RESOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES

Contenido

Contenido

Sistemas Lineales Triangulares

- Desarrollamos el *algoritmo de sustitución regresiva*, con el que podremos resolver un sistema de ecuaciones lineales cuya matriz de coeficientes sea triangular superior.
- Este algoritmo será luego incorporado al algoritmo de resolución de un sistema de ecuaciones lineales general en la siguiente sección.

Sistemas Lineales Triangulares

- Desarrollamos el *algoritmo de sustitución regresiva*, con el que podremos resolver un sistema de ecuaciones lineales cuya matriz de coeficientes sea triangular superior.
- Este algoritmo será luego incorporado al algoritmo de resolución de un sistema de ecuaciones lineales general en la siguiente sección.

Sistemas Lineales Triangulares

Definición

Se dice que una matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ de orden N x N es *triangular superior* cuando sus elementos verifican $a_{ij} = 0$ siempre que $i > j$. Se dice que una matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ de orden N x N es *triangular inferior* cuando sus elementos verifican $a_{ij} = 0$ siempre que $i < j$.

Sistemas Lineales Triangulares

Si **A** es una matriz triangular superior, entonces se dice que el sistema de ecuaciones $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ es un *sistema triangular superior* de ecuaciones lineales, sistema que tiene la siguiente forma:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1N-1}x_{N-1} & + & a_{1N}x_N & = & b_1 \\
 & & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2N-1}x_{N-1} & + & a_{2N}x_N & = & b_2 \\
 & & & & a_{33}x_3 & + & \dots & + & a_{3N-1}x_{N-1} & + & a_{3N}x_N & = & b_3 \\
 & & & & & & & & \dots & & \dots & & \dots \\
 & & & & & & & & a_{N-1N-1}x_{N-1} & & a_{N-1N}x_N & = & b_{N-1} \\
 & & & & & & & & & & a_{NN}x_N & = & b_N
\end{array}
$$

Sistemas Lineales Triangulares

Teorema: Sustitución Regresiva

Supongamos que $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ es un sistema triangular superior. Si

$$a_{kk} \neq 0; k = 1, 2, ..., N,$$

entonces existe una solución única del sistema.

Sistemas Lineales Triangulares

- De la última ecuación:

$$x_N = \frac{b_N}{a_{NN}}.$$

- Usando x_N en la penúltima ecuación:

$$x_{N-1} = \frac{b_{N-1} - a_{N-1N} x_N}{a_{N-1N-1}}.$$

Sistemas Lineales Triangulares

- De la última ecuación:

$$x_N = \frac{b_N}{a_{NN}}.$$

- Usando x_N en la penúltima ecuación:

$$x_{N-1} = \frac{b_{N-1} - a_{N-1N} x_N}{a_{N-1N-1}}.$$

Sistemas Lineales Triangulares

- Usando x_N y x_{N-1} para hallar x_{N-2}:

$$x_{N-2} = \frac{b_{N-2} - a_{N-2N-1}x_{N-1} - a_{N-2N}x_N}{a_{N-2N-2}}.$$

- Calculados los valores $x_N, x_{N-1}, ..., x_{k+1}$, el paso general es

$$x_k = \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^{N} a_{kj}x_j}{a_{kk}}; k = N-1, N-2, ..., 1.$$

Sistemas Lineales Triangulares

- Usando x_N y x_{N-1} para hallar x_{N-2}:

$$x_{N-2} = \frac{b_{N-2} - a_{N-2N-1}x_{N-1} - a_{N-2N}x_N}{a_{N-2N-2}}.$$

- Calculados los valores $x_N, x_{N-1}, ..., x_{k+1}$, el paso general es

$$x_k = \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^{N} a_{kj}x_j}{a_{kk}}; k = N-1, N-2, ..., 1.$$

Sistemas Lineales Triangulares

- La condición $a_{kk} \neq 0$ es esencial porque en la fórmula anterior hay que dividir entre a_{kk}. Si este requisito no se cumple, entonces o bien no hay solución o bien hay infinitas soluciones.
- Un Teorema de Álgebra Lineal establece que un sistema lineal $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, siendo $\mathbf{A}$ una matriz de orden N x N, tiene solución única sii $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Sistemas Lineales Triangulares

- La condición $a_{kk} \neq 0$ es esencial porque en la fórmula anterior hay que dividir entre a_{kk}. Si este requisito no se cumple, entonces o bien no hay solución o bien hay infinitas soluciones.
- Un Teorema de Álgebra Lineal establece que un sistema lineal $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, siendo $\mathbf{A}$ una matriz de orden N x N, tiene solución única sii $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Sistemas Lineales Triangulares

El siguiente Teorema establece que si un elemento de la diagonal principal de una matriz triangular, superior o inferior, es cero, entonces $\det(\mathbf{A}) = 0$.

Teorema

Si una matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ de orden N x N es triangular superior o inferior, entonces

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22}...a_{NN} = \prod_{i=1}^{N} a_{ii}.$$

Sistemas Lineales Triangulares

El siguiente Teorema establece que si un elemento de la diagonal principal de una matriz triangular, superior o inferior, es cero, entonces $\det(\mathbf{A}) = 0$.

Teorema

Si una matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ de orden N x N es triangular superior o inferior, entonces

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22}...a_{NN} = \prod_{i=1}^{N} a_{ii}.$$

Contenido

Eliminación Gaussiana y Pivoteo

- Desarrollamos un método para resolver un sistema de ecuaciones lineales general $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ de N ecuaciones con N incógnitas.
- El objetivo es construir un sistema triangular superior equivalente $\mathbf{UX} = \mathbf{Y}$ que podamos resolver usando el método de la sección anterior.

Eliminación Gaussiana y Pivoteo

- Desarrollamos un método para resolver un sistema de ecuaciones lineales general $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ de N ecuaciones con N incógnitas.
- El objetivo es construir un sistema triangular superior equivalente $\mathbf{UX} = \mathbf{Y}$ que podamos resolver usando el método de la sección anterior.

Eliminación Gaussiana y Pivoteo

Definición

Una forma eficaz de trabajar es almacenar todas las constantes del sistema lineal $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ en una matriz de orden N x (N+1) que se obtiene añadiendo a la matriz **A** una columna, la (N+1)-ésima, en la que se almacenan los términos de **B** (es decir, $a_{kN+1} = b_k$). Esta matriz se llama *matriz ampliada del sistema* y se denota por $[\mathbf{A} \mid \mathbf{B}]$:

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{B}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} & b_N \end{bmatrix}.$$

Eliminación Gaussiana y Pivoteo

Definición

Se dice que dos sistemas de orden N x N son *equivalentes* cuando tienen el mismo conjunto solución (o de soluciones).

Eliminación Gaussiana y Pivoteo

Teorema: Operaciones elementales con las filas.

Cualquiera de las siguientes operaciones aplicada a la matriz ampliada produce un sistema lineal equivalente.
1. Intercambio: el orden de las filas puede cambiarse.
2. Escalado: multiplicar una fila por una constante no nula.
3. Sustitución: una fila puede ser reemplazada por la suma de esa fila más un múltiplo de cualquier otra fila; o sea,

$$fila_r = fila_r - m_{rq} * fila_q.$$

Eliminación Gassiana y Pivoteo

Las operaciones descritas en el anterior Teorema permiten obtener un sistema triangular superior $\mathbf{UX} = \mathbf{Y}$ equivalente a un sistema lineal $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ en el que $\mathbf{A}$ es una matriz de orden N x N.

Eliminación Gassiana y Pivoteo

Definición

(Pivotes y multiplicadores). El elemento a_{qq} de la matriz de los coeficientes en el paso $q+1$ que se usará en la eliminación de a_{rq}, para $r = q+1, q+2, ..., N$, se llama q-ésimo *pivote* y la fila q-ésima se llama *fila pivote*.

Los números

$$m_{rq} = \frac{a_{rq}}{a_{qq}}; r = q+1, q+2, ..., N$$

por los que se multiplica la fila pivote para restarla de las correspondientes filas posteriores se llaman *multiplicadores* de la eliminación.

Eliminación Gassiana y Pivoteo

Definición

(Pivotes y multiplicadores). El elemento a_{qq} de la matriz de los coeficientes en el paso $q+1$ que se usará en la eliminación de a_{rq}, para $r = q+1, q+2, ..., N$, se llama q-ésimo *pivote* y la fila q-ésima se llama *fila pivote*.

Los números

$$m_{rq} = \frac{a_{rq}}{a_{qq}}; r = q+1, q+2, ..., N$$

por los que se multiplica la fila pivote para restarla de las correspondientes filas posteriores se llaman *multiplicadores* de la eliminación.

Eliminación Gaussiana y Pivoteo

Teorema: Eliminación gaussiana con sustitución regresiva.

Si $\mathbf{A}$ es una matriz invertible de orden N x N, entonces existe un sistema lineal $\mathbf{UX} = \mathbf{Y}$, equivalente al sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, en el que $\mathbf{U}$ es una matriz triangular superior con elementos diagonales $u_{kk} \neq 0$. Una vez construidos $\mathbf{U}$ e $\mathbf{Y}$, se usa el algoritmo de sustitución regresiva para resolver $\mathbf{UX} = \mathbf{Y}$ y, así, calcular la solución $\mathbf{X}$.

Eliminación Gaussiana y Pivoteo

Paso 1. Se almacenan todos los coeficientes en la matriz ampliada. El superíndice (1) indica que esta es la primera vez que se almacena un número en la posición (r,c):

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1N}^{(1)} & a_{1N+1}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2N}^{(1)} & a_{2N+1}^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \dots & a_{3N}^{(1)} & a_{3N+1}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1}^{(1)} & a_{N2}^{(1)} & a_{N3}^{(1)} & \dots & a_{NN}^{(1)} & a_{NN+1}^{(1)} \end{bmatrix}$$

Eliminación Gaussiana y Pivoteo

Paso 2. Si es necesario, se intercambia la fila que ocupa el lugar 1 con alguna posterior para que $a_{11}^{(1)} \neq 0$; entonces se elimina la incógnita x_1 en todas las filas desde la 2a hasta la última. En este proceso, m_{r1} es el número por el que hay que multiplicar la 1a fila para restarla de la fila r-ésima.

Eliminación Gaussiana y Pivoteo

Los nuevos elementos $a_{rc}^{(2)}$ se superindizan con un (2) para señalar que esta es la 2a vez que se almacena un número en la posición (r,c) de la matriz. El resultado tras el paso 2 es:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1N}^{(1)} & a_{1N+1}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2N}^{(2)} & a_{2N+1}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3N}^{(2)} & a_{3N+1}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{N2}^{(2)} & a_{N3}^{(2)} & \dots & a_{NN}^{(2)} & a_{NN+1}^{(2)} \end{bmatrix}$$

Eliminación Gaussiana y Pivoteo

Paso q+1. (Paso general). Si es necesario, se intercambia la fila que ocupa el lugar q-ésimo con alguna posterior para que $a_{qq}^{(q)} \neq 0$; entonces se elimina la incógnita x_q en todas las filas desde la (q+1)-ésima hasta la última. En este proceso, m_{rq} es el número por el que hay que multiplicar la q-ésima fila para restarla de la fila r-ésima.

Eliminación Gaussiana y Pivoteo

El resultado final, una vez eliminada la incógnita x_{N-1} en la última fila es:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1N}^{(1)} & a_{1N+1}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2N}^{(2)} & a_{2N+1}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \dots & a_{3N}^{(3)} & a_{3N+1}^{(3)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{NN}^{(N)} & a_{NN+1}^{(N)} \end{bmatrix}$$

Y el proceso de triangularización está terminado.

Eliminación Gaussiana y Pivoteo

- Puesto que **A** es invertible, cuando se realizan las operaciones con las filas, las matrices que se van obteniendo sucesivamente son también invertibles. Esto garantiza que $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ para todo k a lo largo del proceso. Por tanto, podemos usar el algoritmo de sustitución regresiva para resolver $\mathbf{UX} = \mathbf{Y}$.

Eliminación Gaussiana y Pivoteo

- Si $a_{kk}^{(k)} = 0$, entonces no podemos usar la fila k-ésima para eliminar los elementos de la columna k-ésima que están por debajo de la diagonal principal. Lo que hacemos es intercambiar la fila k-ésima con alguna fila posterior para conseguir un elemento pivote que no sea cero; si esto no puede hacerse, entonces la matriz de los coeficientes del sistema es singular y el sistema no tiene solución única.

Contenido

Factorización Triangular

Definición

Se dice que una matriz invertible $\mathbf{A}$ admite una *factorización triangular o factorización LU* si puede expresarse como el producto de una matriz triangular inferior $\mathbf{L}$, cuyos elementos diagonales son todos iguales a 1, por una matriz triangular superior $\mathbf{U}$:

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}.$$

Factorización Triangular

Ejemplo: Matriz 4 x 4

$$\left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccc} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{array}\right].$$

La condición de que **A** sea invertible implica que $u_{kk} \neq 0$ para todo k.

Factorización Triangular

Teorema: Factorización directa $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ sin intercambio de filas.

Supongamos que podemos llevar a cabo hasta el final el proceso de eliminación gaussiana, sin intercambios de filas, para resolver un sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$. Entonces la matriz $\mathbf{A}$ admite factorización LU.

Factorización Triangular

Una vez halladas **L**y **U**, la solución **X** puede calcularse en dos pasos:

1. Hallar **Y** resolviendo $\mathbf{LY} = \mathbf{B}$ con el método de sustitución progresiva.
2. Hallar **X** resolviendo $\mathbf{UX} = \mathbf{Y}$ con el método de sustitución regresiva.

Factorización Triangular

Una vez halladas **L**y **U**, la solución **X** puede calcularse en dos pasos:

1. Hallar **Y** resolviendo **LY** $=$ **B** con el método de sustitución progresiva.

1. Hallar **X** resolviendo **UX** $=$ **Y** con el método de sustitución regresiva.

Factorización Triangular

Paso 1. Se almacenan todos los coeficientes en la matriz ampliada. El superíndice (1) indica que esta es la primera vez que se almacena un número en la posición (r,c):

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1N}^{(1)} & a_{1N+1}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2N}^{(1)} & a_{2N+1}^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \dots & a_{3N}^{(1)} & a_{3N+1}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1}^{(1)} & a_{N2}^{(1)} & a_{N3}^{(1)} & \dots & a_{NN}^{(1)} & a_{NN+1}^{(1)} \end{bmatrix}$$

Factorización Triangular

Paso 2. Se elimina la incógnita x_1 en todas las filas desde la 2a hasta la última y, en la posición (r,1) de la matriz, almacenamos el multiplicador m_{r1} usado para eliminar x_1 en la fila r-ésima.

Factorización Triangular

Los nuevos elementos $a_{rc}^{(2)}$ se superindizan con un (2) para señalar que esta es la 2a vez que se almacena un número en la posición (r,c) de la matriz. El resultado tras el paso 2 es

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1N}^{(1)} & a_{1N+1}^{(1)} \\ m_{21} & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2N}^{(2)} & a_{2N+1}^{(2)} \\ m_{31} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3N}^{(2)} & a_{3N+1}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{N1} & a_{N2}^{(2)} & a_{N3}^{(2)} & \dots & a_{NN}^{(2)} & a_{NN+1}^{(2)} \end{bmatrix}$$

Factorización Triangular

Paso q+1. (Paso general). Se elimina la incógnita x_q en todas las filas desde la (q+1)-ésima hasta la última y, en la posición (r,q) de la matriz, almacenamos el multiplicador m_{rq} usado para eliminar x_q en la fila r-ésima.

Factorización Triangular

El resultado final, tras haber eliminado x_{N-1} de la última fila es

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1N}^{(1)} & a_{1N+1}^{(1)} \\ m_{21} & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2N}^{(2)} & a_{2N+1}^{(2)} \\ m_{31} & m_{32} & a_{33}^{(3)} & \dots & a_{3N}^{(3)} & a_{3N+1}^{(3)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{N1} & m_{N2} & m_{N3} & \dots & a_{NN}^{(N)} & a_{NN+1}^{(N)} \end{bmatrix}$$

Factorización Triangular

Por lo tanto,

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{N1} & m_{N2} & m_{N3} & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1N}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2N}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \dots & a_{3N}^{(3)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{NN}^{(N)} \end{bmatrix}$$

El proceso de triangularización ya está completo.

Factorización Triangular

Sólo hemos necesitado una matriz para almacenar los elementos de **L** y **U**: no se guardan los unos de la diagonal de **L** ni los ceros que hay en **L** y **U** por encima y por debajo de la diagonal principal, respectivamente; sólo se almacenan los coeficientes esenciales para reconstruir **L** y **U**.

Factorización Triangular

Razón para elegir el método de factorización triangular antes que el método de eliminación de Gauss: Si debemos resolver varios sistemas que tienen la misma matriz de coeficientes **A** pero diferentes columnas **B** de términos independientes, sólo se hace la factorización la primera vez y se almacenan los factores. Si sólo hay que resolver un sistema de ecuaciones, los dos métodos son iguales, salvo que en la factorización triangular se guardan los multiplicadores.

Bibliografía

MATHEWS, John; KURTIS, Fink.
Métodos Numéricos con MATLAB.
Prentice Hall, 2000.