SOLUCIÓN DE ECUACIONES NO LINEALES

Contenido

Contenido

Definiciones

Definición

Supongamos que $f(x)$ está definida en un conjunto S de número reales y sea $x_0 \in S$. Se dice que f es *continua* en $x = x_0$ si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Se dice que $f(x)$ es continua en S si es continua en cada punto $x \in S$. Denotaremos por $C(s)$ el conjunto de todas las funciones f que son continuas en S. Cuando S sea un intervalo, digamos $[a, b]$, entonces usaremos la notación $C[a, b]$.

Definiciones

Definición

Raíz de una ecuación, cero de una función. Supongamos que $f(x)$ es una función continua. Cualquier número r tal que $f(r) = 0$ se llama *raíz de la ecuación* $f(x) = 0$; también se dice que r es un *cero de la función* $f(x)$.

Teorema del valor intermedio o de Bolzano.

Supongamos que $f \in C[a, b]$ y que L es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$. Entonces existe un número c en (a, b) tal que $f(c) = L$.

Definiciones

Definición

Raíz de una ecuación, cero de una función. Supongamos que $f(x)$ es una función continua. Cualquier número r tal que $f(r) = 0$ se llama *raíz de la ecuación* $f(x) = 0$; también se dice que r es un *cero de la función* $f(x)$.

Teorema del valor intermedio o de Bolzano.

Supongamos que $f \in C[a, b]$ y que L es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$. Entonces existe un número c en (a, b) tal que $f(c) = L$.

Contenido

El Método de Bisección de Bolzano

1. Empezar con un intervalo de partida $[a, b]$ en el que $f(a)$ y $f(b)$ tengan distinto signo. Entonces, por el anterior Teorema, la gráfica $y = f(x)$ cruzará el eje OX en un cero $x = r$ que está en dicho intervalo.

El Método de Bisección de Bolzano

2. Tomar el punto medio del intervalo $c = \frac{a+b}{2}$.

- Si $f(a)$ y$f(c)$ tienen signos opuestos, entonces hay un cero en $[a, c]$.
- Si $f(c)$ y $f(b)$tienen signos opuestos, entonces hay un cero en $[c, b]$.
- Si $f(c) = 0$, entonces c es un cero.

3. Renombramos el nuevo intervalo más pequeño también como $[a, b]$ y repetimos el proceso hasta que el intervalo sea tan pequeño como deseemos.

El Método de Bisección de Bolzano

2. Tomar el punto medio del intervalo $c = \frac{a+b}{2}$.

- Si $f(a)$ y$f(c)$ tienen signos opuestos, entonces hay un cero en $[a, c]$.
- Si $f(c)$ y $f(b)$tienen signos opuestos, entonces hay un cero en $[c, b]$.
- Si $f(c) = 0$, entonces c es un cero.

3. Renombramos el nuevo intervalo más pequeño también como $[a, b]$ y repetimos el proceso hasta que el intervalo sea tan pequeño como deseemos.

El Método de Bisección de Bolzano

2. Tomar el punto medio del intervalo $c = \frac{a+b}{2}$.

- Si $f(a)$ y$f(c)$ tienen signos opuestos, entonces hay un cero en $[a, c]$.
- Si $f(c)$ y $f(b)$tienen signos opuestos, entonces hay un cero en $[c, b]$.
- Si $f(c) = 0$, entonces c es un cero.

3. Renombramos el nuevo intervalo más pequeño también como $[a, b]$ y repetimos el proceso hasta que el intervalo sea tan pequeño como deseemos.

El Método de Bisección de Bolzano

2. Tomar el punto medio del intervalo $c = \frac{a+b}{2}$.

- Si $f(a)$ y$f(c)$ tienen signos opuestos, entonces hay un cero en $[a, c]$.
- Si $f(c)$ y $f(b)$tienen signos opuestos, entonces hay un cero en $[c, b]$.
- Si $f(c) = 0$, entonces c es un cero.

3. Renombramos el nuevo intervalo más pequeño también como $[a, b]$ y repetimos el proceso hasta que el intervalo sea tan pequeño como deseemos.

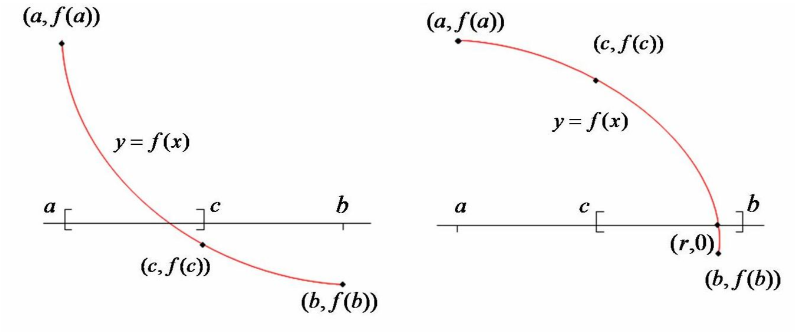
El Método de Bisección de Bolzano

2. Tomar el punto medio del intervalo $c = \frac{a+b}{2}$.

- Si $f(a)$ y$f(c)$ tienen signos opuestos, entonces hay un cero en $[a, c]$.
- Si $f(c)$ y $f(b)$tienen signos opuestos, entonces hay un cero en $[c, b]$.
- Si $f(c) = 0$, entonces c es un cero.

3. Renombramos el nuevo intervalo más pequeño también como $[a, b]$ y repetimos el proceso hasta que el intervalo sea tan pequeño como deseemos.

El Método de Bisección de Bolzano



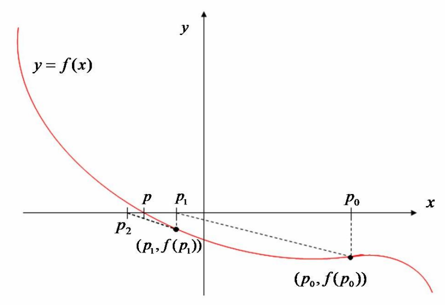
(a) Si $f(a)$ y $f(c)$ tienen signos opuestos, entonces se recorta por la derecha.

(b) Si $f(c)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces se recorta por la izquierda

Contenido

El Método de Newton-Raphson

Supongamos que la aproximación inicial p_0 está cerca de la raíz p. Definimos p_1 como el punto de intersección del eje de abcisas con la recta tangente a la curva en el punto $(p_0, f(p_0))$ .p_1 estará más cerca de p que p_0.



El Método de Newton-Raphson

Podemos encontrar la ecuación que relaciona p_1 con p_0 igualando dos fórmulas distintas para la pendiente m de la recta tangente. Por un lado,

$$m = \frac{0 - f(p_0)}{p_1 - p_0}$$

que es la pendiente de la recta que pasa por $(p_1, 0)$ y $(p_0, f(p_0))$; por otro lado,

$$m = f'(p_0)$$

que es la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $(p_0, f(p_0))$.

El Método de Newton-Raphson

Igualando y despejando p_1 obtenemos:

$$p_1 = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}$$

Este proceso puede repetirse para obtener una sucesión $\{p_k\}$ que converge a p.

El Método de Newton-Raphson

Teorema de Newton-Raphson.

Supongamos que la función $f \in C^2[a,b]$y que existe un número $p \in [a,b]$ tal que $f(p) = 0$. Si $f'(p) \neq 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que la sucesión $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ definida por el proceso iterativo

$$p_k = g(p_{k-1}) = p_{k-1} - \frac{f(p_{k-1})}{f'(p_{k-1})}$$

para $k = 1, 2, \ldots$, converge a p cualquiera que sea la aproximación inicial $p_0 \in [p - \delta, p + \delta]$.

Contenido

El Método de la Secante

- En el algoritmo de Newton-Raphson hay que evaluar dos funciones en cada iteración, $f(p_{k-1})$ y $f'(p_{k-1})$.
- Hay muchas funciones dadas en forma no elemental (como integrales, o sumas de series, etc.) para las que sería deseable disponer de un método que necesite evaluaciones únicamente de $f(x)$y no de $f'(x)$.
- El método de la secante necesita sólo una evaluación de $f(x)$ por paso.

El Método de la Secante

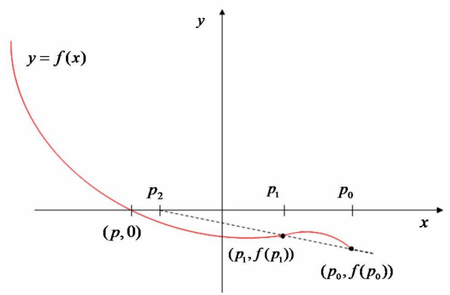
- En el algoritmo de Newton-Raphson hay que evaluar dos funciones en cada iteración, $f\left(p_{k-1}\right)$ y $f^{'}\left(p_{k-1}\right)$.
- Hay muchas funciones dadas en forma no elemental (como integrales, o sumas de series, etc.) para las que sería deseable disponer de un método que necesite evaluaciones únicamente de $f\left(x\right)$y no de $f^{'}\left(x\right)$.
- El método de la secante necesita sólo una evaluación de $f\left(x\right)$ por paso.

El Método de la Secante

- En el algoritmo de Newton-Raphson hay que evaluar dos funciones en cada iteración, $f\left(p_{k-1}\right)$ y $f^{'}\left(p_{k-1}\right)$.
- Hay muchas funciones dadas en forma no elemental (como integrales, o sumas de series, etc.) para las que sería deseable disponer de un método que necesite evaluaciones únicamente de $f\left(x\right)$y no de $f^{'}\left(x\right)$.
- El método de la secante necesita sólo una evaluación de $f\left(x\right)$ por paso.

El Método de la Secante

Partimos de dos puntos iniciales $(p_0, f(p_0))$ y $(p_1, f(p_1))$ cercanos al punto $(p, 0)$, y se define p_2 como la abcisa del punto de intersección de la recta que pasa por estos dos puntos con el eje OX. p_2 estará más cerca de p que p_0 y que p_1.



El Método de la Secante

- La fórmula que relaciona p_2, p_1 y p_0 se halla escribiendo la pendiente de la recta en cuestión:

$$m = \frac{f(p_1) - f(p_0)}{p_1 - p_0} \qquad y \qquad m = \frac{0 - f(p_1)}{p_2 - p_1}$$

- La primera es la pendiente de la recta secante que pasa por los dos puntos iniciales. La segunda es la pendiente de la recta que pasa por $(p_1, f(p_1))$ y $(p_2, 0)$.

El Método de la Secante

- La fórmula que relaciona p_2, p_1 y p_0 se halla escribiendo la pendiente de la recta en cuestión:

$$m = \frac{f(p_1) - f(p_0)}{p_1 - p_0} \qquad y \qquad m = \frac{0 - f(p_1)}{p_2 - p_1}$$

- La primera es la pendiente de la recta secante que pasa por los dos puntos iniciales. La segunda es la pendiente de la recta que pasa por $(p_1, f(p_1))$ y $(p_2, 0)$.

El Método de la Secante

- Igualando los miembros derechos de las dos fórmulas y despejando $p_2 = g\left(p_1, p_0\right)$ obtenemos

$$p_2 = p_1 - \frac{f\left(p_1\right)\left(p_1 - p_0\right)}{f\left(p_1\right) - f\left(p_0\right)}$$

- El término general de la sucesión generada por este método viene dado por la fórmula de iteración de dos puntos:

$$p_{k+1} = g\left(p_k, p_{k-1}\right) = p_k - \frac{f\left(p_k\right)\left(p_k - p_{k-1}\right)}{f\left(p_k\right) - f\left(p_{k-1}\right)}$$

para $k = 1, 2, \ldots.$

El Método de la Secante

- Igualando los miembros derechos de las dos fórmulas y despejando $p_2 = g(p_1, p_0)$ obtenemos

$$p_2 = p_1 - \frac{f(p_1)(p_1 - p_0)}{f(p_1) - f(p_0)}$$

- El término general de la sucesión generada por este método viene dado por la fórmula de iteración de dos puntos:

$$p_{k+1} = g(p_k, p_{k-1}) = p_k - \frac{f(p_k)(p_k - p_{k-1})}{f(p_k) - f(p_{k-1})}$$

para $k = 1, 2, \ldots.$

Contenido

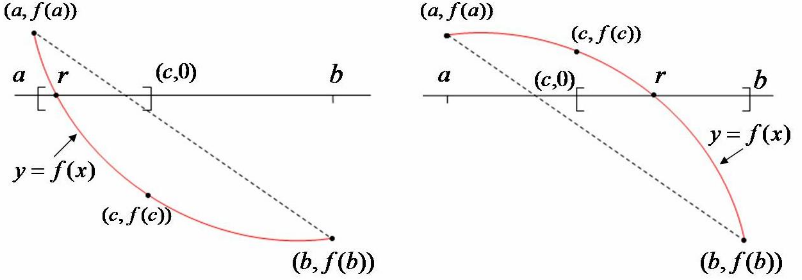
El Método de la Posición Falsa

- Supongamos que $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo. En el método de bisección se usa el punto medio del intervalo $[a, b]$ para llevar a cabo el siguiente paso.
- Suele conseguirse una mejor aproximación usando el punto $(c, 0)$en el que la recta secante L que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ cruza el eje OX.

El Método de la Posición Falsa

- Supongamos que $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo. En el método de bisección se usa el punto medio del intervalo $[a, b]$ para llevar a cabo el siguiente paso.
- Suele conseguirse una mejor aproximación usando el punto $(c, 0)$en el que la recta secante L que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ cruza el eje OX.

El Método de la Posición Falsa



(a) Si *f(a)* y *f(c)* tienen signos opuestos, entonces se recorta por la derecha.

(b) Si *f(c)* y *f(b)* tienen signos opuestos, entonces se recorta por la izquierda.

El Método de la Posición Falsa

Para hallar el punto c, igualamos dos fórmulas para la pendiente m de la recta L:

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

usando los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$y

$$m = \frac{0 - f(b)}{c - b}$$

usando los puntos $(c, 0)$ y $(b, f(b))$. Igualando y despejando c:

$$c = b - \frac{f(b)(b - a)}{f(b) - f(a)}$$

El Método de la Posición Falsa

Las tres posibilidades son las mismas que con la bisección de Bolzano:

1. Si $f(a)$ y $f(c)$ tienen signos opuestos, entonces hay un cero en $[a, c]$.
2. Si $f(c)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces hay un cero en $[c, b]$.
3. Si $f(c) = 0$, entonces c es un cero.

El Método de la Posición Falsa

Las tres posibilidades son las mismas que con la bisección de Bolzano:

1. Si $f(a)$ y $f(c)$ tienen signos opuestos, entonces hay un cero en $[a, c]$.
2. Si $f(c)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces hay un cero en $[c, b]$.
3. Si $f(c) = 0$, entonces c es un cero.

El Método de la Posición Falsa

Las tres posibilidades son las mismas que con la bisección de Bolzano:

1. Si $f(a)$ y $f(c)$ tienen signos opuestos, entonces hay un cero en $[a, c]$.
2. Si $f(c)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces hay un cero en $[c, b]$.
3. Si $f(c) = 0$, entonces c es un cero.

El Método de la Posición Falsa

- La fórmula dada junto con el proceso de decisión descrito se usa para construir una sucesión de intervalos $\{[a_n, b_n]\}$ cada uno de los cuales contiene un cero.

- En cada paso la aproximación al cero obtenida es:

$$c_n = b_n - \frac{f(b_n)(b_n - a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$$

y puede probarse que la sucesión $\{c_n\}$ converge a un cero r de la función.

El Método de la Posición Falsa

- La fórmula dada junto con el proceso de decisión descrito se usa para construir una sucesión de intervalos $\{[a_n, b_n]\}$ cada uno de los cuales contiene un cero.
- En cada paso la aproximación al cero obtenida es:

$$c_n = b_n - \frac{f(b_n)(b_n - a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$$

y puede probarse que la sucesión $\{c_n\}$ converge a un cero r de la función.

Bibliografía

MATHEWS, John; KURTIS, Fink.
Métodos Numéricos con MATLAB.
Prentice Hall, 2000.