Capítulo 4

Representaciones gráficas

Es frecuente en aplicaciones de ingeniería representar las relaciones entre los diferentes componentes de un sistema de manera gráfica, de forma que se faciliten la comprensión del funcionamiento del sistema total, la manera en la que fluyen las señales a través de él, así como también para simplificar algunos procedimientos de análisis y diseño.

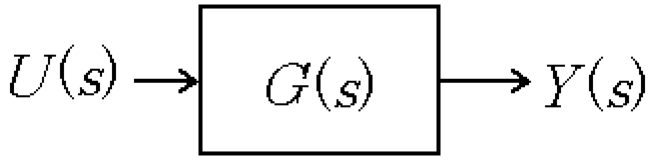
Las representaciones gráficas de sistemas dinámicos tienen como finalidad mostrar la forma en la que interactúan las señales y los sistemas y como se propagan las mismas a lo largo del sistema. En las aplicaciones relacionadas con sistemas de control es frecuente que las relaciones entre la entrada y salida de un elemento se representen en el dominio de la frecuencia, es decir mediante la utilización de la transformada de Laplace.

Cuando se realiza una representación gráfica, el objetivo es hacer que las diversas ecuaciones que representan la dinámica del sistema sean plasmadas en un gráfico sin la necesidad de realizar múltiples operaciones matemáticas.

Diagramas de bloques

Los diagramas de bloques que permiten representar sistemas de ecuaciones lineales. Están constituidos por los siguientes elementos:

Bloque: Los bloques se representan mediante rectángulos que poseen una única entrada y una única salida. La entrada y la salida están relacionadas mediante una relación de causa efecto, que es la función de transferencia. Su representación gráfica se muestra en la siguiente figura:



La relación entre la entrada y la salida está dada por:

$$Y(s) = G(s)R(s),$$

Donde $Y(s)$ es la transformada de Laplace con condiciones iniciales iguales a cero y $R(s)$ es la transformada d Laplace de la salida con condiciones iniciales nulas.

Sumador: Un punto de suma o sumador se representa mediante la utilización de un círculo al cual pueden entrar una suma algebraica de señales y del que sólo se puede desprender una señal de salida. Su representación gráfica se muestra en la figura 4.6a. La ecuación que describe su relación de entrada salida es:

$$Y(s) = U_1(s) \pm U_2(s) \pm U_3(s)$$

Bifurcación: Una bifurcación se representa mediante una línea que inicia en la salida de un bloque y va hasta otro sitio en el diagrama de señales. Sirve para mostrar la presencia de una señal en múltiples sitios del diagrama. La representación gráfica correspondiente se muestra en la figura 4.8a. Su relación de entrada salida es:

$$Y(s) = Y_1(s) = Y_2(s) = Y_3(s)$$

Obtención de Diagramas de Bloques

Cuando se tiene un sistema del cual se pretende obtener su diagrama de bloques es necesario primero tratar de descomponer dicho sistema en varios subsistemas, de manera que la descripción de cada subsistema sea lo más sencilla posible. Sin embargo es importante tener en cuenta que dicho procedimiento sólo puede realizarse cuando no hay efecto de carga entre los dos subsistemas que están intentándose descomponer. A continuación se ilustra un ejemplo en el que no es posible subdividir el sistema mencionado en dos subsistemas

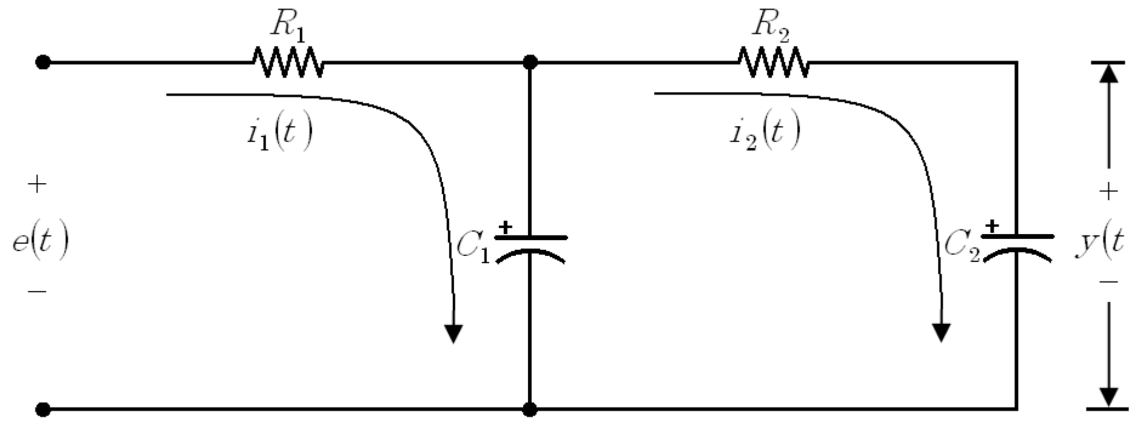


Figura 4.1 Circuitos

En el circuito mostrado, en la figura 5.1, se observan dos circuitos RC pasabajas de primer orden conectados en cascada. Una forma de obtener la descripción de este sistema es escribir las ecuaciones para cada una de las mallas, de donde se puede observar que el valor de la corriente $i_1(t)$ es función de los valores de los dos condensadores y de las dos resistencias, lo que evidencia el efecto de carga. Si por el contrario se consideran como dos circuitos independientes la corriente $i_1(t)$ depende exclusivamente de R_1 y C_1 y el valor de la corriente $i_2(t)$ sólo depende de R_2 y C_2, situación que es claramente distinta a la del sistema original.

La obtención de un diagrama de bloques de un sistema dinámico se puede lograr siguiendo el siguiente procedimiento:

1. Obtener las ecuaciones diferenciales que describen la dinámica del sistema.
2. Tomar transformada de Laplace con condiciones iniciales nulas de cada una de las ecuaciones obtenidas previamente.
3. Reescribir las ecuaciones de manera que queden en forma de causa efecto. En el caso de ecuaciones con múltiples variables sólo una variable debe ser seleccionada como efecto y las demás deben considerarse como una suma ponderada de causas.
4. Dibujar las gráficas correspondientes a cada una de las ecuaciones obtenidas en el punto anterior.

Ejemplo 1

Obtener el diagrama de bloques para un motor DC controlado por campo.

Las ecuaciones que describen el comportamiento dinámico de un motor DC se obtuvieron en el capítulo 2 y se muestran a continuación:

$$e_f(t) = R_f i_f(t) + L_f D i_f(t)$$

$$T_m(t) = k_f i_f(t)$$

$$T_m(t) = J_m D^2 \Theta_m(t) + B_m D \Theta_m(t)$$

Tomando la transformada de Laplace para cada una de las ecuaciones con condiciones iniciales iguales a cero se obtiene:

$$E_f(s) = R_f I_f(s) + L_f s I_f(s)$$

$$T_m(s) = k_f I_f(s)$$

$$T_m(s) = J_m s^2 \Theta_m(s) + B_m s \Theta_m(s)$$

Ahora si se rescriben las ecuaciones para que queden reflejando una relación de causa-efecto se obtiene:

$$I_f(s) = \frac{1}{sL_f + R_f} E_f(s)$$

$$T_m(s) = k_f I_f(s)$$

$$\Theta_m(s) = \frac{1}{\left[J_m s^2 + B_m s\right]} T_m(s)$$

Una vez escritas las ecuaciones se procede a realizar la representación gráfica para cada una de ellas y adicionalmente se interconectan los distintos bloques obtenidos. Es importante mencionar que para seleccionar las causas y los efectos en cada ecuación, los bloques que se obtengan deben tener como entrada la salida de un bloque anterior, lo cual facilita la interconexión de los mismos. El diagrama de Bloques resultante se muestra a continuación.

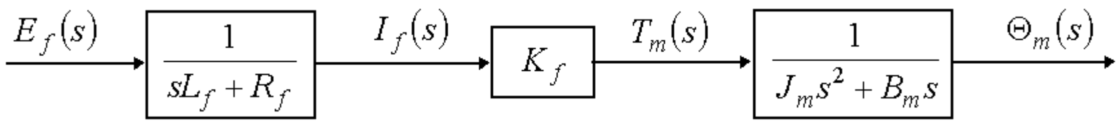


Figura 4.2 Motor controlado por campo

Ejemplo 2

Obtener el diagrama de bloques para un motor DC controlado por armadura

En el capítulo 2 se obtuvieron las ecuaciones que describen la dinámica de un motor DC controlado por armadura, las cuales utilizaremos como punto de partida para la obtención del diagrama de bloques correspondiente:

$$e_a(t) = R_a i_a(t) + L_a D i_a(t) + e_b(t)$$

$$e_b(t) = k_b D\Theta_m(t)$$

$$T_m(t) = k_a i_a(t)$$

$$T_m(t) = J_m D^2\Theta_m(t) + B_m D\Theta_m(t)$$

Tomando la transformada de Laplace con condiciones iniciales nulas se tiene:

$$E_a(s) = R_a I_a(s) + L_a s I_a(s) + E_b(s)$$

$$E_b(s) = k_b s\Theta_m(s)$$

$$T_m(s) = k_a I_a(s)$$

$$T_m(s) = J_m s^2\Theta_m(s) + B_m s\Theta_m(s)$$

Ahora rescribiendo las ecuaciones de manera que queden de la forma causa-efecto se tiene:

$$I_a(s) = \frac{1}{sL_a + R_a}\left[E_a(s) - E_b(s)\right]$$

$$E_b(s) = k_b s\Theta_m(s)$$

$$T_m(s) = k_a I_a(s)$$

$$\Theta_m(s) = \frac{1}{\left[J_m s^2 + B_m s\right]} T_m(s)$$

Ahora realizando el dibujo correspondiente para cada uno de las ecuaciones e interconectando las gráficas obtenidas se obtiene el diagrama de bloques que se muestra en la figura 4.3.

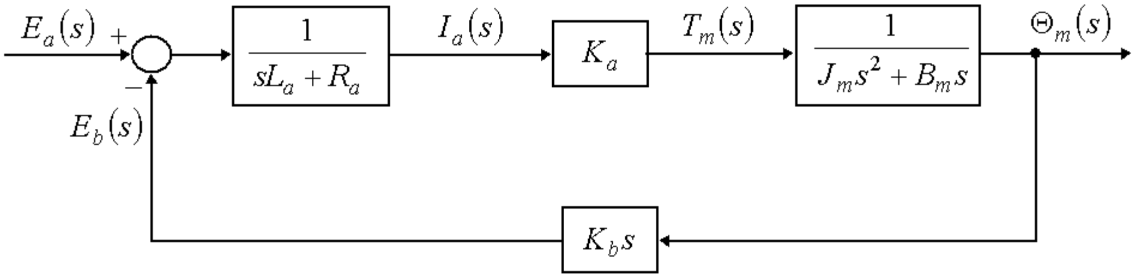


Figura 4.3 Diagrama de bloques del motor DC controlado por armadura

Ejemplo 3

Obtener el diagrama de bloques del circuito eléctrico que se observa en la siguiente figura.

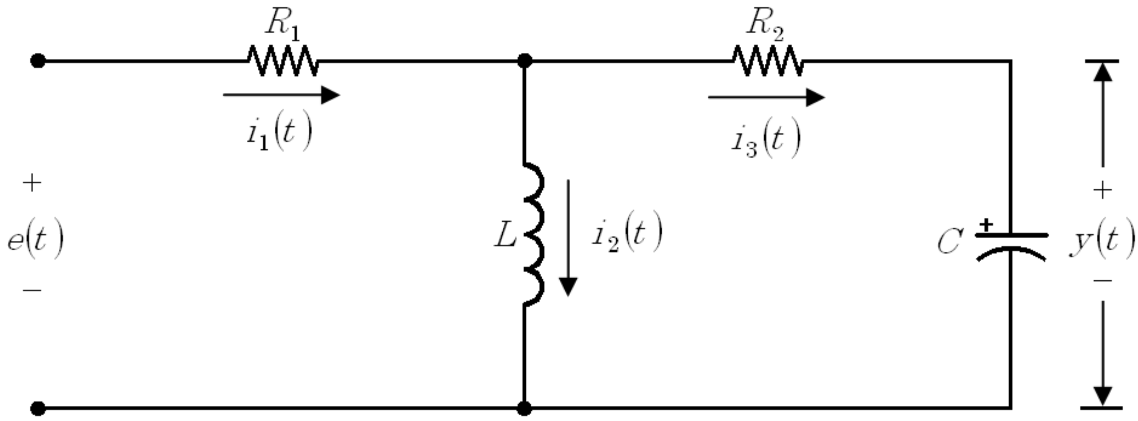


Figura 4.4 Circuito RCL para el ejemplo 2

Aplicando las leyes de Kirchhoff al circuito mostrado se obtiene:

$$e(t) = R_1 i_1(t) + v_1(t)$$

$$i_2(t) = i_1(t) - i_3(t)$$

$$v_1(t) = L\frac{d}{dt} i_2(t)$$

$$i_3(t) = \frac{v_1(t) - y(t)}{R_2}$$

$$y(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_3(\tau)d\tau$$

Tomando la transformada de Laplace con condiciones iniciales iguales a cero se obtiene:

$$E(s) = R_1 I_1(s) + V_1(s)$$

$$I_2(s) = I_1(t) - I_3(s)$$

$$V_1(s) = LsI_2(s)$$

$$I_3(s) = \frac{V_1(s) - Y(s)}{R_2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{Cs} I_3(s)$$

Rescribiendo las ecuaciones para que queden en forma de causa-efecto se obtiene:

$$I_1(s) = \frac{1}{R_1}\left[E(s) - V_1(s)\right]$$

$$I_2(s) = I_1(s) - I_3(s)$$

$$V_1(s) = LsI_2(s)$$

$$I_3(s) = \frac{1}{R_2}\left[V_1(s) - Y(s)\right]$$

$$Y(s) = \frac{1}{Cs} I_3(s)$$

A continuación se muestra el diagrama de bloques que se obtiene mediante la representación gráfica de cada una de las ecuaciones obtenidas anteriormente.

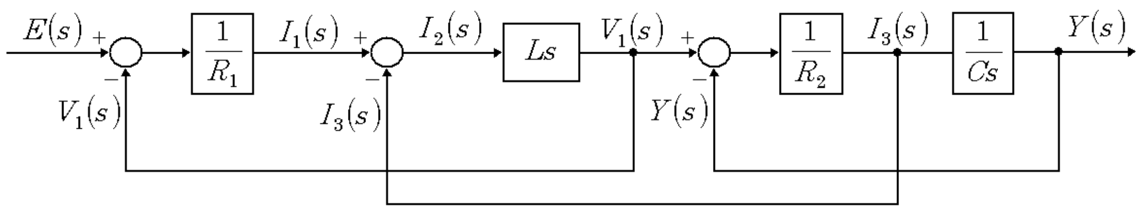


Figura 4.5 Circuito RCL para el ejemplo 2

Manipulación y Simplificación de Diagramas de Bloques

Como se puede observar en los ejemplos anteriores es frecuente que un diagrama de bloques esté conformado por múltiples elementos. Cuando se requiere encontrar una representación equivalente es necesario manipular los diagramas para poder simplificarlos. La condición que debe cumplirse al realizar dichas manipulaciones es que debe asegurarse que las relaciones entrada – salida se mantengan. Aún cuando la posibilidad de manipulaciones es bastante amplia, a continuación s e muestra una breve descripción de las más importantes:

Manipulación de un punto suma

Anteriormente se mencionó que un punto suma representa una suma algebraica de señales, sin embargo en ocasiones resulta conveniente asociar varias señales en una sola suma y en otras es conveniente separar una suma en varias sumas más sencillas. A continuación se presentan dos diagramas que tienen la misma relación de entrada-salida

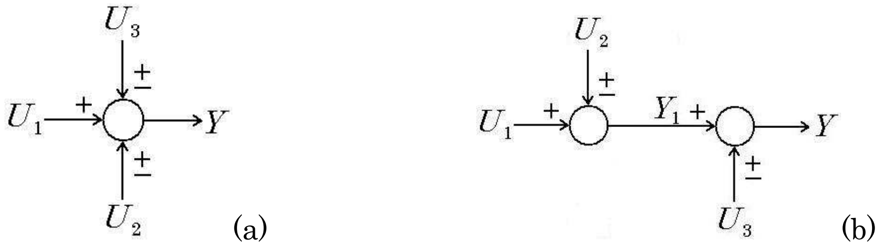


Figura 4.6 Circuito RCL para el ejemplo 2

La relación de entrada salida de la figura 4.6(a) es:

$$Y = U_1 \pm U_2 + U_3$$

Para encontrar la relación de entrada – salida de la figura 4.6(b) se define la señal Y_1 y se plantean las ecuaciones correspondientes así:

$$Y_1 = U_1 \pm U_2$$

$$Y = Y_1 \pm U_3$$

Remplazando la primera ecuación en la segunda se obtiene:

$$Y = U_1 \pm U_2 + U_3$$

Que es la misma ecuación, por lo tanto los dos diagramas son equivalentes y de acuerdo con la conveniencia se puede reemplazar uno por el otro y el diagrama de bloques obtenido sigue representando el mismo sistema de ecuaciones.

Manipulación de una Bifurcación

Cuando en un diagrama de bloques se presenta una bifurcación, es decir una señal se lleva a múltiples puntos, puede resultar conveniente redibujarla para facilitar posteriores simplificaciones.

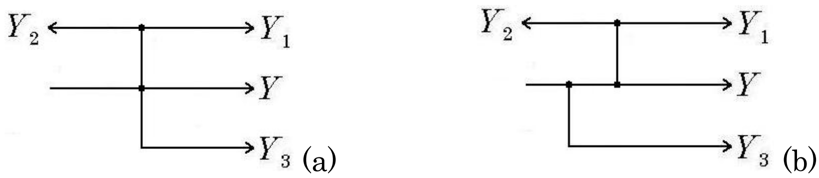


Figura 4.8 Circuito RCL para el ejemplo 2

Aunque los dibujos de las figuras 4.8(a) y 4.8(b) no presentan diferencias importantes, el hecho de dibujar varias bifurcaciones en lugar de una facilita en la mayoría de los casos la realización de simplificaciones posteriores.

Es claro que las dos figuras se pueden representar mediante la misma ecuación:

$$Y = Y_1 = Y_2 = Y_3$$

Desplazamiento de un punto suma

Para algunas situaciones de simplificación se requiere modificar la posición de un punto suma.

A continuación se examina el hecho de mover un punto suma que se encuentra en la entrada de un bloque a la salida del mismo bloque

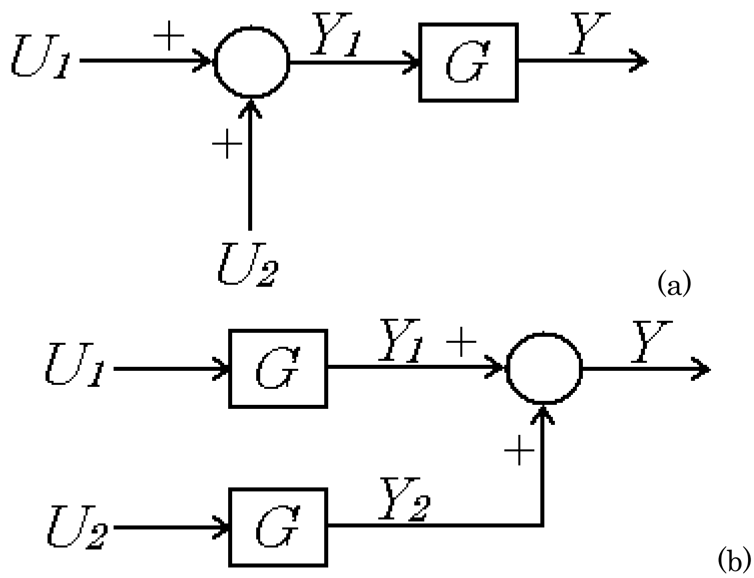


Figura 4.9a Circuito RCL para el ejemplo 2

A continuación se muestran las ecuaciones representadas mediante la figura 4.9(a) y su respectiva relación de entrada – salida

$$Y = G \cdot Y_1$$

$$Y_1 = U_1 + U_2$$

$$Y = G \cdot (U_1 + U_2)$$

$$Y = G \cdot U_1 + G \cdot U_2$$

De manera similar a continuación se escriben las ecuaciones de la figura 4.9(b) para obtener la relación de entrada – salida

$$Y_1 = G \cdot U_1$$

$$Y_2 = G \cdot U_2$$

$$Y = Y_1 + Y_2$$

$$Y = G \cdot U_1 + G \cdot U_2$$

Como se puede observa las ecuaciones de las figuras 4.9(a) y 4.9(b) son iguales, por lo tanto pueden ser intercambiadas sin ningún inconveniente

El caso que se examina ahora es en el que se tiene un punto suma a la salida de un bloque como se observa en la figura 4.10(a) y se requiera pasarlo a la entrada del bloque como se muestra en la figura 4.10(b)

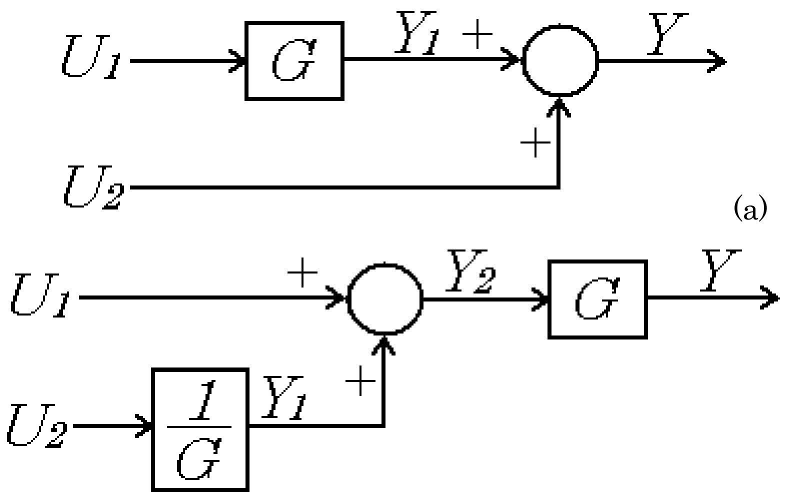


Figura 4.10 Circuito RCL para el ejemplo 2

El gráfico de la figura 4.10(a) permite plantear las ecuaciones que se muestran a continuación:

$$Y_1 = G \cdot U_1$$

$$Y = Y_1 + U_2$$

$$Y = G \cdot U_1 + U_2$$

De manera similar se pueden escribir las ecuaciones de la figura 4.10(b) a partir de las cuales se puede obtener la relación de entrada – salida así:

$$Y_1 = \frac{1}{G} U_2$$

$$Y_2 = U_1 + Y_1$$

$$Y_2 = U_1 + \frac{1}{G}U_2$$

$$Y = G \cdot Y_2$$

$$Y = G \cdot U_1 + U_2$$

Desplazamiento de una bifurcación

De manera similar a lo que sucede con los puntos sumas en algunos casos se requiere modificar la ubicación de una bifurcación. A continuación se examinan dos casos posibles.

El primer caso consiste en pasar una bifurcación desde la entrada de un bloque a la salida del mismo.

Las ecuaciones que describen el diagrama de la figura 4.11(a) son:

$$Y_1 = G \cdot U$$

$$Y_2 = U$$

Mientras que las ecuaciones correspondientes a la figura 4.11(b) son:

$$Y_1 = G \cdot U$$

$$Y_2 = \frac{1}{G}Y_1$$

$$Y_2 = \frac{1}{G}G \cdot U = U$$

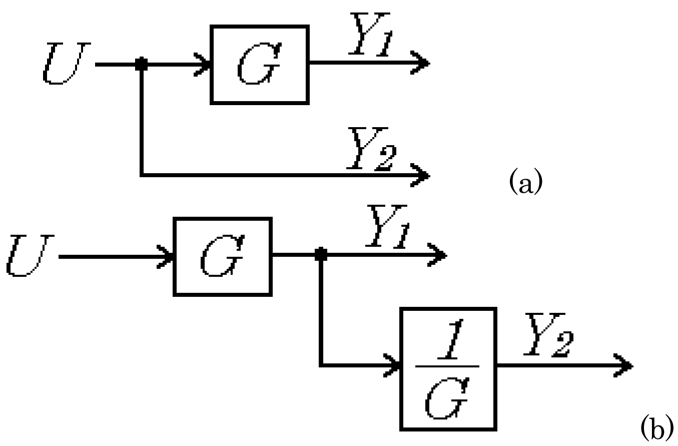


Figura 4.11 Circuito RCL para el ejemplo 2

Nuevamente se puede observar que se tienen las relaciones y por lo tanto pueden ser intercambiados sin que se modifique las ecuaciones que son representadas

El otro caso que se examina es el diagrama en el cual se tiene una bifurcación en la salida de un bloque y se requiere que la bifurcación aparezca en la entrada del mismo bloque.

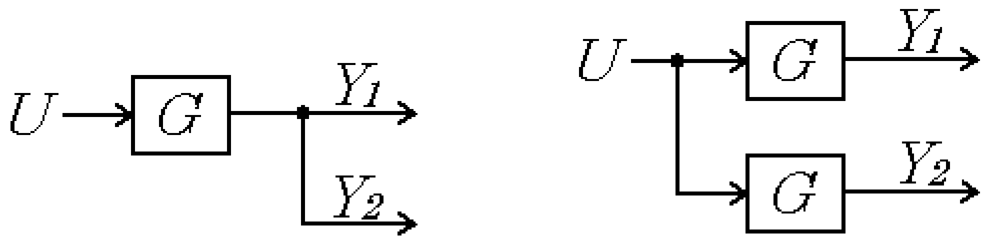


Figura 4.12 Circuito RCL para el ejemplo 2

A partir de la figura 4.12(a) se escriben las siguientes ecuaciones:

$$Y_1 = G \cdot U$$

$$Y_2 = G \cdot U$$

De manera similar en la figura 4.12(b) se obtienen las mismas ecuaciones:

$$Y_1 = G \cdot U$$

$$Y_2 = G \cdot U$$

Como las relaciones de entrada – salida son las mismas se pueden intercambiar para facilitar la simplificación de bloques.

Simplificación de bloques en cascada

En este caso se examina como un par de bloques en cascada puede ser reemplazado por un bloque equivalente

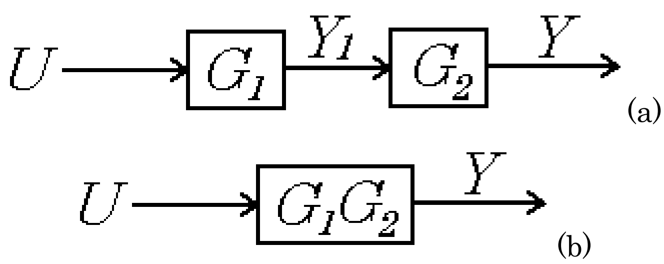


Figura 4.13 Circuito RCL para el ejemplo 2

Las ecuaciones correspondientes a la figura 4.13(a) se escriben a continuación, a partir de las cuales se encuentra la relación de entrada-salida desde la entrada del primer bloque hasta la salida del siguiente bloque:

$$Y_1 = G_1 \cdot U$$

$$Y = G_2 \cdot Y_1$$

$$Y = G_2 \cdot G_1 \cdot U$$

A partir de la última ecuación obtenida es claro que el diagrama de bloques de la figura 4.13(a) puede ser reemplazado por el diagrama de bloques de la figura 4.13(b) para el cual se puede escribir la siguiente ecuación

$$Y = G_1 \cdot G_2 \cdot U = G_2 \cdot G_1 \cdot U$$

El intercambio del orden de las funciones es siempre válido siempre y cuando los sistemas sean de una entrada y una salida y siempre que no haya efecto de carga entre los dos bloques

Simplificación de bloques en paralelo

Otra situación que requiere la simplificación de bloques es la situación en la que se tiene un par de bloques a los cuales les llega la misma entrada y cuyas salidas llegan a un sumador. En las siguientes figuras se muestran el diagrama original y su equivalente

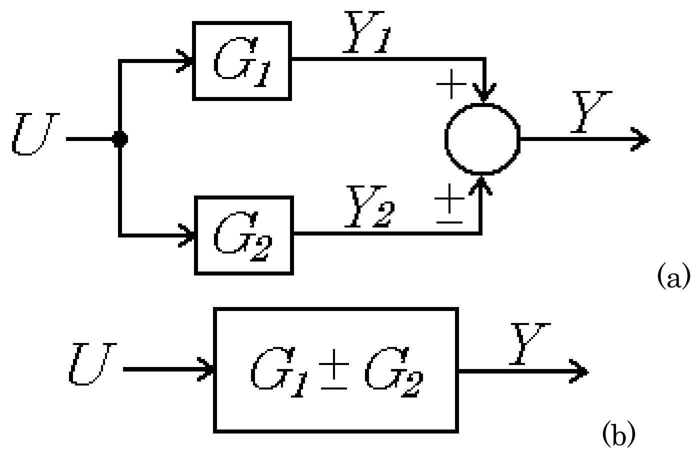


Figura 4.14 Circuito RCL para el ejemplo 2

La figura 4.14(a) puede ser descrita mediante las siguientes ecuaciones:

$$Y_1 = G_1 \cdot U$$

$$Y_2 = G_2 \cdot U$$

$$Y = Y_1 \pm Y_2$$

$$Y = G_1 \cdot U \pm G_2 \cdot U$$

$$Y = (G_1 \pm G_2) \cdot U$$

Ahora se puede observar que la última ecuación es exactamente la misma de la figura 4.14(b) que se muestra a continuación:

$$Y = (G_1 \pm G_2) \cdot U$$

Simplificación de bloques con retroalimentación

Uno de los diagramas más frecuentes es el de una configuración con retroalimentación que consiste en tomar la señal de la salida de un bloque pasarla por otro bloque y sumarla algebraicamente con la entrada del primer bloque, como se muestra en la figura 4.15(a). El diagrama equivalente se muestra en la figura 4.15(b).

Para encontrar la equivalencia se definen las señales E y W, luego se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$E = U \pm W$$

$$W = H \cdot Y$$

$$Y = G \cdot E$$

Reemplazando (i) y (ii) en (iii) se obtiene:

$$Y = G \cdot (R \pm H \cdot Y)$$

$$Y \cdot (1 \mp G \cdot H) = G \cdot R$$

$$Y = \frac{G}{1 \mp GH} R$$

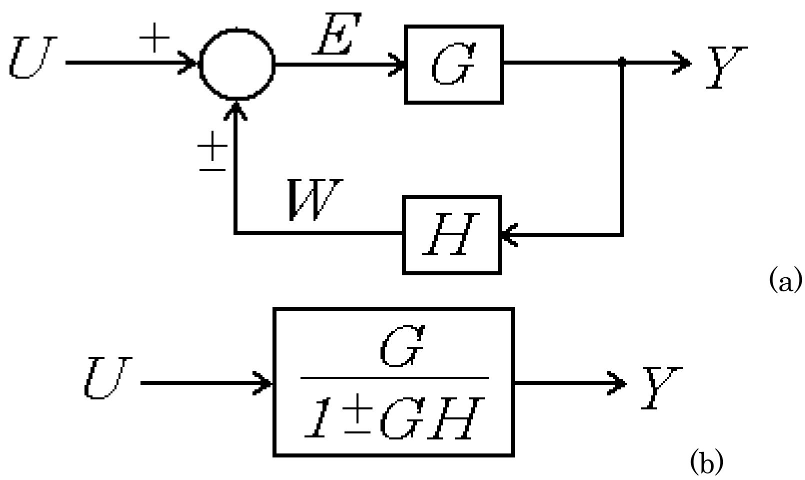


Figura 4.15 Circuito RCL para el ejemplo 2

Para recordar fácilmente la función de transferencia del bloque resultante es preciso observar que es una función racional cuyo numerador es la función de transferencia del bloque que está entre el punto suma y la salida y cuyo denominador tiene dos términos el primero siempre es uno y el segundo es el producto entre la función de transferencia que va desde el sumador hasta la salida y la función de transferencia que va desde la salida hasta el punto suma. El signo que va entre los dos términos del denominador es el signo contrario al signo que tiene la entrada de retroalimentación en el diagrama de bloques, es decir, cuando la señal retroalimentada es negativa el signo es positivo y viceversa.