

DERIVACIÓN NUMÉRICA

Contenido

- 1 Preliminares
 - Introducción

- 2 Métodos de Derivación Numérica
 - El Límite del Cociente Incremental
 - Fórmulas de Diferencias Centradas
 - Fórmulas de Diferencias Progresivas y Regresivas
 - Derivada del Polinomio Interpolador de Newton

Contenido

1 Preliminares

- Introducción

2 Métodos de Derivación Numérica

- El Límite del Cociente Incremental
- Fórmulas de Diferencias Centradas
- Fórmulas de Diferencias Progresivas y Regresivas
- Derivada del Polinomio Interpolador de Newton

Introducción

Las fórmulas de derivación numérica son importantes en el desarrollo de algoritmos para resolver problemas de contorno de ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones en derivadas parciales.

Contenido

1 Preliminares

- Introducción

2 Métodos de Derivación Numérica

- El Límite del Cociente Incremental
- Fórmulas de Diferencias Centradas
- Fórmulas de Diferencias Progresivas y Regresivas
- Derivada del Polinomio Interpolador de Newton

El Límite del Cociente Incremental

Se busca aproximar numéricamente la derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

El Límite del Cociente Incremental

Método:

Se elige una sucesión $\{h_k\}$ tal que $h_k \rightarrow 0$ y se calcula el límite de la sucesión

$$D_k = \frac{f(x + h_k) - f(x)}{h_k};$$

para $k = 1, 2, \dots$

El Límite del Cociente Incremental

Los términos de la sucesión $\{D_k\}$ se calculan hasta que

$$|D_{N+1} - D_N| \geq |D_N - D_{N-1}| ;$$

la intención es tratar de determinar la mejor aproximación antes de que los términos empiecen a alejarse del límite.

Contenido

1 Preliminares

- Introducción

2 Métodos de Derivación Numérica

- El Límite del Cociente Incremental
- **Fórmulas de Diferencias Centradas**
- Fórmulas de Diferencias Progresivas y Regresivas
- Derivada del Polinomio Interpolador de Newton

Fórmulas de Diferencias Centradas

Son fórmulas de aproximación a $f'(x)$ que requieren que la función se pueda evaluar en abscisas situadas simétricamente a ambos lados del punto x_0 (donde se desea hallar la derivada).

Fórmulas de Diferencias Centradas

Fórmulas de Diferencias Centradas de orden $O(h^2)$

$$(1) \quad f'(x_0) \approx \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}$$

$$(2) \quad f''(x_0) \approx \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2}$$

$$(3) \quad f^{(3)}(x_0) \approx \frac{f_2 - f_1 + 2f_{-1} - f_{-2}}{2h^3}$$

$$(4) \quad f^{(4)}(x_0) \approx \frac{f_2 - 4f_1 + 6f_0 - 4f_{-1} + f_{-2}}{h^4}$$

$$f_k = f(x_0 + kh); \quad k = -2, -1, 0, 1, 2$$

Fórmulas de Diferencias Centradas

Fórmulas de Diferencias Centradas de orden $O(h^2)$

$$(1) \quad f'(x_0) \approx \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}$$

$$(2) \quad f''(x_0) \approx \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2}$$

$$(3) \quad f^{(3)}(x_0) \approx \frac{f_2 - f_1 + 2f_{-1} - f_{-2}}{2h^3}$$

$$(4) \quad f^{(4)}(x_0) \approx \frac{f_2 - 4f_1 + 6f_0 - 4f_{-1} + f_{-2}}{h^4}$$

$$f_k = f(x_0 + kh); \quad k = -2, -1, 0, 1, 2$$

Fórmulas de Diferencias Centradas

Fórmulas de Diferencias Centradas de orden $O(h^2)$

$$(1) \quad f'(x_0) \approx \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}$$

$$(2) \quad f''(x_0) \approx \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2}$$

$$(3) \quad f^{(3)}(x_0) \approx \frac{f_2 - f_1 + 2f_{-1} - f_{-2}}{2h^3}$$

$$(4) \quad f^{(4)}(x_0) \approx \frac{f_2 - 4f_1 + 6f_0 - 4f_{-1} + f_{-2}}{h^4}$$

$$f_k = f(x_0 + kh); \quad k = -2, -1, 0, 1, 2$$

Fórmulas de Diferencias Centradas

Fórmulas de Diferencias Centradas de orden $O(h^2)$

$$(1) \quad f'(x_0) \approx \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}$$

$$(2) \quad f''(x_0) \approx \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2}$$

$$(3) \quad f^{(3)}(x_0) \approx \frac{f_2 - f_1 + 2f_{-1} - f_{-2}}{2h^3}$$

$$(4) \quad f^{(4)}(x_0) \approx \frac{f_2 - 4f_1 + 6f_0 - 4f_{-1} + f_{-2}}{h^4}$$

$$f_k = f(x_0 + kh); \quad k = -2, -1, 0, 1, 2$$

Fórmulas de Diferencias Centradas

Fórmulas de Diferencias Centradas de orden $O(h^2)$

$$(1) \quad f'(x_0) \approx \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}$$

$$(2) \quad f''(x_0) \approx \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2}$$

$$(3) \quad f^{(3)}(x_0) \approx \frac{f_2 - f_1 + 2f_{-1} - f_{-2}}{2h^3}$$

$$(4) \quad f^{(4)}(x_0) \approx \frac{f_2 - 4f_1 + 6f_0 - 4f_{-1} + f_{-2}}{h^4}$$

$$f_k = f(x_0 + kh); \quad k = -2, -1, 0, 1, 2$$

Fórmulas de Diferencias Centradas

- Cuando se hacen los cálculos con un computador, no es aconsejable elegir h demasiado pequeño; por eso sería útil disponer de fórmulas que aproximen las derivadas de $f(x)$ con un error de truncamiento de orden $O(h^4)$.
- Se logra la misma precisión con un incremento mayor.

Fórmulas de Diferencias Centradas

- Cuando se hacen los cálculos con un computador, no es aconsejable elegir h demasiado pequeño; por eso sería útil disponer de fórmulas que aproximen las derivadas de $f(x)$ con un error de truncamiento de orden $O(h^4)$.
- Se logra la misma precisión con un incremento mayor.

Fórmulas de Diferencias Centradas

Fórmulas de Diferencias Centradas de orden $O(h^4)$

$$(5) \quad f'(x_0) \approx \frac{-f_2 + 8f_1 - 8f_{-1} + f_{-2}}{12h}$$

$$(6) \quad f''(x_0) \approx \frac{-f_2 + 16f_1 - 30f_0 + 16f_{-1} - f_{-2}}{12h^2}$$

$$(7) \quad f^{(3)}(x_0) \approx \frac{-f_3 + 8f_2 - 13f_1 + 13f_{-1} - 8f_{-2} + f_{-3}}{8h^3}$$

$$(8) \quad f^{(4)}(x_0) \approx \frac{-f_3 + 12f_2 - 39f_1 + 56f_0 - 39f_{-1} + 12f_{-2} - f_{-3}}{6h^4}$$

$$f_k = f(x_0 + kh); \quad k = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

Fórmulas de Diferencias Centradas

Fórmulas de Diferencias Centradas de orden $O(h^4)$

$$(5) \quad f'(x_0) \approx \frac{-f_2 + 8f_1 - 8f_{-1} + f_{-2}}{12h}$$

$$(6) \quad f''(x_0) \approx \frac{-f_2 + 16f_1 - 30f_0 + 16f_{-1} - f_{-2}}{12h^2}$$

$$(7) \quad f^{(3)}(x_0) \approx \frac{-f_3 + 8f_2 - 13f_1 + 13f_{-1} - 8f_{-2} + f_{-3}}{8h^3}$$

$$(8) \quad f^{(4)}(x_0) \approx \frac{-f_3 + 12f_2 - 39f_1 + 56f_0 - 39f_{-1} + 12f_{-2} - f_{-3}}{6h^4}$$

$$f_k = f(x_0 + kh); \quad k = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

Fórmulas de Diferencias Centradas

Fórmulas de Diferencias Centradas de orden $O(h^4)$

$$(5) \quad f'(x_0) \approx \frac{-f_2 + 8f_1 - 8f_{-1} + f_{-2}}{12h}$$

$$(6) \quad f''(x_0) \approx \frac{-f_2 + 16f_1 - 30f_0 + 16f_{-1} - f_{-2}}{12h^2}$$

$$(7) \quad f^{(3)}(x_0) \approx \frac{-f_3 + 8f_2 - 13f_1 + 13f_{-1} - 8f_{-2} + f_{-3}}{8h^3}$$

$$(8) \quad f^{(4)}(x_0) \approx \frac{-f_3 + 12f_2 - 39f_1 + 56f_0 - 39f_{-1} + 12f_{-2} - f_{-3}}{6h^4}$$

$$f_k = f(x_0 + kh); \quad k = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

Fórmulas de Diferencias Centradas

Fórmulas de Diferencias Centradas de orden $O(h^4)$

$$(5) \quad f'(x_0) \approx \frac{-f_2 + 8f_1 - 8f_{-1} + f_{-2}}{12h}$$

$$(6) \quad f''(x_0) \approx \frac{-f_2 + 16f_1 - 30f_0 + 16f_{-1} - f_{-2}}{12h^2}$$

$$(7) \quad f^{(3)}(x_0) \approx \frac{-f_3 + 8f_2 - 13f_1 + 13f_{-1} - 8f_{-2} + f_{-3}}{8h^3}$$

$$(8) \quad f^{(4)}(x_0) \approx \frac{-f_3 + 12f_2 - 39f_1 + 56f_0 - 39f_{-1} + 12f_{-2} - f_{-3}}{6h^4}$$

$$f_k = f(x_0 + kh); \quad k = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

Fórmulas de Diferencias Centradas

Fórmulas de Diferencias Centradas de orden $O(h^4)$

$$(5) \quad f'(x_0) \approx \frac{-f_2 + 8f_1 - 8f_{-1} + f_{-2}}{12h}$$

$$(6) \quad f''(x_0) \approx \frac{-f_2 + 16f_1 - 30f_0 + 16f_{-1} - f_{-2}}{12h^2}$$

$$(7) \quad f^{(3)}(x_0) \approx \frac{-f_3 + 8f_2 - 13f_1 + 13f_{-1} - 8f_{-2} + f_{-3}}{8h^3}$$

$$(8) \quad f^{(4)}(x_0) \approx \frac{-f_3 + 12f_2 - 39f_1 + 56f_0 - 39f_{-1} + 12f_{-2} - f_{-3}}{6h^4}$$

$$f_k = f(x_0 + kh); \quad k = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

Contenido

1 Preliminares

- Introducción

2 Métodos de Derivación Numérica

- El Límite del Cociente Incremental
- Fórmulas de Diferencias Centradas
- **Fórmulas de Diferencias Progresivas y Regresivas**
- Derivada del Polinomio Interpolador de Newton

Fórmulas de Diferencias Progresivas y Regresivas

- Si sólo se puede evaluar la función en abcisas que están en un lado de x_0 , entonces la Fórmulas de Diferencias Centradas no pueden usarse.
- Las fórmulas que utilizan abcisas equiespaciadas que están todas a derecha (o izquierda) de x_0 se llaman Fórmulas de Diferencias Progresivas (o Regresivas).

Fórmulas de Diferencias Progresivas y Regresivas

- Si sólo se puede evaluar la función en abcisas que están en un lado de x_0 , entonces la Fórmulas de Diferencias Centradas no pueden usarse.
- Las fórmulas que utilizan abcisas equiespaciadas que están todas a derecha (o izquierda) de x_0 se llaman Fórmulas de Diferencias Progresivas (o Regresivas).

Fórmulas de Diferencias Progresivas y Regresivas

Fórmulas de Diferencias Progresivas de orden $O(h^2)$

$$(9) \quad f'(x_0) \approx \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h}$$

$$(10) \quad f''(x_0) \approx \frac{2f_0 - 5f_1 + 4f_2 - f_3}{h^2}$$

$$(11) \quad f^{(3)}(x_0) \approx \frac{-5f_0 + 18f_1 - 24f_2 + 14f_3 - 3f_4}{2h^3}$$

$$(12) \quad f^{(4)}(x_0) \approx \frac{3f_0 - 14f_1 + 26f_2 - 24f_3 + 11f_4 - 2f_5}{h^4}$$

$$f_k = f(x_0 + kh); \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

Fórmulas de Diferencias Progresivas y Regresivas

Fórmulas de Diferencias Progresivas de orden $O(h^2)$

$$(9) \quad f'(x_0) \approx \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h}$$

$$(10) \quad f''(x_0) \approx \frac{2f_0 - 5f_1 + 4f_2 - f_3}{h^2}$$

$$(11) \quad f^{(3)}(x_0) \approx \frac{-5f_0 + 18f_1 - 24f_2 + 14f_3 - 3f_4}{2h^3}$$

$$(12) \quad f^{(4)}(x_0) \approx \frac{3f_0 - 14f_1 + 26f_2 - 24f_3 + 11f_4 - 2f_5}{h^4}$$

$$f_k = f(x_0 + kh); \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

Fórmulas de Diferencias Progresivas y Regresivas

Fórmulas de Diferencias Progresivas de orden $O(h^2)$

$$(9) \quad f'(x_0) \approx \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h}$$

$$(10) \quad f''(x_0) \approx \frac{2f_0 - 5f_1 + 4f_2 - f_3}{h^2}$$

$$(11) \quad f^{(3)}(x_0) \approx \frac{-5f_0 + 18f_1 - 24f_2 + 14f_3 - 3f_4}{2h^3}$$

$$(12) \quad f^{(4)}(x_0) \approx \frac{3f_0 - 14f_1 + 26f_2 - 24f_3 + 11f_4 - 2f_5}{h^4}$$

$$f_k = f(x_0 + kh); \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

Fórmulas de Diferencias Progresivas y Regresivas

Fórmulas de Diferencias Progresivas de orden $O(h^2)$

$$(9) \quad f'(x_0) \approx \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h}$$

$$(10) \quad f''(x_0) \approx \frac{2f_0 - 5f_1 + 4f_2 - f_3}{h^2}$$

$$(11) \quad f^{(3)}(x_0) \approx \frac{-5f_0 + 18f_1 - 24f_2 + 14f_3 - 3f_4}{2h^3}$$

$$(12) \quad f^{(4)}(x_0) \approx \frac{3f_0 - 14f_1 + 26f_2 - 24f_3 + 11f_4 - 2f_5}{h^4}$$

$$f_k = f(x_0 + kh); \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

Fórmulas de Diferencias Progresivas y Regresivas

Fórmulas de Diferencias Regresivas de orden $O(h^2)$

$$(13) \quad f'(x_0) \approx \frac{3f_0 - 4f_{-1} + f_{-2}}{2h}$$

$$(14) \quad f''(x_0) \approx \frac{2f_0 - 5f_{-1} + 4f_{-2} - f_{-3}}{h^2}$$

$$(15) \quad f^{(3)}(x_0) \approx \frac{5f_0 - 18f_{-1} + 24f_{-2} - 14f_{-3} + 3f_{-4}}{2h^3}$$

$$(16) \quad f^{(4)}(x_0) \approx \frac{3f_0 - 14f_{-1} + 26f_{-2} - 24f_{-3} + 11f_{-4} - 2f_{-5}}{h^4}$$

$$f_k = f(x_0 + kh); \quad k = -5, -4, -3, -2, -1, 0$$

Fórmulas de Diferencias Progresivas y Regresivas

Fórmulas de Diferencias Regresivas de orden $O(h^2)$

$$(13) \quad f'(x_0) \approx \frac{3f_0 - 4f_{-1} + f_{-2}}{2h}$$

$$(14) \quad f''(x_0) \approx \frac{2f_0 - 5f_{-1} + 4f_{-2} - f_{-3}}{h^2}$$

$$(15) \quad f^{(3)}(x_0) \approx \frac{5f_0 - 18f_{-1} + 24f_{-2} - 14f_{-3} + 3f_{-4}}{2h^3}$$

$$(16) \quad f^{(4)}(x_0) \approx \frac{3f_0 - 14f_{-1} + 26f_{-2} - 24f_{-3} + 11f_{-4} - 2f_{-5}}{h^4}$$

$$f_k = f(x_0 + kh); \quad k = -5, -4, -3, -2, -1, 0$$

Fórmulas de Diferencias Progresivas y Regresivas

Fórmulas de Diferencias Regresivas de orden $O(h^2)$

$$(13) \quad f'(x_0) \approx \frac{3f_0 - 4f_{-1} + f_{-2}}{2h}$$

$$(14) \quad f''(x_0) \approx \frac{2f_0 - 5f_{-1} + 4f_{-2} - f_{-3}}{h^2}$$

$$(15) \quad f^{(3)}(x_0) \approx \frac{5f_0 - 18f_{-1} + 24f_{-2} - 14f_{-3} + 3f_{-4}}{2h^3}$$

$$(16) \quad f^{(4)}(x_0) \approx \frac{3f_0 - 14f_{-1} + 26f_{-2} - 24f_{-3} + 11f_{-4} - 2f_{-5}}{h^4}$$

$$f_k = f(x_0 + kh); \quad k = -5, -4, -3, -2, -1, 0$$

Fórmulas de Diferencias Progresivas y Regresivas

Fórmulas de Diferencias Regresivas de orden $O(h^2)$

$$(13) \quad f'(x_0) \approx \frac{3f_0 - 4f_{-1} + f_{-2}}{2h}$$

$$(14) \quad f''(x_0) \approx \frac{2f_0 - 5f_{-1} + 4f_{-2} - f_{-3}}{h^2}$$

$$(15) \quad f^{(3)}(x_0) \approx \frac{5f_0 - 18f_{-1} + 24f_{-2} - 14f_{-3} + 3f_{-4}}{2h^3}$$

$$(16) \quad f^{(4)}(x_0) \approx \frac{3f_0 - 14f_{-1} + 26f_{-2} - 24f_{-3} + 11f_{-4} - 2f_{-5}}{h^4}$$

$$f_k = f(x_0 + kh); \quad k = -5, -4, -3, -2, -1, 0$$

Fórmulas de Diferencias Progresivas y Regresivas

Fórmulas de Diferencias Regresivas de orden $O(h^2)$

$$(13) \quad f'(x_0) \approx \frac{3f_0 - 4f_{-1} + f_{-2}}{2h}$$

$$(14) \quad f''(x_0) \approx \frac{2f_0 - 5f_{-1} + 4f_{-2} - f_{-3}}{h^2}$$

$$(15) \quad f^{(3)}(x_0) \approx \frac{5f_0 - 18f_{-1} + 24f_{-2} - 14f_{-3} + 3f_{-4}}{2h^3}$$

$$(16) \quad f^{(4)}(x_0) \approx \frac{3f_0 - 14f_{-1} + 26f_{-2} - 24f_{-3} + 11f_{-4} - 2f_{-5}}{h^4}$$

$$f_k = f(x_0 + kh); \quad k = -5, -4, -3, -2, -1, 0$$

Contenido

1 Preliminares

- Introducción

2 Métodos de Derivación Numérica

- El Límite del Cociente Incremental
- Fórmulas de Diferencias Centradas
- Fórmulas de Diferencias Progresivas y Regresivas
- Derivada del Polinomio Interpolador de Newton

Derivada del Polinomio Interpolador de Newton

- Se mostrará la relación que existe entre las fórmulas de orden $O(h^2)$ para aproximar $f'(x)$ y un algoritmo general que permite calcular derivadas numéricamente.

Derivada del Polinomio Interpolador de Newton

Recordar que el Polinomio Interpolador de Newton (PIN) $P(t)$ de grado $N = 2$ que aproxima $f(t)$ usando los nodos t_0, t_1 y t_2 , viene dado por

$$P(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)(t - t_1), \quad (1)$$

siendo

$$\begin{aligned} a_0 &= f(t_0) \\ a_1 &= \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0} \\ a_2 &= \frac{\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} - \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}}{t_2 - t_0} \end{aligned}$$

Derivada del Polinomio Interpolador de Newton

La derivada de $P(t)$ es

$$P'(t) = a_1 + [a_2(t - t_1) + a_2(t - t_0)] = a_1 + a_2 [(t - t_1) + (t - t_0)] \quad (2)$$

que evaluada en $t = t_0$, produce

$$P'(t_0) = a_1 + a_2(t_0 - t_1) \approx f'(t_0). \quad (3)$$

En (a), (b) y (c) no hace falta que los nodos $\{t_k\}$ estén equiespaciados. Ordenando los nodos de maneras distintas obtendremos fórmulas de aproximación a $f'(x)$ distintas.

Derivada del Polinomio Interpolador de Newton

Caso 1:

Si $t_0 = x$, $t_1 = x + h$, $t_2 = x + 2h$, entonces

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\a_2 &= \frac{\frac{f(x+2h) - f(x+h)}{h} - \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}{2h} = \frac{f(x) - 2f(x+h) + f(x+2h)}{2h^2}\end{aligned}$$

Derivada del Polinomio Interpolador de Newton

y al sustituir estos valores en (c), obtenemos

$$\begin{aligned}P'(x) &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{(-h)[f(x) - 2f(x+h) + f(x+2h)]}{2h^2} \\&= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{-f(x) + 2f(x+h) - f(x+2h)}{2h} \\&= \frac{2f(x+h) - 2f(x) - f(x) + 2f(x+h) - f(x+2h)}{2h} \\&= \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h} \approx f'(x),\end{aligned}$$

que es la fórmula (9).

Derivada del Polinomio Interpolador de Newton

Caso 2:

Si $t_0 = x$, $t_1 = x + h$, $t_2 = x - h$, entonces

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\a_2 &= \frac{\frac{f(x-h) - f(x+h)}{-2h} - \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}{-h} = \frac{\frac{f(x-h) - f(x+h) + 2f(x+h) - 2f(x)}{-2h}}{-h} \\&= \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{2h^2}\end{aligned}$$

Derivada del Polinomio Interpolador de Newton

y al sustituir estos valores en (c), obtenemos

$$\begin{aligned}P'(x) &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{-f(x+h) + 2f(x) - f(x-h)}{2h} \\&= \frac{2f(x+h) - 2f(x) - f(x+h) + 2f(x) - f(x-h)}{2h} \\&= \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \approx f'(x),\end{aligned}$$

que es la fórmula (1).

Derivada del Polinomio Interpolador de Newton

Caso 3:

Si $t_0 = x$, $t_1 = x - h$, $t_2 = x - 2h$, entonces

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \\
 a_2 &= \frac{\frac{f(x-2h) - f(x-h)}{-h} - \frac{f(x) - f(x-h)}{h}}{-2h} = \frac{-f(x-h) + f(x-2h) + f(x) - f(x-h)}{-2h} \\
 &= \frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{2h^2}
 \end{aligned}$$

Derivada del Polinomio Interpolador de Newton

y al sustituir estos valores en (c), obtenemos

$$\begin{aligned}
 P'(x) &= \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{2h} \\
 &= \frac{2f(x) - 2f(x-h) + f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{2h} \\
 &= \frac{3f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{2h} \approx f'(x),
 \end{aligned}$$

que es la fórmula (13).

Derivada del Polinomio Interpolador de Newton

Generalización:

El Polinomio Interpolador de Newton (PIN) $P(t)$ de grado N que aproxima $f(t)$ usando los nodos t_0, t_1, \dots, t_N viene dado por

$$P(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)(t - t_1) + a_3(t - t_0)(t - t_1)(t - t_2) + \dots + a_N(t - t_0) \dots (t - t_{N-1}).$$

La derivada de $P(t)$ es

$$P'(t) = a_1 + a_2 [(t - t_0) + (t - t_1)] + a_3 [(t - t_0)(t - t_1) + (t - t_0)(t - t_2) + (t - t_1)(t - t_2)] + \dots + a_N \sum_{k=0}^{N-1} \prod_{j=0, j \neq k}^{N-1} (t - t_j) \text{ para } j \neq k.$$

Derivada del Polinomio Interpolador de Newton

Evaluando $P'(t)$ en $t = t_0$,

$$\begin{aligned} P'(t_0) &= a_1 + a_2(t_0 - t_1) + a_3(t_0 - t_1)(t_0 - t_2) + \dots \\ &\quad + a_N(t_0 - t_1)(t_0 - t_2)(t_0 - t_3) \dots (t_0 - t_{N-1}) \simeq f'(t_0). \end{aligned} \quad (4)$$

Si

$$|t_0 - t_1| \leq |t_0 - t_2| \leq \dots \leq |t_0 - t_N|$$

y si $\{t_j\}_{j=0}^N$ es un conjunto equiespaciado (quizá reordenándolos) de $N + 1$ nodos, entonces la suma parcial N-ésima de (*) es una aproximación a $f'(t_0)$ de orden $O(h^N)$.

Bibliografía



MATHEWS, John; KURTIS, Fink.
Métodos Numéricos con MATLAB.
Prentice Hall, 2000.