Respuesta estacionaria de circuitos estimulados con AC

José Fabio Lozano Ovalle Código: 222982
Wilson Orlando Macias Fuquen Código: 223101
David Ricardo Martínez Hernández Código: 261931

***Resumen*— Se construirán circuitos RC, RL y RLC alimentados por una señal sinusoidal y se analizara su respuesta en estado estable. Utilizando el osciloscopio y el método de las figuras de Lissajous se obtendrá el ángulo de fase entre la tensión y la corriente en estos circuitos. También se construirán diagramas fasoriales para cada circuito y se verificara la variación del ángulo entre la tensión y el voltaje para diferentes frecuencias.**

***Palabras clave*— Admitancias, Ángulo, Fase, Fasores, Frecuencia, Impedancias, Lissajous, Números Complejos, Parte Imaginaria, Parte Real, Periodo, Sinusoide.**

I. Objetivos

- Aprender a utilizar el osciloscopio para hallar figuras de Lissajous.
- Utilizar el método de figuras de Lissajous para determinar el ángulo entre tensión y corriente en circuitos RL, RC y RLC.
- Utilizar la teoría fasorial para resolver circuitos alimentados por fuentes sinusoidales en estado estable.
- Obtener los diagramas fasoriales de cada circuito, y por medio de estos determinar ángulos de fase entre tensión y corriente.

II. Marco Teórico

La respuesta de un circuito lineal se compone de dos estados: La respuesta *natural* y la respuesta *forzada*.
La primera es la respuesta transitoria o respuesta de corto estado depende del cambio repentino a la que es sometido el elemento, la segunda es la respuesta de estado permanente de un circuito a cualquier fuente independiente presente.
Un **sinusoide** es una señal que tiene la forma de una función seno o coseno[1].
Una corriente sinusoidal Hace referencia como una cualquier *Corriente alterna (ac)*.

A. Sinusoides

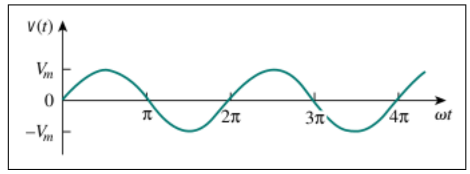
Considere un voltaje sinusoidal

$$v(t) = V_m sin\omega t \tag{1}$$

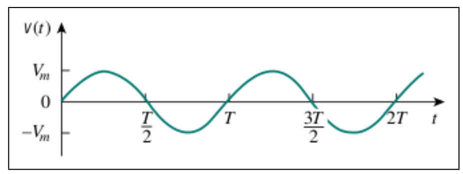
donde
V_m =es la *amplitud* de el sinusoide
ω =es la *frecuencia angular*
ωt =es el *argumento* del sinusoide

[1]Texto tomado de [1], Página 354

La Fig. 1(a) es un sinusoide en función de su argumento y la Fig. 1(b) como una función del tiempo.



(a) Sinusoide en función de su argumento



(b) Sinusoide en función del tiempo

Fig. 1: Funciones sinusoides (Imágenes tomadas de [1], Página 355)

Es claro que el sinusoide se repite cada T segundos, es decir T es el *periodo* de el sinusoide. Para las dos figuras el periodo es $\omega T = 2\pi$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{2}$$

Si $v(t)$ se repite cada T segundos, reemplazando t por $t+T$ en la ecu. (1) se obtiene

$$v(t+T) = V_m sin\omega(t+T) = V_m sin\omega(t+\frac{2\pi}{\omega}) \tag{3}$$

$$v(t+T) = V_m sin(\omega t + 2\pi) = V_m sin\omega t = v(t) \tag{4}$$

entonces

$$v(t+T) = v(t) \tag{5}$$

Un **función periódica** es una función que satisface $f(t) = f(t+nT)$, para todo t y todo n entero[2].
El periodo T de una función periódica es el tiempo de un ciclo completo. El reciproco de esta cantidad es el número de ciclos por segundo, conocida como la *frecuencia cíclica* de el sinusoide.

$$f = \frac{1}{T} \tag{6}$$

Para las ecuaciones ecu. (2) y la ecu. (6) es claro que

$$\omega = 2\pi f \tag{7}$$

[2]Texto tomado de [1], Página 355

Donde ω esta en radianes por segundo (rad/s), f es en hertz (Hz).

$$v(t) = V_m sin(\omega t + \phi) \tag{8}$$

donde $(\omega t + \phi)$ es el argumento y ϕ es la *fase*.

B. Fasores

Un **fasor** es un número complejo que representa la amplitud y la fase de un sinusoide[3].
Los fasores provienen de el análisis de circuitos lineales excitados por fuentes sinusoidales. Un número complejo z puede ser escrito en su forma rectangular como

$$z = x + jy \tag{9}$$

donde $j = \sqrt{-1}$; x es la parte real de z; y es la parte imaginaria de z.
El número complejo z también puede escribirse de forma polar o exponencial como

$$z = r\angle\phi = re^{j\pi} \tag{10}$$

donde r es la magnitud de z, y ϕ es la fase de z, se puede representar de tres maneras

$$z = x + jy \tag{11}$$

$$z = r\angle\phi \tag{12}$$

$$z = re^{j\phi} \tag{13}$$

Las relaciones entre la forma rectangular y la forma polar mostrados en la Fig. 2

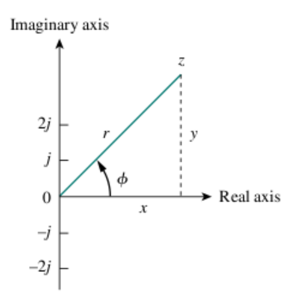


Fig. 2: Representación de un número complejo $z = x + jy = r\angle\phi$ (Imagen tomada de [1], Página 360)

donde el eje x representa la parte real y el eje y representa la parte imaginaria del número complejo. En función de x y y, se puede representar r y ϕ como

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \phi = \tan^{-1}\frac{y}{x} \tag{14}$$

Por otra parte si se conoce r y ϕ, se puede obtener x y y como

$$x = rcos\phi \qquad y = rsin\phi \tag{15}$$

z se puede escribir como

$$z = x + jy = r\angle\phi = r(cos\phi + jsin\phi) \tag{16}$$

[3]Texto tomado de [1], Página 359

Las operaciones básicas se realizan de la siguiente manera:
Adición:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) \tag{17}$$

Substracción:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2) \tag{18}$$

Multiplicación:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \angle(\phi_1 + \phi_2) \tag{19}$$

División:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\angle(\phi_1 - \phi_2) \tag{20}$$

Reciproco:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\angle - \phi \tag{21}$$

Raíz Cuadrada:

$$\sqrt{z} = \sqrt{r}\angle(\phi/2) \tag{22}$$

Conjugado complejo:

$$z^* = x - jy = r\angle - \phi = re^{-j\phi} \tag{23}$$

Representación en el tiempo	Representación en fasores
$V_m cos(\omega t + \phi)$	$V_m\angle\phi$
$V_m sin(\omega t + \phi)$	$V_m\angle(\phi - 90°)$
$I_m cos(\omega t + \phi)$	$I_m\angle\phi$
$I_m sin(\omega t + \phi)$	$I_m\angle(\phi - 90°)$

TABLA I: Transformaciones de sinusoides a fasores (Tomado de [1], Página 363)

La **impedancia** Z de un circuito es la relación entre la tensión V y la corriente I de fasor, medida en Ohmios (Ω)[4].
La **admitancia** Y es el reciproco de la impedancia medida en siemens (S)[5].

Elemento	Impedancia	Admitanica
R	$Z = R$	$Y = \frac{1}{R}$
L	$Z = j\omega L$	$Y = \frac{1}{j\omega L}$
C	$Z = \frac{1}{j\omega C}$	$Y = j\omega C$

TABLA II: Impedancias y Admitancias de elementos pasivos (Tomado de [1], Página 363)

Los teoremas para solucionar circuitos en fasores son los mismos y llevan el mismo procedimiento que los utilizados en circuitos DC, tomando el voltaje y la corriente en su forma fasorial, y la resistencia por una impedancia, la cual lleva una parte real y una parte imaginaria.

[4]Texto tomado de [1], Página 370
[5]Texto tomado de [1], Página 371

C. Curvas de Lissajous

Las curvas de Lissajous son gráficas de ecuaciones paramétricas, correspondientes a la superposición de dos movimientos armónicos simples en direcciones perpendiculares, estas gráficas fueron investigadas por **Nathaniel Bowditch**, y posteriormente con mayores detalles por **Jules Antoine Lissajous**.
La característica principal de la figura es que, debido a su característica de representar dos ecuaciones paramétricas sinusoidales, esta gráfica es sensible a la relación de la frecuencia de las dos señales, la fase y la amplitud entre ellas, como se observa en la Fig. 3

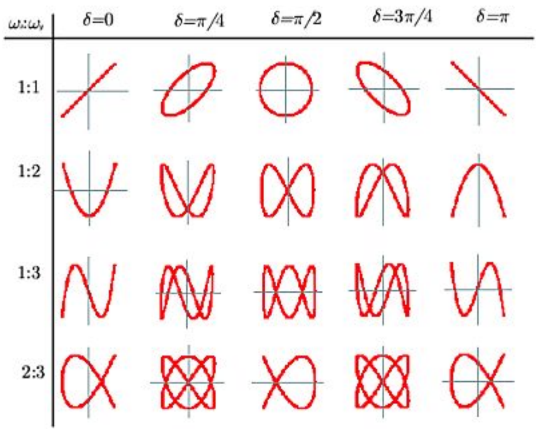


Fig. 3: Gráficas de Lissajous (Imagen tomada de [6])

III. Hipótesis

En un circuito RL la corriente en el inductor se encuentre 90 grados atrasada respecto a la tensión y la de la resistencia esta en fase con el voltaje.
En un circuito RC la corriente en el capacitor se encuentre 90° adelantada respecto a la tensión y la de la resistencia esta en fase con el voltaje.
Las curvas de Lissajous que se obtendrán para los circuitos RL y RC serán de la forma:

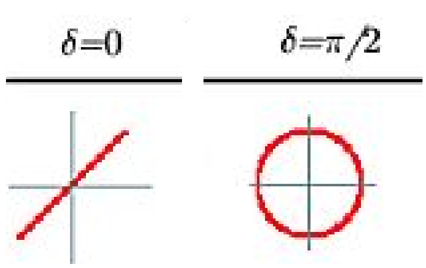


Fig. 4: Curvas que se obtendrán

IV. Materiales

- Bobina
- Condensador
- Generador de Señales
- Multímetro
- Osciloscopio
- Resistencias

V. Análisis y Resultados Teórico

Para esta práctica se implementarán tres circuitos los cuales se muestran a continuación y sus cálculos correspondientes, además el diagrama fasorial. Para cada circuito se usara una fuente AC con un $V_p = 5\ V$ a una frecuencia $f = 1000\ Hz$.

A. Circuito RL

Para el siguiente circuito se hace un análisis fesorial por el método de mallas

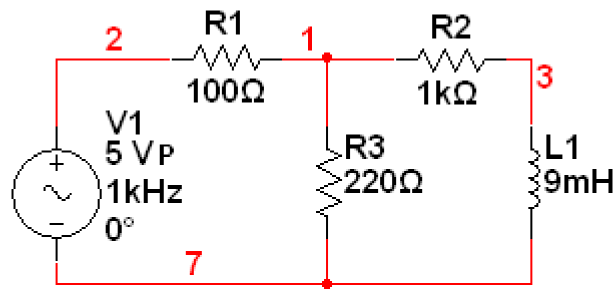


Fig. 5: Montaje del circuito RL

$$Z_L = j\omega L = j56.549 \tag{24}$$

$$5\angle 0^\circ = i_1(100+220) - i_2(220) \tag{25}$$

$$0 = i_2\left(1000+220+j56.549\right) - i_1(220) \tag{26}$$

Con la solución del sistema anterior se obtienen los siguientes datos:

Elemento	Tensión $[V]$	Corriente $[mA]$
R_1	$1.782\angle -0.3748^\circ$	$17.83\angle -0.3748^\circ$
R_2	$3.2119\angle -3.0288^\circ$	$3.2119\angle -3.0288^\circ$
R_3	$4.62836\angle 0.14448^\circ$	$21.038\angle 0.14448^\circ$
L_1	$0.18163\angle 86.971^\circ$	$3.2119\angle -3.0288^\circ$

TABLA III: Valores obtenidos teóricamente

Luego se muestra el diagrama fasorial de la tensión y corriente en la inductancia, donde $V_L = Z_1$ y $I_L = Z_2$

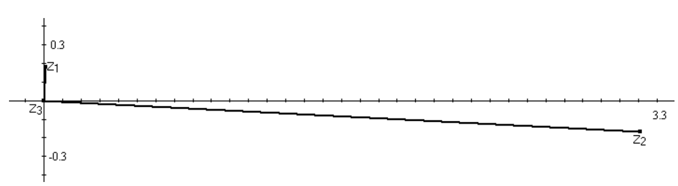


Fig. 6: Diagrama Fasorial circuito RL

B. CIRCUITO RC

Para este circuito se hace un análisis fasorial de por mallas.

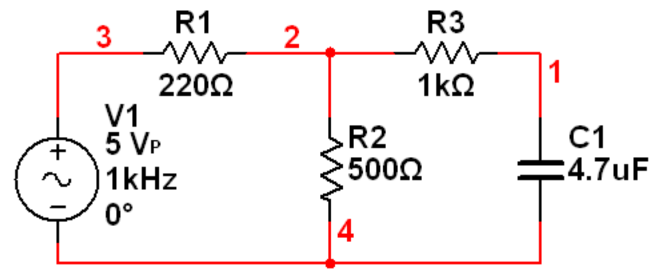


Fig. 7: Montaje del circuito RL

$$Z_c = \frac{1}{j\omega c} = -j33.863 \tag{27}$$

$$5\angle 0^\circ = i_1(220 + 500) - i_2(500) \tag{28}$$

$$0 = i_2\,(1000 + 500 - j33.863) - i_1(500) \tag{29}$$

Al solucionar el sistema de ecuaciones se tiene los siguientes datos:

Elemento	Tensión $[V]$	Corriente $[mA]$
R_1	$1.987634\angle -0.38929^\circ$	$9.0347\angle -0.38929^\circ$
R_2	$6.022\angle -0.12854^\circ$	$12.044\angle -0.12854^\circ$
R_3	$3.30107\angle 1.6826^\circ$	$3.30107\angle 1.62826^\circ$
C_1	$0.30594\angle -89.611^\circ$	$9.0347\angle 0.38929^\circ$

TABLA IV: Valores obtenidos teóricamente

A continuación se tiene la gráfica fasorial de la corriente y la tensión en el capacitor, donde $V_C = Z_1$ y $I_C = Z_2$.

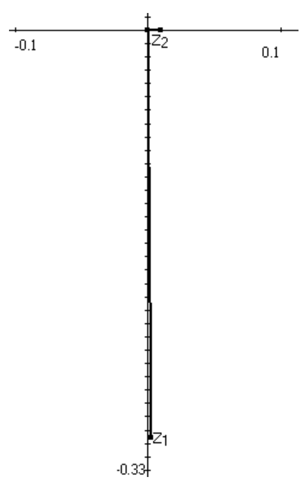


Fig. 8: Diagrama Fasorial circuito RC

C. Circuito RLC

Para el siguiente circuito se hace un análisis fasorial por el método de mallas para observar el comportamiento del circuito en estado estacionario.

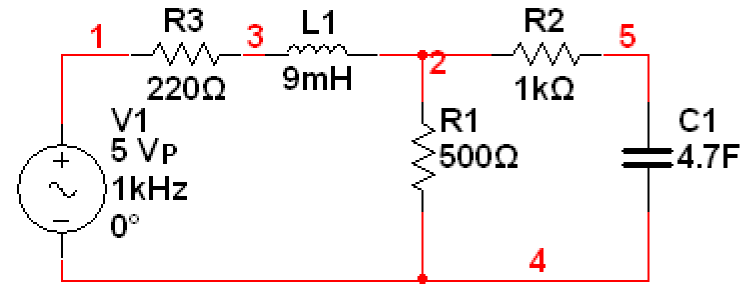


Fig. 9: Montaje del circuito RLC

$$Z_C = \frac{1}{j\omega c} = -j33.863 \tag{30}$$

$$Z_L = j\omega L = j56.549 \tag{31}$$

$$5\angle 0^\circ = i_1(220 + 500 + j56.549) - i_2(500) \tag{32}$$

$$0 = i_2(1000 + 500 - j33.863) - i_1(500) \tag{33}$$

A partir de la solución del sistema anterior se obtienen los siguientes datos:

Elemento	Tensión $[V]$	Corriente $[mA]$
R_1	$2.999\angle -6.0938^\circ$	$5.9979\angle -6.0938^\circ$
R_2	$2.9972\angle -4.1555^\circ$	$2.9972\angle -4.1555^\circ$
R_3	$1.9787\angle -5.448^\circ$	$8.994\angle -5.448^\circ$
C_1	$0.10149\angle -94.156^\circ$	$0.0029978\angle 4.1555^\circ$
C_1	$0.5089\angle 84.552^\circ$	$8.994\angle -5.448^\circ$

TABLA V: Valores obtenidos teóricamente

Para este circuito se tienen los diagramas fasoriales en C_1 y L_1.
Para este gráfico $V_C = Z_1$ y $I_C = Z_2$:

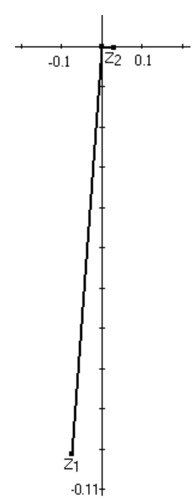


Fig. 10: Diagrama Fasorial circuito RCL

Para el siguiente diagrama se tiene que $V_L = Z_1$ y $I_L = Z_2$.

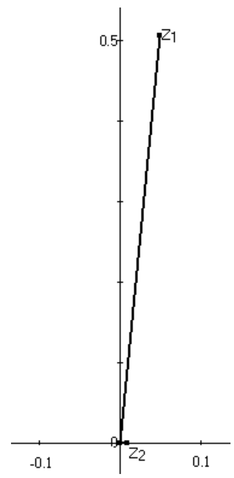


Fig. 11: Diagrama Fasorial circuito RCL

VI. Preguntas

1) ¿Como es el ángulo de fase entre la tensión y la corriente de cada uno de los circuitos RL, RC y RLC?
   Elegimos una amplitud de tensión de la fuente de V_M y un ángulo de fase de cero grados.
   Para un circuito RL el ángulo de fase de la corriente dependerá de la relación entre la tensión y la impedancia y como elegimos el ángulo de la fuente de tensión en cero grados, la corriente tendrá un ángulo de fase dependiente de la impedancia:
   $$\phi = -tan^{-1}\frac{\omega L}{R} \tag{34}$$
   Utilizando la misma consideración para la fuente, en un circuito RC la corriente tendrá un ángulo de fase:
   $$\phi = -tan^{-1}\frac{1}{R\omega C} \tag{35}$$
   Para un circuito RLC en serie tenemos que la corriente tendrá un ángulo de fase:
   $$\phi = -tan^{-1}\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \tag{36}$$
2) ¿El ángulo de fase entre la tensión y la corriente en circuitos RL, RC y RLC varía con respecto a la frecuencia?
   Si varía puesto que la impedancia del inductor y del condensador dependen directamente de la frecuencia:
   $$Z_L = j\omega L \qquad Z_C = \frac{1}{j\omega C} \tag{37}$$
   $\omega = 2\pi f$ siendo f la frecuencia.
3) ¿Que diferencias hay entre los ángulos medidos usando las figuras de Lissajous y usando la visualización en función del tiempo de osciloscopio?
   No debería haber ninguna, pero eso se responderá en la práctica.
4) ¿Que utilidad tiene el uso de los fasores en el análisis de circuitos en contraposición con los análisis realizados en las prácticas anteriores?
   Las tensiones, corrientes e impedancias en un circuito de corriente alterna se pueden representar como vectores en el plano complejo, la notación fasorial toma los valores de magnitud y ángulo de dichos vectores y esto permite que los cálculos sean más cortos.
5) ¿Coinciden las magnitudes y ángulos de fase obtenidos experimentalmente con los valores teóricos?
   Esta pregunta se responderá con los resultados de la práctica.

Referencias

[1] Alexander, Charles K. & Sadiku, Matthew N.O. *“‘Fundamentals of Electric Circuits”’*. McGRAW-HILL, ISE Editions, 1999.
[2] Dorf & Svoboda. *“‘Circuitos Eléctricos”’*. Alfaomega, Sexta Edición, 2006.
[3] Hayt, William H. Jr., Kemmerly, Jack E. & Durbin, Steven M. *“‘Análisis de circuitos en ingeniería”’*. McGRAW-HILL, Séptima Edición, 2007.
[4] Nahvi, Mahmood & Edminister, Joseph A. *“‘Theory and Problems of Electric Circuits”’*. McGRAW-HILL, Fourth Edition, 2003.
[5] http://es.wikipedia.org/wiki/Curva_de_Lissajous. Visitada el 18 de septiembre de 2011.
[6] http://www.chochitopelao.com/las-curvas-de-lissajous/. Visitada el 18 de septiembre de 2011.