

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ

**Никитин Давид Сергеевич**

## **Удвоения инвариантных кривых и хаос в трехмерном отображении**

Курсовая работа студента 3 курса  
образовательной программы бакалавриата «Математика»

Научный руководитель:  
Доцент  
Станкевич Наталия Владимировна

Нижний Новгород 2023

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Объект исследования</b>	<b>4</b>
2.1	Отображение . . . . .	4
2.2	Неподвижная точка . . . . .	4
2.3	Анализ устойчивости . . . . .	5
2.4	Бифуркация Неймарка-Сакера . . . . .	5
2.5	Треугольник устойчивости . . . . .	6
2.6	Бифуркационное дерево . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Каскад удвоения инвариантной кривой и её разрушение</b>	<b>11</b>
<b>4</b>	<b>Заключение</b>	<b>15</b>

# Глава 1

## Введение

В данной работе мы будем рассматривать удвоения инвариантных кривых и хаос в трехмерном отображении.

У динамических систем существует сложное или хаотическое поведение, когда появляются сложные структуры и непредсказуемые изменения в системе. Оно зависит от неустойчивости системы, чувствительности от параметров. Моделью поведения системы является сценарий хаоса, который показывает хаотическое изменение ее параметров. Причины возникновения этих изменений может зависеть например от случайного изменения параметров системы.

Фазовым портретом является графическое изображение всех возможных траекторий движения системы в фазовом пространстве. Для построения фазовых портретов динамических систем используются инвариантные кривые. Если система имеет инвариантную кривую, то эта кривая будет являться одним из элементов фазового портрета. Инвариантная кривая - это кривая, которая остается на месте при движении по фазовому пространству динамической системы. Это означает, что если мы начнем движение по фазовому пространству с точки на этой кривой, то при каждом шаге движения мы будем оставаться на этой же кривой.

Когда инвариантная кривая, построенная для описания поведения системы, перестает быть справедливой в новых условиях и начинает изменяться, то этот процесс называется ее разрушением. Это может произойти из-за изменения параметров системы. Разрушение инвариантной кривой может привести к непредсказуемому поведению системы и затруднить ее управление.

Поэтому удвоение инвариантных кривых и хаос является важным понятием для динамической системы. Удвоение означает, что инвариантная кривая, которая ранее была единственным устойчивым состоянием системы, становится неустойчивой и распадается на две новые инвариантные кривые. Далее этот процесс может привести к хаосу в системе, поскольку каждая из новых кривых может иметь свои собственные траектории движения. В этой системе удвоение происходит, когда параметр, управляющий системой, достигает определенного значения. Это приводит к тому, что один из потоков системы становится нестабильным и распадается на два новых потока. Каждый из этих потоков может иметь свою собственную траекторию движения, что приводит к хаосу.

## Глава 2

# Объект исследования

### 2.1 Отображение

Давайте рассмотрим динамическую систему и изучим ее бифуркационные деревья при одном фиксированном параметре и при изменении других параметров. Нашим отображение является обобщенное отображение Эно:

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = z_n \\ z_{n+1} = Bx_n + Az_n + Cy_n - y_n^2 \end{cases}$$

### 2.2 Неподвижная точка

Для начала найдем неподвижные точки нашего отображения, то есть те точки которые не изменяются относительно предыдущей.

$$\begin{cases} x_0 = y_0 \\ y_0 = z_0 \\ z_0 = Bx_0 + Az_0 + Cy_0 - y_0^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_0 = y_0 = z_0 &= Bx_0 + Az_0 + Cy_0 - y_0^2 \\ x_0 &= Bx_0 + Ax_0 + Cx_0 - x_0^2 \\ x_0 - (B + A + C - x_0) \cdot x_0 &= 0 \\ (1 - B - A - C + x_0) \cdot x_0 &= 0 \end{aligned} \quad .$$

$$\begin{cases} x_0 = y_0 = z_0 \\ x_0 = 0 \\ x_0 = A + B + C - 1 \end{cases}$$

Тогда мы получаем две неподвижные точки  $(0, 0, 0)$  и  $(A + B + C - 1, A + B + C - 1, A + B + C - 1)$ .

## 2.3 Анализ устойчивости

Теперь найдем мультипликатор нашего отображения. Мы знаем, что  $M = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y & f'_z \\ g'_x & g'_y & g'_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \end{pmatrix}$

Теперь подставим все значения.  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ B & C - 2y_0 & A \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ B & C - 2y_0 & A - \lambda \end{vmatrix} = \det(M - \lambda \cdot E) = 0. \text{ Найдем определитель нашей матрицы:}$$

$$\begin{aligned} \lambda^2(A - \lambda) + (C - 2y_0)\lambda + B &= 0 \\ \lambda^3 - A\lambda^2 - (C - 2y_0)\lambda - B &= 0 \end{aligned}$$

Уравнение  $\det(M - \lambda \cdot E) = 0$  примет вид:  $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = 0$ .  
 $\lambda^3 - S\lambda^2 + H\lambda - J = 0$

И поэтому теперь мы можем сказать чему равен S, H и J:

$$\begin{aligned} S &= A \\ H &= -C + 2y_0 \\ J &= B \end{aligned}$$

Мы знаем чему равны условия бифуркации.

А) Бифуркация  $\lambda = +1$  или Касательная бифуркация:  $H = J - 1 + S$

Б) Бифуркация  $\lambda = -1$ :  $H = -J - 1 - S$

В) Бифуркация Неймарка-Сакера:  $H = SJ - J^2 + 1$

Зная чему равны S, H, J мы можем найти эти условия.

А)  $-C + 2y_0 = B - 1 + A$

Б)  $-C + 2y_0 = -B - 1 - A$

В)  $-C + 2y_0 = AB - B^2 + 1$

## 2.4 Бифуркация Неймарка-Сакера

Бифуркация Неймарка-Сакера является одной из наиболее важных бифуркация, при которой рождается в фазовом пространстве инвариантный тор. Наличие такой бифуркации отвечает за возникновение квазипериодических колебаний. Условием бифуркации является обращение в единицу модуля двух комплексно-сопряженных мультипликаторов:  $\lambda_1 = e^{i\theta}$ ,  $\lambda_2 = e^{-i\theta}$ .

Подставив эти значения в соотношения

$$\begin{aligned} S &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ H &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3. \\ C &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \end{aligned}$$

, получим уравнения, содержащие только третий мультипликатор и фазу  $\theta$ :

$$S = 2\cos\theta + \lambda_3, H = 2\lambda_3\cos\theta + 1, J = \lambda_3.$$

Исключая их, получаем условие бифуркации Неймарка-Сакера:  $H = SJ - J^2 + 1$

В нашем случае:  $-C + 2y_0 = AB - B^2 + 1$

## 2.5 Треугольник устойчивости

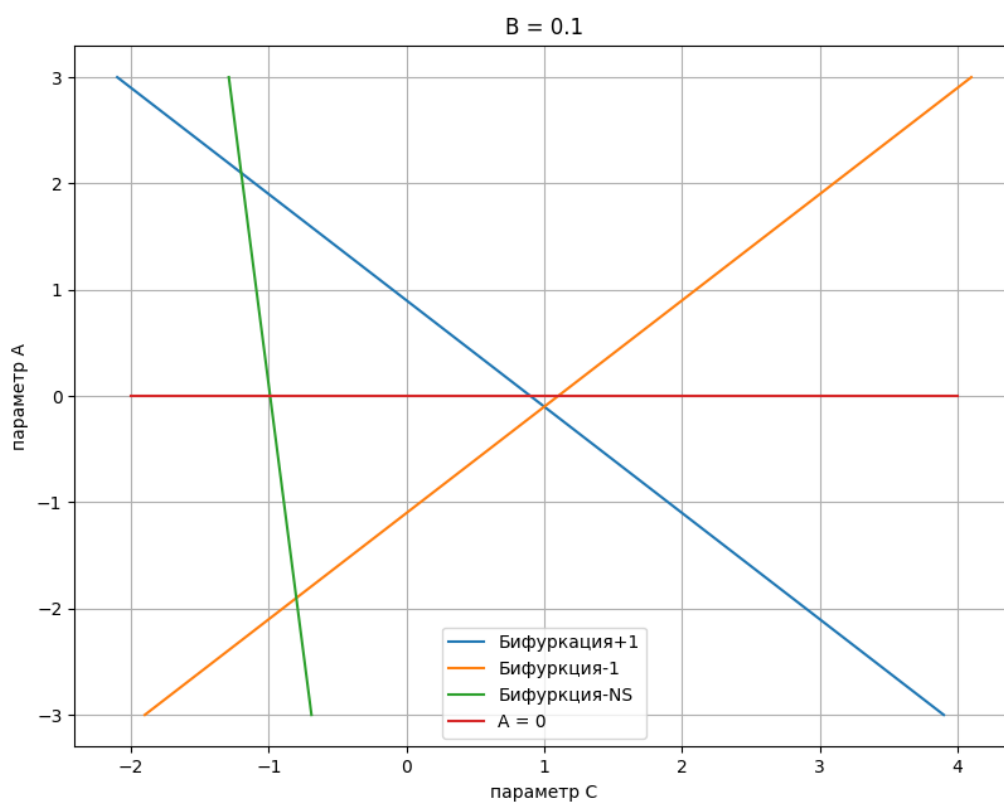
Пусть наши параметры равняются  $B = 0,1$ ; 1)  $A = 0$ ; 2)  $A = 0,1$ ; 3)  $A = 0,15$ . Одна из наших неподвижных точек была равна  $(0, 0, 0)$ . Следует подставить  $y_0 = 0$  в условия бифуркаций.

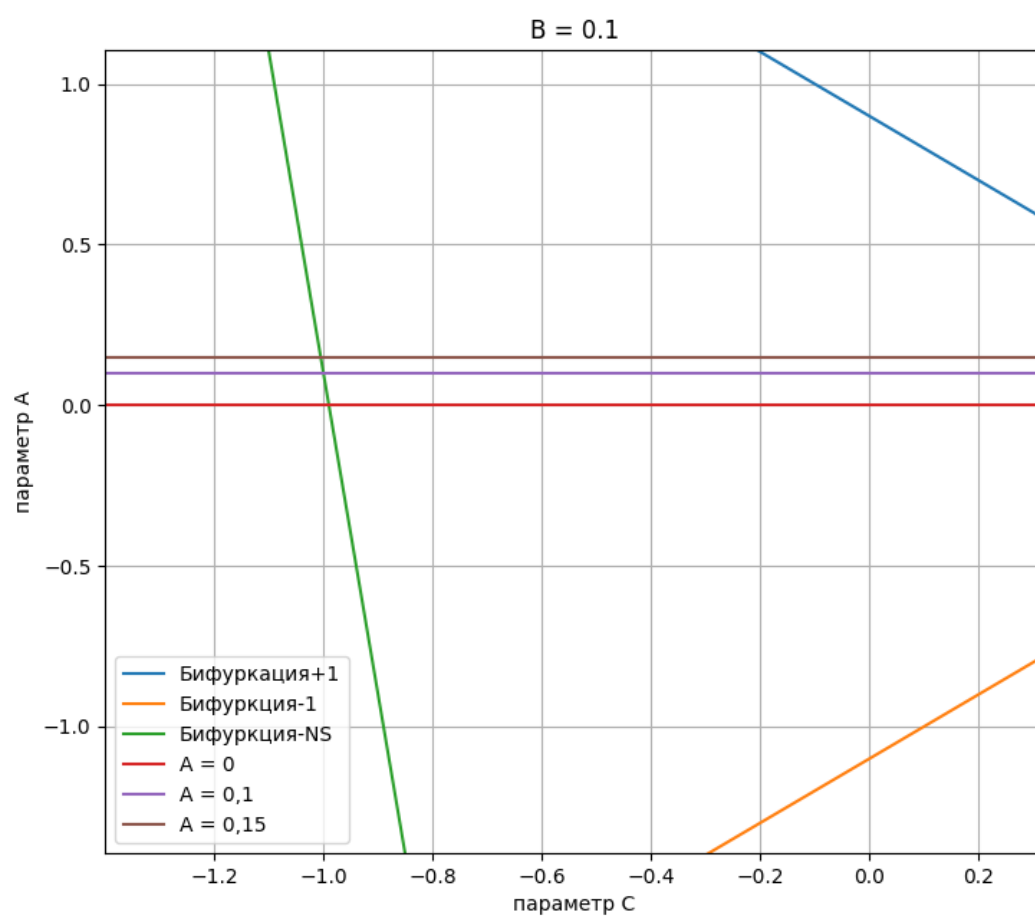
А)  $-C + 2y_0 = B - 1 + A$

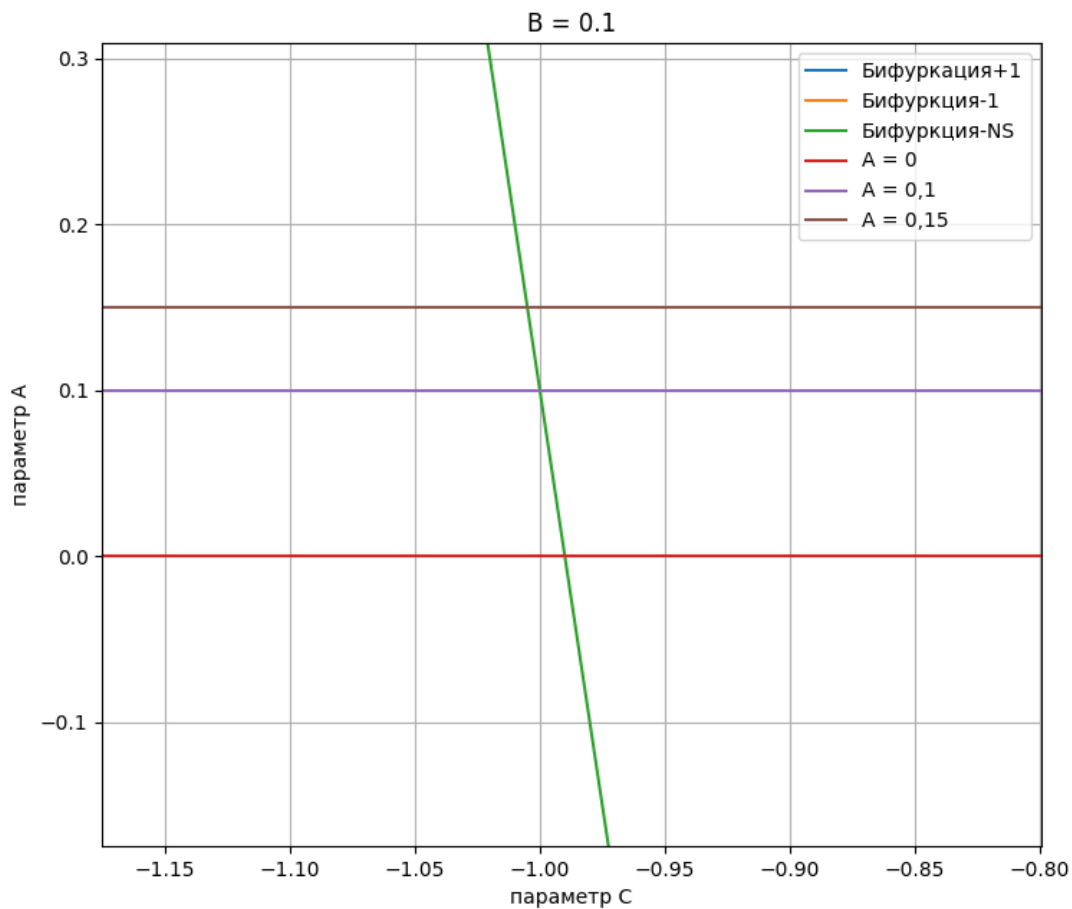
Б)  $-C + 2y_0 = -B - 1 - A$

В)  $-C + 2y_0 = AB - B^2 + 1$

Построим треугольник устойчивости, чтобы определить когда происходят бифуркации.







На последних двух графиках мы видим, когда происходит бифуркация Неймарка - Сакера при фиксированном параметре  $B = 0,1$ . При параметре  $A = 0$ , параметр  $C = -0,99$ . При параметре  $A = 0,1$ , параметр  $C = -1$ . И при параметре  $A = 0,15$ , параметр  $C = -1,005$ .

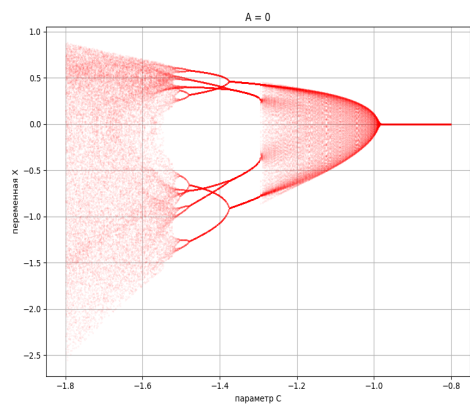
## 2.6 Бифуркационное дерево

Бифуркационное дерево служит характерной иллюстрацией возможных бифуркаций в системе, которая зависит от изменения динамической переменной на аттракторе.

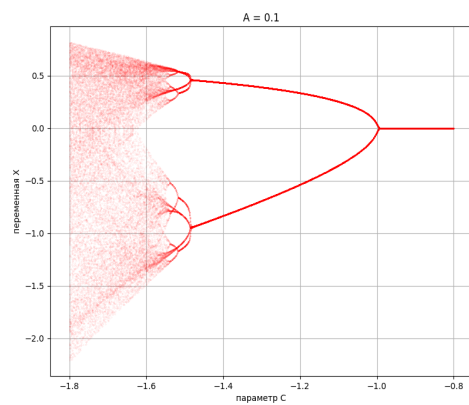
Теперь построим бифуркационные деревья при заданных параметрах  $A$ .

На этих рисунках мы можем видеть, что при данных параметрах  $C = -0,99$ ,  $C = -1$ ,  $C = -1,005$  происходит бифуркация Неймарка - Сакера соответственно с параметрами  $A = 0$ ,  $A = 0,1$ ,  $A = 0,15$ .

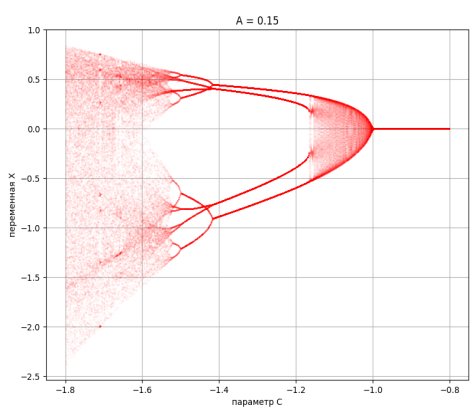




(a)

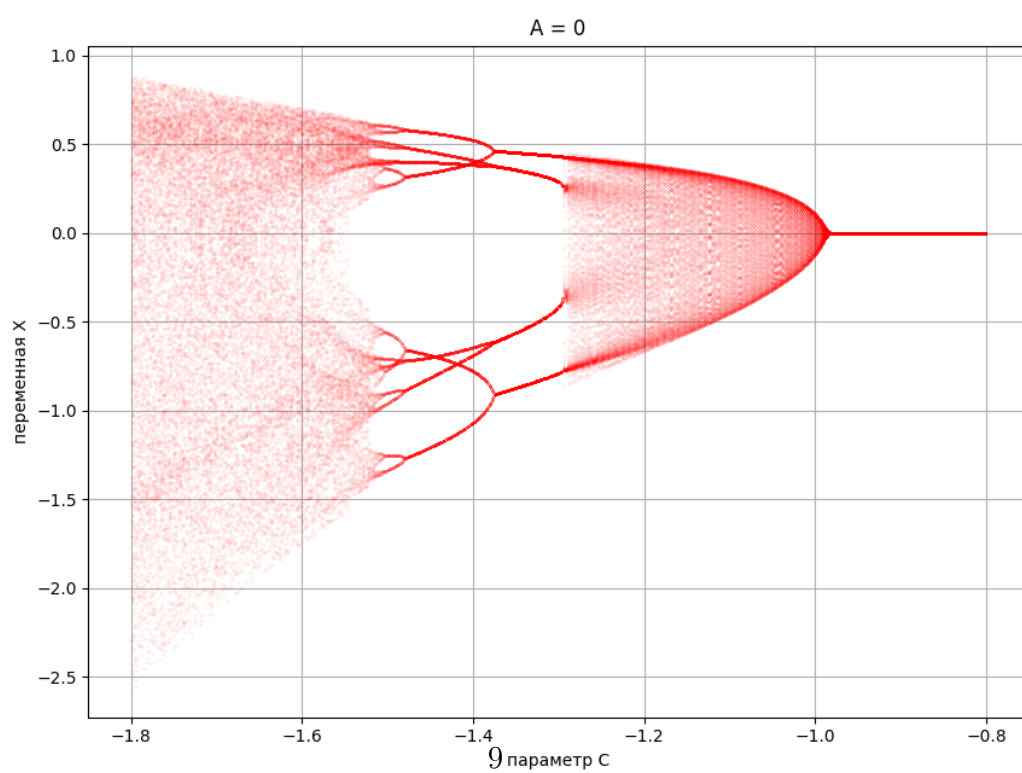


(b)



(c)

Рис. 2.1



Теперь, мы детально рассмотрим пример бифуркационного дерева при параметрах  $B = 0,1$  ,  $A = 0$  , когда происходят различные бифуркации и начинается хаос. Можно видеть следующую последовательность режимов. Сначала имеется неподвижная точка. Затем в результате бифуркации Неймарка - Сакера рождается квазипериодический режим при  $C = -0,99$  . Затем при  $C = -1,295$  инвариантная кривая разрушается и возникает синхронный режим периода 4. Затем в 4-цикл происходит удвоение периода при  $C = -1,375$  и она рождает цикл периода 8. При дальнейшем росте управляющего параметра возникает область хаоса.

## Глава 3

# Каскад удвоения инвариантной кривой и её разрушение

Давайте рассмотрим другую динамическую систему с другими параметрами. И детально изучим когда происходит каскад удвоения инвариантной кривой и когда происходит ее разрушение. Пусть наши параметры будут равны  $A = 1,55$ ,  $B = 0,7$ . Построим и для этой системы ее бифуркационное дерево.

Мы видим что бифуркация Неймарка-Сакера начинается приблизительно при параметре  $C = -1,59$ . Из устойчивого режима появляется гладкая инвариантная кривая. Далее приблизительно при параметре  $C = -1,89$  происходит каскад удвоения нашей кривой. Это хорошо видно на фазовых портретах.

На рисунке 3.1(а) мы видим что инвариантная кривая при  $C = -1,7$  гладкая. А уже на 3.1(б) при параметре  $C = -1,9$  кривая удвоилась. Это означает, что эта кривая претерпевает новую бифуркацию, которую называют бифуркацией удвоения инвариантной кривой. Эта бифуркация возможна только в трехмерных отображениях или в более высоких размерностях. Теперь найдем когда происходит разрушение нашей кривой, то есть когда начнется появляться хаос.

На рисунка 3.2(а) при параметре  $C = -1,941$  мы видим что начинается новое удвоение кривой, затем на (б) снова происходит удвоение кривой при  $C = -1,953$ .

Затем при дальнейшем увеличении нашего управляющего параметра  $C$  происходит эффект потери гладкости удвоенной инвариантной кривой, что приводит к зарождению хаоса.

На рисунке 3.3(а) инвариантная кривая уже перестала быть гладкой и начинает разрушаться. В (б) кривой видно что она нестабильна и в ней появляется хаос. Это означает, что в дальнейшем кривая уже не будет удваиваться, то есть каскадов инвариантной кривой всего конечное число.

Далее мы можем увидеть, что при последующих небольших увеличениях параметра аттрактор очень сильно изменяется и усложняет свою структуру, что иллюстрируют рисунки с  $C = -1,954$  по  $C = -1,96$

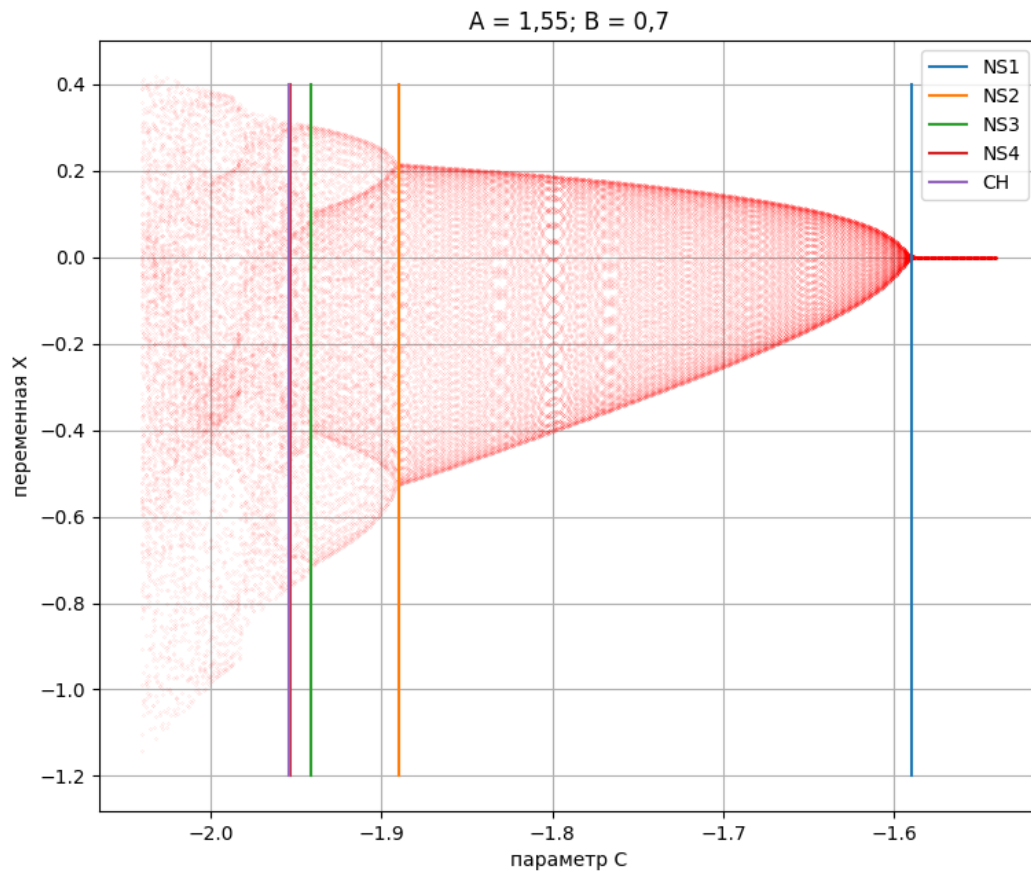


Рис. 3.1: бифуркационное дерево при  $A = 1,55$ ,  $B = 0,7$ ; NS1 - бифуркация Неймарка-Сакера, NS2 - первое удвоение инвариантной кривой, NS3 - второе удвоение кривой, NS4 - третье удвоение, CH - возникновение хаоса

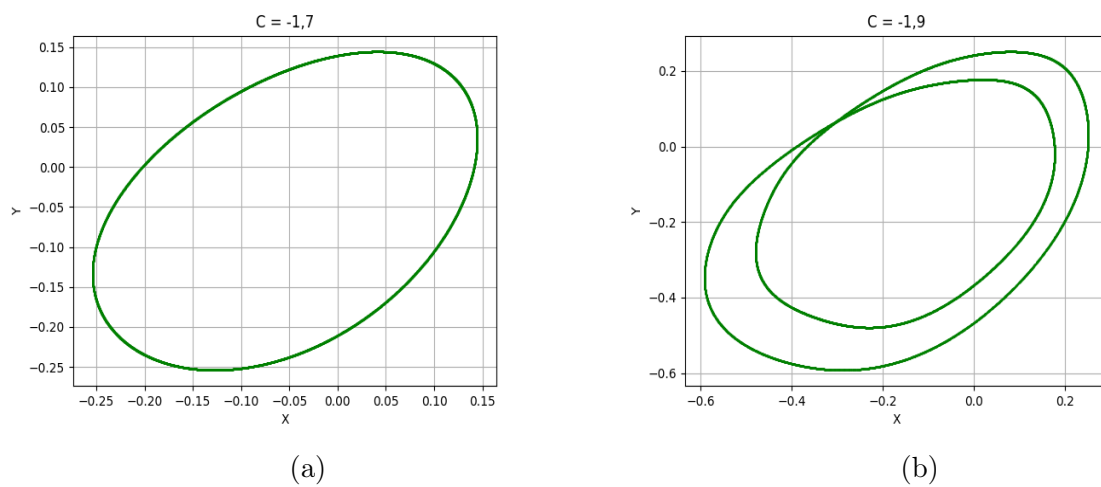
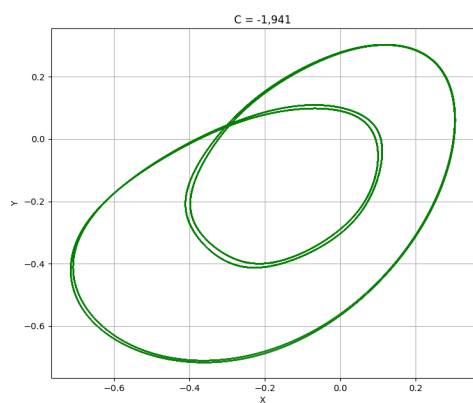
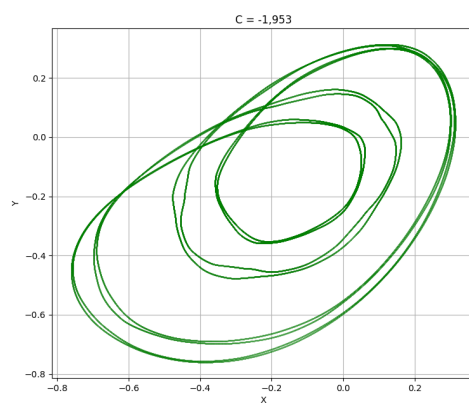


Рис. 3.2

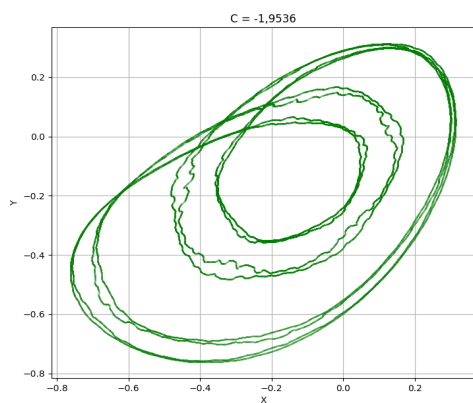


(a)

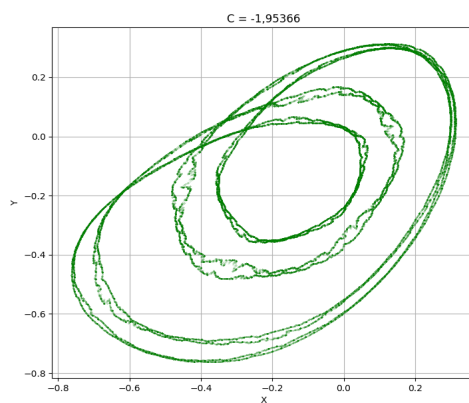


(b)

Рис. 3.3

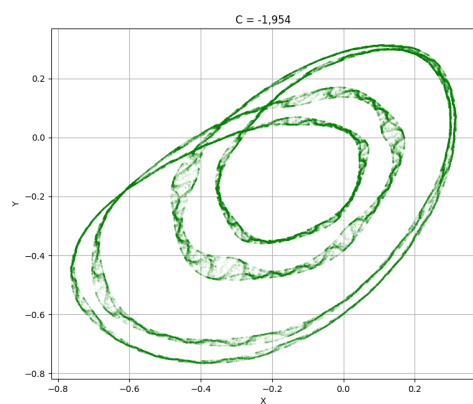


(a)

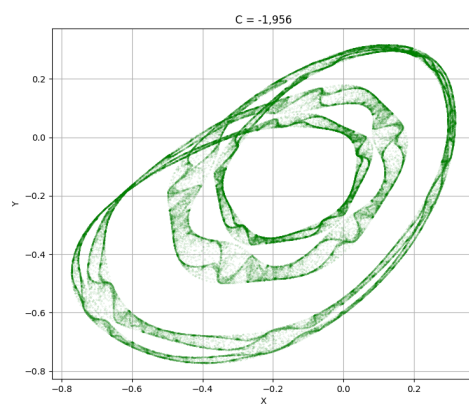


(b)

Рис. 3.4

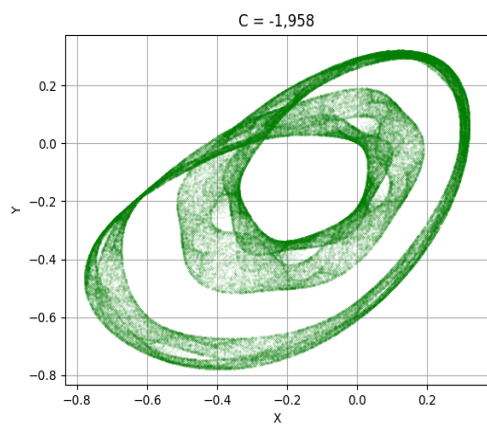


(a)

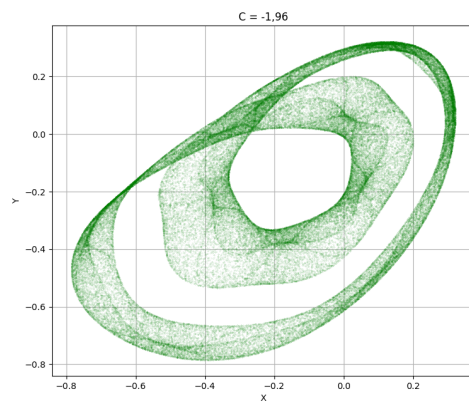


(b)

Рис. 3.5



(a)



(b)

Рис. 3.6

## Глава 4

### Заключение

Мы провели исследование удвоения инвариантных кривых и его хаоса в трехмерном отображении методом численного моделирования. Нашли при каких значениях параметров системы рождаются инвариантные кривые. Для этого сначала мы проанализировали ее устойчивость, нашли треугольник устойчивости, с помощью которого смогли найти, когда происходит бифуркация Неймарка-Сакера и соответственно найти появление инвариантной кривой. Также, построили бифуркационные деревья, на которых можно наглядно увидеть как изменяется система, и когда появляются различные бифуркации.

Далее мы построили бифуркационное дерево другой системы и также построили для него фазовые портреты при разных значений одного параметра. Мы увидели, как изменяется инвариантная кривая и как происходит ее удвоение. Но каскад удвоения инвариантной кривой не был бесконечным. Через какое-то изменения одного параметра инвариантная кривая начала разрушаться и переставала быть устойчивой, а затем произошел хаос. Это означает что у системы конечное число каскадов удвоения инвариантной кривой.

# Литература

- [1] Shykhmamedov A.1, Karatetskaia E.1, Kazakov A.1, Stankevich N.1,2. Hyperchaotic attractors of three-dimensional maps and scenarios of their appearance.
- [2] Кузнецов А.П., Савин А.В., Седова Ю.В., Тюрюкина Л.В. Бифуркации отображений – Саратов: ООО Издательский центр «Наука», 2012, 196 с.
- [3] А. С. Гонченко, С. В. Гонченко, Л. П. Шильников, К вопросу о сценариях возникновения хаоса у трехмерных отображений, Нелинейная динам., 2012, том 8, номер 1, 3–28