Taller No. 1
Señales y sistemas II
John Alexander Cortés Romero
8 de Septiembre de 2011

1. Use la transformada de Laplace para encontrara la respuesta de

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

   debido a $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ y $u(t) = 1$ para $t \geq 0$.

   Compruebe la respuesta realizando una simulación en Matlab calculando primero la correspondiente función de transferencia (*ss2tf*) y luego empleando la función *step*, que realiza una simulación del sistema bajo una entrada paso unitario.

2. Realizar una discretización del sistema anterior (punto 1) considerando un tiempo de muestreo de $T = 0{,}1[s]$ y comprobar usando la función de Matlab *c2d*.

3. Calcule $y(k)$ para $k = 0, 1, 2, 3, 4$ para el siguiente sistema discreto

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)$$

   debido a $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}^T$ y $u(k) = 1$ para todo $k \geq 0$.

   Comprobar la respuesta utilizando la función de Matlab *lsim* (revisar también *filter*).

4. Considere el sistema descrito por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = 2\frac{du(t)}{dt} + u(t)$$

   a. Calcular la realización forma observable.

   b. Calcular la respuesta debida a $y(0^-) = 1$, $\dot{y}(0^-) = 2$ para $u(t) = 0$.

   c. Calcular la respuesta debida a $u(t) = 1$ para $t \geq 0$ con todas las condiciones iniciales iguales a cero.

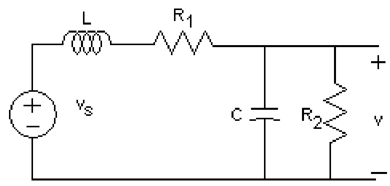
   d. Discretizar al sistema obteniendo la correspondiente ecuación de diferencias para un tiempo de muestreo T.

Sugerencia: $\frac{dy(t)}{dt} \approx \frac{y(kT+T)-y(kT)}{T}$ para un periodo T relativamente pequeño. De igual manera para $u(t)$.

e. Para el sistema discretizado, calcular la respuesta $\bar{y}(kT)$ debida a $\bar{u}(kT) = 1$ para $k \geq 0$ con todas las condiciones iniciales iguales a cero. Comparar $y(t)$ con $\bar{y}(kT)$, concluir.

f. Para una entrada paso unitario con condiciones iniciales iguales a cero, obtener una discretización del sistema (ecuación de diferencias que describe el sistema) tal que $y(kT) = y(t)|_{t=kT}$ (equivalente digital invariante al paso). Comparar con la ecuación de diferencias obtenida en el inciso (e) y concluir.

5. Considere el circuito mostrado en la figura:



a. Obtener el modelo en variables de estado correspondiente para entrada v_S y salida v.

b. Decidir si el sistema es controlable para el modelo obtenido (justificar su respuesta).

c. Si $R1 = R2 = L = C = 1$ calcular la realización forma controlable.

d. Diseñar un diagrama de bloques equivalente al circuito para entrada v_S y salida v compuesto por integradores sumadores y ganancias únicamente.

6. Considere un sistema en cascada cuyas relaciones entrada salida (funciones de transferencia) estas dadas por:

$$\frac{W_1(s)}{U(s)} = \frac{4s+2}{s+3}; \quad \frac{W_3(s)}{W_1(s)} = \frac{s^2+4s+8}{s^2+2s+2}$$

Obtener una realización para cada bloque independientemente y una del sistema total en cascada ($\frac{W_3(s)}{U(s)}$) que utilice las realizaciones anteriormente obtenidas.

7. Encontrar relizaciones en cascada y en paralelo de las siguientes funciones de transferencia:

a. $\frac{(s+3)^2}{(s+1)^2(s+2)}$

b. $\frac{(s+3)^3}{(s+2)^2(s^2+4s+6)}$

8. (Observabilidad caso continuo)

   En los sistemas en tiempo continuo se tiene una interpretacion de la controlabilidad tal como se expuso para el caso discreto. La observabilidad se puede caracterizar solo por el par $\{A, c\}$. Se plantea a continuacion una definición de la observabilidad para $u(t) = 0$.

   Definición. Un sistema

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \\ y(t) &= c\mathbf{x}(t) \end{aligned} \tag{1}$$

   es completamente observable si existe un $t_1 > 0$ tal que el conocimiento de $y(t)$ para todo t, $0 \leq t \leq t_1$ es suficiente para determinar $\mathbf{x}(0)$.

   El siguiente teorema establece exactamente el mismo resultado obtenido para la observabilidad del caso discreto, se solicita realizar la prueba del mismo.

   Teorema. El sistema 1 es observable si y solo si la matriz de observabilidad

$$O = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix}$$

   tiene rango n.

9. Para el sistema discreto

$$\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + bu(k)$$

   donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

   sea

$$b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   a. Para cada b determinar si el sistema es controlable.

   b. Para los casos que cumplan con la controlabilidad, encontrar la más pequeña secuencia de entrada que dirige el sistema de la condición inicial $\mathbf{x}(0)$ al estado cero:

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

10. Considere los dos siguientes sistemas dinámicos:

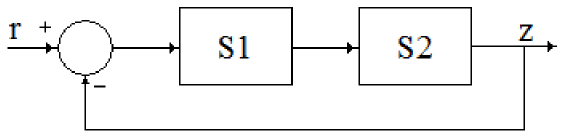
$$\begin{array}{cc} S1: & S2: \\ \dot{x}_1 = x_2 + u & \dot{x}_3 = x_3 + w \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + 3x_2 & z = x_3 \\ y = \alpha x_1 + x_2 & \end{array}$$

$S1$ tiene estado (x_1, x_2), entrada u y salida y. $S2$ tiene estado x_3, entrada w y salida z.

a. Determine cuando cada sistema es controlable y observable (Note que α es un parámetro).

b. Esos dos sistemas son conectados en serie, con $w = y$. El sistema resultante es llamado $S3$. Determine cunado $S3$ es controlable y observable.

c. Los sistemas ahora son conectados en una configuración en relimentacion tal como se muestra en la figura, para generar el sistema $S4$ (entrada r y salida z). Determinar cuando $S4$ es controlable y observable.



11. Muestre que el sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

es controlable si y solo si $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Muestre que el sistema es siempre *no* observable.

12. Muestre que el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

es controlable si y solo si $b_2 \neq 0$, independiente de b_1. Muestre que el sistema es siempre observable.

13. Para el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + u$$

con

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

a. Determinar si el sistema es controlable calculando la matriz de controlabilidad C.

b. Obtener una matriz de transfomación P tal que diagonalice A. Considerando el estado $\bar{x} = Px$, obtener la nueva representación en variables de estado (equivalente a la anterior) y calcular la matriz de controlabilidad de esta representación, concluir.