subida***:

Si el sistema es sobreamortiguado, el tiempo pico no está definido y el tiempo de subida se mide de ***10 – 90%***.

Para sistemas subamortiguados con sobrepico, el tiempo de subida se mide de ***0 – 100%***.

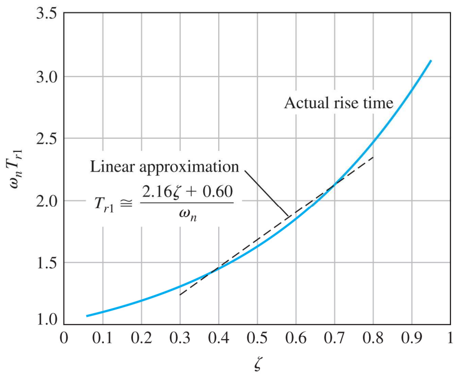


Figure: 05-09

Respuesta Temporal Sistemas 2° Orden

Respuesta de un sistema de 2° orden con ζ constante y variando ω_n.

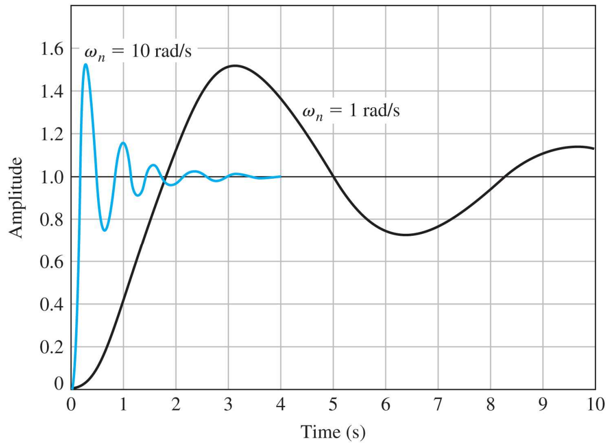


Figure: 05-10

Respuesta Temporal Sistemas 2° Orden

Respuesta de un sistema de 2° orden con ω_n constante y variando ζ.

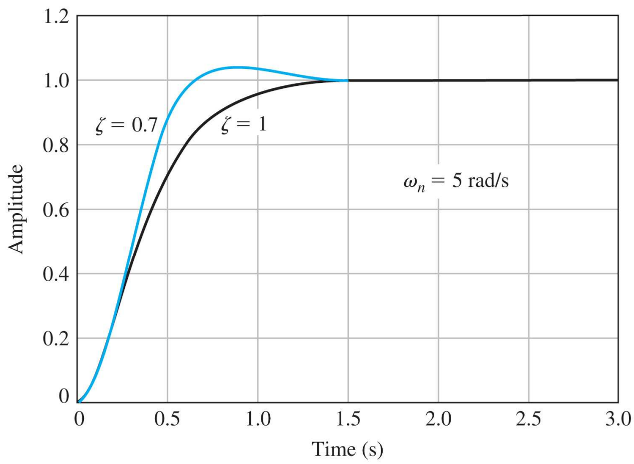


Figure: 05-11

Respuesta Temporal Sistemas 2° Orden

- ***Tiempo de Pico***: $T_p = \dfrac{\pi}{\omega_d} = \dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$

- ***Porcentaje de Sobrepico***:

$$PO(\%) = 100\% e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 100\% \frac{\Delta Over}{\Delta Output} = 100\% \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty) - y(0)}$$

Ejemplos

Respuesta Temporal Sistemas 2° Orden

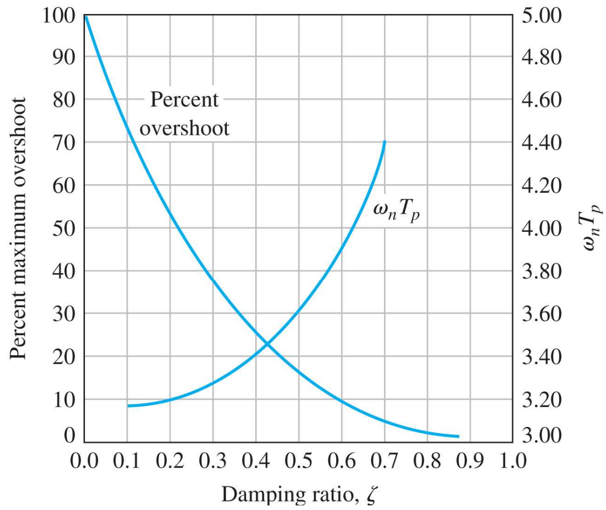


Figure: 05-08

Respuesta Temporal Sistemas 2° Orden

- *Tiempo de Asentamiento (Aproximaciones)*:

$$e^{-\zeta\omega_n T_s} = 0.02 \quad \rightarrow \quad \zeta\omega_n T_s \approx 4 \quad \rightarrow \quad T_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

OGATA [2]

$$t_{rta}\big|_{5\%} \approx \frac{3}{\zeta\omega_n}$$

$$t_{rta}\big|_{2\%} \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

KUO [3]

$$t_{rta}\big|_{5\%} \approx \frac{3.2}{\zeta\omega_n} \qquad (0 < \zeta < 0.69)$$

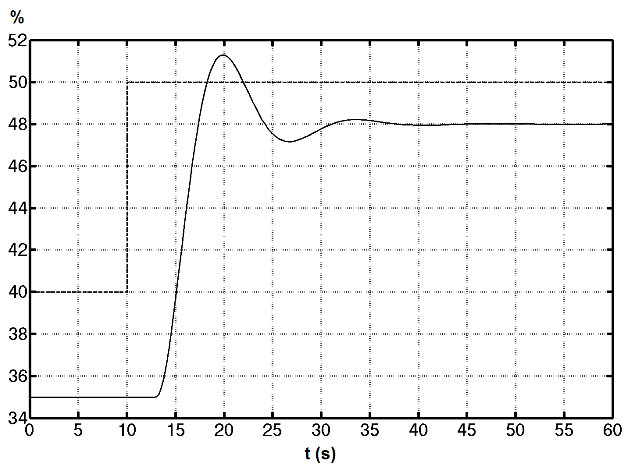
$$t_{rta}\big|_{2\%} \approx \frac{4.5\zeta}{\omega_n} \qquad (\zeta > 0.69)$$

La respuesta transitoria del sistema puede describirse en función de dos factores:

- La *rapidez de la respuesta*, representada por tiempo de subida y tiempo pico.
- La *proximidad de la respuesta a los valores deseados*, representada por el sobrepico y tiempo de asentamiento.

Respuesta Temporal Sistemas 2° Orden

Ejercicio Estimación de Parámetros Función de Transferencia



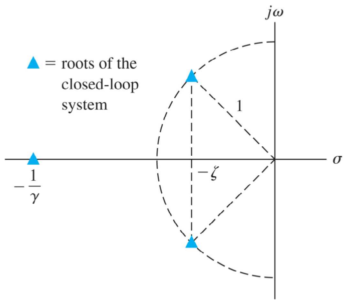
$$G(s) = \frac{K\omega_n^2 . e^{-T_0 s}}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Efectos de un Tercer Polo

Consideremos un sistema de tercer orden con función de lazo cerrado

$$T(s) = \frac{1}{(s^2 + 2\zeta s + 1)(\gamma s + 1)}$$

El diagrama en el plano *s* para dicho sistema es



Efectos de un Tercer Polo

La respuesta de un sistema de tercer orden se puede aproximar, mediante el **criterio de polos dominantes**, a un sistema de segundo orden si se cumple:

$$|1/\gamma| \geq 10|\zeta\omega_n|$$

La correlación de la respuesta en el dominio del tiempo de un sistema con la localización de los polos de la función de transferencia de lazo cerrado es útil para escoger las especificaciones de un sistema.

Efectos de un Tercer Polo

Example

In order to appreciate the response from multiple poles consider the step responses of two transfer functions each with three poles, a real pole and a complex pair. The example transfer functions are written in factored form, which of course corresponds to transfer functions in parallel, and are:-

$$G_1(s) = \frac{0.5}{s^2 + 0.2s + 1} + \frac{0.1}{s + 0.2}$$

and

$$G_2(s) = \frac{0.5}{s^2 + 0.2s + 1} + \frac{2.5}{s + 5}.$$

Efectos de un Tercer Polo

Example

$$G_1(s) = \frac{0.5}{s^2 + 0.2s + 1} + \frac{0.1}{s + 0.2}$$

$$G_2(s) = \frac{0.5}{s^2 + 0.2s + 1} + \frac{2.5}{s + 5}.$$

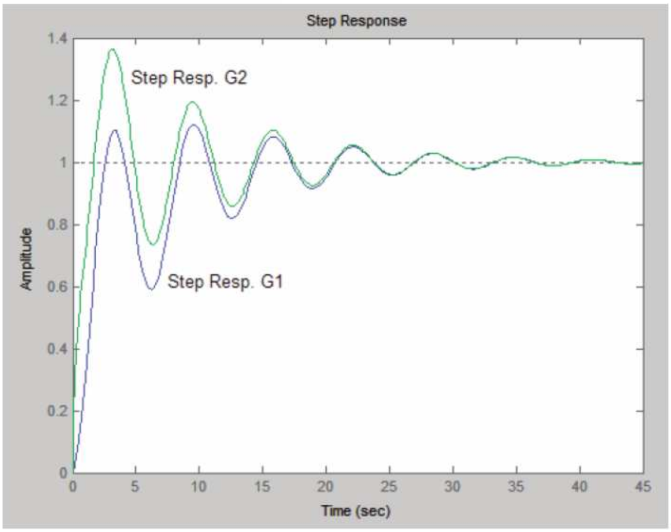
Analysis

Both transfer functions when written with a common denominator have two zeros and each term in G_1 and G_2 contributes a final value of 0.5, with the response from the complex poles the same The step responses are shown in Figure 3.5. The time constant of the single pole in G_1 is 5 seconds but only 0.2 seconds in G_2. Thus for the step response of G_1 the time constant slows the response down and the overshoot is not as large as it would be for the complex poles alone, although the response still oscillates. The smaller time constant of G_2 is evident in the rapid initial change in the step response.

Efectos de un Tercer Polo

Example

$$G_1(s) = \frac{0.5}{s^2 + 0.2s + 1} + \frac{0.1}{s + 0.2} \qquad G_2(s) = \frac{0.5}{s^2 + 0.2s + 1} + \frac{2.5}{s + 5}$$



Efectos de un Cero Adicional

Consideremos ahora el siguiente sistema:

$$G(s) = \frac{(1 + Ts)}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

Que como se observa, corresponde a un sistema de segundo orden con presencia de un ***cero*** en el numerador. El cero está ubicado en $s = -1/T$

Considérese inicialmente el siguiente caso en el que T=0 (cero en infinito):

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

Cuya respuesta ante entrada paso unitario es de la forma

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{2s} - \frac{1}{2(s+1)} + \frac{1}{2(s+2)}$$

Que en el dominio del tiempo corresponde a la expresión

$$y(t) = 0.5\left(1 - e^{-t} + e^{-2t}\right)$$ Sin overshoot, exponenciales decrecen

Efectos de un Cero Adicional

Consideremos ahora el caso en el que T ≠ 0 (cero finito):

$$G(s) = \frac{(1+Ts)}{(s+1)(s+2)}$$

Debido a las propiedades matemáticas asociadas a la transformada de Laplace, el término *s* que acompaña a T en el numerador puede ser visto como un operador de derivada en el tiempo, por lo cual y(t) puede expresarse en este caso como:

$$y(t) = 0.5\left(1 - e^{-t} + e^{-2t}\right) + 0.5T\frac{d\left(1 - e^{-t} + e^{-2t}\right)}{dt}$$

Se puede demostrar matemáticamente que para el caso la respuesta del sistema presentará overshoot para T>1.

A continuación se muestra el efecto gráficamente para T=0.5, T=1 y T=2.

Efectos de un Cero Adicional

Usando Matlab,

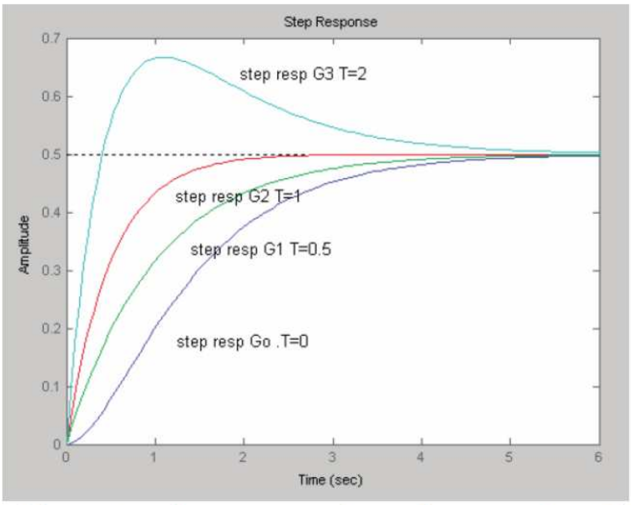
$$G(s) = \frac{(1+Ts)}{(s+1)(s+2)}$$

```
>> G0=tf([1],[1 3 2]);
>> step(G0)
>> hold
Current plot held
>> G1=tf([0.5 1],[1 3 2]);
>> G2=tf([1 1],[1 3 2]);
>> G3=tf([2 1],[1 3 2]);
>> step(G1)
>> step(G2)
>> step(G3)
```

where the ***hold*** statement keeps the plot allowing the responses to be compared.

Fuente: Control Engineering – An introduction with the use of Matlab, Derek Atherton, Free Book at Bookboon.com, 2009.

Efectos de un Cero Adicional

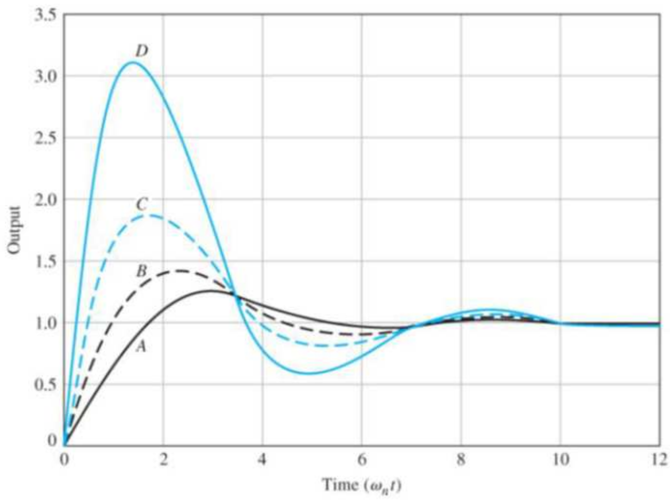


Respuesta del sist. 2º orden con cero adicional para varios valores de T

Fuente: Control Engineering – An introduction with the use of Matlab, Derek Atherton, Free Book at Bookboon.com, 2009.

Efectos de un Cero Adicional

De manera similar para un sistema subamortiguado, el efecto del cero adicional se aprecia en la siguiente figura para diferentes valores de T (El mayor valor de T corresponde al caso D):



Ejercicio Selección de Parámetros

Ejemplo: Selección de Parámetros

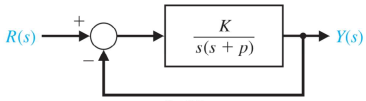


Figure: 05-14

Se debe seleccionar la ganancia $\boldsymbol{K}$ y el parámetro $\boldsymbol{p}$ con el fin de cumplir las siguientes especificaciones:

- Respuesta transitoria a un paso, lo más rápida posible.
- Porcentaje de sobrepico menor que el **5**%.
- Tiempo de asentamiento (**2%**) menor a **4**seg.

Se sabe que el factor de amortiguamiento, $\boldsymbol{\zeta}$, es de ***0.707*** para un sobrepico del ***4.3%***.

Ejercicio Selección de Parámetros

Dado que el tiempo de asentamiento es

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \leq 4\text{seg} \quad \rightarrow \quad \zeta\omega_n \geq 1$$

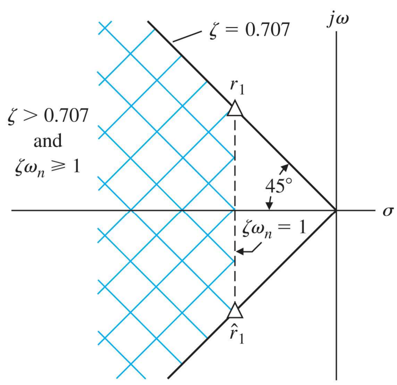


Figure: 05-15

Cuando las raíces de LC son $\boldsymbol{r_{1,2} = -1 \pm j}$, se tiene que $\boldsymbol{T_s = 4}$seg y $\boldsymbol{PO = 4.3}$%, entonces

$$\zeta = 1/\sqrt{2} \quad \text{y} \quad \omega_n = 1/\zeta = \sqrt{2}$$

Dado que

$$T(s) = \frac{K}{s^2 + ps + K} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$K = \omega_n^2 \quad \text{y} \quad p = 2\zeta\omega_n = 2$$

Localización de las Raíces y Respuesta Transitoria

La respuesta transitoria de un sistema de control retroalimentado se puede describir en función de la localización de los polos de la función de transferencia.

La función de transferencia de lazo cerrado en forma general es

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\sum P_i(s)\Delta_i(s)}{\Delta(s)}$$

donde $\boldsymbol{\Delta(s) = 0}$, es la ecuación característica.

La salida de un sistema sin raíces repetidas (con ganancia = ***1***) y una entrada de paso unitario puede expresarse como:

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \sum_{i=1}^{M} \frac{A_i}{s+\sigma_i} + \sum_{k=1}^{N} \frac{B_k s + C_k}{s^2 + 2\alpha_k s + \left(\alpha_k^2 + \omega_k^2\right)}$$

Localización de las Raíces y Respuesta Transitoria

Donde A_i, B_k y C_k son contantes. Las raíces del sistema pueden ser $s = -\sigma_i$ o pares conjugados complejos $s = -\alpha_k \pm j\omega_k$.

La respuesta transitoria es

$$y(t) = 1 + \sum_{i=1}^{M} A_i e^{-\sigma_i t} + \sum_{k=1}^{N} D_k e^{-\alpha_k t} \operatorname{sen}\left(\omega_k t + \theta_k\right)$$

donde D_k es una constante que depende B_k, C_k, α_k y ω_k.

Y se encuentra formada por la salida en estado estacionario, los términos exponenciales y las sinusoidales amortiguadas.

Para que la respuesta sea estable, es decir, limitada para una entrada paso, se requiere que las partes reales de las $-\sigma_i$ y $-\alpha_k$, estén en la parte izquierda del plano s.

Localización de las Raíces y Respuesta Transitoria

La respuesta a un impulso para distintas ubicaciones de raíces es:

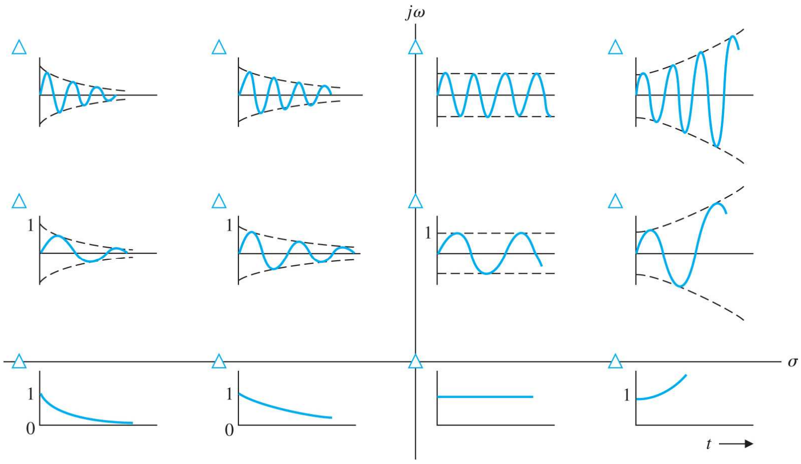


Figure: 05-17