Divergencia y Rotacional

David Ricardo Martínez Hernández Código: 261931
Campos Electromagnéticos Grupo: 1

I. Divergencia de un Vector

La **divergencia** de **A** en un punto dado P es el flujo*hacia fuera* por unidad de volumen a medida que el volumen se contrae al redededor de P[1]. Por consiguiente:

$$divA = \nabla \cdot A = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint\limits_{s} A \cdot dS}{\Delta v} \tag{1}$$

donde, Δv es el volumen encerrado por la superficie cerrada S en la que se ubica.
La divergencia de un campo vectorial en un punto P es positiva cuando el vector se aparta (diverge) del punto, es negativa cuando el campo el vector campo vectorial entra (converge) al punto y es cero cuando cuando no hay concurrencia.
En **Coordenadas Cartesianas** la divergencia de un vector (D) en un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$\nabla \cdot D = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \tag{2}$$

Para **Coordenadas Cilíndricas** la divergencia esta dada por:

$$\nabla \cdot D = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho D_\rho\right)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \tag{3}$$

Para **Coordenadas Esféricas** la divergencia esta dada por:

$$\nabla \cdot D = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 D_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(D_\theta \sin\theta\right)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} \tag{4}$$

II. Rotacional de un vector

El **rotacional** de **A** es un vector axial (o rotacional) cuya magnitud es la circulación máxima de **A** por unidad de área conforme el área tiende a cero y cuya dirección es la dirección normal al área conforme el área se orienta de tal forma que ello resulta la circulación máxima[2]. Por consiguiente:

$$rotD = \nabla \times D = \left(\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint\limits_{L} A \cdot dl}{\Delta S}\right)_{\text{máx}} a_n \tag{5}$$

donde, ΔS está en circunscrita por la curva L y a_n es el vector unitario normal a la superficie ΔS, el cual se determina aplicando la regla de la mano derecha.
En **Coordenadas Cartesianas** el rotacional de un vector (D) en un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$\begin{gathered}\nabla \times D = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ D_x & D_y & D_z \end{vmatrix} \\ \nabla \times D = \left[\frac{\partial D_z}{\partial y} - \frac{\partial D_y}{\partial z}\right] a_x + \left[\frac{\partial D_x}{\partial z} - \frac{\partial D_z}{\partial x}\right] a_y + \left[\frac{\partial D_y}{\partial x} - \frac{\partial D_x}{\partial y}\right] a_z\end{gathered} \tag{6}$$

Para **Coordenadas Cilíndricas** el rotacional esta dado por:

$$\begin{gathered}\nabla \times D = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} a_\rho & a_\phi & a_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ D_\rho & \rho D_\phi & D_z \end{vmatrix} \\ \nabla \times D = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial D_z}{\partial \phi} - \frac{\partial D_\phi}{\partial z}\right] a_\rho + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial D_\rho}{\partial z} - \frac{\partial D_z}{\partial \rho}\right] a_\phi + \left[\frac{\partial(\rho D_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial D_\rho}{\partial \phi}\right] a_z\end{gathered} \tag{7}$$

[1]Definición tomada del libro [1], *pag 69*
[2]Definición tomada del libro [1], *pag 76*

Para **Coordenadas Esféricas** el rotacional esta dado por:

$$\nabla \times D = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} a_r & r a_\theta & r \sin\theta a_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ D_r & r D_\theta & D_\phi \end{vmatrix} \tag{8}$$

$$\nabla \times D = \frac{1}{r \sin\theta} \left[\frac{\partial (D_\phi \sin\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial D_\theta}{\partial \phi} \right] a_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial D_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r D_\phi)}{\partial r} \right] a_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r D_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial D_r}{\partial \theta} \right] a_\theta$$

REFERENCIAS

[1] Matthew N. O. Sadiku. «*Elementos de Electromagnetismo*». OXFORD University Press, 2003.
[2] Roland E. Larson, Robert P. Hostetler. «*Cálculo y Geometría Analítica*». Mc Graw Hill.