Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет математики

Никитин Давид Сергеевич

Исследование сложного поведения обобщенного отображения Эно

Курсовая работа студента 2 курса
образовательной программы бакалавриата «Математика»

Научный руководитель:
Доцент
Станкевич Наталия Владимировна

Нижний Новгород 2022

Оглавление

Глава 1

Введение

Логистическое отображение - это уравнение вида:

$x_{n+1} = f(x_n)$.

То есть это отображение зависящее от предыдущего значения параметра. Например с его помощью изучают численность популяции. Также важно сказать об установившихся режим этих отображений, то есть точках в которых отображение либо перестает изменятся (неподвижная точка), либо переходит в цикл (когда динамика повторяется), либо переходит в хаос.

Если изменить какой-либо параметр внутри логистического отображения, то система может существенно измениться. Этим изменениям и соответствует бифуркация. Также появляется и определение аттрактора, как раз из-за изменений начальных данных и/или коэффициентов появляются новые отображения которые не пересекаются и являются уникальными.

В этой работе мы будем изучать отображение Эно, которое показывает нам как кардинально изменяется результат от изменения начальных условий.

Обобщенное отображение Эно:

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = z_n \\ z_{n+1} = Bx_n + Az_n + Cy_n - y_n^2 \end{cases}$$

Мы будем рассматривать двумерную проекцию трехмерного отображения Эно, то есть смотреть на проекцию отображения на плоскость XOY.

Глава 2

Вспомогательные определения

Для начала мы введем некоторые определения и пояснения, чтобы сделать анализ нашего отображения.

Представим ситуацию, когда последующая точка не изменяется относительно предыдущей, то есть $x_{n+1} = x_n$. Тогда эта точка x_0 называется неподвижной точкой. В нашем случае, чтобы найти точку уравнение нужно привести к ввиду: $x_0 = f(x_0)$. Эти точки могут быть устойчивыми и неустойчивыми. Чтобы определить их устойчивость нужно узнать какой мультипликатор у нашей системы.

2.1 Мультипликатор

Мультипликатор - это производная, вычисленная в неподвижной точке. В малой окрестности x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1} можно представить в виде $x_0 + \tilde{x}_{n+1}$, $y_0 + \tilde{y}_{n+1}$, $z_0 + \tilde{z}_{n+1}$, где $\tilde{x}_{n+1}, \tilde{y}_{n+1}, \tilde{z}_{n+1}$ - это малые добавления к x_0, y_0, z_0. Тогда $x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}$ можно записать так:

$$\begin{cases} \tilde{x}_{n+1} = f'_x \cdot \tilde{x}_n + f'_y \cdot \tilde{y}_n + f'_z \cdot \tilde{x}_z \\ \tilde{y}_{n+1} = g'_x \cdot \tilde{x}_n + g'_y \cdot \tilde{y}_n + g'_z \cdot \tilde{x}_z \\ \tilde{z}_{n+1} = v'_x \cdot \tilde{x}_n + v'_y \cdot \tilde{y}_n + v'_z \cdot \tilde{x}_z \end{cases}$$

То есть мы получили Якобиан третей степени:

$$M = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y & f'_z \\ g'_x & g'_y & g'_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \end{pmatrix}$$

Мультипликаторами отображения являются собственные числа матрицы M, они определяют характер устойчивости неподвижной точки и отвечают за бифуркации. Как мы видим размерность матрицы равен 3x3, поэтому уравнение для определения собственных чисел:

$det(M - \lambda \cdot E) = 0$, где E - единичная матрица размерности 3x3.

Матрица M имеет три собственных числа, и, соответственно, три мультипликатора. Поскольку уравнение для определения собственных чисел действительное, то все три мультипликатора могут быть либо действительными числами, либо один из них является действительным, а два оставшихся – комплексно-сопряженными. Таким образом, можно сформулировать критерий устойчивости: неподвижная точка будет устойчивой, если все мультипликаторы по модулю меньше единицы.

Уравнение $det(M - \lambda \cdot E) = 0$ примет вид: $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = 0$.

$\lambda^3 - S\lambda^2 + H\lambda - J = 0$

$$S = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$
$$H = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3.$$
$$C = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

Величины S, H, J и есть три инварианта матрицы возмущений (матрицы Якоби)

2.2 Условия бифуркаций

Далее рассмотрим условия бифуркаций трехмерного отображения. Первые три типа:

А) Бифуркация $\lambda = +1$ или Касательная бифуркация. Получаем формулу:

$H = J - 1 + S$

Б) Бифуркация $\lambda = -1$. Получаем такую формулу:

$H = -J - 1 - S$

В) Бифуркация Неймарка-Сакера. Условием этой бифуркации является об- ращение в единицу модуля двух комплексно-сопряженных мультипликаторов, так что $\lambda_1 = e^{i\theta}$, $\lambda_2 = e^{-i\theta}$.

Подставив эти значения в соотношения, получим уравнения, содержащие только третий мультипликатор и фазу

$\theta : S = 2cos\theta + \lambda_3, H = 2\lambda_3 3cos\theta + 1, J = \lambda_3.$

Исключая их, получаем условие бифуркации Неймарка-Сакера:

$H = SJ - J2 + 1$

Сейчас мы рассматривали бифуркацию коразмерности один. Теперь рассмотрим бифуркации коразмерности два, то есть будем рассматривать одновременно два мультипликатора.

Г) Резонанс 1:1 R1. Для этой бифуркации два мультиплкторы будут равны $\lambda_1 = +1$ и $\lambda_2 = +1$. Подставляя эти соотношения и убирая третий мультипликатор, мы получим такую формулу:

$S = J + 2$

$H = 2J + 1$

Д)Резонанс 1:2 R2. Теперь нашем условием будет $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = -1$. Аналогично подставляем и получаем:

$S = J - 2$

$H = -2J + 1$

Е) Бифуркация fold-flip ff. Для этой бифуркации $\lambda_1 = +1$, $\lambda_2 = -1$, так что следует:

$S = -J$

$H = -1$

Теперь рассмотрим случаи когда два мультипликаторы комплексные и один действительный. Бифуркация Неймарка-Сакера связана с комплексно-сопряженными мультипликаторами, лежащими на единичной окружности: $\lambda_1 = e^{i\theta}$, $\lambda_2 = e^{-i\theta}$. В трехмерной системе появляется дополнительное условие устойчивости, связанное с третьим мультипликатором: $-1 < \lambda_3 < 1$.

Таким образом, возможны новые бифуркации коразмерности два, когда одновременно выполняются условие бифуркации Неймарка-Сакера и условие обращения в +1 или –1 третьего мультипликатора. В соответствии с этими условиями, новые бифуркации носят названия фолд-Неймарк-Сакер (fold-Neimark-Saker) и флип-Неймарк-Сакер (flip-Neimark-Saker).

Для того чтобы найти эти соотношения, приравняем $J = +1$ и $J = -1$, чтобы выполнилось условие:

Ж)fold-NS:

$H = S$

$J = 1$

З)fold-NS:

$H = S$

$J = 1$

Глава 3

Аналитическое исследование

Для нашего отображения Эно

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = z_n \\ z_{n+1} = Bx_n + Az_n + Cy_n - y_n^2 \end{cases}$$

найдем неподвижную точку, мультипликатор все возможные бифуркации.

3.1 Неподвижная точка

Приравняем x_{n+1} и x_n к x_0, по определению неподвижной точки. Тогда получим:

$$\begin{cases} x_0 = y_0 \\ y_0 = z_0 \\ z_0 = Bx_0 + Az_0 + Cy_0 - y_0^2 \end{cases}$$

$x_0 = y_0 = z_0 = Bx_0 + Az_0 + Cy_0 - y_0^2$
$x_0 = Bx_0 + Ax_0 + Cx_0 - x_0^2$
$x_0 - (B + A + C - x_0) \cdot x_0 = 0$
$(1 - B - A - C + x_0) \cdot x_0 = 0$

$$\begin{cases} x_0 = y_0 = z_0 \\ x_0 = 0 \\ x_0 = A + B + C - 1 \end{cases}$$

Тогда мы получаем две неподвижные точки $(0, 0, 0)$ и $(A+B+C-1, A+B+C-1, A+B+C-1)$.

3.2 Мультипликатор

$$M = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y & f'_z \\ g'_x & g'_y & g'_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ B & C - 2y_0 & A \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ B & C-2y_0 & A-\lambda \end{vmatrix} = det(M - \lambda \cdot E) = 0$$

$\lambda^2(A-\lambda) + (C-2y_0)\lambda + B = 0$

$\lambda^3 - A\lambda^2 - (C-2y_0)\lambda - B = 0$

Теперь мы можем сказать чему равен S,H и J:

$S = A$

$H = -C + 2y_0$

$J = B$

3.3 Бифуркации

Теперь, когда мы знаем параметры S,H,J из матрицы M, мы можем найти все условия бифуркаций.

А) Бифуркация $\lambda = +1$ или Касательная бифуркация.

$-C + 2y_0 = B - 1 + A$

Б) Бифуркация $\lambda = -1$.

$-C + 2y_0 = -B - 1 - A$

В) Бифуркация Неймарка-Сакера.

$-C + 2y_0 = AB - B^2 + 1$

Г) Резонанс 1:1 R1.

$A = B + 2$

$-C + 2y_0 = 2B + 1$

Д)Резонанс 1:2 R2.

$A = B - 2$

$-C + 2y_0 = -2B + 1$

Е) Бифуркация fold-flip ff.

$A = -B$

$-C + 2y_0 = -1$

Ж)fold-NS:

$-C + 2y_0 = A$

$B = 1$

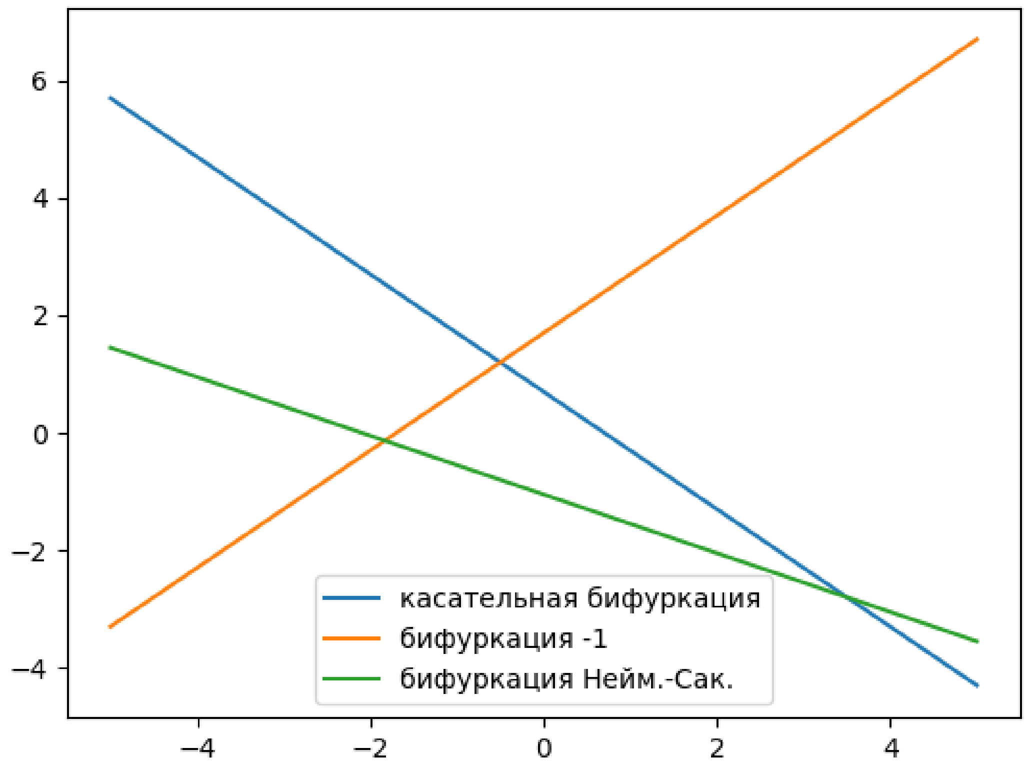
З)fold-NS:

$-C + 2y_0 = A$

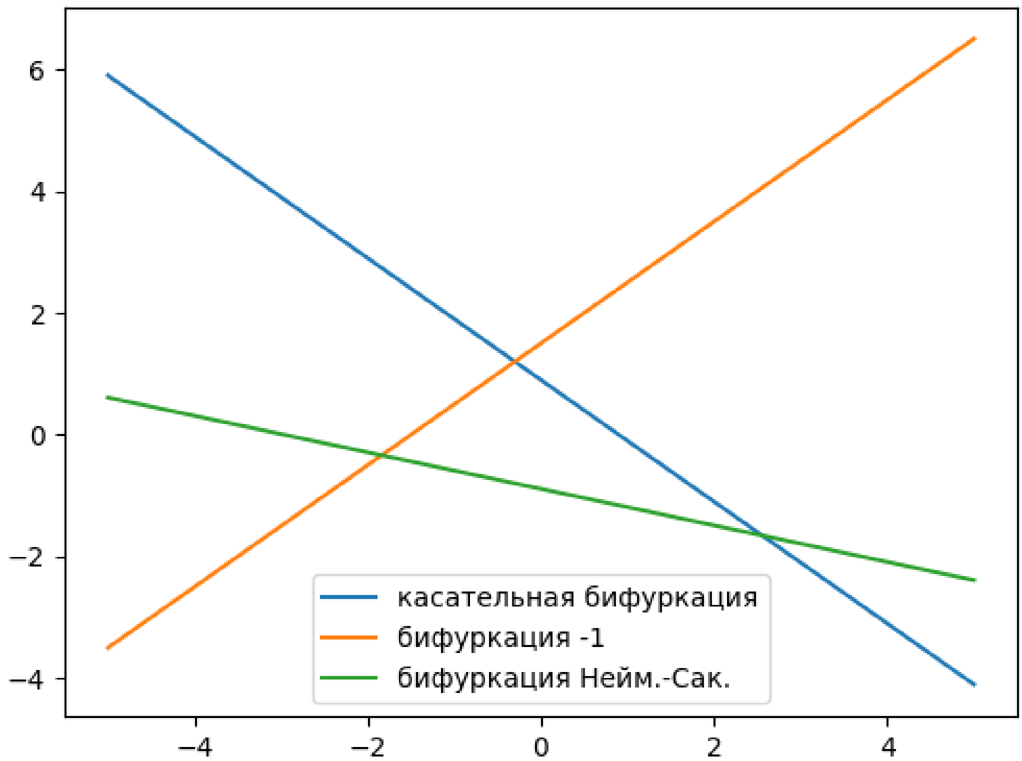
$B = 1$

3.3.1 Треугольник устойчивости

Узнав параметры уравнения условий бифуркаций, мы можем построить треугольник устойчивости, в котором неподвижная точка будет устойчива.


касательная бифуркация
бифуркация -1
бифуркация Нейм.-Сак.
6
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4

B = 0,5


касательная бифуркация
бифуркация -1
бифуркация Нейм.-Сак.
6
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4

B = 0,3

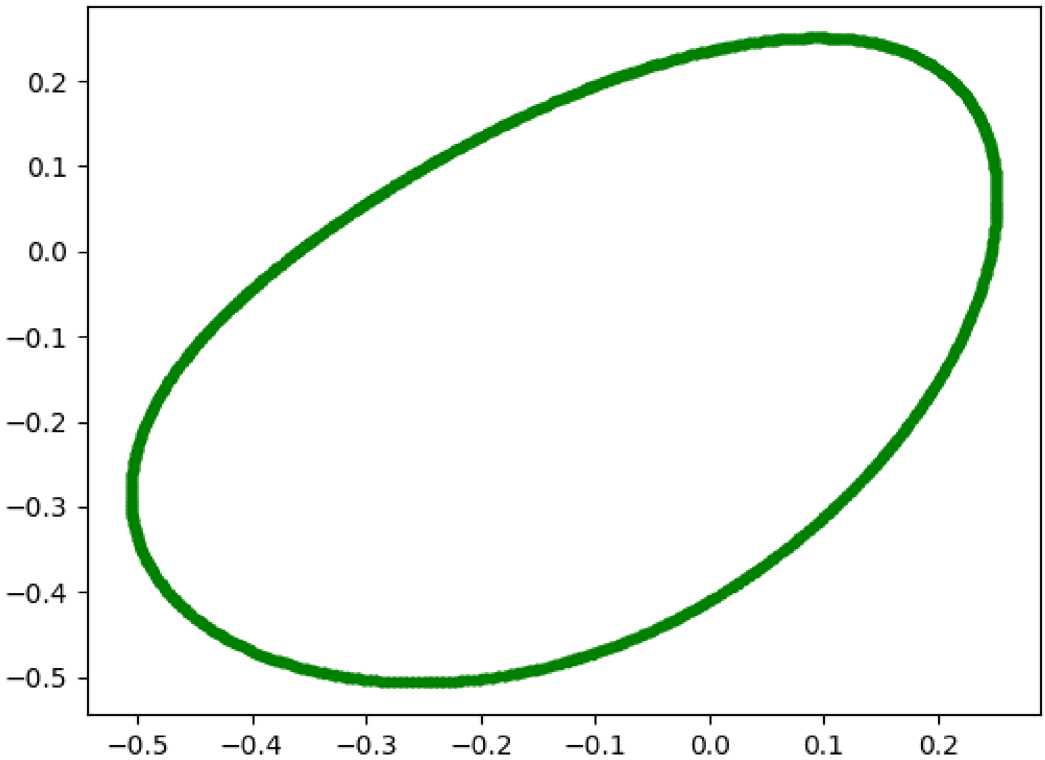
Глава 4

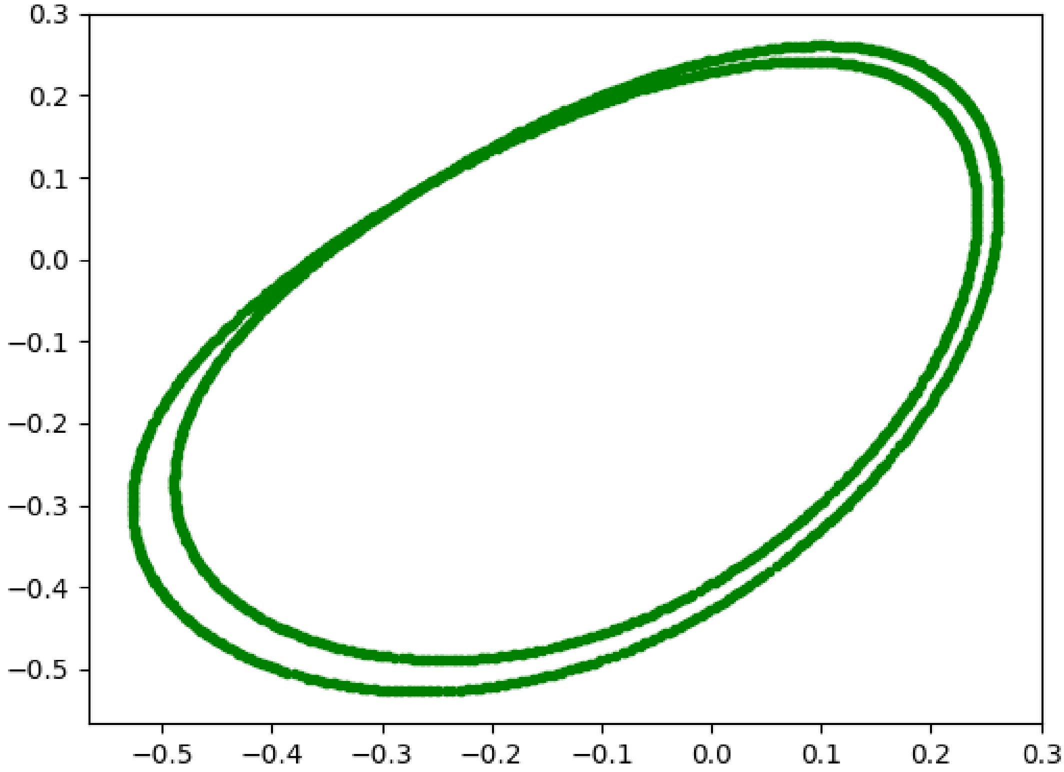
Анализ отображения

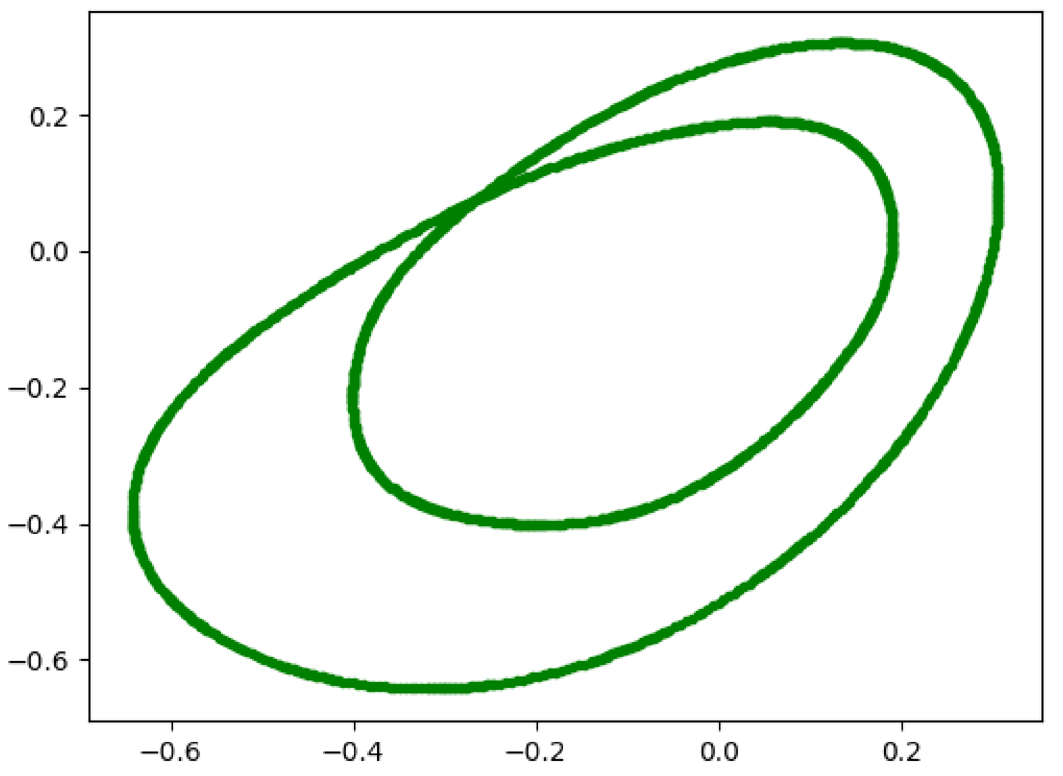
Для того чтобы найти наше отображение Эно, был использован язык программирования Python. С его помощью можно разглядеть как выглядет отображение на плоскости XOY. Данный код:

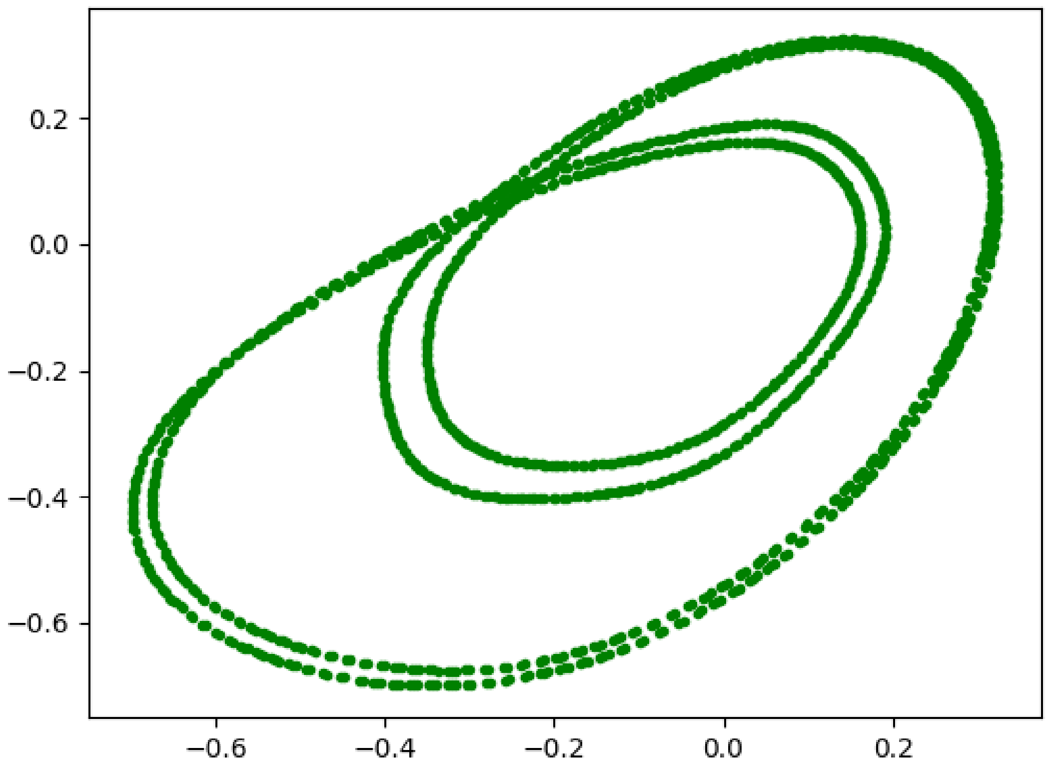
```
import matplotlib.pyplot as plt
a=1.43
b=0.5
c=-1.761

x0=0.1
y0=0.2
z0=0.3

x=0
y=0
z=0

fx=[]
fy=[]
fz=[]


n=2000

for i in range(n):
  z=b*x0+a*z0+c*y0-y0**2
  x=y0
  y=z0

  z0=z
  x0=x
  y0=y

for i in range(n):
  z=b*x0+a*z0+c*y0-y0**2
  x=y0
```

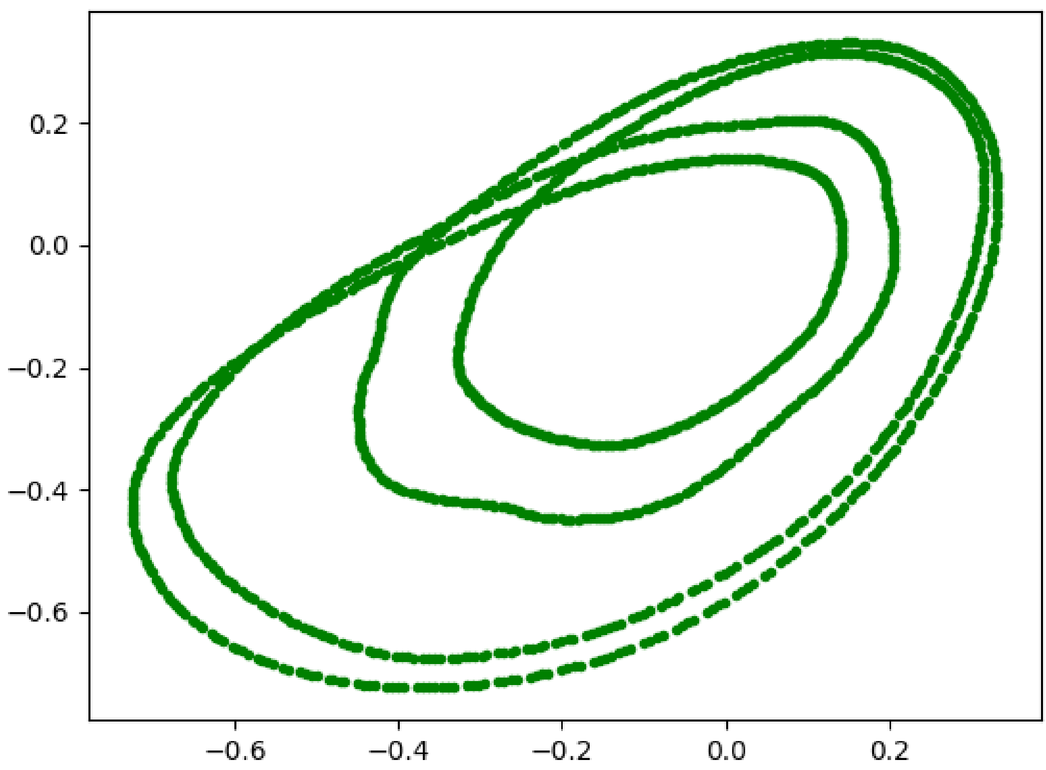
```
  y=z0

  z0=z
  x0=x
  y0=y

  fz.append(z0)
  fx.append(x0)
  fy.append(y0)

fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(fx,fy,'g.');
```

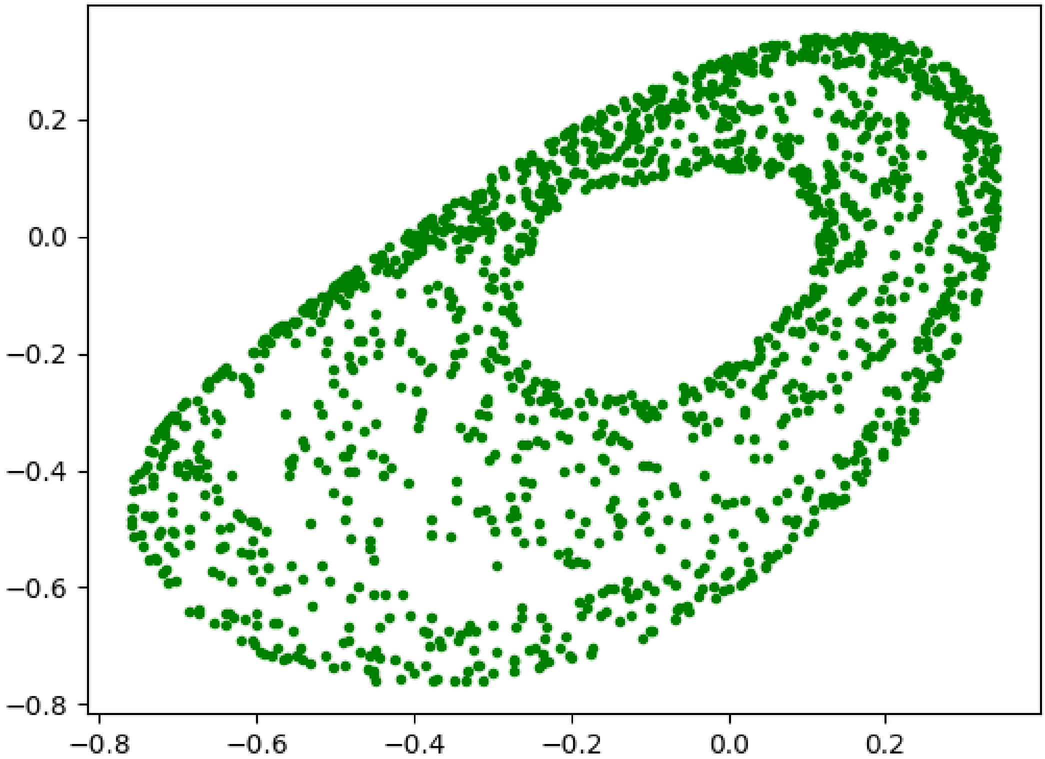



0.3
0.2
0.1
0.0
−0.1
−0.2
−0.3
−0.4
−0.5
−0.5
−0.4
−0.3
−0.2
−0.1
0.0
0.1
0.2
0.3


0.2
0.0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.6
−0.4
−0.2
0.0
0.2


0.2
0.0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.6
−0.4
−0.2
0.0
0.2


0.2
0.0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.6
−0.4
−0.2
0.0
0.2



На выше перечисленных рисунках мы можем видеть как изменяется наше отображение при изменение параметра C. На первом рисунке мы видим что появляется всего лишь окружность, но на втором при изменение всего лишь на 0.02 появилось удвоение инвариантной кривой. Далее цикл бифуркации увеличивается, а после пятой картинки можно заметить что происходит хаос.

Глава 5

Заключение

В данной работе была рассмотрена задача сложного обобщенного отображения Эно. Мы нашли неподвижные точки, мультипликаторы и все виды условий бифуркаций. Также мы нашли треугольник устойчивости на двух разных сечениях плоскости B. Внутри этого треугольника неподвижные точки являются устойчивыми.

Литература

[1] Shykhmamedov A., Karatetskaya E., Kazakov A., Stankevich N.V. Scenarios for creation of hyperchaotic attractors in 3D maps. Nonlinearity 36 №7, 2023, С. 3501

[2] Кузнецов А.П., Савин А.В., Седова Ю.В., Тюрюкина Л.В. Бифуркации отображений – Саратов: ООО Издательский центр «Наука», 2012, 196 с.

[3] А. С. Гонченко, С. В. Гонченко, Л. П. Шильников, К вопросу о сценариях возникновения хаоса у трехмерных отображений, Нелинейная динам., 2012, том 8, номер 1, 3–28