UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA
NOTAS DE CLASE

UNIDAD II. PROBABILIDAD

VARIABLES ALEATORIAS Y SUS DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD.

En la mayoría de los casos de experiencias aleatorias resulta útil asociar a los eventos la descripción de diversos fenómenos mediante un número. Una variable aleatoria permite pasar de los posibles resultados experimentales a una función numérica de resultados.

VARIABLE ALEATORIA (**v.a**): "Es una función cuyos valores son números reales asociados con cada evento elemental del espacio muestral Ω, resultante de un experimento aleatorio". Se identifica generalmente con letras mayúsculas, (X, Y, Z, W) dejando las minusculas para los valores que puede asumir (x, y, z, w).

Formalmente una v.a. X es una función definida asi:

$$X: \quad \Omega \text{ - - - - - - - - - } \rightarrow \mathbf{R}$$
$$w \text{ - - - - - - - - - } \rightarrow X(w)$$

X se llama v.a si $\{w : X(w) \leq : r, para \text{ algún } r \in \mathbf{R}\} \subset \Omega$

Ejemplo: Sea el experimento aleatorio la prueba de tres componentes electrónicos escogidos al azar y la calificación de cada uno como aceptable (A) o como defectuoso (D).

$$\Omega = \{AAA, AAD, ADA, DAA, DDD, DDA, DAD, ADD\}$$

Supongamos que estamos interesados en el número de componentes defectuosos que ocurren al realizar el Experimento Aleatorio. Así, a cada evento elemental de Ω se le asignará un valor numérico de: 0, 1, 2, 3 que son cantidades determinadas por el resultado del expermiento aleatorio.

X: " Número de componentes defectuosos". Por lo tanto :$x = 0, 1, 2, 3$ componentes defectuosos. Se puede conocer la probabilidad para cada valor x que asume la v.a.

$P(x = 0) = \frac{1}{8}$
$P(x = 1) = \frac{3}{8}$
$P(x = 2) = \frac{3}{8}$
$P(x = 3) = \frac{1}{8}$

Las variables aleatorias se clasifican como: discretas y continuas.

Variable Aleatoria Discreta: La v.a. X se considera discreta si solamente puede asumir un conjunto finito ó contable de valores al ser aplicada sobre los eventos correspondientes del experimento.aleatorio. Es decir X es v.a discreta si su recorrido se puede poner en correspondencia con los números enteros positivos.

Ejemplo: **1**) Número de bacterias por unidad de área. **2**) Número de unidades defectuosas en lote de unidades producidas. 3) Número de imperfecciones en lámina de plástico.

Variable Aleatoria Continua: La v.a. X se considera contínua si su recorrido como función sobre los eventos de una experiencia aleatoria pertenece a un conjunto de intervalos de números reales. Se dice de la variable aleatoria continua X lo será si puede asumir valores en escalas continuas en el intervalo de definición de la v.a. X.

Ejemplo: Peso, longitud, resistencia a la compresión o a la tensión, voltaje de salida, temperatura, entre otras, son consideradas v.a continuas en cuanto su medición tiene niveles de incertidumbre producidos por los factores no controlables en la situación experimental

1. Distribución de Probabilidad de v.a discreta .

”Si la variable aleatoria X puede asumir una serie de valores: $x_1,\ x_2,\ldots,x_k$ (o $x_1,\ x_2,\ldots,$); y para cada uno de esos valores se conoce su probabilidad: $f(x_1),\ f(x_2),\ldots.$. tales que $\sum f(x_i) = 1$, se dice que una distribución de probabilidades queda definida”.

El conjunto de pares ordenados (x, $f(x)$) es función de probabilidad, función masa de probabilidad o distribución de probabilidad de la variable aleatoria discreta X, si para cada posible resultado x se cumple:

1. $f(x) \geq 0$
2. $\sum f(x_i) = 1$

Para cualquier valor de x que no tenga asignada probabilidad o no sea uno de los valores en el intervalo específico, se supone que $f(x) = 0$

Toda distribución o función de probabilidad puede ser representada por un tabla. una gráfica o una formula que necesariamente sería una función de los valores numéricos de x, o sea $f(x)$

Ejemplo: Tomemos el caso del examen de una muestra aleatoria de tres unidades para detectar su estado al ser producida cada una (A=Aceptable, D=Defectuosa).

Ya vimos que: $S = \{AAA, AAD, ADA,\ DAA, DDD, DDA, DAD, ADD\}$

Si X el número de unidades defectuosas. Entonces $x = 0,1,2,3$ y podemos construir la correspondiente distribución de probabilidad.

a) Por tabla:

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Que descrita como función quedará:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}\ \ si\ x = 0 \\ \frac{3}{8}\ si\ x = 1 \\ \frac{3}{8}\ si\ x = 2 \\ \frac{1}{8}\ si\ x = 3 \\ 0\ en\ \ otro\ \ caso \end{cases}$$

b) Por Gráfica:

c) Por formula $f(x) = P(X = x) = \dfrac{\binom{3}{x}}{8}$ para x= 0, 1, 2, 3

Ejemplo: Un sistema de inspección óptica es capaz de detectar imperfecciones en el examen de componentes de un aparato electrónico. La probabilidad de encontrar una componente correcta (C) es de 0.98. Suponga que se inspeccionan tres componentes elegidas al azar con reemplazamiento de un lote de tales componentes. Sea X= la variable aleatoria que representa el número de componentes correctas de la muestra. Hallar la función de probabilidad respectiva (donde I representa componente imperfecta).

Entonces: $\Omega = \{CCC, CCI, CIC, ICC, III, IIC, ICI, CII)$

Luego la tabla resultante como distribución de probabilidad será:

x	0	1	2	3
f(x)	$8*10^{-6}$	0.0017	0.0576	0.9412

Se puede calcular la probabilidad del evento $\{X \leq x\}$ para toda ($-\infty < x < \infty$) sumando las probabilidaes que corresponden a los valores de X que pertenencen al intervalo ($-\infty$ x). Es la probabilidad de que el valor observado de una variable aleatoria X sea " menor o igual", que algún número real x. Se llama función de distribución acumulada o distribución acumulada de probabilidad y se simboliza por F(x).

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) \; donde \; x \in \mathbf{R}$$

Existen tres propiedades básicas de la función de distribución acumulada:

1. $\lim_{x \to \infty} F(X) = 1$
2. $\lim_{x \to -\infty} F(X) = 0$
3. $F(x) \leq F(x + \varepsilon)$ para todo $\varepsilon \geq 0$

También y dependiendo del objetivo del análisis, se puede hallar

$$G(x) = P(X \geq x) = \sum_{x_i \geq x} f(x_i)$$

Serán funciones concordantes con el sentido acumulativo ascendente o descendente de las probabilidades. Es función monótona, creciente o decreciente, de cero a uno ó de uno a cero.

Ejemplo: Retomando el examen de las tres unidades, obtenemos la F(x).

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
$F(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$

Así: $F(2) = P(x \leq 2) = f(x = 0) + f(x = 1) + f(x = 2) = \frac{7}{8}$

y que se puede expresar como función:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad x < 0 \\ \frac{1}{8} & \text{para} \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{4}{8} & \text{para} \quad 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8} & \text{para} \quad 2 \leq x < 3 \\ \frac{8}{8} & \text{para} \quad 3 \leq x \end{cases}$$

Su representación gráfica es la siguiente:

Con base en F(x) se puede cálcular matemáticamente f(x). Supongamos 2 números: a y b, con $a < b$. Entonces:

P$(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a_{-})$.

donde (a_{-}) es el valor máximo posible de X que sea estrictamente menor que ”a”

Ejemplo: : Sea el lanzamiento de un par de dados correctos donde X=Suma obtenida de puntos Construyamos su distribución de probabilidades:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$F(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{36}{36}$

Si queremos averiguar $P(4 \leq X \leq 8)$, entonces:

$P(4 \leq X \leq 8), = F(8) - F(3) = \frac{26}{36} - \frac{3}{36} = \frac{23}{36}$

Que sería para el caso: $P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8)$

$= \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{6}{36} + \frac{5}{36} = \frac{23}{36}$

1.1 Caracteristicas de las Distribuciones de Probabilidad de v.a. Discretas.

Así como se hizo en la fase de la estadística descriptiva, para analizar una variable aleatoria y sus distribuciones de probabilidad, se deben considerar las características de tendencia central generalmente a través de la media, la mediana y la moda; de variación o de dispersión a través de su varianza y la deformación o sesgo a través de su gráfica y coeficiente de sesgo.

1.1.1 Valor Esperado (Esperanza Matemática) y Varianza de Variables Aleatorias Discretas

El valor esperado $E(X)$ de una variable aleatoria tiene sus origenes, como la probabilidad, en los juegos de azar pues los apostadores deseaban saber cuál era su esperanza o expectativa de ganacia en un juego.

” *El Valor Esperado o Esperanza Matemática* de una v.a. discreta, en sentido empírico, es el promedio o valor medio de X después de un número grande de experimentos. En sentido teórico es el valor de equilibrio en la distribución de probabilidad de los valores de la v.a..

$E(X) = \sum xf(x) = \mu$

”La *Varianza* es la medida de la variabilidad o dispersión de los valores posibles de X frente a su valor esperado o media ”

$\sigma^2 = V(X) = E[(X - \mu)^2] = \sum(x_i - \mu)^2 f(x)$

Y que se puede calcular mediante la formula más simplificada:

$E(X^2) - \mu^2$ donde $E(X^2) = \sum x^2 f(x)$ es decir: $\sigma^2 = \sum x^2 f(x) - \mu^2$

Se pueden plantear tambien otras medidas de variación o dispersión. Es el caso de:

-*La desviación típica*, que como en la estadística descriptiva corresponde a la raíz cuadrada positiva de σ^2:

$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ es decir, $\sqrt{Varianza}$ y que será una medida absoluta y no siempre la más confiable al comparar dos distribuciones expresadas incluso en las mismas unidades.

Una medida que permite comparar la dispersión o variación de dos distribuciones de probabilidad con escalas de medición diferentes es el **coeficiente de variación**, que es una medida adimensional o expresada sin unidad específica.

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} * 100$$

El k –ésimo Momento Central de una distribución de probabilidad se define como:

$$\mu_k = E[(x-\mu)^k] = \sum (x-\mu)^k f(x)$$

Asimetría: El tercer momento central está relacionado con la forma o análisis de asimetría de una distribución de probabilidad.

$$\mu_3 = E[(x-\mu)^3] = \sum (x-\mu)^3 f(x)$$

Para el caso particular de distribuciones unimodales ó de un solo pico, el análisis de μ_3 se realiza considerando que si:

$\mu_3 > 0$ Entonces existe asimetía positiva o a la derecha.

$\mu_3 < 0$ Entonces existe asimetía negativa oa la izquierda.

$\mu_3 = 0$ Entonces es simétrica.

Una medida adecuada para comparación con otras distribuciones es el coeficiente de asimetría que será una medidad relativa o adimencional. Se define de la siguiente manera:

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{(\mu_2)^{3/2}}$$

Ejemplo: Retomando el ejemplo del examen de las tres unidades:

x	$f(x)$	$xf(x)$	$(x-\mu)f(x)$	$(x\text{-}\mu)^2 f(x)$	$(x-\mu)^3 f(x)$
0	$\frac{1}{8}$	0	-1.5	0.28125	-0.421875
1	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	-0.5	0.09375	-0.046875
2	$\frac{3}{8}$	$\frac{6}{8}$	+0.5	0.09375	0.046875
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	+1.5	0.28125	0.421875
Total	1	$\frac{12}{8}$	0	0.7500	0

Media: $\mu = E(X) = \sum xf(x) = \frac{12}{8} = 1.5$

Varianza: $\sigma^2 = \sum (x-\mu)^2 f(x) = 0.75$

Desviación estándar=$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0.75} = 0.8660254$

Coeficiente de variación: $CV = \frac{\sigma}{\mu}(100) = \frac{0.8660254}{1.5} = 0.577$

Sesgo o asimétria: $\mu_3 = 0$ que es así en este caso por cuanto la distribución del ejemplo es simétrica. Si fuera asimétrica, μ_3 daría positivo o negativo según fuera la asimetría a derecha o a izquierda.

Ejemplo: las muestras de cierta materia prima se clasifican según su contenido de humedad y de impurezas, obteniendose estos resultados:

Caracterice su distribución de probabilidad para el contenido de humedad.

$Cont.imp \diagdown Cont.\ Hum$	3%	4%	Total
1%	5	14	19
2%	57	4	61
Total	62	18	80

Media: $\mu = E(X) = \sum xf(x) = 3(\frac{62}{80}) + 4(\frac{18}{80}) = 3.225$ que para el caso es lo mismo que:
$\mu = \dfrac{3(62)+4(18)}{80} = 3.225$

Varianza=$\sigma^2 = \sum(x-\mu)^2 f(x) = (3-3.225)^2(\frac{62}{80}) + (4-3.225)^2(\frac{18}{80}) = 0.174$

Desviación estándar=$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0.174} = 0.417$ (Que es caso particular en que $\sigma > \sigma^2$)

Coeficiente de asimetría: $\mu_3 = E[(x-\mu)^3] = \sum(x-\mu)^3 f(x)$.

$$= (3-3.225)^3 f(x) + (4-3.325)^3 f(x)$$
$$= -0.008827 + 0.0619198 = 0.06037$$

$\alpha_3 = \dfrac{\mu_3}{(\mu_2)^{3/2}} = \frac{0.06037}{(0.174)^{3/2}} = 3.47$

En algunos casos, se tiene interés en transformaciones de una variable aleatoria X, que tiene función de distribución de probababildad conocida $f(x)$. Se denotan en forma general como la función $H(x)$.

Las medidas características de esas transformaciones se obtienen asi:.

$E[H(x)] = \sum h(x)f(x)$.

Ejemplo: Un taller de mecánica automotríz afina motores de diferente número de cilindros: 4, 6 y 8. Se plantea que el costo de afinación se establece con base en la función:
$150000 + 5000x + 500x^2$ Se sabe además que la probabilidad de que al taller llegue un auto de 4 cilindros es de 0.50, de 6 cilindros es de 0.30 y de 8 cilindros es de 0.20.

Cuál es el costo esperado de afinación de un vehículo que llegue al taller?

Sea X=Número de cilindros del motor.

H(x)= Costo de afinación de los cilindros del vehículo

Entonces: $h(4) = 150000 + 5000(4) + 500(4)^2 = 178000$

$h(6) = 150000 + 5000(6) + 500(6)^2 = 198000$

$h(8) = 150000 + 5000(8) + 500(8)^2 = 222000$

Luego: E$[H(x)]$ =1780000(0.50)+198000(0.30)+222000(0.20)

=192000

Propiedades del Valor Esperado:

1- El valor esperado de una cantidad no aleatoria K (o sea una constante) es igual a la constante.

$E(K)=\sum KP(K) = K\sum P(K) = K$ pues $\sum P(K) = 1$

2- El valor esperado del producto de una constante por una función de una variable aleatoria es igual al producto de la constante por el valor esperado de la función.

$$E[Kh(x)] = KE[h(x)]$$

2. MODELOS DE DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD DE VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS.

Una distribución de probabilidad, sea discreta o continua, se dijo podía ser representada por una gráfica, por un sistema tabular o por una fórmula. Es frecuente que las observaciones resultantes de diferentes experimentos aleatorios tengan el mismo tipo general de comportamiento probabilistico, lo cual conduce a que variables aleatorias se puedan describir con la misma distribución de probabilidad y por lo tanto se puedan representar por un fórmula general. Entonces solo se necesitan unos pocos modelos de distribuciones de probabilidad importantes para lograr describir el comportamiento de muchas variables aleatorias del tipo discreto o continuo. Son representaciones exactas, puesto que son modelos teóricos del comportamiento de las variables en las poblaciones. Son familias de distribuciones representadas por un modelo.

Cada distribución de probabilidad modelo, está caraterizada de manera general por una o más cantidades llamadas ”*parámetros*” que pueden tomar cualquier valor de un conjunto dado y así conformar la familia de distribuciones de probabilidad con la misma función genérica de probabilidad; son parámetros de conteo. proporción, localización, dispersión y forma.

2.1. Distribución Uniforme Discreta: X ~UD(κ)

Es la más simple de todas las distribuciones modelo y en ella la variable aleatoria asume cada uno de los valores con una probabilidad idéntica.

” Sea la variable aleatoria X que puede asumir valores $x_1, x_2, \ldots x_k$ con idéntica probabilidad. Entonces la distribución uniforme discreta viene dada por:}

$$f(x) = p(x = X) = \begin{cases} \frac{1}{\kappa} & \text{para } \; x = x_1, x_2, \ldots x_k \\ o \text{ en otro caso} \end{cases}$$

O sea que el parámetro clave en esta distribución es **κ**=número de valores que asume la variable aleatoria X y que sería un parámetro de contéo.

Así por ejemplo cuando se lanza un dado correcto, cada una de las seis caras posibles conforman el espacio muestral: $\Omega = \{1P, 2P, 3P, 4P, 5P, 6P\}$, La v.a X: número de puntos en la cara superior del dado tiene una distribución de probabilidad Uniforme discreta, puesto que: $f(x) = P[X = x]=\frac{1}{6}$ para $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$f(x) = P[X = x] = 0$ en otro caso

La representación gráfica de esta distribución de probabilidad puede hacerse con un histograma para v.a. discreta, $f(x)$, es en este caso la altura de $\frac{1}{6}$

Planteemos sus características principales de tendencia central y dispersión.

El valor esperado y varianza de una distribución discreta uniforme se obtienen así:

Valor esperado ($\mu = E(X)$)

$$\mu = E(X) = \sum_{\nabla x_i} x_i f(x) = \sum_{i=1}^{\kappa} x_i \left(\frac{1}{\kappa}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{\kappa} x_i}{\kappa}$$

Varianza (σ^2)

$$\sigma^2 = E[(x-\mu)^2] = \sum_{\nabla x}(x_i-\mu)^2 f(x) = \sum_{i=1}^{\kappa}(x_i-\mu)^2\left(\frac{1}{\kappa}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{\kappa}(x_i-\mu)^2}{\kappa}$$

Para el caso del lanzamiento del dado: el valor esperado y la varianza del número de puntos en la cara superior son:

$E(X) = \mu = \frac{21}{6} = 3.5$
$\sigma^2 = \frac{35}{12}$

Ejercicio: (Walpole, pág 122) Selección de un empleado entre equipo de 10 con el fin de supervisar un proyecto especifico. Esa selección se hace al azar utilizando papeleta con números.

a- Cuál es la probabilidad de que el número de la papeleta seleccionado sea menor de 4? (*Respuesta* = 3/10)

b- Cuál es la media y la varianza de la distribución de probabilidad.? *Respuesta* $\mu = 5.5$ y $\sigma^2 = 8.25$

2.2 Distribución Binomial: X ~ b(η,ρ).

Es una de las distribuciones de probabilidad más útiles (control de calidad, producción, investigación). Tiene que ver con el experimento aleatorio que produce en cada ensayo o prueba uno de dos resultados posibles mutuamente excluyentes: ocurrencia de un criterio o característica específico (llamado éxito) y no ocurrencia de éste (llamado fracaso). Los términos o calificativos de ”éxito y fracaso” son solo etiquétas y su interpretación puede no corresponder con el resultado positivo o negativo de un experimento en la realidad.

Ejemplo: Éxito podría ser hallar en un ensayo específico que la unidad es defectuosa al examinarla. Cada experimento aleatorio consiste en una serie de ensayos o pruebas repetidas realizadas en idénticas condiciones (η veces), o sea que cada uno de ellos es independiente de los demás.

Sea **ρ** la probabilidad de éxito cada vez que el experimento se realiza y $(1-\rho) = \mathbf{q}$ la probabilidad de fracaso. Sea X la variable aleatoria que representa el número de éxitos en los **η** ensayos o pruebas. El interés se centra en conocer la probabilidad de obtener exactamente *x* éxitos en esos **η** ensayos. $P(X = x)$.

2.2.1 Criterios o propiedades para definir la Distribución Binomial.

Resumiendo, podemos definir estos criterios:

1- El experimento aleatorio consiste en **η** ensayos o pruebas repetidas, e idénticas y fijadas antes del experimento (pruebas de Bernoulli). Son pruebas con reemplazamiento o con reposición.

2- Cada uno de los **η** ensayos o pruebas arroja solo uno de dos resultados posibles resultados: éxito ó fracaso.

3- La probabilidad del llamado éxito (*ocurrencia*) = **ρ**, pemanece costante para cada ensayo o prueba.

4- Cada prueba o ensayo se repite en idénticas condiciones y es independiente de las demás.

Cuando estas propiedades se cumplen en el experimento aleatorio se dice que el constituye un proceso de Bernoulli y cada uno de los ensayos que lo conforman se llama experimento de Bernoulli.

5. El interés recae en hallar la probabilidad de obtener *x* número de éxitos al realizar **η** ensayos del mismo E.A.

La función de probabilidad de X en esas condiciones será:

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \binom{\eta}{x}\rho^x(1-\rho)^x & \text{para } x = 0,1,2,\ldots,\eta \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para **η** entero y $0 \leq \rho \leq 1$

2.2.2 Planteamiento Básico.

Supongamos un proceso productivo en serie de una misma unidad metalmecánica y en él que: Probabilidad de una unidad defectuosa : $\rho = 0.10$ y probabilidad de unidad no defectuosa: $(1-\rho) = 0.90$.

Supongamos que el interés está en evaluar el proceso mediante una muestra aleatoria de 4 unidades y por tanto se define la v.a X como el número de unidades defectuosas en la muestra. Para garantizar que los ensayos resulten independientes hacemos la selección con reemplazamiento o sustitución.

Supongamos que centramos nuestro interes en $x = 1$ unidad defectuosa en las cuatro pruebas o ensayos. Sea B=bueno y D= defectuoso. Por lo tanto el Ω esta conformado por 16 resultados posibles

$S = \{BBBB,\ BBBD,\ .....,\ DBDD,\ DDDD\}$.

Se puede entonces notar que los eventos favorables a $x = 1$ constiuyen el subconjunto $\{(BBBD), (BBDB), (BDBB), (DBBB)\}$. Como no importa el orden de aparición de la unidad defectuosa sino que aparezca exactamente una unidad con esa característica tenemos:

$$\left.\begin{aligned} P(BBBD) &= (0.9)(0.9)(0.9)(0.1) \\ P(BBDB) &= (0.9)(0.9)(0.1)(0.9) \\ P(BDBB) &= (0.9)(0.1)(0.9)(0.9) \\ P(DBBB) &= (0.1)(0.9)(0.9)(0.9) \end{aligned}\right\} = \rho^1(1-\rho)^3, \text{ o sea: } (0.1)^1(0.9)^3 = 0.0729 \text{ para cada}$$

posible resultado de una unidad defectuosa

Como son cuatro resultados los que satisfacen el interés específico de 1 unidad defectuosa entonces $f(1) = P(X = 1) = ´(4)(0.0729)$

Si generalizamos: $P(X = x) = \binom{\eta}{x}\rho^x(1-\rho)^{\eta - x}$ donde: $\binom{n}{x}$ son las distintas maneras como x éxitos se producen dentro de los η ensayos; $\rho^x(1-\rho)^{n-x}$ es la probabilidad de x éxitos en cada una de las maneras distintas de producirse los x éxitos .

Para el caso del ejemplo: $f(1) = P(X = 1) = \binom{4}{1}(0.1)^1(0.9)^3 = 0.2916$

Consideremos el caso ya no de $x = 1$ defectuoso; sino todos los valores que puede asumir X en las cuatro pruebas.

$P(X = 0) = f(0) = \binom{4}{0}(0.1)^0(0.9)^4 = 0.6561$
$P(X = 1) = f(1) = \binom{4}{1}(0.1)^1(0.9)^3 = 0.2916$
$P(X = 2) = f(2) = \binom{4}{2}(0.1)^2(0.9)^2 = 0.0486$
$P(X = 3) = f(3) = \binom{4}{3}(0.1)^3(0.9)^1 = 0.0036$
$P(X = 4) = f(3) = \binom{4}{4}(0.1)^4(0.9)^0 = 0.0001$

Como son 4 ensayos y consideramos todos los posibles valores de $(x = 0, 1, 2, 3, 4)$, entonces la $\sum_{x=0}^{4} f(x) = 1$

Los valores de $f(x)$ se pueden calcular por medios electrónicos ó utilizando las tablas de la distribución binomial que proporcionan la solución de estas operaciones, a veces largas o laboriosas.

Con los resultados de esos cálculos podemos construir la tabla de distribución de probabilidades, hacer su gráfica y definir sus principales características.

Tomemos como ejemplo la distribución binomial de parámetros $\boldsymbol{\eta = 3}$ **y** $\boldsymbol{\rho = 0.90}$

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.729	0.243	0.027	0.001

2.2.3. CARACTERISTICAS DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL.

a) Tendencia central: Valor Esperado $\mu = E(X) = \sum xf(x)$ aplicando la definición de valor esperado se obtiene que para esta distribución : $\mu = \eta\rho$

b) Dispersión ó variación: varianza: $\sigma^2 = V(X) = E[(x-\mu)^2] = \sum(x-\mu)^2 f(x)$ lo que conduce a que una v.a. binomial X tiene como varianza $\sigma^2 = \eta\rho(1-\rho)$.

Por lo tanto su desviación estandar: $\sigma = \sqrt{\eta\rho(1-\rho).}$.

c) Asimetria ó deformacíon (Forma): con base en la razón entre los momentos centrales de orden dos y tres como quedo definido antes:

$$\alpha_3 = \frac{1-2\rho.}{[\eta\rho(1-\rho)]^{1/2}}$$

sobre la base de que si: $\begin{cases} \rho = 1/2 \text{ será } \alpha_3 = 0 \text{ y simétrica.} \\ \rho < 1/2 \text{ será } \alpha_3 > 0 \text{ y sesgo } (+) \\ \rho > 1/2 \text{ será } \alpha_3 < 0 \text{ y sesgo } (-) \end{cases}$

Generalmente la distribución binomial es sesgada ó asimetrica hacia la derecha, sesgo que se va perdiendo cuanto más grande sea el valor de η (# de pruebas) y en la medida en que ρ se acerque a 0.5 (por lo tanto $(1-\rho)$ tienda a 0.5), limite en el cual se torna simétrica

Para el caso considerado y utilizando tanto la metodología tradicional de la definición de conceptos como usando las fórmulas simplificadas, tenemos:

x	$f(x)$	$xf(x)$	$(x-\mu)$	$(x-\mu)^2$	$(x-\mu)^2 f(x)$
0	0.729	0	−0.3	0.09	0.06561
1	0.243	0.243	+0.7	0.49	0.11907
2	0.027	0.054	+1.7	2.89	0.07803
3	0.001	0.003	+2.7	7.29	0.00729
Total	1.000	0.30	0		0.27000

$E[X] = \mu = \sum xf(x) = 0.30$; tambien $E[X] = \mu = \eta\rho = 3(0.1) = 0.30$.

$V[X] = \sigma^2 = \sum(x-\mu)^2 f(x) = 0.27$; $V[X] = \sigma^2 = \eta\rho(1-\rho) = 3(0.1)(0.9) = 0.27$.

Su función de distribución acumulada sera: $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{y=0}^{x} \binom{\eta}{y} \rho^y (1-\rho)^{\eta-y}$.

Ejemplo: Una empresa adoptó un proceso de control ded calidad consistente en diariamente seleccionar al azar 20 unidadeds del total producido y conocer el número de unidades defectuosas. El plan establece que si al examinar diariamente las veinte unidades, tres ó mas salen defectuosas, algo esta pasando y se ordena detener el proceso productivo para buscar la falla. Cúal es la probabilidad de que se ordene parar el proceso productivo si se sabe por experiencia que la probabilidad de una unidad defectuosa es 10%?

$$\left.\begin{array}{l} \eta = 20 \\ \rho = 0.1 \\ P(x \geq 3) \end{array}\right\} \text{Se pide: } p(X \geq 3) = \sum_{k=3}^{20} \binom{20}{k} (0.1)^x (0.9)^{20-k} = 0.40.$$

La solución más corta para este planteamiento sería entonces:

$p(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \sum_{x=0}^{2} \binom{20}{x} (0.1)^x (0.9)^{20-x} = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X$

$= 1 - [0.1216 + 0.2852 + 0.1901] = 1 - [0.5969] = 0.4031.$ o sea 40%; que sera la probabilidad de que cualquier dia se ordene parar el proceso de producción según el planteamiento de control del mismo.

Si consideramos las características, tenemos:

Valor esperado $E(X) = \mu = \eta\rho = 20(0.1) = 2$ unidades defectuosas.

Varianza $\sigma^2 = \eta\rho(1 - \rho) = 20(0.1)(0.9) = 1.8$

Valores que como es lógico tambien pueden ser hallados por el método tradicional.

Si se hace la grafica para determinar la forma (aunque se deduce que como $\rho < \frac{1}{2}$, será sesgada a la derecha). Veremos sin embargo que dado $\eta = 20$, no es tan sesgada como en el caso del otro ejemplo tratado aqui.

Si se hace crecer n, por ejemplo, hasta $\eta = 30$, todavía se torna más simétrica, tendiendo hacia una normal a pesar de que ρ no sea tan cercano a 0.5 pero si alejado de cero (0) ó de uno (1). En la práctica, si $\eta > 30$ irá tornandose simétrica para valores de $(0.1 < \rho < 0.5)$

Se puede obtener la función de distribución acumulada y obtener asi los cuantiles ó fractiles de la distribución.

La siguiente figura muestra tres funciones de distribución binomial con $\eta = 50$ y valores ρ de $0.25, 0.50$ y 0.75.

La A con $\rho = 0.25$ es ligeramente sesgada a la derecha ó con sesgo positivo. La B con $\rho = 0.50$ es simetrica y la C con $\rho = 0.75$ tendra sesgo negativo, interpretaciones que resultan consecuentes con el indice de sesgo α_3 ya planteado.

Ejercicio.

1. Una empresa fabricante de neumáticos para tractomulas realiza pruebas de ponchaduras en un terreno difícil. Se encuentra que el 25% de los neumáticos probados presentaron pinchazo en el recorrido total. Se prueban 15 neumáticos más tomados al azar: Halle la probabilidad de las siguientes cantidades de neumáticos con pinchaduras :

a) Entre 3 a 6 . $Rta = 0.7073$.

c) Mas de 5 . $Rta = 0.1484$.

2.3 DISTRIBUCIÓN MULTINOMIAL: $(X_1,X_2,\ldots,X_k) \sim M(n,p_1,p_2,\ldots,p_k)$

Es una distribución de probabilidad conjunta para múltiples variables aleatorias $(X_1,X_2,\ldots,X_k)$ discretas donde cada $X_i \sim b(n,p_i)$, dándose cuando en cada prueba ó ensayo independiente (con reposición) del E.A. interesa contar el número de exitos en cada una de la k maneras como se puede dar un atributo.

Ejemplo: El atributo calidad de un producto se puede dar como: Excelente, bueno, regular y malo.

2.3.1 Sus critérios ó características:

1. Son n pruebas ó ensayos repetidos e idénticos (con reposición).
2. En cada prueba ó ensayo se pueden producir k resultados.
3. Las probabilidadeds de cada uno de los k resultados $(p_1,p_2,\ldots,p_k)$ permanecen constantes en todas las pruebas ó ensayos.
4. Son pruebas ó ensayos independientes.
5. El interes se centra en contar los $X_1,X_2,\ldots X_k$ éxitos que se producen en los n ensayos de cada una de las k categorias posibles de observar cada vez.

Si una prueba ó intento puede dar cualquiera de los k resultados posibles $E_1,E_2,\ldots E_k$ con probabilidades $p_1,p_2,\ldots,p_k$, entonces la distribución multinomial dara la probabilidad de que:

$$\left.\begin{array}{l} E_1 \text{ ocurra } x_1 \text{ veces:} P[X_1 = x_1] \\ E_2 \text{ ocurra } x_2 \text{ veces:} P[X_2 = x_2] \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ E_k \text{ ocurra } x_k \text{ veces:} P[X_k = x_k] \end{array}\right\} \text{En } n \text{ pruebas independientes.}$$

y donde: $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$ y $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1.0$.

Como son pruebas independientes, cualquier orden específico que produzca

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 \text{ resultados para } E_1 \\ x_2 \text{ resultados para } E_2 \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ x_k \text{ resultados para } E_k \end{array}\right\} \text{ocurrira con } p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k} \text{ de probabilidad.}$$

El número de ordenes ó arreglos que pueden producir resultados similares sera:

$$\binom{n}{x_1, x_2, \ldots x_k} = \frac{n!}{x_1! x_2! \ldots x_k!}$$

Combinando los dos componentes, se tiene entonces que:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_k) = P[X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots\ldots, X_k = x_k,] = \binom{n}{x_1\ x_2 \ldots\ x_k} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k}$$

Con $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$ y $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1.0$.

Ejemplo: Se sabe que las bombas de gasolina para autos existentes en el mercado se pueden clasificar en:

40% de rendimiento excelente (Ex).

20% de rendimiento bueno (B).

30% de rendimiento regular (R).

10% de rendimiento malo (M).

Se selecciona una muestra de $n = 9$ bombas mediante proceso aleatorio. Cúal sera la probabilidad de que quede conformada por: $3Ex, 3B, 1R$ y $2M$?

$$\begin{aligned} f(3,3,1,2) = P[X_1 = 3, X_2 = 3, X_3 = 1, X_4 = 2] &= \binom{9}{3,3,1,2} (0.4)^3 (0.2)^3 (0.3)^1 (0.1)^2 \\ &= 5040(0.064)(0.008)(0.3)(0.01) \\ &= 0.00774. \end{aligned}$$

Ejercicio de práctica (**Walpole**, **pag 123**).

Un estudiante que va a la universidad en carro encuentra un semáforo, el cual permanece en verde durante 35 segundos, en amarillo 5 segundos y en rojo 60 segundos. Su viaje a la universidad es entre 8:00 y 8:30 AM en la semana de 6 dias hábiles. Sea X_1 el número de veces que encuentra el semaforo en verde, X_2 en luz amarilla y X_3 en luz roja. Hallar la distribución conjunta de X_1, X_2 y X_3.

$$Rta = f(x_1, x_2, x_3) = \binom{6}{x_1\ x_2\ x_3} (0.35)^{x_1} (0.05)^{x_2} (0.60)^{x_3}.$$

2.4 DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMETRICA:X ~ $H(N, N_1, n)$

Muchas veces en la práctica es difícil realizar pruebas con reposición ó reemplazamiento. Por ejemplo, si en el control de calidad se pierde el elemento que se prueba, hacer reposición resulta un imposible. Se plantéa entonces el muestreo sin reposición, donde los elementos de la muestra se toman todos a la vez y no individualmente ó donde el elemento seleccionado no se reintegra a la población de donde se hace la selección de la muestra.

La diferencia más simple con la binomial es la forma de aplicar el muestreo. En efecto, en:

Binomial: Muestreo con reemplazamiento gatrantizando así la independencia estadística de las pruebas ó de los ensayos.

Hipergeométrica: Muestreo sin reemplazamiento , por tanto dependencia estadística entre pruebas ó ensayos.

Sus aplicaciones estan en áreas con uso considerable de muestreo de aceptación, pruebas electrónicas y de aseguramiento de la calidad, fabricación de piezas, etc.

En la distribución Hipergeométrica X es lacantidad de resultados éxito en una muestra aleatoria (sin reposición) de tamaño n, tomada de una población de tamaño N y de la cual N_1 elementos satisfacen (poseen) una caracteristica ó propiedad (éxito) y por tanto $(N - N_1)$ no la satisfacen (no la poseen) (fracaso).

2.4.1 Criterios ó propiedades que la caracterizan.

1. La población consta de N de unidades ó elementos , lo que la ubica como una población finita o de orden fínito, de las cuales una parte: N_1 ”son éxitos”, y otra parte: $(N - N_1)$son ”fracasos”.

2. Se obtiene una muestra aleatoria de n elementos todos a la vez (o sucesivamente pero sin reemplazamiento)

3. El tamaño de la muestra aleatoria n es grande relativamente en comparación con el tamaño de la población. Generalmente: $\frac{n}{N} * 100 > 5\%$.

4. Se desea caraterizar la v.a. $X =$ número de éxitos al obtener una muestra aleatoria sin reemlazamiento, de tamaño n.

2.4.2 Planteamiento: Supongamos un lote de N productos de los cuales:

N_1 =productos defectuosos (D).

$(N - N_1)$ =productos no defectuosos (B).

Obtenemos muestra de n productos, todos a la vez. Interesa evaluar el comportamiento de la v.a. X: número de productos defectuosos en la muestra

De una población de N elementos se pueden extraer muestras de tameño n de $\binom{N}{n}$ formas diferentes (distintas muestras de tamaño n). Al extraer muestras de tamaño n productos, el número de formas de obtener x productos defectuosos de N_1 de ellos será: $\binom{N_1}{x}$ y entonces $\binom{N-N_1}{n-x}$ será el número de formas de obtener $(n - x)$ productos no defectuosos entre $N - N_1$ de ellos.

Como es el mismo evento compuesto, entonces el número de formas de seleccionar x productos defectuosos esta ligado con el número de formas de obtener $(n - x)$ productos no defectuosos. Luego el total de formas posibles favorables a x número de éxitos será: $\binom{N_1}{x}\binom{N-N_1}{n-x}$.

Combinando los casos y aplicando definición de probabilidad, se concluye que:

$$f(x) = P[X = x] = \begin{cases} \dfrac{\binom{N_1}{x}\binom{N-N_1}{n-x}}{\binom{N}{n}} & \text{para } x = 0,1,2,\ldots,n \quad x \leq N_1; \quad (n-x) \leq (N-N_1) \\ 0 & \text{para cualquier otro valor de } x. \end{cases}$$

Los parámetros de la distribución Hipergeométrica son entonces:

N : Tamaño de población.

N_1 : Número de elementos de N con una caracteristica ó propiedad específica (éxitos).

n : Tamaño de muestra aleatoria extraida.

2.4.3 CARACTERISTICAS DE LA DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

a) Valor Esperado: $\mu = E[X] = \sum x f(x) = n\frac{N_1}{N}$

b) Varianza: $\sigma^2 = V[X] = \sum(x-\mu)^2 f(x) = n(\frac{N_1}{N})\left(\frac{N-N_1}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$. Nótese la similitud con el caso de la v.a. Binomial considerando $p = \frac{N_1}{N}$ y $(1-p) = \frac{N-N_1}{N}$,El factor $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ se identifica como *factor de corrección por población finita* $(F.C.F.)$. él resulta igual a 1 si $n = 1$ ó a 0 si $n = N$, y tiene como límite la unidad cuando N tiende a infinito En resumen $(F.C.F.)$. es la corrección a la varianza de la v.a Binomial por ser el muestreo sin reemplazo del conjunto finito de tamaño N. Si n es pequeño frente a N, el $(F.C.F.)$ es cercano a la unidad y la Hipergeométrica será similar a la binomial pues el $(F.C.F.)$ resultará una cifra que afecta de manera poco significativa el resultado del producto.

En la práctica, si $\frac{n}{N}(100) < 5\%$, no se aplica el $(F.C.F.)$ pues su valor tendera a uno (1).

c) *Sesgo ó Asimetría*: Hacia la derecha ó sesgo positivo generalmente. Para $N > 2$, si $N < 2N_1$ ó si $N < 2n$ la distribución hipergeometrica tendrá sesgo negativo. Si $N = 2N_1$ ó si $N = 2n$ la distribución es simétrica. Si $N > 2N_1$ ó $N > 2n$ la distribución presentará sesgo positivo.

La función de distribución acumulativa quedará definida entonces por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{\binom{N_1}{k}\binom{N-N_1}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Pueden ser cálculos tediosos ó laborosos cuando n es grande. Por ello es posible aplicar la siguiente forma simplificada ó de recurrencia:

$$f(x+1) = P[X = (x+1)] = \frac{(n-x)(N_1-x)}{(x+1)(N-N_1-n+x+1)} f(x).$$

Ejemplo: En una empresa industrial diariamente se producen 90 unidades de unidad metalmecánica, de las cuales generalmente 5 salen defectuosas. Se examina en un dia cualquiera una muestra de 5 unidades. Hallar la probabilidad de x unidades defectuosas.

$$\left.\begin{array}{c} N = 90 \\ N_1 = 5 \\ N-N_1 = 85 \\ n = 5 \\ x = 0,1,\ldots,5 \end{array}\right\} \quad f(x) = \frac{\binom{N_1}{x}\binom{N_2}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{5}{x}\binom{85}{5-x}}{\binom{90}{5}} \qquad \text{para } x = 0,1,\ldots,5$$

que resolviendo permite definir la tabla de distribución de probabilidad:

x	0	1	2	3	4	5
$P(x)$	0.746	0.230	0.0225	0.000812	0.00000967	0_+

Si representamos gráficamente la tabla resultante, tenemos:

Calculamos el valor de sus principales medidas características:

ValorEsperado:
$\mu{=}E[X] = \sum xf(x) = 0(0.746) + 1(0.230) + 2(0.025) + 3(0.000812) + 4(0.00000967) + \ldots$
$= 0.277$

Que simplificadamente: $\mu = n(N_1/N) = 5\left(\frac{5}{90}\right) = 0.227.$

Varianza: $\sigma^2 = V[X] = E[(x-\mu)^2] = \sum(x_i - \mu)^2 f(x)$ ó tambien.

$\sum x^2 p(x) - \mu^2 = 0.32746 - (0.227)^2 = 0.25.$

y que aún de forma más simplificada: $\sigma^2 = npq\left(\frac{N-N_1}{N-1}\right) = 5\left(\frac{5}{90}\right)\left(\frac{85}{90}\right)\left(\frac{90-5}{90-1}\right) = 0.25.$

Sesgo: Hacia la derecha ó positivo como se vé graficamente. Además, aqui: $N > 2N_1$, pues $90 > 2 * 5$ y $N > 2n$, pues $90 > 2 * 5$.

2.4.4. RELACIÓN ENTRE LAs DISTRIBUCIONES BINOMIAL E HIPERGEOMÉTRICA.

La suposición base de la distribución binomial es que se trata de n ensayos de un número infinito de ellos. Por eso se plantea que aplica para poblaciones infinitas, ó para poblaciones finitas pero con reemplazamiento, que no es lo usual.

Hay consenso general de que cuando el tamaño de la población N es grande en relación con el tamaño de la muestra seleccionada n (ó número de ensayos) y cuando "p" (probabilidad de éxito) se aleja de cero ó de uno, se puede aplicar la binomial en poblaciones finitas y en muestreo sin reemplazamiento. Se dice entonces que:

$$\begin{cases} N \text{ debe ser igual a } 10n \\ \frac{n}{N} \le 10\% \end{cases}.$$

Si n es relativamente grande con respecto a N, o sea el tamaño de la muestra respecto al tamaño de la población, por ejemplo: $\frac{n}{N}(100) \ge 20\%$, la probabilidad de exito (p) se puede alterar y tender a ser inconstante y entonces el experimento no será binomial. La hipergeométrica sería la adecuada en este caso.

De manera general, la función de probabilidad binomial aproximará a la hipergeométrica de forma adecuada si se tiene que $n < 0.1N$, ó conforme el cociente $\frac{n}{N}$ sea más pequeño.

Ejemplo: Un lote de producción contiene 1000 unidades de las cuales hay 900 sin defectos y 100 defectuosas. Del lote se extrae una muestra aleatoria de $n = 10$ unidades. Hallar la probabilidad de al menos ocho (8) no defectuosas en la muestra, considerando los dos tipos de muestreo: con y sin reemplazo. Definimos a X como el número de no defectuosos en la muestra.

$$N = 1000 \quad N_1 = 900 \quad N_2 = 100 \quad n = 10$$

a) Si se considera muestreo con reemplazamiento y aplicando entonces la binomial:

$$p(X \ge 8) = \sum_{x=8}^{10} \binom{10}{x} (0.9)^x (0.1)^{10-x} = 0.9298.$$

b) Si se considera muestreo sin reemplazo, aplicando entonces la hipergeométrica:

$$p(X \ge 8) = \sum_{x=8}^{10} \frac{\binom{900}{x}\binom{100}{10-x}}{\binom{1000}{10}} = 0.9308.$$

Que son resultados bastante cercanos ó equivalentes.

En el ejemplo anterior: $\begin{cases} N = grande. \\ \frac{n}{N} = \frac{10}{1000} = 0.01 \text{ o sea } \frac{n}{N} < 0.10 \\ p = \frac{100}{1000} = 0.10 \end{cases}.$

Originalmente sería población fínita.

Ejercicio: (**Walpole**, **pág 131**)

1. Una empresa esta interesada en evaluar su proceso de inspección actual en lotes de cincuenta articulos idénticos. Para ello toma una muestra aleatoria de cinco artículos y los inspecciona dando

como correcto el lote si no se encuentran más de dos defectuosos. Que proporción del 20% de lotes defectuosos se aceptará? *Rta*) $= 0.9517$.

2. Una empresa fabricante utiliza un sistema de aceptación de sus productos antes de despacharlos a distribuidores. El plan consta de dos etapas: Se preparan cajas de 25 unidades y se prueba de cada una de ellas una muestra aleatoria de tres unidades en busca de defectuosas. Si se ecuentra alguna defectuosa, la caja respectiva se regresa para su revisión del 100%

a) Cual es la probabilidad de que una caja que contiene tres defectuosos pase la revisión y se despache a los distribuidores? $Rta = 0.66956$.

b) La empresa fabricante decide modificar su proceso de aceptación de productos. Para ello, un inspector toma al azar un artículo, lo inspecciona y lo reintegra a la caja; Un segundo inspector hace lo mismo, y un tercero también. La caja no se despacha si cualquiera de los tres inspectores encuentran un defectuoso.Cuál será la probabilidad de que una caja que contiene tres defectuosos sea despachada? $Rta = 0.6815$.

La Hipergeométrica puede generalizarse para resolver problemas donde los N resultados pueden clasificarse o dividirse en k celdas o clases, cada una de ellas con $N_1, N_2 \ldots, N_k$ elementos y $x_1, x_2 \ldots x_k$ elementos seleccionados de cada celda.

Se llega así a la **distribución Hipergeométrica Multivariada**:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_k) = P[X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots\ldots, X_k = x_k,] = \frac{\binom{N_1}{x_1}\binom{N_2}{x_2}\cdots\binom{N_k}{x_k}}{\binom{N}{n}}$$

Ejemplo: Se conforma un grupo de 10 personas para realizar estudios biólogico; incluye tres personas de sangre tipo O, cuatro del tipo A y tres del tipo B. Se desea conocer la probabilidad de que al tomar una muestra de ellos quede conformada por uno del tipo O, dos del tipo A y dos de tipo B.

$$f(1,2,2;10,3,4,3,5) = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2}\binom{3}{2}}{\binom{10}{5}} = \frac{3}{14}$$

2.5. LA DISTRIBUCIÓN DE POISSON. X ~ $P(\lambda)$

Llamada asi por su autor Siméon Denis Poisson, probabilista del siglo XIX, pues fue el primero en describirla. Es una generalización de la distribución binomial cuando sobre un $E.A.$ se define una variable aleatoria X que representa el número de éxitos independientes que ocurren para intervalos de medida específicos (tiempos, lugares, espacios) , ademas con una probabilidad de ocurrencia pequeña.

Se le llama distribución de los ”eventos raros” pues se usa como aproximación a la binomial cuando el tamaño de muestra es grande y la proporción de éxitos es pequeña.

Esos intervalos de medida pueden referirse a: Tiempo: (Segundo , minuto, hora, dia, semana, etc.) Area: (Segmento de linea, pulgada cuadrada, Centimetro cuadrado, etc). Volumen:(Litro, galón, onza, etc.)

Ejemplos: Número de defectos por m^2.en piezas similares de un material ..

Número de personas que llegan a un taller automotriz en un lapso de tiempo específico.

Número de impulsos electrónicos errados transmitidos durante espacio de tiempo específico.

Número de llamadas telefónicas que ingresan a un conmutador por minuto.

Número de interrupciones en servicios de energía en intervalos de un dia.

Cantidad de atomos que se desintegran en sustancia radioactiva.

Número de accidentes automovilísticos en un cruce específico durante una semana.

2.5.1. Criterios ó propiedades.

1. Se da un intervalo de medida que divide un todo de números reales y donde el contéo de

ocurrencias es aleatorio. Esa división puede ser un subintervalo de medida.

2. El número de ocurrencias ó de resultados en el intervalo ó subintervalo de medida, es independiente de los demás intervalos ó subintervalos. por eso se dice que el proceso de Poisson no tiene memoria.

3. La probabilidad de que un solo resultado ocurra en un intervalo de medida muy corto ó pequeño es la misma para todos los demás intervalos de igual tamaño y es proporcional a la longitud del mismo ó al tamaño de medida.

4. La probabilidad de que más de un resultado ocurra en un intervalo ó subintervalo corto es tan pequeña que se considera insignificante (cercana ó igual a cero).

Procesos que se ajustan a estos criterios, se dice, son procesos de Poisson.

Sea X una variable aleatoria que representa el número de eventos aleatorios independientes que ocurren con igual rapidez en un intervalo de medida. Se tiene entonces que la función de probabilidad de esta variable, se expresa por:

$$f(x) = P[X = x] = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & x = 0,1,2,\ldots..; \\ 0 & \text{en cualquier otro punto ó valor} \end{cases}$$

Donde λ es parámetro de tendencia central de la distribución y representa el número promedio ó cantidad esperada de ocurrencias (éxitos) del evento aleatorio por unidad de medida ó por muestra; $e = 2.71828$ y x =Número de ocurrencias especificas para el cual se desea conocer la probabilidad respectiva. Segun sea el valor de de $\lambda > 0$, se define toda una familia de probabilidades de Poisson. La probabilidad de que una variable aleatoria de Poisson X sea menor ó igual a un valor de x se halla por la función de distribución acumulativa, planteada entonces como:

$$p(X \leq x) = F(x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Los resultados de las probabilidades individuales para valores de X serán más pequeños conforme la variable aleatoria toma valores cada vez más grandes.

Ejemplo: El número promedio de partículas radioactivas que registra un contador en un milisegundo en la realización de un experimento aleatorio es de cinco (5) partículas. Hallar la probabilidad de que se registre distinto número de partículas en un mismo milisegundo.

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = 5. \\ x = 0,1,2,\ldots\ldots,n \end{array}\right\} \qquad f(x) = \frac{5^x e^{-5}}{x!}.$$

Acudiendo a las tablas existentes para tal fín ó a los medios electrónicos, se llega a construir la tabla de distribución de probabilidades, dando:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p(x)$	0.0067	0.0337	0.0843	0.1404	0.1755	0.1755	0.1462	0.1044	0.0653	0.0363

y valores de x más grandes pero con probabilidad mas pequeña. Se nota el punto de inflexión entre $x = 4$ y 5 y no es tan sesgada a la derecha por el valor $\lambda = 5$.

2.5.2. Caracteristicas de la distribución de poisson.

Valor Esperado: $\mu = E[X] = \sum x_i f(x) = \lambda$, el cual debe ser conocido.

Varianza: $\sigma^2 = V[X] = \sum (x_i - \lambda)^2 f(x) = \lambda$.

Forma ó sesgo: Hacia la derecha ó con sesgo positivo y que se va perdiendo a medida que λ crece. Veamos una gráfica de funciones de probabilidad para diferentes valores de λ

Se puede calcular un coeficiente de asimetría mediante la expresión $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$. Es de observar que mientras en una distribución binomial: $(x \leq n)$, en Poisson se puede dar que $(x \geq n)$.

Alternativa: Si se da la probabilidad de tener, de manera exacta, y ocurrencias en un intervalo t veces mayor que el de refencia en la medición entonces la distribución de probabilidades de Y número de éxitos en la nueva unidad de referencia viene dada por

$$f(y) = \frac{(\lambda t)^y e^{-\lambda t}}{y!}$$

donde λ = Promedio de ocurrencias por intervalo ó unidad de medida considerada en X y t = Número de intervalos ó unidades de medida especificados.

Aqui $\mu_y = \lambda t$ y $\sigma_y^2 = \lambda t$

Ejemplo: El número de pulsos que llegan a un contador GEIGER se presentan en promedio de 6 pulsos por minuto. Hallar la probabilidad de que en 15 minutos se reciban exactamente 20 pulsos.

$$\left.\begin{array}{r} \lambda = 6 \\ t = 15 \text{ minutos} \\ y = 20 \end{array}\right\} \quad P(Y=20) = \frac{(\lambda t)^y e^{-\lambda t}}{y!} = \frac{[(6)(15)]^{20} e^{-90}}{20!} = 4.09 * 10^{-9}.$$

es decir, que una frecuencia de 6 pulsos por minuto es eqyivalente a una de $15 * 6 = 90$ por 15 minutos.

2.5.3. APROXIMACIONES ENTRE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL Y LA POISSON.

La distribución Binomial de probabilidades converge hacia la distribución de Poisson con promedio λ, como:

$$\text{forma limite, cuando: } \left\{\begin{array}{l} n \to \infty. \\ p \to 0 \text{ ó } (1-p) \to 1.0. \\ np \to \lambda \text{ (generalmente } np \leq 7\text{) y permanece constante con } \mu = np. \end{array}\right.$$

Si $p \to 1.0,$ aun se puede utilizar la distribución de Poisson para aproximar probabilidades Binomiales mediante el intercambio de lo que se define como éxito y fracaso, cambiando con ello a p como valor cercano a *cero*:

$\lim_{n\to\infty;p\to 0} B(n,p) = \frac{e^{-\lambda t}\lambda^x}{x!}$ Para $x = 0,1,2,\ldots..$

Ejemplo: Un proceso de fabricación de probetas de vidrio. Se sabe por experiencia que en promedio, una de cada 1000 probetas producidas presenta una ó mas burbujas, lo cual afecta el uso de las probetas, y las deja inservibles. Un laboratorio compila muestras de 8000 de ellas y desea conocer la probabilidad de que menos de 7 probetas presenten ese defecto de burbujas pues supone que ha mejorado el proceso de fabricación.

$$\left.\begin{array}{l} p(burbujas) = \frac{1}{1000} = 0.001 \\ n = 8000 \\ q = 0.999 \end{array}\right\} \quad \text{Problema típico de la distribución binomial aunque con } n$$

grande que no sería lo usual, y con valor p pequeño:

Entonces: $P(X<7) = \sum_{x=0}^{6} b(8000;0.001) = \sum_{x=0}^{6} \binom{8000}{x} (0.001)^x (0.999)^{8000-x}.$

expresión de difícil operatividad de cálculo Dados los valores de n y p, se puede aproximar por la distribución de Poisson para ello: $\lambda = np = 8000(0.001) = 8.$ Obteniendo:

$p(X<7) = \sum_{x=0}^{6} \frac{8^x e^{-8}}{x!} = 0.3134.$

Ejercicio de práctica (**Walpole**, **pág 141**).

Un fabricante de automoviles esta preocupado por falla en sistema de frenado en un modelo específico, el cual puede ocasionar accidentes a altas velocidades. Sea la variable aleatoria: " X: el número de autos que experimentaron la falla y supongamos que fuerón 5 autos en promedio considerando los últimos años.

a) Cuál es la probabilidad de que a lo sumo 3 autos por año presenten el problema? ($Rta = 0.2650$).

b) Cuál es la probabilidad de que por lo menos un auto por año presente el problema? ($Rta = 0.9596$).

BIBLIOGRAFIA

Los libros que se relacionan a continuación estarán disponibles en la biblioteca del Departamento de Matemáticas y Estadística, sólo para consulta rápida debido a la disposición de pocos libros.

1. Probabilidad y estadística aplicadas a la ingeniería, Douglas C. Montgomery y George C. Runger. McGraw Hill, 1997.
2. Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencia. Mendenhall, W. Sincich, T. Prentice Hall. 1997.
3. Probabilidad y Estadística para Ingenieros. Walpole, Myers, Myers. Sexta Edición. Pearson Educación. 1999.
4. Probabilidad y Estadistica: Aplicaciones y Mètodos Canavos George. McGraw Hill. 1988