ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Contenido

Contenido

Introducción

- Las ecuaciones diferenciales se usan para construir modelos matemáticos de problemas de la ciencia y la ingeniería. A menudo se da el caso de que no hay una solución analítica conocida, por lo que se necesitan aproximaciones numéricas.

Introducción

- Las leyes de la naturaleza no se suelen esconder detrás de fórmulas explícitas; lo que normalmente se puede medir es cómo los cambios de una variable afectan a otra variable. Cuando se traduce esto en un modelo matemático, el resultado es una ecuación diferencial que involucra
  - La velocidad de cambio de la función desconocida.
  - La variable dependiente.
  - La variable independiente.

Definiciones

Definición

Una *solución* del *problema de valor inicial* (PVI)

$$y' = f(t, y), \;\; y(t_0) = y_0$$

en un intervalo $[t_0, t_1]$ es una función derivable $y = y(t)$ tal que

$$y(t_0) = y_0$$

y

$$y'(t) = f(t, y(t)) \;\; \forall t \in [t_0, t_1].$$

Contenido

El Método de Euler

Sea $[a, b]$ el intervalo en el que se quiere hallar la solución del PVI

$$y' = f(t, y), \ \ y(a) = y_0.$$

Se construirá un conjunto finito de puntos $\{(t_k, y_k)\}$ que son aproximaciones de la solución, o sea

$$y(t_k) \approx y_k.$$

El Método de Euler

Se divide el intervalo $[a, b]$ en M subintervalos del mismo tamaño usando la partición dada por

$$t_k = a + kh; \;\; k = 0, 1, ..., M,$$

siendo $h = \frac{b-a}{M}$ el *tamaño del paso*.

Se procede a resolver aproximadamente

$$y' = f(t, y), \;\; y(t_0) = y_0$$

en $[t_0, t_M]$.

El Método de Euler

Desarrollando $y(t)$ en serie de Taylor alrededor de $t = t_0$:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(t_0)}{k!}(t - t_0)^k = y(t_0) + y^{'}(t_0)(t - t_0) + \frac{y^{''}(t_0)(t - t_0)^2}{2} + \ldots \qquad (1)$$

Evaluando (1) en $t = t_1$, y sustituyendo

$$y^{'}(t_0) = f(t_0, y(t_0)), h = t_1 - t_0,$$

se obtiene:

$$y(t_1) = y(t_0) + hf(t_0, y(t_0)) + O\left(h^2\right).$$

El Método de Euler

Si h es suficientemente pequeño, se puede despreciar el último término y obtener la *aproximación de Euler*

$$y\left(t_1\right) \approx y_1 = y_0 + hf\left(t_0, y_0\right).$$

Repitiendo el proceso se genera una sucesión de puntos que se aproximan a la gráfica de la solución, $y = y\left(t\right)$.

El Método de Euler

- El paso general del método de Euler es

$$t_{k+1} = t_k + h,\ \ y_{k+1} = y_k + hf\left(t_k, y_k\right);\ \ k = 0, 1, ..., M - 1.$$

Contenido

El Método de Runge-Kutta de Orden $N = 2$ (RK2)

El desarrollo en serie de Taylor para $y(t+h)$ alrededor de t es

$$y(t+h) = y(t) + hy'(t) + \frac{h^2}{2} y''(t) + O\left(h^3\right). \tag{2}$$

Recordando que

$$y'(t) = f(t, y), \tag{3}$$

derivando respecto a t usando la regla de la cadena para funciones de dos variables, obtenemos

$$y''(t) = f_t(t, y) + f_y(t, y)\, y'(t) = f_t(t, y) + f_y(t, y)\, f(t, y). \tag{4}$$

El Método de Runge-Kutta de Orden $N = 2$ (RK2)

Reemplazando (3) y (4) en (2):

$$y(t+h) = y(t) + hf(t,y) + \frac{h^2}{2} f_t(t,y) + \frac{h^2}{2} f_y(t,y) f(t,y) + O\left(h^3\right). \quad (5)$$

El Método de Runge-Kutta de Orden $N = 2$ (RK2)

El método RK2 utiliza una combinación lineal de dos funciones que permita expresar $y\left(t+h\right)$:

$$y\left(t+h\right) = y\left(t\right) + Ahf_0 + Bhf_1 , \tag{6}$$

donde

$$\begin{aligned} f_0 &= f\left(t, y\right) , \\ f_1 &= f\left(t + Ph, y + Qhf_0\right) = f\left(t + Ph, y + Qhf\left(t, y\right)\right) . \end{aligned} \tag{7}$$

El Método de Runge-Kutta de Orden $N = 2$ (RK2)

Se aproxima $f(t, y)$ con la serie de Taylor para una función de dos variables, obteniendo para (7b):

$$f_1 = f(t, y) + Phf_t(t, y) + Qhf_y(t, y) f(t, y) + O\left(h^2\right). \qquad (8)$$

Reemplazando (7a) y (8) en (6), se obtiene la representación de $y(t+h)$ que se usa en el método RK2:

$$y(t+h) = y(t) + (A+B)hf(t, y) + BPh^2 f_t(t, y) + BQh^2 f_y(t, y) f(t, y) + O\left(h^3\right). \quad (9)$$

El Método de Runge-Kutta de Orden $N = 2$ (RK2)

Igualando los términos correspondientes de (5) y (9) se llega a que A, B, P y Q deben verificar el siguiente sistema de tres ecuaciones y cuatro incógnitas (sistema subdeterminado, se puede elegir libremente uno de los coeficientes)

$$A + B = 1, \;\; BP = \frac{1}{2}, \;\; BQ = \frac{1}{2} \tag{10}$$

para que el método RK2 de (9) tenga el mismo orden de precisión que el método de Taylor de (5) (de orden N=2).

El Método de Runge-Kutta de Orden $N = 2$ (RK2)

Dos Elecciones Posibles:

1. $A = \frac{1}{2} \Rightarrow B = \frac{1}{2}, P = 1, Q = 1$. Sustituyéndolos en (6) se obtiene el *método de Heun* (para generar la sucesión $\{(t_k, y_k)\}$):

$$y(t+h) = y(t) + \frac{h}{2}\left(f(t,y) + f(t+h, y+hf(t,y))\right).$$

2. $A = 0 \Rightarrow B = 1, P = \frac{1}{2}, Q = \frac{1}{2}$. Sustituyéndolos en (6) se obtiene el *método de Euler modificado o de Cauchy* (para generar la sucesión $\{(t_k, y_k)\}$):

$$y(t+h) = y(t) + hf\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f(t,y)\right).$$

El Método de Runge-Kutta de Orden $N = 2$ (RK2)

Dos Elecciones Posibles:

1. $A = \frac{1}{2} \Rightarrow B = \frac{1}{2}, P = 1, Q = 1$. Sustituyéndolos en (6) se obtiene el *método de Heun* (para generar la sucesión $\{(t_k, y_k)\}$):

$$y(t+h) = y(t) + \frac{h}{2}\left(f(t,y) + f(t+h, y+hf(t,y))\right).$$

1. $A = 0 \Rightarrow B = 1, P = \frac{1}{2}, Q = \frac{1}{2}$. Sustituyéndolos en (6) se obtiene el *método de Euler modificado o de Cauchy* (para generar la sucesión $\{(t_k, y_k)\}$):

$$y(t+h) = y(t) + hf\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f(t,y)\right).$$

El Método de Runge-Kutta de Orden N=4 (RK4)

Simula la precisión del método de la serie de Taylor de orden N=4 y consiste en calcular la aproximación y_{k+1} así:

$$y_{k+1} = y_k + w_1 k_1 + w_2 k_2 + w_3 k_3 + w_4 k_4, \tag{11}$$

donde k_1, k_2, k_3, k_4 son de la forma

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf\left(t_k, y_k\right), \\
k_2 &= hf\left(t_k + a_1 h, y_k + b_1 k_1\right), \\
k_3 &= hf\left(t_k + a_2 h, y_k + b_2 k_1 + b_3 k_2\right), \\
k_4 &= hf\left(t_k + a_3 h, y_k + b_4 k_1 + b_5 k_2 + b_6 k_3\right).
\end{aligned} \tag{12}$$

El Método de Runge-Kutta de Orden N=4 (RK4)

Igualando estos coeficientes con la serie de Taylor de orden N=4 (error de truncamiento $O\left(h^5\right)$), se llega al siguiente sistema de once ecuaciones y trece incógnitas (sistema subdeterminado, se pueden elegir libremente dos coeficientes):

El Método de Runge-Kutta de Orden N=4 (RK4)

$$
\begin{aligned}
b_1 &= a_1\,, \\
b_2 + b_3 &= a_2\,, \\
b_4 + b_5 + b_6 &= a_3\,, \\
w_1 + w_2 + w_3 + w_4 &= 1\,, \\
w_2 a_1 + w_3 a_2 + w_4 a_3 &= \frac{1}{2}\,, \\
w_2 a_1^2 + w_3 a_2^2 + w_4 a_3^2 &= \frac{1}{3}\,, \\
w_2 a_1^3 + w_3 a_2^3 + w_4 a_3^3 &= \frac{1}{4}\,, \\
w_3 a_1 b_3 + w_4 (a_1 b_5 + a_2 b_6) &= \frac{1}{6}\,, \\
w_3 a_1 a_2 b_3 + w_4 a_3 (a_1 b_5 + a_2 b_6) &= \frac{1}{8}\,, \\
w_3 a_1^2 b_3 + w_4 \left(a_1^2 b_5 + a_2^2 b_6\right) &= \frac{1}{12}\,, \\
w_4 a_1 b_3 b_6 &= \frac{1}{24}\,.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

El Método de Runge-Kutta de Orden N=4 (RK4)

Elección Más Útil:

$$a_1 = \frac{1}{2}, b_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = 1, b_1 = \frac{1}{2}, b_3 = \frac{1}{2}, b_4 = 0, b_5 = 0, b_6 = 1, \\ w_1 = \frac{1}{6}, w_2 = \frac{1}{3}, w_3 = \frac{1}{3}, w_4 = \frac{1}{6}. \end{array}$$

El Método de Runge-Kutta de Orden N=4 (RK4)

Sustituyéndolos en (11) y (12), se obtiene la fórmula para el método RK4 estándar: A partir del punto inicial (t_0, y_0) se genera la sucesión de aproximaciones usando la fórmula recursiva

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h\,(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4)}{6},$$

donde

$$\begin{aligned} f_1 &= f\,(t_k, y_k)\,, \\ f_2 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f_1\right), \\ f_3 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f_2\right), \\ f_4 &= f\,(t_k + h, y_k + hf_3)\,. \end{aligned}$$

Contenido

Ecuaciones Diferenciales

Considere el PVI

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(t, x, y) \end{aligned} \tag{14}$$

con

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Ecuaciones Diferenciales

Una solución de (14) es un par de funciones derivables $x(t)$ e $y(t)$ tales que

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t), y(t)) \\ y'(t) &= g(t, x(t), y(t)) \end{aligned} \tag{15}$$

con

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Ecuaciones Diferenciales

Para encontrar una solución numérica de (14) en un intervalo dado $a \leq t \leq b$ considérense los diferenciales

$$dx = f(t, x, y)\, dt, \;\; dy = g(t, x, y)\, dt. \qquad (16)$$

Ecuaciones Diferenciales

Sustituyendo en (16) los diferenciales por incrementos:

$$\begin{aligned} dt &= t_{k+1} - t_k, \\ dx &= x_{k+1} - x_k, \\ dy &= y_{k+1} - y_k, \end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x_k &\approx f(t_k, x_k, y_k)(t_{k+1} - t_k), \\ y_{k+1} - y_k &\approx g(t_k, x_k, y_k)(t_{k+1} - t_k). \end{aligned} \tag{17}$$

Ecuaciones Diferenciales

Dividiendo el intervalo en M subintervalos de ancho $h = \frac{b-a}{M}$ y usando en (17) los puntos $t_{k+1} = t_k + h$ como nodos, obtenemos las *fórmulas recursivas del método de Euler*:

$$
\begin{aligned}
t_{k+1} &= t_k + h, \\
x_{k+1} &= x_k + hf\left(t_k, x_k, y_k\right), \\
y_{k+1} &= y_k + hg\left(t_k, x_k, y_k\right),
\end{aligned}
$$

para $k = 0, 1, ..., M - 1$.

Ecuaciones Diferenciales

Para conseguir un grado de precisión razonable, es necesario utilizar un método de orden mayor. Por ejemplo, las fórmulas para *el método RK4* son:

Ecuaciones Diferenciales

$$t_{k+1} = t_k + h, \;\; x_{k+1} = x_k + \frac{h\left(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4\right)}{6}, \;\; y_{k+1} = y_k + \frac{h\left(g_1 + 2g_2 + 2g_3 + g_4\right)}{6},$$

donde

$$\begin{aligned}
f_1 &= f\left(t_k, x_k, y_k\right), & g_1 &= g\left(t_k, x_k, y_k\right), \\
f_2 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2} f_1, y_k + \frac{h}{2} g_1\right), & g_2 &= g\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2} f_1, y_k + \frac{h}{2} g_1\right), \\
f_3 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2} f_2, y_k + \frac{h}{2} g_2\right), & g_3 &= g\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2} f_2, y_k + \frac{h}{2} g_2\right), \\
f_4 &= f\left(t_k + h, x_k + hf_3, y_k + hg_3\right), & g_4 &= g\left(t_k + h, x_k + hf_3, y_k + hg_3\right). \quad (18)
\end{aligned}$$

Contenido

Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior

- Son las que involucran las derivadas de orden superior $x^{''}(t), x^{'''}(t)$ y así sucesivamente. Aparecen en modelos matemáticos de problemas de la física y la ingeniería.
- Por ejemplo,

$$mx^{''}(t) + cx^{'}(t) + kx(t) = g(t)$$

representa un sistema mecánico: un resorte con constante de recuperación k, atado a una masa m, separado de su posición de equilibrio y tendiendo a volver a ella.

Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior

- Son las que involucran las derivadas de orden superior $x^{''}(t), x^{'''}(t)$ y así sucesivamente. Aparecen en modelos matemáticos de problemas de la física y la ingeniería.
- Por ejemplo,

$$mx^{''}(t) + cx^{'}(t) + kx(t) = g(t)$$

representa un sistema mecánico: un resorte con constante de recuperación k, atado a una masa m, separado de su posición de equilibrio y tendiendo a volver a ella.

Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior

Se supone que:

- El amortiguamiento debido al rozamiento es proporcional a la velocidad.
- Existe una fuerza externa $g(t)$.
- Se conocen la posición $x(t_0)$ y la velocidad $x'(t_0)$ en un cierto instante t_0.

Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior

Se supone que:

- El amortiguamiento debido al rozamiento es proporcional a la velocidad.
- Existe una fuerza externa $g(t)$.
- Se conocen la posición $x(t_0)$ y la velocidad $x'(t_0)$ en un cierto instante t_0.

Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior

Se supone que:

- El amortiguamiento debido al rozamiento es proporcional a la velocidad.
- Existe una fuerza externa $g(t)$.
- Se conocen la posición $x(t_0)$ y la velocidad $x'(t_0)$ en un cierto instante t_0.

Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior

Se supone que:

- El amortiguamiento debido al rozamiento es proporcional a la velocidad.
- Existe una fuerza externa $g(t)$.
- Se conocen la posición $x(t_0)$ y la velocidad $x'(t_0)$ en un cierto instante t_0.

Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior

Despejando la derivada segunda, podemos escribir el PVI de segundo orden como

$$x^{''}(t) = f\left(t, x(t), x^{'}(t)\right) \tag{19}$$

con

$$x(t_0) = x_0, \;\; x^{'}(t_0) = y_0.$$

Esta ecuación diferencial de segundo orden puede reformularse como un sistema con dos ecuaciones de primer orden usando la sustitución

$$x^{'}(t) = y(t) \;\Rightarrow\; x^{''}(t) = y^{'}(t). \tag{20}$$

Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior

Entonces la ecuación diferencial (19) se convierte en el sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= f(t, x, y) \end{aligned} \tag{21}$$

con

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Al resolver (21) con un método numérico, se generan dos sucesiones $\{x_k\}, \{y_k\}$, siendo $\{x_k\}$ la solución de (19).

Contenido

Introducción

Otro tipo de ecuaciones diferenciales son de la forma

$$x'' = f\left(t, x, x'\right), \; a \leq t \leq b, \tag{22}$$

con la condición de contorno (o frontera)

$$x(a) = \alpha, x(b) = \beta. \tag{23}$$

Esto es lo que se conoce como *problema de contorno* o *problema de valores en la frontera*.

Introducción

Corolario. Problemas de contorno lineales.

Supongamos que la función f es de la forma

$$f(t,x,y) = p(t)\,y + q(t)\,x + r(t)\,,\ \ y = x^{'}(t)\,,$$

y que f y sus derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x} = q(t)$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = p(t)$ son continuas en $R = \{(t,x,y) : a \leq t \leq b, -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty\}$. Si

$$q(t) > 0 \ \forall t \in [a,b] \tag{24}$$

entonces el *problema de contorno lineal*

$$x^{''}(t) = p(t)\,x^{'}(t) + q(t)\,x(t) + r(t)\,,\ \ x(a) = \alpha, x(b) = \beta, \tag{25}$$

tiene solución única $x = x(t)$ en $a \leq t \leq b$.

Introducción

Hay que comprobar que se cumplen estas condiciones antes de emplear un método numérico; si no se hace, puede que se obtengan resultados absurdos.

Contenido

El Método de Disparo Lineal (para problemas de contorno lineales)

Supongamos que $u(t)$ es la solución única del PVI

$$u'' = p(t)\,u'(t) + q(t)\,u(t) + r(t), \;\; u(a) = \alpha, u'(a) = 0. \qquad (26)$$

Supongamos además que $v(t)$ es la solución única del PVI

$$v'' = p(t)\,v'(t) + q(t)\,v(t), \;\; v(a) = 0, v'(a) = 1. \qquad (27)$$

El Método de Disparo Lineal (para problemas de contorno lineales)

Entonces la combinación lineal

$$x(t) = u(t) + Cv(t) \tag{28}$$

es una solución de

$$x'' = p(t)\,x'(t) + q(t)\,x(t) + r(t)\,.$$

El Método de Disparo Lineal (para problemas de contorno lineales)

Veamos:

$$\begin{aligned}
x'' &= u'' + Cv'' \\
&= p(t)\, u'(t) + q(t)\, u(t) + r(t) + p(t)\, Cv'(t) + q(t)\, Cv(t) \\
&= p(t) \left(u'(t) + Cv'(t) \right) + q(t) \left(u(t) + Cv(t) \right) + r(t) \\
&= p(t)\, x'(t) + q(t)\, x(t) + r(t)\,. \qquad (29)
\end{aligned}$$

El Método de Disparo Lineal (para problemas de contorno lineales)

La solución $x(t)$ de la ecuación (29) toma los siguientes valores en la frontera del intervalo:

$$x(a) = u(a) + Cv(a) = \alpha + 0 = \alpha, \quad x(b) = u(b) + Cv(b)\,. \quad (30)$$

Imponiendo la condición de contorno $x(b) = \beta$ en (30) se obtiene

$$C = \frac{\beta - u(b)}{v(b)}.$$

El Método de Disparo Lineal (para problemas de contorno lineales)

Por tanto, si $v(b) \neq 0$, entonces la solución única del problema de contorno (25) es

$$x(t) = u(t) + \frac{\beta - u(b)}{v(b)} v(t) . \tag{31}$$

Observación: Si q verifica la hipótesis (24), entonces no se da el caso problemático de que $v(t) \equiv 0$, de modo que la solución buscada es la dada por (31).

El Método de Disparo Lineal (para problemas de contorno lineales)

Por tanto, si $v(b) \neq 0$, entonces la solución única del problema de contorno (25) es

$$x(t) = u(t) + \frac{\beta - u(b)}{v(b)} v(t) \,. \tag{31}$$

Observación: Si q verifica la hipótesis (24), entonces no se da el caso problemático de que $v(t) \equiv 0$, de modo que la solución buscada es la dada por (31).

Contenido

El Método de las Diferencias Finitas

- Para resolver algunos problemas de contorno de segundo orden pueden utilizarse las fórmulas de diferencias finitas que proporcionan aproximaciones a las derivadas.

Consideremos la ecuación lineal

$$x''(t) = p(t)\,x'(t) + q(t)\,x(t) + r(t)\,,\quad x(a) = \alpha, x(b) = \beta, \qquad (32)$$

en $[a, b]$.

El Método de las Diferencias Finitas

- Para resolver algunos problemas de contorno de segundo orden pueden utilizarse las fórmulas de diferencias finitas que proporcionan aproximaciones a las derivadas.

Consideremos la ecuación lineal

$$x''(t) = p(t)\,x'(t) + q(t)\,x(t) + r(t)\,,\ \ x(a) = \alpha, x(b) = \beta, \quad (32)$$

en $[a, b]$.

El Método de las Diferencias Finitas

Hagamos una partición de $[a, b]$ usando los nodos $a = t_0 < t_1 < ... < t_N = b$, siendo $h = \frac{b-a}{N}$ y $t_j = a + jh$ para $j = 0, 1, ..., N$.

Usando las fórmulas de diferencias centradas para aproximar las derivadas

$$x^{'}\left(t_j\right) = \frac{x\left(t_{j+1}\right) - x\left(t_{j-1}\right)}{2h} + O\left(h^2\right) \tag{33}$$

y

$$x^{''}\left(t_j\right) = \frac{x\left(t_{j+1}\right) - 2x\left(t_j\right) + x\left(t_{j-1}\right)}{h^2} + O\left(h^2\right) \tag{34}$$

El Método de las Diferencias Finitas

se reemplaza cada término $x\left(t_j\right)$ del miembro derecho de (33) y (34) por x_j y se sustituye el resultado en la ec. (32), lo que da

$$\frac{x_{j+1}-2x_j+x_{j-1}}{h^2}+O\left(h^2\right)=p\left(t_j\right)\left(\frac{x_{j+1}-x_{j-1}}{2h}+O\left(h^2\right)\right)+q\left(t_j\right)x_j+r\left(t_j\right). \quad (35)$$

El Método de las Diferencias Finitas

Eliminando los términos de orden $O\left(h^2\right)$ en (35) e introduciendo la notación

$$p_j = p\left(t_j\right), q_j = q\left(t_j\right), r_j = r\left(t_j\right),$$

obtenemos la ecuación en diferencias

$$\frac{x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}}{h^2} = p_j \frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{2h} + q_j x_j + r_j, \qquad (36)$$

que se usa para calcular aproximaciones numéricas a la solución de la ecuación diferencial (32).

El Método de las Diferencias Finitas

De (36), multiplicando por h^2, agrupando los términos que contienen las incógnitas x_{j-1}, x_j, x_{j+1} y disponiendo como un sistema de ecuaciones lineales, se obtiene un sistema tridiagonal de N-1 ecuaciones y N-1 incógnitas:

$$\left(\frac{-h}{2}p_j - 1\right) x_{j-1} + \left(2 + h^2 q_j\right) x_j + \left(\frac{h}{2}p_j - 1\right) x_{j+1} = -h^2 r_j, \qquad (37)$$

para $j = 1, 2, ..., N-1$, con $x_0 = \alpha, x_N = \beta$.

El Método de las Diferencias Finitas

Con notación matricial:

$$\begin{bmatrix} 2+h^2q_1 & \frac{h}{2}p_1-1 & & & \\ \frac{-h}{2}p_2-1 & 2+h^2q_2 & \frac{h}{2}p_2-1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \frac{-h}{2}p_j-1 & 2+h^2q_j & \frac{h}{2}p_j-1 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & \frac{-h}{2}p_{N-2}-1 & 2+h^2q_{N-2} & \frac{h}{2}p_{N-2}-1 \\ & & & \frac{-h}{2}p_{N-1}-1 & 2+h^2q_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_j \\ \cdots \\ x_{N-2} \\ x_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h^2r_1+e_0 \\ -h^2r_2 \\ \cdots \\ -h^2r_j \\ \cdots \\ -h^2r_{N-2} \\ -h^2r_{N-1}+e_N \end{bmatrix}$$

siendo

$$e_0 = \left(\frac{h}{2}p_1+1\right)\alpha, \;\; e_N = \left(\frac{-h}{2}p_{N-1}+1\right)\beta.$$

- Para un tamaño de paso h, la aproximación numérica que se obtiene es un conjunto finito de puntos $\{(t_j, x_j)\}$.

Bibliografía

MATHEWS, John; KURTIS, Fink.
Métodos Numéricos con MATLAB.
Prentice Hall, 2000.