Sección 6

Conceptos básicos de probabilidad

Lind, Marchal

Probabilidad

Valor que va desde cero hasta uno, inclusive, que describe la posibilidad relativa de que ocurra un evento.

Experimento

Proceso que conduce a que ocurra una (y solamente una) de varias observaciones posibles.

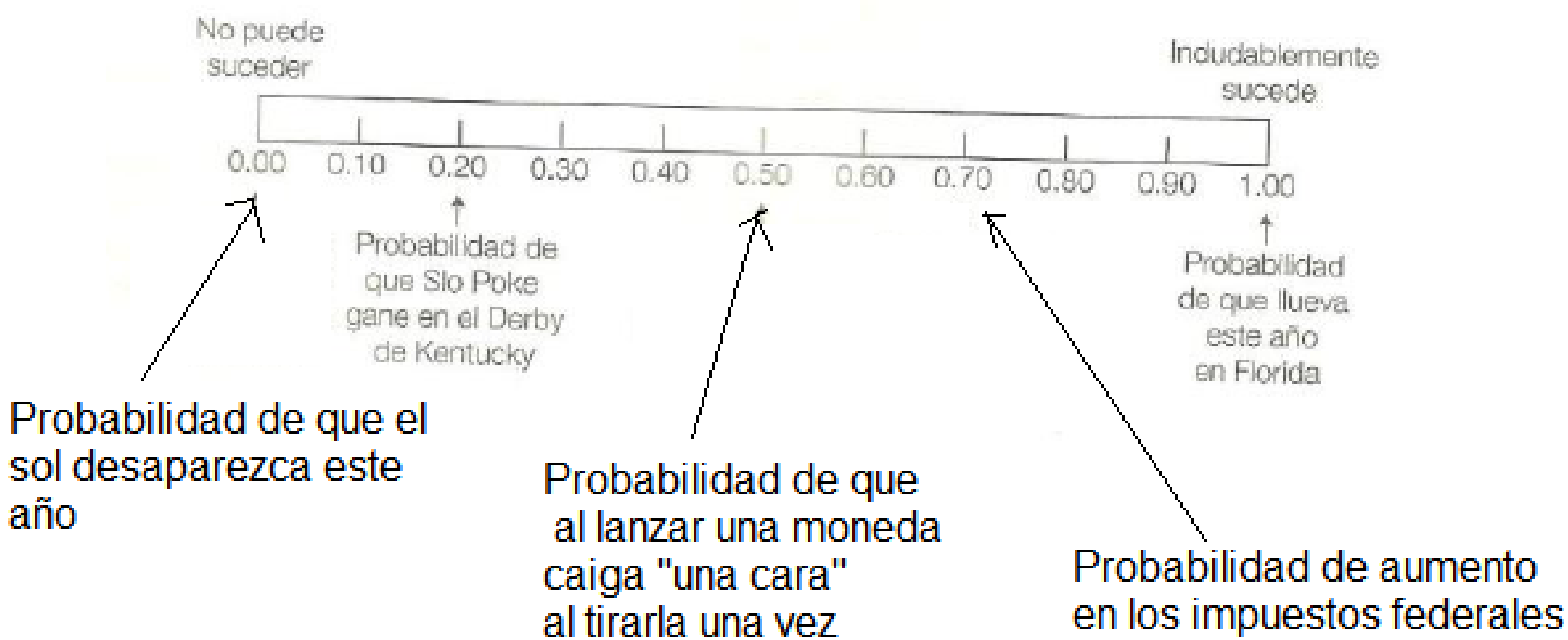
Resultado

- Un suceso particular proveniente de un experimento.

Evento

- Conjunto de uno o mas resultados de un experimento.

		
Experimento	Lanzar un dado	Contar el número de miembros del consejo directivo en las 500 empresas presentadas en Fortune, cuya edad es superior a 60 años.
Todos los resultados posibles.	Obtener un 1 Obtener un 2 Obtener un 3 Obtener un 4 Obtener un 5 Obtener un 6	Ninguno tiene más de 60 Uno tiene más de 60 Dos tienen más de 60 ... 29 tienen más de 60 ... ... 48 tienen más de 60 ...
Algunos eventos posibles	Obtener un número par Obtener un número mayor que 4 Obtener un número igual o inferior a 3	Más de 13 tienen más de 60 Menos de 20 tienen más de 60


No puede
suceder
Indudablemente
sucede
0.00
0.10
0.20
0.30
0.40
0.50
0.60
0.70
0.80
0.90
1.00
Probabilidad de
que Slo Poke
gane en el Derby
de Kentucky
Probabilidad
de que llueva
este año
en Florida
Probabilidad de que el
sol desaparezca este
año
Probabilidad de que
al lanzar una moneda
caiga "una cara"
al tirarla una vez
Probabilidad de aumento
en los impuestos federales

Enfoques de la probabilidad

Se analizarán dos enfoques del análisis probabilístico, específicamente, los puntos de vista *objetivo* y *subjetivo*. La **probabilidad objetiva** puede subdividirse en: (1) probabilidad *clásica* y (2) probabilidad *empírica*.

Probabilidad clásica

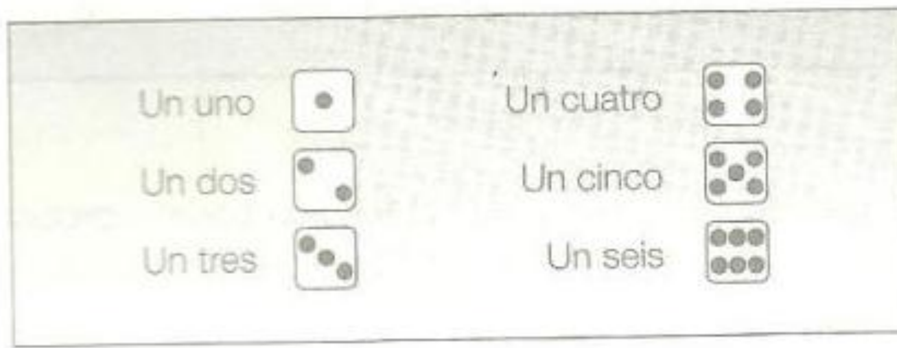
La **probabilidad clásica** se basa en la consideración de que los resultados de un experimento son *igualmente posibles*. Empleando el punto de vista clásico, la probabilidad de que suceda un evento se calcula dividiendo el número de resultados favorables entre el número total de resultados posibles:

DEFINICIÓN DE LA PROBABILIDAD CLÁSICA

$$\text{Probabilidad de un evento} = \frac{\text{Número de resultados favorables}}{\text{Número total de resultados posibles}}$$

Considérese el experimento de lanzar un dado común. ¿Cuál es la probabilidad del evento "cae un número par"?

Los resultados posibles son:



Hay tres resultados "favorables" (un "dos", un "cuatro" y un "seis") en el conjunto de seis resultados posibles igualmente probables. Por tanto:

$$\text{Probabilidad de un número par} = \frac{3}{6} \begin{matrix}\leftarrow\\ \leftarrow\end{matrix} \boxed{\frac{\text{Número de resultados favorables}}{\text{Número total de resultados posibles}}}$$

$$= 0.5$$

Si *sólo uno* de varios eventos puede ocurrir cada vez, se dice que los eventos son **mutuamente excluyentes**.

> **Mutuamente excluyente** La ocurrencia de un evento implica que ninguno de los otros eventos puede ocurrir al mismo tiempo.

En el experimento de tirar un dado, los eventos "un número par" y "un número impar" son mutuamente excluyentes. Si cae un número par, no puede caer un número impar al mismo tiempo.

Si un experimento tiene un conjunto de eventos que comprende a todos los resultados posibles, tales como los eventos "cae un número par" y "cae un número impar" cuando se lanza un dado, entonces el conjunto de eventos es **colectivamente exhaustivo**.

> **Colectivamente exhaustivo** Por lo menos uno de los eventos debe ocurrir cuando se realiza un experimento.

En el experimento de tirar un dado, cada resultado será un número par o impar. Por tanto, el conjunto es colectivamente exhaustivo.

Si el conjunto de eventos es colectivamente exhaustivo y los eventos son mutuamente excluyentes, la suma de las probabilidades es 1. En el experimento donde se lanza una moneda:

	Probabilidad
Evento: Cara	0.5
Evento Cruz	0.5
Total	1.0

Para que se pueda aplicar el enfoque clásico, los eventos deben tener la misma posibilidad de ocurrir (a lo que se denomina eventos *igualmente posibles.*) Además, el conjunto de eventos debe ser mutuamente excluyente y colectivamente exhaustivo.

Desde un punto de vista histórico, el enfoque clásico de la probabilidad se desarrolló y aplicó en los siglos XVII y XVIII a juegos de azar, como el de cartas y el de dados. Obsérvese que es innecesario realizar un experimento para determinar la probabilidad de que ocurra un evento cuando se utiliza el enfoque clásico. Por ejemplo, se puede llegar en forma lógica a la probabilidad de obtener "cruz" en el lanzamiento de una moneda, o bien tres "caras" cuando se lanzan al aire tres monedas. De la misma forma, tampoco se tiene que realizar un experimento para determinar la probabilidad de que su declaración de impuestos fiscales sea sometida a una auditoría, si hay 2 millones de declaraciones que se envían a la oficina fiscal de recaudación de su distrito y se va a realizar una auditoría sólo a 2 400. Suponiendo que todas las declaraciones tengan la misma probabilidad de ser auditadas, la probabilidad de que lo auditaran sería 0.0012, que se obtiene al dividir 2 400 entre 2 millones. Es obvio que la probabilidad de que su declaración sea sometida a una auditoría es muy pequeña (o remota.)

Concepto empírico

Otro modo de definir la probabilidad es basándose en las **frecuencias relativas**. La probabilidad de que un evento ocurra se determina observando en qué fracción de tiempo sucedieron eventos semejantes en el pasado. Utilizando una fórmula:

$$\text{Probabilidad de que suceda un evento} = \frac{\text{Número de veces que ocurrió el evento en el pasado}}{\text{Número total de observaciones}}$$

Se efectuó un estudio con 751 egresados de la carrera de administración de empresas, en la Universidad de Toledo (EUA). Este experimento reveló que 383 de los 751 egresados *no* estaban empleados de acuerdo con su principal área de estudio. Por ejemplo, un egresado especializado en contaduría, ahora es gerente de mercadotecnia en una empresa empacadora de tomates. ¿Cuál es la probabilidad de que un egresado de administración labore en una área distinta a la de sus estudios universitarios?

$$\text{Probabilidad de que suceda un evento} = \frac{\text{Número de veces que ocurrió el evento en el pasado}}{\text{Número total de observaciones}}$$

$$P(A) = \frac{383}{751} = 0.51$$

Para simplificar, se pueden utilizar letras o números; *P* corresponde a probabilidad, y en este caso *P*(*A*) indica la probabilidad de que un graduado no labore en el área principal de sus estudios universitarios, evento A.

Puesto que 383 de los 751 egresados, es decir, 0.51 en términos de probabilidad, están en un campo laboral diferente al de su área de estudio, se puede emplear esto como una estimación de la probabilidad. En otras palabras, con base en la experiencia, existe una probabilidad de 0.51 de que un graduado en administración labore en un campo distinto del de su área de estudios.

Probabilidad subjetiva

Si existe poca o ninguna experiencia en la cual se pueda basar una probabilidad, puede determinarse una probabilidad en forma subjetiva. Fundamentalmente, esto significa evaluar las opiniones disponibles y otra información para después estimar o asignar la probabilidad. Atinadamente, a este concepto se le denomina **probabilidad subjetiva.**

> **Concepto de probabilidad subjetiva** Es la posibilidad (probabilidad) de que suceda un evento específico, que es asignada por una persona basándose en cualquier información que esté disponible.

Algunas reglas de probabilidad

Ahora que se ha definido la probabilidad y se han descrito los diferentes enfoques de la misma, se examinarán las combinaciones de eventos mediante la aplicación de las reglas de adición y de multiplicación.

Reglas de adición

Dos eventos mutuamente excluyentes no pueden ocurrir al mismo tiempo.

Regla especial de adición Para aplicar la **regla especial de adición**, los eventos deben de ser mutuamente excluyentes. Recuérdese que *mutuamente excluyente* significa que cuando ocurre un evento, ninguno de los otros puede suceder al mismo tiempo. Un ejemplo de eventos mutuamente excluyentes es el experimento de tirar un solo dado, con los eventos "el número 4 o mayor" y "el número 2 o uno menor". Si el resultado se encuentra en el primer grupo {4, 5 y 6} no puede estar también en el segundo grupo {1 y 2}. Y un producto industrial que sale de una línea de ensamble no puede ser defectuoso y satisfactorio al mismo tiempo.

Si dos eventos A y B son mutuamente excluyentes, la regla especial de la adición indica que la probabilidad de que ocurra uno u otro de los eventos, es igual a la suma de sus probabilidades. Esta regla se expresa en la fórmula siguiente:

REGLA ESPECIAL DE ADICIÓN $$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) \qquad [5.2]$$

Para tres eventos mutuamente excluyentes, representados por A, B y C, la regla se expresa como:

$$P(A \text{ o } B \text{ o } C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

Una verificación de 4 000 paquetes que se llenaron el mes pasado reveló lo siguiente:

Peso	Evento	Número de paquetes	Probabilidad de ocurrencia	
Menor	A	100	0.025	$\leftarrow \frac{100}{4\,000}$
Satisfactorio	B	3 600	0.900	
Mayor	C	300	0.075	
		4 000	1.000	

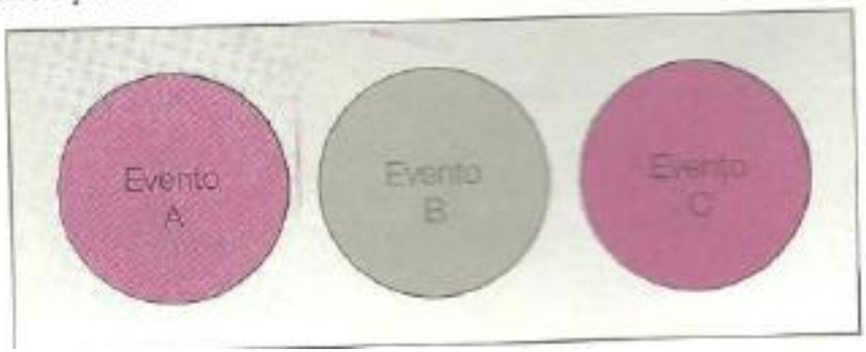
¿Cuál es la probabilidad de que un determinado paquete tenga un peso menor o mayor?

El resultado "peso menor" es el evento A. El resultado "peso mayor" es el evento C. Aplicando la regla especial de adición:

$$P(A \text{ o } C) = P(A) + P(C) = 0.025 + 0.075 = 0.10$$

Observe que los eventos son mutuamente excluyentes, lo cual significa que un paquete con legumbres mixtas no puede tener peso menor, peso satisfactorio y peso mayor, al mismo tiempo. Estos eventos son también colectivamente exhaustivos, lo que significa que un determinado paquete deberá tener un peso menor, un peso satisfactorio o un peso mayor.

El experto en lógica, de nacionalidad inglesa, J. Venn (1835-1888) ideó un diagrama para representar gráficamente el resultado de un experimento. El concepto *mutuamente excluyente* y otras reglas diversas para combinar probabilidades pueden visualizarse empleando este recurso. Para elaborar un diagrama de Venn, primero se delimita un espacio en un plano que representará todos los resultados posibles. Este espacio generalmente tiene forma de rectángulo. Un evento se representa mediante un círculo, cuya área es proporcional a la probabilidad del evento, y se dibuja dentro del rectángulo. El siguiente diagrama de Venn representa el concepto *mutuamente excluyente*. Los eventos no se sobreponen, lo cual indica que son mutuamente excluyentes.



$$P(A) + P(\sim A) = 1$$

Lo anterior puede expresarse con la **regla del complemento**:

REGLA DEL COMPLEMENTO	$P(A) = 1 - P(\sim A)$

Probabilidad conjunta Es la medida de probabilidad que evalúa la posibilidad de que dos o más eventos ocurran en forma simultánea.

En resumen, la regla general de adición se refiere a los eventos que no son mutuamente excluyentes. Esta regla para dos eventos, indicados por A y B, se escribe:

REGLA GENERAL DE ADICIÓN $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$

Reglas de multiplicación

Regla especial de multiplicación La regla especial de la multiplicación requiere que dos eventos *A* y *B* sean **independientes**. Dos eventos son independientes si la ocurrencia de uno no altera la probabilidad de que suceda el otro. De manera que si los eventos *A* y *B* son independientes, la ocurrencia de *A* no altera la probabilidad de *B*.

> **Independiente** La ocurrencia de un evento no tiene efecto en la probabilidad de la ocurrencia de cualquier otro evento.

Si dos eventos *A* y *B* son independientes, la probabilidad de que ocurran *A* y *B* se obtiene multiplicando las dos probabilidades. Ésta es la **regla especial de multiplicación**, que expresada en forma simbólica es:

REGLA ESPECIAL DE MULTIPLICACIÓN $P(A \text{ y } B) = P(A)P(B)$

Probabilidad condicional Es la probabilidad de que ocurra un evento determinado, dado que otro evento ya haya sucedido.

REGLA GENERAL DE MULTIPLICACIÓN $P(A \text{ y } B) = P(A)P(B|A)$

donde $P(B|A)$ expresa la probabilidad de que ocurra B dado que ya sucedió A. La raya vertical simboliza "dado que".

A continuación se presenta otra aplicación de la regla general de multiplicación. Una encuesta a ejecutivos se enfocó a su lealtad a la empresa. Una de las preguntas planteadas fue: "¿Si otra compañía le hiciera una oferta igual o ligeramente mejor que la de su puesto actual, permanecería con la empresa o tomaría el otro empleo?" Las respuestas de los 200 ejecutivos de la encuesta se clasificaron en forma cruzada con su tiempo de servicio en la compañía. (Vea la tabla 5.1.) Al tipo de tabla que resulta, se le denomina **tabla de contingencias.**

Lealtad de los ejecutivos y tiempo de servicio en la empresa.

	Tiempo de servicio				
Lealtad	**Menos de 1 año**	**1 a 5 años**	**6 a 10 años**	**Más de 10 años**	**Total**
Sí permanecería	10	30	5	75	120
No permanecería	25	15	10	30	80
					200

¿Cuál es la probabilidad de seleccionar al azar un ejecutivo que sea leal a la empresa (se quedaría) y que tenga más de 10 años de servicio?

Obsérvese que ocurren dos eventos al mismo tiempo: el ejecutivo permanecería en la empresa y tiene más de 10 años de servicio.

1. El evento *A* ocurre si un ejecutivo seleccionado al azar permaneciera en la empresa a pesar de que otra compañía le hiciera una oferta igual o ligeramente mejor. Para encontrar la probabilidad de que suceda el evento *A*, consulte la tabla 5.1. Se observa que hay 120 ejecutivos, de los 200 que participaron en la encuesta, que permanecerían con su empresa actual, de manera que $P(A) = 120/200$, o 0.60.

2. El evento B_4 ocurre si un ejecutivo seleccionado al azar tiene más de 10 años de servicio en la empresa. De esta forma, $P(B|A)$ es la probabilidad condicional de que un ejecutivo con más de 10 años de servicio permanezca en la empresa a pesar de que otra compañía le haga una oferta igual o ligeramente mejor. Al consultar la tabla de contingencias, tabla 5.1, 75 de los 120 ejecutivos que se quedarían tienen más de 10 años de servicio, de manera que $P(B_4|A) = 75/120$.

La probabilidad de que un ejecutivo seleccionado al azar sea uno de los que se quedarían en la compañía y de los que tienen más de diez años de servicio, se determina utilizando la regla general de multiplicación que indica la fórmula (5.6):

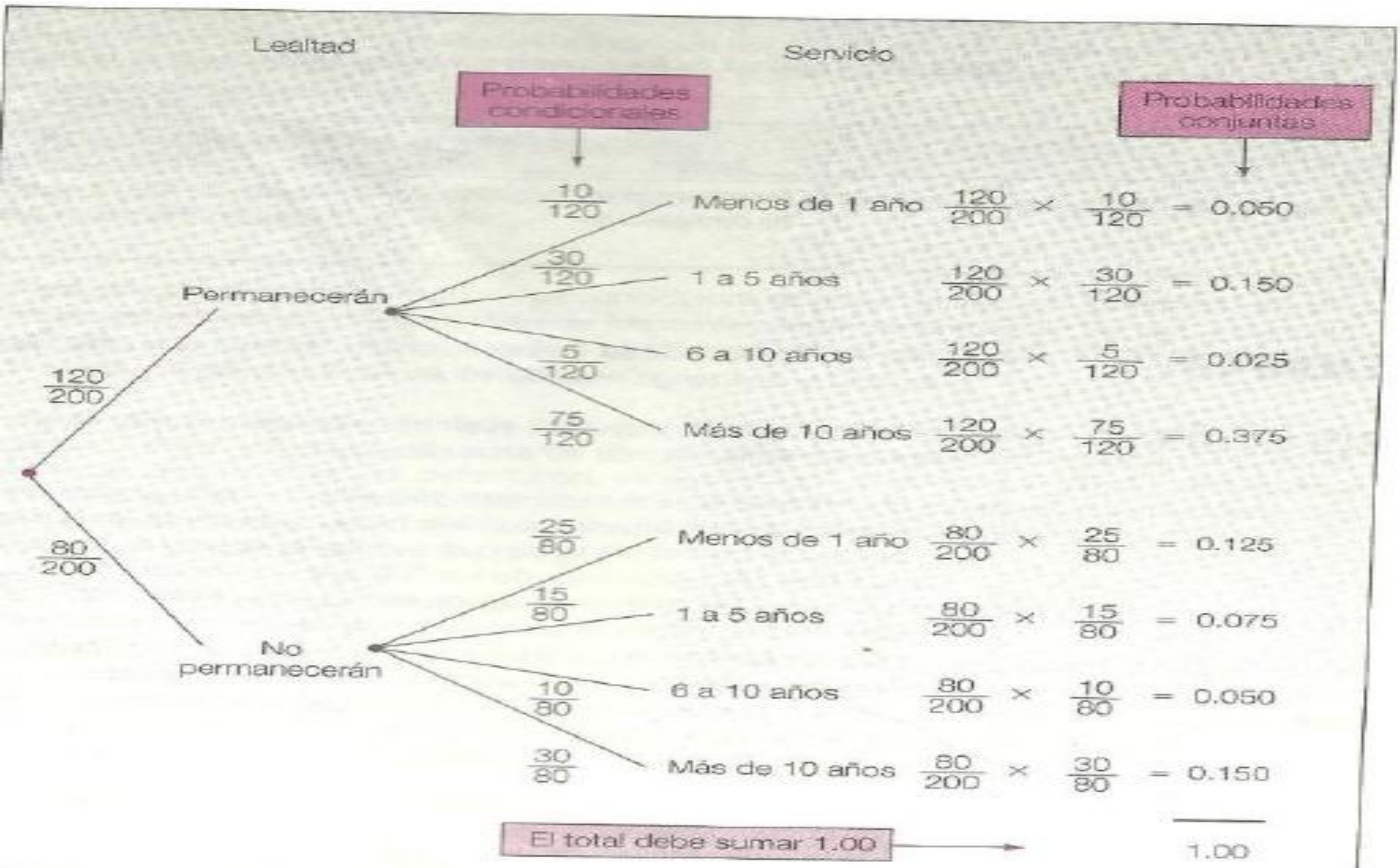
$$P(A \text{ y } B_4) = P(A)P(B_4 \mid A) = \left(\frac{120}{200}\right)\left(\frac{75}{120}\right) = \frac{9\,000}{24\,000} = 0.375$$

Diagramas de árbol

Un **diagrama de árbol** es una representación gráfica útil para organizar cálculos que abarcan varias etapas. Cada segmento en el árbol es una etapa del problema. Las probabilidades escritas cerca de las ramas son las probabilidades condicionales del experimento. Para mostrar la elaboración de un diagrama de árbol utilizaremos los datos de la tabla 5.1.

1. La elaboración de un diagrama de árbol comienza trazando un pequeño punto a la izquierda, el cual representa la raíz del árbol

Lealtad	Tiempo de servicio: Menos de 1 año	1 a 5 años	6 a 10 años	Más de 10 años	Total
Sí permanecería	10	30	5	75	120
No permanecería	25	15	10	30	80
					200



Suponga que 5% de la población de Umen, un país ficticio del Tercer Mundo, padece una enfermedad que es originaria de ese lugar. Sea A_1 el evento "tiene la enfermedad", y A_2 el evento "no tiene la enfermedad". Por tanto sabemos que si seleccionamos al azar a un habitante de Umen, la probabilidad de que el elegido tenga el padecimiento es 0.05, o bien $P(A_1) = 0.05$. Esta probabilidad, $P(A_1) = P(\text{tiene la enfermedad}) = 0.05$, se denomina **probabilidad a priori**. Se le da este nombre porque la probabilidad se asigna antes de haber obtenido datos empíricos.

Probabilidad a priori Es la probabilidad inicial con base en el nivel actual de información.

La probabilidad a priori de que una persona no padezca el trastorno es, por tanto, igual a 0.95, o bien $P(A_2) = 0.95$, que se obtiene de $1 - 0.05$.

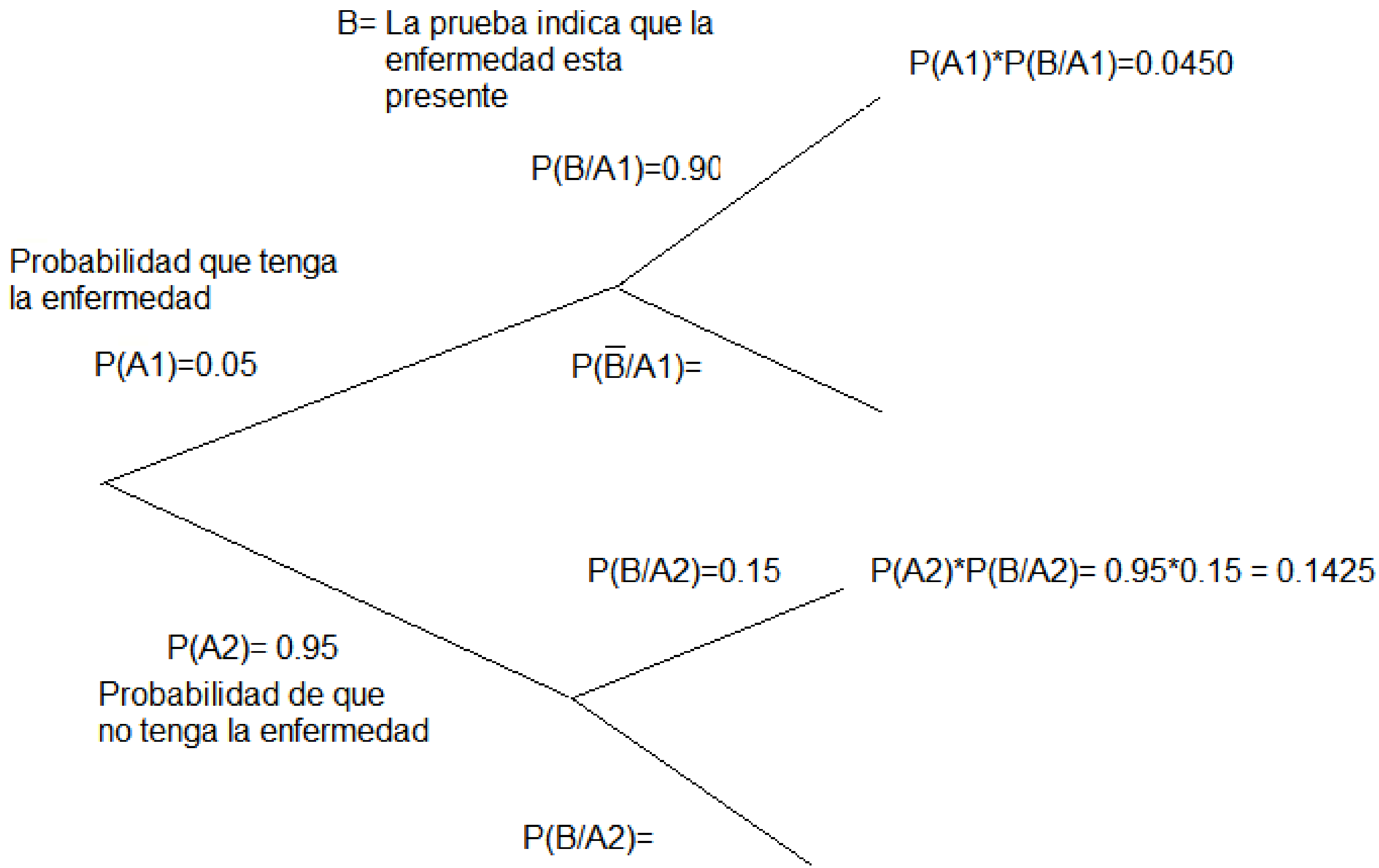
Existe una técnica de diagnóstico para detectar la enfermedad, pero no es muy exacta. Sea B el evento "la prueba indica que la enfermedad está presente". Considere que la evidencia histórica muestra que si una persona realmente padece la enfermedad, la probabilidad de que la prueba indique la presencia de tal dolencia es 0.90. Utilizando las definiciones de probabilidad condicional desarrolladas anteriormente en este capítulo, tal afirmación se expresa como:

$$P(B \mid A_1) = 0.90$$

Considere que la probabilidad de que en una persona que en realidad no padece la enfermedad, la prueba indique que la enfermedad está presente, es 0.15.

$$P(B \mid A_2) = 0.15$$

Probabilidad a posteriori Es una probabilidad revisada con base en información adicional.



B= La prueba indica que la enfermedad esta presente
P(A1)*P(B/A1)=0.0450
P(B/A1)=0.90
Probabilidad que tenga la enfermedad
P(A1)=0.05
P($\bar{B}$/A1)=
P(B/A2)=0.15
P(A2)*P(B/A2)= 0.95*0.15 = 0.1425
P(A2)= 0.95
Probabilidad de que no tenga la enfermedad
P(B/A2)=

TEOREMA DE BAYES $$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2)}$$

$$P(A_1 \mid B) = \frac{P(A_1)P(B \mid A_1)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2)}$$

$$= \frac{(0.05)(0.90)}{(0.05)(0.90) + (0.95)(0.15)} = \frac{0.0450}{0.1875} = 0.24$$

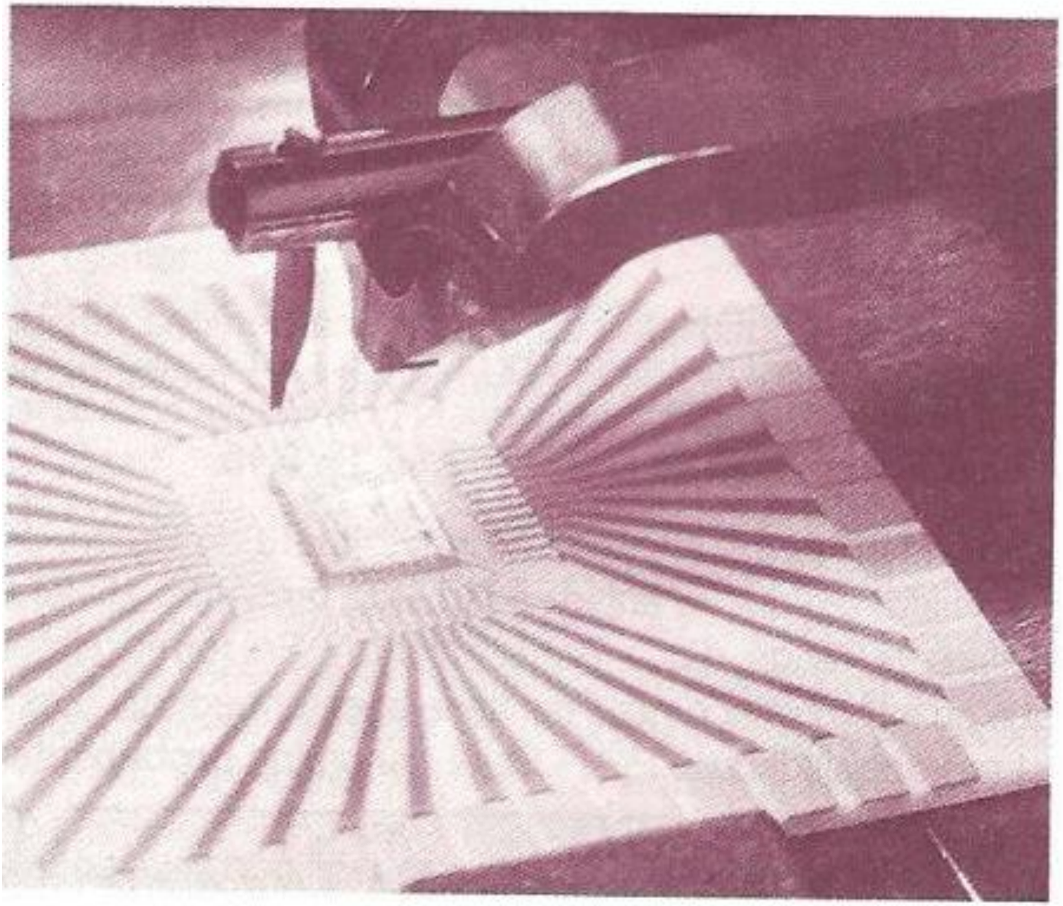
los eventos A_1 y A_2. Si hay n eventos de este tipo, $A_1, A_2, \ldots A_n$, la fórmula del teorema de Bayes se convierte en:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) + \cdots + P(A_n)P(B \mid A_n)}$$

Utilizando la anotación anterior, los cálculos para el problema en Umen se pueden resumir en la siguiente tabla.

Evento, A_i	**Probabilidad a prori, $P(A_i)$**	**Probabilidad condicional, $P(B \mid A_i)$**	**Probabilidad conjunta, $P(A_i$ y $B)$**	**Probabilidad posteriori, $P(A_i \mid B)$**
Tiene la enfermedad, A_1	0.05	0.90	0.0450	0.0450/0.1875 = 0.24
No tiene la enfermedad, A_2	0.95	0.15	0.1425	0.1425/0.1875 = 0.76
			$P(B) = 0.1875$	1.00

Un fabricante de videograbadoras (VCR) compra un circuito integrado, el LS-24, de tres proveedores. Un 30% de los circuitos LS-24 se compran a Hall Electronics, 20% a Schuller Sales, y el 50% restante a Crawford Components. El fabricante tiene historiales extensos acerca de los tres proveedores, y sabe que 3% de los circuitos LS-24 de Hall Electronics resultan defectuosos, que 5% de los circuitos de Schuller Sales son no aceptables, y 4% de los de Crawford Components tienen defectos.



Cuando los circuitos integrados LS-24 llegan al fabricante, se colocan directamente en un contenedor, y no son inspeccionados o identificados de algún modo por el proveedor. Un trabajador selecciona uno para su instalación en una VCR, y lo encuentra defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado por Schuller Sales?

Como un primer paso, se resume enseguida parte de la información dada en el enunciado del problema.

- Existen tres eventos mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos, que son los tres proveedores:

  A_1 El circuito LS-24 se compró a Hall Electronics

  A_2 El circuito LS-24 se compró a Schuller Sales

  A_3 El circuito LS-24 se compró a Crawford Components

- Las probabilidades a priori son:

  $P(A_1) = 0.30$ La probabilidad de que el circuito haya sido fabricado por Hall Electronics

  $P(A_2) = 0.20$ La probabilidad de que el circuito provenga de Schuller Sales

  $P(A_3) = 0.50$ La probabilidad de que el circuito haya sido fabricado por Crawford Components

La información adicional puede ser

B_1 que el circuito LS-24 sea defectuoso.

B_2 que el circuito LS-24 no sea defectuoso

A continuación se indican las siguientes probabilidades condicionales:

$P(B_1 \mid A_1) = 0.03$	La probabilidad de que un circuito LS-24 producido por Hall Electronics sea defectuoso
$P(B_1 \mid A_2) = 0.05$	La probabilidad de que un circuito LS-24 producido por Schuller Sales sea defectuoso
$P(B_1 \mid A_3) = 0.04$	La probabilidad de que un circuito procedente de Crawford Components sea defectuoso

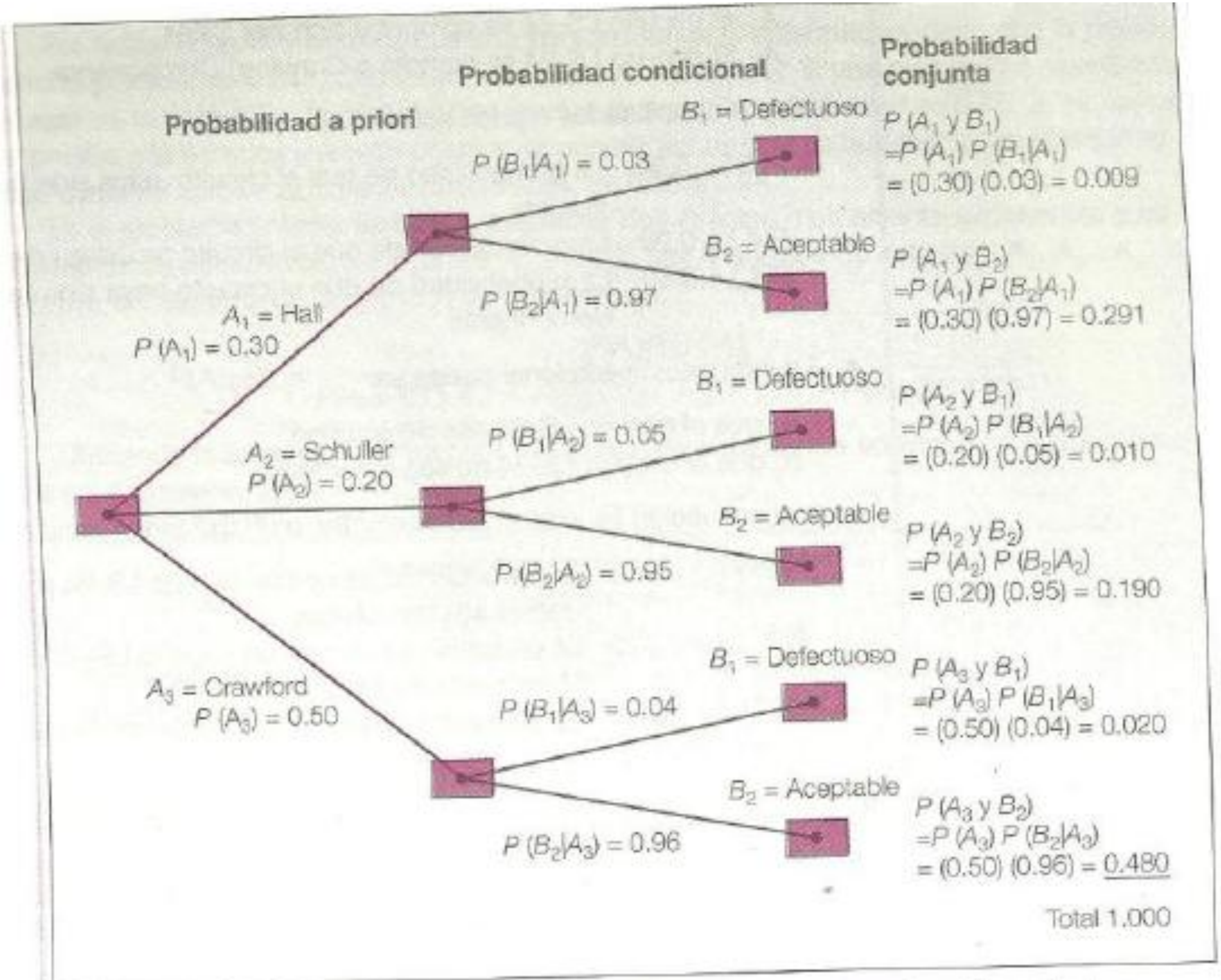


Diagrama de árbol para el problema de fabricación de videograbadoras.

La información anterior se resume en la siguiente tabla.

Evento, A_i	Probabilidad a prori, $P(A_i)$	Probabilidad condicional, $P(B_1 \mid A_i)$	Probabilidad conjunta, $P(A_i \text{ y } B_1)$	Probabilidad posteriori, $P(A_i \mid B_1)$
Hall	0.30	0.03	0.009	0.009/0.039 = 0.2308
Schuller	0.20	0.05	0.010	0.010/0.039 = 0.2564
Crawford	0.50	0.04	0.020	0.020/0.039 = 0.5128
			$P(B_1) = 0.039$	1.0000

La probabilidad de que el circuito LS-24 defectuoso provenga de Schuller Sales se puede encontrar aplicando el teorema de Bayes. Se desea calcular $P(A_2 \mid B_1)$, donde A_2 se refiere a Schuller Sales, y B_1 al hecho de que el circuito integrado seleccionado fue defectuoso.

$$P(A_2 \mid B_1) = \frac{P(A_2)P(B_1 \mid A_2)}{P(A_1)P(B_1 \mid A_1) + P(A_2)P(B_1 \mid A_2) + P(A_3)P(B_1 \mid A_3)}$$

$$= \frac{(0.20)(0.05)}{(0.30)(0.03) + (0.20)(0.05) + (0.50)(0.04)} = \frac{0.010}{0.039} = 0.2564$$

39. $P(A_1) = 0.60$, $P(A_2) = 0.40$, $P(B_1 \mid A_1) = 0.05$ y $P(B_1 \mid A_2) = 0.10$. Emplee el teorema de Bayes para determinar $P(A_1 \mid B_1)$.

40. $P(A_1) = 0.20$, $P(A_2) = 0.40$ y $P(A_3) = 0.40$. $P(B_1 \mid A_1) = 0.25$. $P(B_1 \mid A_2) = 0.05$ y $P(B_1 \mid A_3) = 0.10$. Utilice el teorema de Bayes para determinar $P(A_3 \mid B_1)$.

Principios de conteo

Si el número de resultados posibles de un experimento es pequeño, resulta relativamente fácil contarlos. Por ejemplo, hay seis resultados posibles cuando se lanza un dado, específicamente:

Fórmula de la multiplicación

Fórmula de la multiplicación Si hay m formas de hacer una cosa, y n formas de hacer otra, existirán $m \times n$ formas de hacer ambas.

FÓRMULA DE LA MULTIPLICACIÓN Número total de arreglos = $(m)(n)$

Un vendedor de automóviles desea anunciar que por $29 999 (dólares) usted puede comprar un auto convertible, un sedan de dos puertas, o un modelo de cuatro puertas, y además puede elegir si desea que los rines sean sólidos o deportivos. ¿Cuántos arreglos diferentes de modelos y rines puede ofrecer el comerciante?

Desde luego, el vendedor podría determinar el número total de arreglos esquematizándolos y contándolos. Hay seis arreglos.

Podemos utilizar la fórmula de la multiplicación para verificar (donde m es el número de modelos y n el tipo de rin). Aplicando la fórmula (5.8):

$$\text{Total de arreglos posibles} = (m)(n) = (3)(2) = 6$$

Fórmula de la permutación

Según se observó, la fórmula de la multiplicación se aplica para encontrar el número de arreglos posibles, dados dos o más grupos. La **fórmula de la permutación** se utiliza para determinar el número posible de arreglos cuando sólo hay un grupo de objetos. Como ejemplos de este tipo de problema:

- Se van a ensamblar tres partes electrónicas en una unidad modular para un receptor de televisión. Las partes se pueden ensamblar en cualquier orden. La pregunta relacionada con conteo es: ¿De cuántos modos diferentes pueden ensamblarse las tres partes?
- Un operario debe realizar cuatro verificaciones de seguridad antes de activar su máquina. No importa en qué orden las realice. ¿De cuántas formas distintas puede realizar las verificaciones?

Permutación Un arreglo o disposición de r objetos seleccionados de un solo grupo de n objetos posibles.

FÓRMULA DE LA PERMUTACIÓN $${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

donde:

n es el número de total de objetos

r es el número de objetos seleccionados

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

Con referencia al grupo de tres partes electrónicas que deben ensamblarse en cualquier orden, ¿de cuántas maneras diferentes se pueden ensamblar?

Se tiene que $n = 3$, porque hay tres partes por ensamblar, y también $r = 3$ porque las tres partes se van a colocar en la unidad modular. Utilizando la fórmula (5.9):

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{3!}{(3-3)!} = \frac{3!}{0!} = \frac{3!}{1} = 6$$

Se puede realizar una verificación del número de permutaciones obtenidas utilizando la fórmula de la permutación. Para verificar esto, sólo hay que determinar cuántos "espacios" deben llenarse, así como las posibilidades para cada "espacio", y después se aplica la fórmula de la multiplicación. En el problema relacionado con las tres partes electrónicas, hay tres lugares en la unidad modular para las tres partes. Existen tres posibilidades para el primer lugar, dos para el segundo (ya se utilizó una) y una para el tercero, como se indica a continuación:

$$(3)(2)(1) = 6 \text{ permutaciones}$$

Las seis formas en que se pueden disponer las tres partes electrónicas, denotadas por A, B, C, son:

ABC	*BAC*	*CAB*	*ACB*	*BCA*	*CBA*

La empresa Betts Machine Shop, Inc. tiene ocho tornos pero sólo hay disponibles tres espacios en la zona de producción. ¿En cuántas formas diferentes se pueden colocar los ocho tornos en los tres espacios disponibles?

Hay ocho posibilidades para el primer espacio disponible en la zona de producción, siete posibilidades para el segundo espacio (ya se ha utilizado un espacio), y seis para el tercero. Entonces:

$$(8)(7)(6) = 336. \text{ Es decir,}$$

hay un total de 336 acomodos diferentes. Esto también podría haberse encontrado usando la fórmula 5.9. Si $n = 8$ máquinas y $r = 3$ espacios disponibles, la fórmula nos lleva a

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{(8)(7)(6)5!}{5!} = 336$$

Fórmula de la combinación

Si el orden en los objetos seleccionados no es importante, a cualquier selección se le llama una *combinación*. La fórmula para contar el número de combinaciones de r objetos de un conjunto de n objetos es:

FÓRMULA DE LA COMBINACIÓN	$_{n}C_{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

Por ejemplo, si los ejecutivos Abel, Báez y Chauncy han de ser elegidos como un comité para negociar una fusión de empresas, sólo existe una combinación posible de estos tres. El comité formado por Abel, Báez y Chauncy equivale al integrado por Báez, Chauncy y Abel. Utilizando la fórmula de la combinación:

$$_{n}C_{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1(1)} = 1$$

A un departamento de mercadotecnia se le ha solicitado que diseñe códigos de colores para las 42 líneas de discos compactos (CD) que comercializa la empresa Goody Records. Se van a utilizar tres colores en cada línea de CD, pero una combinación de tres colores que se utilizan en una línea no puede reordenarse y utilizarse para identificar a otra línea diferente. Esto significa que si se usaran los colores verde, amarillo y violeta para señalar una línea, entonces amarillo, verde y violeta (o cualquier otra combinación de estos tres colores) no se podría emplear para identificar otra línea. ¿Serán adecuados siete colores tomados tres a la vez para codificar adecuadamente las 42 líneas?

Aplicando la fórmula , existen 35 combinaciones, que se obtienen al calcular

$$_7C_3 = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!4!} = 35$$

Los siete colores de los que se toman tres cada vez (esto es, tres colores para cada línea) no serían suficientes para codificar por color las 42 líneas diferentes de discos compactos, porque sólo permiten 35 combinaciones. Ocho colores tomados de tres en tres darían 56 combinaciones distintas. Esto sería más que suficiente para codificar cromáticamente las 42 líneas.