

INTERPOLACIÓN Y APROXIMACIÓN POLINOMIAL

Contenido

1 Preliminares

- Teorema

2 Interpolación

- Introducción a la Interpolación
- Interpolación de Lagrange
- Polinomio Interpolador de Newton

Contenido

1 Preliminares

- Teorema

2 Interpolación

- Introducción a la Interpolación
- Interpolación de Lagrange
- Polinomio Interpolador de Newton

Teorema

Teorema: Serie de Taylor

Supongamos que $f(x)$ admite derivadas continuas de todos los órdenes en un intervalo (a, b) en el que está el punto x_0 . Supongamos que la sucesión de polinomios de Taylor converge a $f(x)$, o sea,

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} P_N(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k,$$

Teorema

para todo $x \in (a, b)$, entonces f es analítica y puede desarrollarse en serie de Taylor alrededor de x_0

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Contenido

1 Preliminares

- Teorema

2 Interpolación

- Introducción a la Interpolación
- Interpolación de Lagrange
- Polinomio Interpolador de Newton

Introducción a la Interpolación

- La información necesaria para construir el polinomio de Taylor es el valor de f y los de sus derivadas en x_0 . Debemos conocer las derivadas de orden superior y, a menudo, suele ocurrir que o bien no están disponibles, o bien son difíciles de calcular.

Introducción a la Interpolación

- Supongamos que conocemos $N+1$ puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$ de la curva $y = f(x)$, donde las abscisas x_k se distribuyen en un intervalo $[a, b]$ de manera que

$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_N \leq b$$

y $y_k = f(x_k)$. Construiremos un polinomio $P(x)$ de grado N que pase por estos $N+1$ puntos. Para construirlo, únicamente necesitaremos conocer los valores x_k e y_k , así que las derivadas de orden superior no nos harán falta.

Introducción a la Interpolación

- El polinomio $P(x)$ puede usarse luego como una aproximación a $f(x)$ en todo el intervalo $[a, b]$.
- Existen funciones especiales $y = f(x)$, que aparecen en análisis de tipo estadístico o científico, para las que sólo disponemos de una tabla de valores; es decir, sólo conocemos $N+1$ puntos (x_k, y_k) y es necesario dar un método para aproximar $f(x)$ en abscisas que no están tabuladas.

Introducción a la Interpolación

- El polinomio $P(x)$ puede usarse luego como una aproximación a $f(x)$ en todo el intervalo $[a, b]$.
- Existen funciones especiales $y = f(x)$, que aparecen en análisis de tipo estadístico o científico, para las que sólo disponemos de una tabla de valores; es decir, sólo conocemos $N+1$ puntos (x_k, y_k) y es necesario dar un método para aproximar $f(x)$ en abscisas que no están tabuladas.

Introducción a la Interpolación

- 1 Si el error de los valores tabulados es significativo, entonces es mejor usar los métodos de ajuste de curvas (próximo capítulo).
- 2 Si los puntos (x_k, y_k) tienen un grado alto de precisión, entonces podemos considerar el polinomio $y = P(x)$ que pasa por todos ellos.
- 3 Cuando $x_0 < x < x_N$, la aproximación $P(x)$ se conoce como *valor interpolado*.
- 4 Si se tiene $x < x_0$ o bien $x_N < x$, entonces $P(x)$ se conoce como *valor extrapolado*.

Introducción a la Interpolación

- 1 Si el error de los valores tabulados es significativo, entonces es mejor usar los métodos de ajuste de curvas (próximo capítulo).
- 2 Si los puntos (x_k, y_k) tienen un grado alto de precisión, entonces podemos considerar el polinomio $y = P(x)$ que pasa por todos ellos.
- 3 Cuando $x_0 < x < x_N$, la aproximación $P(x)$ se conoce como *valor interpolado*.
- 4 Si se tiene $x < x_0$ o bien $x_N < x$, entonces $P(x)$ se conoce como *valor extrapolado*.

Introducción a la Interpolación

- 1 Si el error de los valores tabulados es significativo, entonces es mejor usar los métodos de ajuste de curvas (próximo capítulo).
- 2 Si los puntos (x_k, y_k) tienen un grado alto de precisión, entonces podemos considerar el polinomio $y = P(x)$ que pasa por todos ellos.
- 3 Cuando $x_0 < x < x_N$, la aproximación $P(x)$ se conoce como *valor interpolado*.
- 4 Si se tiene $x < x_0$ o bien $x_N < x$, entonces $P(x)$ se conoce como *valor extrapolado*.

Introducción a la Interpolación

- 1 Si el error de los valores tabulados es significativo, entonces es mejor usar los métodos de ajuste de curvas (próximo capítulo).
- 2 Si los puntos (x_k, y_k) tienen un grado alto de precisión, entonces podemos considerar el polinomio $y = P(x)$ que pasa por todos ellos.
- 3 Cuando $x_0 < x < x_N$, la aproximación $P(x)$ se conoce como *valor interpolado*.
- 4 Si se tiene $x < x_0$ o bien $x_N < x$, entonces $P(x)$ se conoce como *valor extrapolado*.

Contenido

1 Preliminares

- Teorema

2 Interpolación

- Introducción a la Interpolación
- Interpolación de Lagrange
- Polinomio Interpolador de Newton

Interpolación de Lagrange

- Interpolación significa estimar el valor desconocido de una función en un punto, tomando una media ponderada de sus valores conocidos en puntos cercanos al dado.

En la interpolación lineal se utiliza un segmento rectilíneo que pasa por dos puntos que se conocen. La pendiente de la recta que pasa por dos puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) es

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

Interpolación de Lagrange

- Interpolar significa estimar el valor desconocido de una función en un punto, tomando una media ponderada de sus valores conocidos en puntos cercanos al dado.

En la interpolación lineal se utiliza un segmento rectilíneo que pasa por dos puntos que se conocen. La pendiente de la recta que pasa por dos puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) es

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

Interpolación de Lagrange

así que en la ecuación de la recta $y = m(x - x_0) + y_0$ podemos sustituir m y obtener

$$y = P(x) = y_0 + (y_1 - y_0) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}. \quad (1)$$

(1) es un polinomio de grado ≤ 1 y la evaluación de $P(x)$ en x_0 y x_1 produce

$$P(x_0) = y_0 + (y_1 - y_0)(0) = y_0, P(x_1) = y_0 + (y_1 - y_0)(1) = y_1. \quad (2)$$

Interpolación de Lagrange

J.L. Lagrange descubrió que se puede encontrar este polinomio usando un método distinto: Si escribimos

$$y = P_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \sum_{k=0}^1 y_k L_{1,k}(x), \quad (3)$$

donde $L_{1,0}(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}$ y $L_{1,1}(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$ son los *polinomios coeficientes de Lagrange* para los nodos x_0 y x_1 . Nótese que cada uno de los sumandos del miembro derecho de (3) es un término lineal, por lo tanto $P_1(x)$ es un polinomio de grado ≤ 1 .

Interpolación de Lagrange

Como

$$L_{1,0}(x_0) = 1, L_{1,1}(x_0) = 0, L_{1,0}(x_1) = 0, L_{1,1}(x_1) = 1,$$

entonces $P_1(x)$ definido en (3) también pasa por los dos puntos dados:

$$P_1(x_0) = y_0 + y_1(0) = y_0, P_1(x_1) = y_0(0) + y_1 = y_1.$$

Interpolación de Lagrange

El polinomio interpolador de Lagrange cuadrático para los puntos (x_0, y_0) , (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

$$P_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Interpolación de Lagrange

El polinomio interpolador de Lagrange de grado $N=3$ para los puntos (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) y (x_3, y_3) es

$$\begin{aligned} P_3(x) = & y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \\ & + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3 \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}. \end{aligned}$$

Interpolación de Lagrange

Generalizando, para construir un polinomio $P_N(x)$ de grado $\leq N$ y que pase por $N+1$ puntos (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , ..., (x_N, y_N) la fórmula es

$$P_N(x) = \sum_{k=0}^N y_k L_{N,k}(x), \quad (4)$$

donde $L_{N,k}$ es el polinomio coeficiente de Lagrange para los nodos x_0, x_1, \dots, x_N definido por

$$L_{N,k}(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1}) (x - x_{k+1}) \dots (x - x_N)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1}) (x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_N)} = \frac{\prod_{j=0, j \neq k}^N (x - x_j)}{\prod_{j=0, j \neq k}^N (x_k - x_j)}.$$

Interpolación de Lagrange

Para cada k fijo, el polinomio coeficiente de Lagrange $L_{N,k}(x)$ tiene la siguiente propiedad:

$$L_{N,k}(x_j) = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases} . \quad (5)$$

Interpolación de Lagrange

La sustitución de (5) en (4) prueba que la curva polinomial $y = P_N(x)$ pasa por los puntos (x_j, y_j) :

$$\begin{aligned}P_N(x_j) &= y_0 L_{N,0}(x_j) + \dots + y_j L_{N,j}(x_j) + \dots + y_N L_{N,N}(x_j) \\&= y_0(0) + \dots + y_j(1) + \dots + y_N(0) = y_j.\end{aligned}$$

Aplicando el Teorema Fundamental del Álgebra se puede probar que $P_N(x)$ es único.

Interpolación de Lagrange

Teorema: Polinomio Interpolador de Lagrange

Supongamos que $f \in C^{N+1}[a, b]$ y que $x_0, x_1, \dots, x_N \in [a, b]$ son $N+1$ nodos de interpolación. Si $x \in [a, b]$, entonces

$$f(x) = P_N(x) + E_N(x),$$

donde $P_N(x)$ es un polinomio que podemos usar para aproximar $f(x)$:

$$f(x) \approx P_N(x) = \sum_{k=0}^N f(x_k) L_{N,k}(x),$$

Interpolación de Lagrange

llamado *polinomio interpolador de Lagrange* de f para los nodos dados, y el término del error $E_N(x)$ se puede escribir como

$$E_N(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_N) f^{N+1}(c)}{(N + 1)!},$$

para algún valor $c = c(x)$ del intervalo $[a, b]$.

Contenido

1 Preliminares

- Teorema

2 Interpolación

- Introducción a la Interpolación
- Interpolación de Lagrange
- Polinomio Interpolador de Newton

Polinomio Interpolador de Newton

- En ocasiones es útil considerar varios polinomios aproximantes $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_N(x)$ y, después, elegir el más adecuado a las necesidades.
- Uno de los inconvenientes de los polinomios interpoladores de Lagrange es que no hay relación entre la construcción de $P_{N-1}(x)$ y la de $P_N(x)$; cada polinomio debe construirse individualmente y se requieren muchas operaciones para calcular polinomios de grado elevado.

Polinomio Interpolador de Newton

- En ocasiones es útil considerar varios polinomios aproximantes $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_N(x)$ y, después, elegir el más adecuado a las necesidades.
- Uno de los inconvenientes de los polinomios interpoladores de Lagrange es que no hay relación entre la construcción de $P_{N-1}(x)$ y la de $P_N(x)$; cada polinomio debe construirse individualmente y se requieren muchas operaciones para calcular polinomios de grado elevado.

Polinomio Interpolador de Newton

Los polinomios interpoladores de Newton se calculan mediante un esquema recursivo

$$\begin{aligned}P_1(x) &= a_0 + a_1 (x - x_0), \\P_2(x) &= a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)(x - x_1), \\P_3(x) &= a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)(x - x_1) + a_3 (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2), \\&\dots \dots \dots \\P_N(x) &= a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)(x - x_1) + a_3 (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\&\quad + a_4 (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + \dots \\&\quad + a_N (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{N-1}).\end{aligned}\tag{6}$$

Polinomio Interpolador de Newton

$P_N(x)$ se obtiene a partir de $P_{N-1}(x)$ usando la recurrencia

$$P_N(x) = P_{N-1}(x) + a_N (x - x_0) (x - x_1) (x - x_2) \dots (x - x_{N-1}).$$

Se dice que $P_N(x)$ es un *polinomio de Newton* con N centros x_0, x_1, \dots, x_{N-1} .

Polinomio Interpolador de Newton

Como $P_N(x)$ involucra sumas de productos de factores lineales, siendo

$$a_N (x - x_0) (x - x_1) (x - x_2) \dots (x - x_{N-1})$$

el de mayor grado, entonces $P_N(x)$ es de grado $\leq N$.

Polinomio Interpolador de Newton

Diferencias Divididas: Queremos encontrar los coeficientes a_k de todos los polinomios $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_N(x)$ que sirven para aproximar una función dada $f(x)$.

De (6a):

$$f(x_0) = P_1(x_0) = a_0 + a_1(x_0 - x_0) = a_0 \Rightarrow a_0 = f(x_0). \quad (7)$$

De (6a) y (7):

$$f(x_1) = P_1(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_0) + a_1(x_1 - x_0) \Rightarrow a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Polinomio Interpolador de Newton

Diferencias Divididas: Queremos encontrar los coeficientes a_k de todos los polinomios $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_N(x)$ que sirven para aproximar una función dada $f(x)$.

De (6a):

$$f(x_0) = P_1(x_0) = a_0 + a_1(x_0 - x_0) = a_0 \Rightarrow a_0 = f(x_0). \quad (7)$$

De (6a) y (7):

$$f(x_1) = P_1(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_0) + a_1(x_1 - x_0) \Rightarrow a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Polinomio Interpolador de Newton

De (6b):

$$f(x_2) = P_2(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$
$$\Rightarrow a_2 = \frac{f(x_2) - a_0 - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}.$$

Polinomio Interpolador de Newton

Definición

Diferencias Divididas. Las *diferencias divididas* de una función $f(x)$ se definen como:

$$\begin{aligned}f[x_k] &= f(x_k), \\f[x_{k-1}, x_k] &= \frac{f[x_k] - f[x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}}, \\f[x_{k-2}, x_{k-1}, x_k] &= \frac{f[x_{k-1}, x_k] - f[x_{k-2}, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-2}}, \\f[x_{k-3}, x_{k-2}, x_{k-1}, x_k] &= \frac{f[x_{k-2}, x_{k-1}, x_k] - f[x_{k-3}, x_{k-2}, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-3}}, \\&\dots \dots \dots \\f[x_{k-j}, x_{k-j+1}, \dots, x_k] &= \frac{f[x_{k-j+1}, \dots, x_k] - f[x_{k-j}, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-j}}.\end{aligned}$$

Polinomio Interpolador de Newton

Tabla de diferencias divididas para $y = f(x)$

x_k	$f[x_k]$	$f[,]$	$f[, ,]$	$f[, , ,]$	$f[, , , ,]$
x_0	$f[x_0]$				
x_1	$f[x_1]$	$f[x_0, x_1]$			
x_2	$f[x_2]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$		
x_3	$f[x_3]$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
x_4	$f[x_4]$	$f[x_3, x_4]$	$f[x_2, x_3, x_4]$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$

Polinomio Interpolador de Newton

Teorema: Polinomio Interpolador de Newton

Supongamos que x_0, x_1, \dots, x_N son $N+1$ números distintos en $[a, b]$. Entonces existe un único polinomio $P_N(x)$ de grado $\leq N$ tal que

$$f(x_j) = P_N(x_j); j = 0, 1, \dots, N.$$

La forma de Newton de este polinomio interpolador es

$$P_N(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_N(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{N-1}),$$

siendo $a_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k]; k = 0, 1, \dots, N$.

Bibliografía



MATHEWS, John; KURTIS, Fink.
Métodos Numéricos con MATLAB.
Prentice Hall, 2000.