Respuesta transitoria de circuitos de 1^{er} y 2^{do} orden

José Fabio Lozano Ovalle Código: 222982
Wilson Orlando Macias Fuquen Código: 223101
David Ricardo Martínez Hernández Código: 261931

***Resumen*—.**

***Palabras clave*— Amortiguamiento crítico, Carga Inicial, Condensador, Constante de Tiempo, Disipación, Energía, Inductor, Subamortiguado, Sobreamortiguamiento, Voltaje Inicial.**

I. Objetivos

II. Introducción

III. Marco Teórico

A. Circuitos de Primer Orden

Un circuito de **primer orden** es caracterizado por una ecuación diferencial de primer orden. Existen dos tipos de circuitos que describen este comportamiento, el circuito RL y el RC, hay dos formas de excitar el circuito. La primera forma es con las condiciones iniciales de almacenamiento, también llamado circuitos sin fuente (*Source-free Circuits*), asumiendo esa energía inicial de almacenamiento en los elementos inductivos y capacitivos. La energía causa un flujo de corriente en el circuito y es disipada gradualmente en la resistencia[1].

1) Circuitos RC sin fuente: Cuando la fuente DC fue desconectada de repente. La energía almacenada en el condensador es liberada a la resistencia, es decir disipada por dicho elemento.

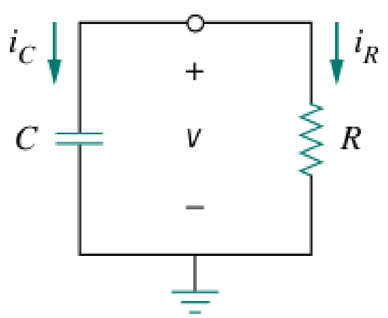

Fig. 1: Circuito RC sin fuente. (Tomado de [2], página 238)

En el tiempo $t = 0$ el voltaje inicial es

$$v(0) = V_0 \tag{1}$$

$$w(0) = \frac{1}{2}C{V_0}^2 \tag{2}$$

Aplicando Ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo de la Fig. 1

$$i_C + i_R = 0 \tag{3}$$

[1]Texto tomado de [2], Página 238

Por definición $C\frac{dv}{dt}$ $\frac{v}{R}$

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0 \tag{4}$$

Al realizar el análisis matemático correspondiente se obtiene la siguiente ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{RC}dt \tag{5}$$

Obteniendo Al integrar a ambos lados de la ecuación y despejando $v(0)$ se obtiene

$$v(t) = Ae^{\quad t/RC} \tag{6}$$

Donde $v(0) = A = V_0$, entonces

$$v(t) = V_0e^{\quad t/RC} \tag{7}$$

Esta función hace referencia a la respuesta del circuito como una función exponencial decreciente de un voltaje inicial. Cuando no existe una fuente de voltaje o de corriente externa conectada al circuito es llamada la *Respuesta natural del circuito*.

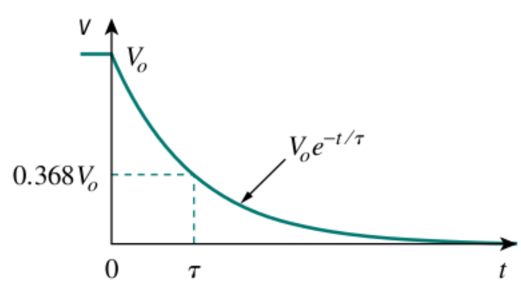

Fig. 2: Gráfica de la respuesta natural del circuito RC, de la ecu. (7). (Tomado de [2], página 240)

Donde $\tau = RC$ es la constante de tiempo, entonces

$$v(t) = V_0e^{\quad t/\tau} \tag{8}$$

t	$v(t)/V_0$
τ	0.36788
2τ	0.13534
3τ	0.04979
4τ	0.01832
5τ	0.00674

TABLA I: Valores de $v(t)/V_0 = e^{-t/\tau}$. (Tomado de [2], página 240)

Al conocer el voltaje $v(t)$, se puede encontrar la corriente $i(t)$

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{V_0}{R}e^{\quad t/RC} \tag{9}$$

La potencia disipada por la resistencia es

$$p(t) = vi_R = \frac{{V_0}^2}{R} e^{\ \ 2t/RC} \tag{10}$$

La potencia disipada por la resistencia en un tiempo t es

$$w_R(t) = \int_0^t p dt = \int_0^t \frac{{V_0}^2}{R} e^{\ \ 2t/\tau} dt \tag{11}$$

$$w_R(t) = \frac{1}{2} C{V_0}^2 \left(1 - e^{\ \ 2t/\tau}\right) \tag{12}$$

Notese que cuando $t \to \infty$, $w_R(\infty) \to \frac{1}{2} C{V_0}^2$, y como $w_C(0)$ es la energía inicial alamacenada en el condensador. Esa misma energía sera disipada posteriormente en la resistencia.

2) Circuito RL sin fuente: Considere una conección en serie de una bobina con inductor y una resistencia Fig. 3, el objetivo es determinar la corriente de respuesta, la cual se asume como corriente $i(t)$ a través del inductor.

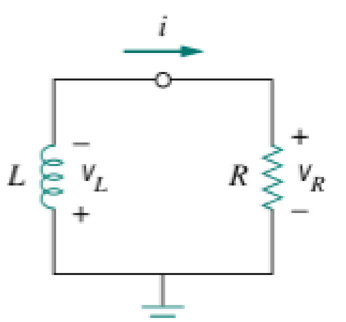

Fig. 3: Circuito RL sin fuente. (Tomado de [2], página 243.)

Asumiendo la corriente inicial I_0

$$i(0) = I_0 \tag{13}$$

La correspondiente energía del almacenada en el inductor es

$$w(0) = \frac{1}{2} L{I_0}^2 \tag{14}$$

Aplicando Ley de Voltaje de Kirchhoff en el circuito de la Fig. 3

$$v_L + v_R = 0 \tag{15}$$

pero $v_L = L\frac{di}{dt}$ y $v_R = iR$

$$L\frac{di}{dt} + iR = 0 \tag{16}$$

Al realizar el análisis matemático correspondiente se obtiene la siguiente ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{di}{dt} = -iRL \tag{17}$$

Obteniendo Al integrar a ambos lados de la ecuación y despejando $i(0)$ se obtiene

$$i(t) = I_0 e^{\ \ tR/L} \tag{18}$$

Esta función hace referencia a la respuesta del circuito como una función exponencial decreciente de una corriente inicial.

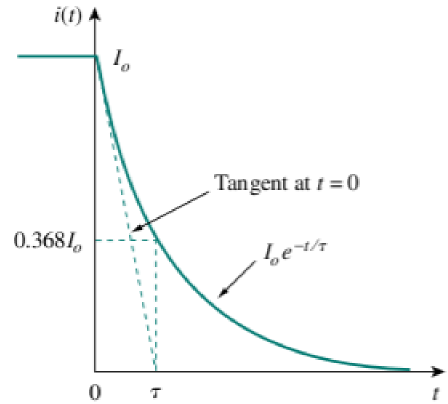

Fig. 4: Gráfica de la respuesta natural del circuito RL, de la ecu. (18). (Tomado de [2], página 244)

Donde $\tau = L/R$ es la constante de tiempo, entonces

$$i(t) = I_0 e^{\ \ t/\tau} \tag{19}$$

Al conocer la corriente $i(t)$, se puede encontrar el voltaje $v(t)$ en la resistencia

$$v_R(t) = iR = I_0 R e^{\ \ t/\tau} \tag{20}$$

La potencia disipada por la resistencia es

$$p = v_R i = {I_0}^2 R e^{\ \ 2t/\tau} \tag{21}$$

La energía absorbida por la resistencia es

$$w_R(t) = \int_0^t p dt = \int_0^t {I_0}^2 R e^{\ \ 2t/\tau} dt \tag{22}$$

$$w_R(t) = \frac{1}{2} L{I_0}^2 \left(1 - e^{\ \ 2t/\tau}\right) \tag{23}$$

Nótese que cuando $t \to \infty$, $w_R(\infty) \to \frac{1}{2} L{I_0}^2$, y como $w_L(0)$ es la energía inicial alamacenada en la bobina. Esa misma energía sera disipada posteriormente en la resistencia.

B. Circuitos de Segundo Orden

En los circuitos de primer orden solo se tenían dos elementos, una resistencia con un condensador o una resistencia y una bobina, dichos circuitos tenían una ecuación diferencial de primer orden que describe su comportamiento. Un ejemplo de un circuito de segundo orden es un RLC.
Un circuito de segundo orden es caracterizado por una ecuación diferencial de segundo orden. Esto consiste en una resistencia y el equivalente de dos elementos de almacenamiento de energía[2].

1) Circuitos RLC en serie sin fuente: Un circuito RLC en serie es como la Fig. 5, el circuito es inicialmente excitado por la energía almacenada en el condensador y la bobina. La energía es representada por el voltaje inicial en el condensador V_0 y la corriente inicial en la bobina I_0.

[2]Texto tomado de [2], página 296

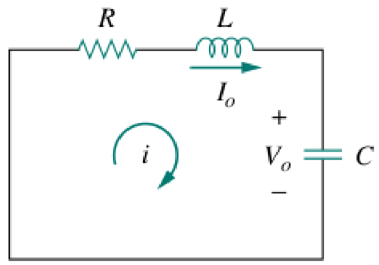

Fig. 5: Circuito RLC en serie sin fuente. (Tomado de [2], página 301)

$$v\left(0\right)=\frac{1}{C}\int_{1}^{0}idi=V_0 \tag{24}$$

$$i\left(0\right)=I_0 \tag{25}$$

Aplicando la ley de de voltajes de Kirchhoff a la Fig. 5

$$Ri+L\frac{di}{dt}\frac{1}{C}\int_{1}^{0}idi=V_0=0 \tag{26}$$

La ecuación diferencial que se obtiene es

$$\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{di}{dt}+\frac{i}{LC}=0 \tag{27}$$

El polinomio característico es

$$s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}=0 \tag{28}$$

Al resolver la ecuación diferencial por algunos de los métodos para la solución de estas ecuaciones. Las raíces que se obtienen son

$$s_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}} \tag{29}$$

$$s_1=-\alpha+\sqrt{\alpha^2-{\omega_0}^2} \qquad s_2=-\alpha-\sqrt{\alpha^2-{\omega_0}^2} \tag{30}$$

Donde

$$\alpha=\frac{R}{2L} \qquad \omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{31}$$

Las raíces s_1 y s_2 son llamadas *frecuencias naturales*, esta asociado con la frecuencia natural del circuito, ω_0 es la *frecuencia natural de subamortiguamiento* y α es la *frecuencia neper* o el *Factor de amortiguamiento*. En términos de α y ω la ecu. (28)

$$s^2+2\alpha s+{\omega_0}^2 \tag{32}$$

La solución a la ecuación diferencial es

$$i(t)=A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t} \tag{33}$$

cuando las constantes A_1 y A_2 son determinados por las condiciones iniciales por los valores de $i(0)$ y $\frac{di(0)}{dt}$.
Para las ecu. (29), se pueden encontrar tres tipos de soluciones:

1) Si $\alpha>\omega_0$, se tiene un caso de *sobreamortiguamiento*
2) Si $\alpha=\omega_0$, se tiene un caso de *críticamente amortiguado*
3) Si $\alpha<\omega_0$, se tiene un caso de *subamortiguamiento*

Sobreamortiguamiento $\alpha>\omega_0$: Cuando $C>4L/R^2$, esto determina las raíces s_1 y s_2 negativas y reales

$$i(t)=A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t} \tag{34}$$

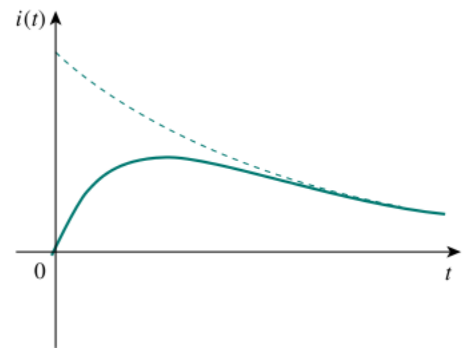

Fig. 6: Respuesta a un circuito sobreamortiguado. (Tomado de [2], página 304)

Críticamente amortiguado $\alpha=\omega_0$: Cuando $C=4L/R^2$, las raíces $s_1=s_2$ las rices son reales e iguales, la respuesta a la ecuación diferencial es

$$i(t)=(A_1+A_2t)e^{\alpha t} \tag{35}$$

la respuesta natural del circuito críticamente amortiguado es una suma de dos términos: un exponencial negativo y un exponencial negativo multiplicado por un término linea

$$i(t)=(A_2+A_1t)e^{\quad \alpha t} \tag{36}$$

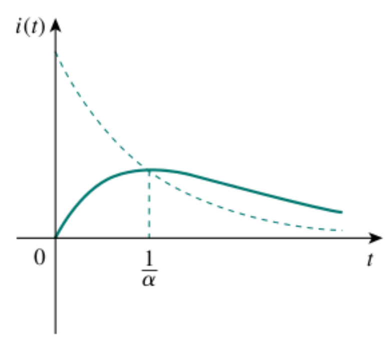

Fig. 7: Respuesta a un circuito críticamente amortiguado. (Tomado de [2], página 304)

Subamortiguado $\alpha<\omega_0$: Cuando $C<4L/R^2$ las raíces son complejas conjugadas

$$s_1=-\alpha+\sqrt{\alpha^2+{\omega_0}^2}=-\alpha+j\omega_d \tag{37}$$

$$s_2=-\alpha+\sqrt{\alpha^2-{\omega_0}^2}=-\alpha+j\omega_d \tag{38}$$

donde $j=\sqrt{(-1)}$ y $\omega_d=\sqrt{\alpha^2+{\omega_0}^2}$, la cual es llamada *Frecuencia de amortiguamiento*. ω_0 llamada también *frecuencia natural de subamortiguamiento* y ω_d llamada *frecuencia natural de amortiguamiento*. La respuesta final es

$$i(t)=e^{\quad \alpha t}\left(C_1\cos\omega_dt+C_2\sin\omega_dt\right) \tag{39}$$

El periodo $T=\frac{2\pi}{\omega_d}$

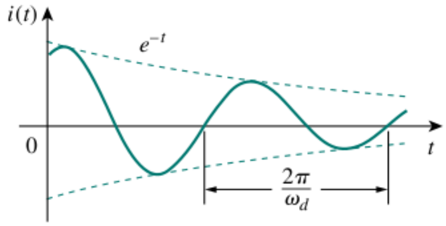

Fig. 8: Respuesta a un circuito subamortiguado. (Tomado de [2], página 304)

2) Circuitos RLC en paralelo sin fuente: Un circuito RLC en paralelo es como Fig. 9. El análisis es muy similar al anterior. Es inicialmente excitado por la energía almacenada en el condensador y la bobina. La energía es representada por el voltaje inicial en el condensador V_0 y la corriente inicial en la bobina I_0.

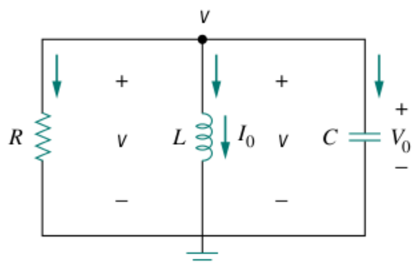

Fig. 9: Circuito RLC en paralelo sin fuente. (Tomado de [2], página 308)

$$i(0) = \frac{1}{L}\int_{1}^{0} vdi = I_0 \tag{40}$$

$$v(0) = V_0 \tag{41}$$

Aplicando la ley de de voltajes de Kirchhoff a la Fig. 9

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L}\int_{1}^{0} vdi = I_0 + C\frac{dv}{dt} = 0 \tag{42}$$

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{RC}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC}v = 0 \tag{43}$$

la ecuación característica que se obtiene es

$$s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC} = 0 \tag{44}$$

Las raíces del polinomio son

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \tag{45}$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - {\omega_0}^2} \tag{46}$$

donde

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{47}$$

Los tres tipos de soluciones:

1) Si $\alpha > \omega_0$, se tiene un caso de *sobreamortiguamiento*
2) Si $\alpha = \omega_0$, se tiene un caso de *críticamente amortiguado*
3) Si $\alpha < \omega_0$, se tiene un caso de *subamortiguamiento*

Sobreamortiguamiento $\alpha > \omega_0$: Cuando $L > 4R^2C$, esto determina las raíces s_1 y s_2 negativas y reales

$$v(t) = A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t} \tag{48}$$

Críticamente amortiguado $\alpha = \omega_0$: Cuando $L = 4R^2C$, las raíces $s_1 = s_2$ las rices son reales e iguales, la respuesta a la ecuación diferencial es

$$v(t) = (A_1 + A_2t)e^{\ \alpha t} \tag{49}$$

Subamortiguado $\alpha < \omega_0$: Cuando $L < 4R^2C$ las raíces son complejas conjugadas

$$s_{1,2} = -\alpha \pm i\omega_d \tag{50}$$

$$\omega_d = \sqrt{{\omega_0}^2 - \alpha^2} \tag{51}$$

La respuesta final del circuito sera

$$v(t) = e^{\ \alpha t}\left(C_1 \cos\omega_d t + C_2 \sin\omega_d t\right) \tag{52}$$

Las constantes A_1 y A_2 son determinadas por las condiciones iniciales

IV. Materiales

.
.
.
.
.
.

V. Análisis y Resultados Teóricos

VI. Preguntas

Referencias

[1] Dorf & Svoboda. *"'Circuitos Eléctricos"'*. Alfaomega, Sexta Edición, 2006.
[2] Alexander, Charles K. & Sadiku, Matthew N.O. *"'Fundamentals of Electric Circuits"'*. McGRAW-HILL, ISE Editions, 1999.
[3] Nahvi, Mahmood & Edminister, Joseph A. *"'Theory and Problems of Electric Circuits"'*. McGRAW-HILL, Fourth Edition, 2003.