

Rapport de stage

SARRIA David

M2 Astrophysique, Science de l'Espace et Planétologie

Modélisation des cascades électromagnétiques dans le milieu intergalactique

Encadrant : Julien Malzac

Table des matières

1	Introduction	3
2	Modélisation des densités de photons	5
2.1	Modélisation de la densité du CMB	5
2.2	Modélisation de l'intensité de l'EBL	5
2.2.1	Conversion de λI_λ vers $n(e, z)$	6
2.2.2	Interpolation bilinéaire	8
3	Sections efficaces d'interaction et profondeurs optiques	8
3.1	Production de paire e^+ / e^- par interaction photon-photon	8
3.1.1	Calcul du taux d'interaction par unité de longueur $\frac{d\tau_{\gamma\gamma}}{dx}$	8
3.1.2	Développement de $\bar{\varphi}(s_0)$	9
3.2	Diffusion Compton	11
3.2.1	Calcul du taux d'interaction par unité de longueur	11
3.2.2	Développement	12
3.3	Calcul de la profondeur optique à partir des taux d'interaction	12
4	Calcul des parcours et des énergies des photons et des leptons sur des distances cosmologiques	14
4.1	Conversion redshift/temps	15
4.2	Photons	15
4.3	Leptons	16
5	Approximation analytique des spectres des cascades	18
6	Simulation Monte-Carlo	20
6.1	Méthode d'inversion pour tirer un redshift d'interaction	20
6.2	Conditions limites	20
6.3	Tirage aléatoire des photon du milieu (CMB et EBL).	21
6.3.1	Tirage d'un photon du CMB	21
6.3.2	Tirage d'un photon de l'EBL	21
6.4	Modélisation Monte-Carlo des interactions.	22
6.4.1	Production de paire	22
6.4.2	Diffusion Compton	22
6.5	Techniques pour accélérer les calculs numériques	22
6.5.1	Échantillonnage pondéré	23
6.5.2	Accumulation des interactions Compton.	23
7	Présentation du programme de modélisation des cascades électromagnétiques.	24
7.1	Structure du programme	24
7.2	Quelques résultats de mon programme	26
8	Effets du champ magnétique extragalactique	31
9	Conclusions et perspectives	32
	Références	34

Les citations aux références bibliographiques sont notées entre crochets dans tout le rapport

1 Introduction

Lors de ce stage, j'ai travaillé sur les cascades électromagnétiques dans le milieu intergalactique. Le sujet de ce stage concerne principalement l'astrophysique des hautes énergies, les résultats de ces cascades étant à priori observables avec des instruments utilisés dans le domaine des rayons γ , comme HESS, MAGIC, ou VERITAS. Comme vous pourrez le voir tout au long de ce rapport, le travail effectué lors de ce stage est quand même fortement lié à d'autres domaines de l'astrophysique : l'étude des fonds diffus, la cosmologie et l'étude des champs magnétiques intergalactiques (EGMFs). Les résultats de ces cascades électromagnétiques n'ont pas encore été clairement observés et donc mon stage repose essentiellement sur la modélisation de ces cascades par des calculs théoriques et ensuite par de la programmation. L'étude de ces processus de cascades électromagnétiques est importante dans la compréhension des sources de rayonnement de hautes énergies, dans l'étude de l'EGMF et dans la compréhension des fonds diffus de rayonnement et elles doivent en particulier permettre poser des contraintes sur tout ces phénomènes. Dans la partie « conclusion et perspectives » de ce rapport, je parlerais plus en détails de plusieurs applications importantes du programme de modélisation des cascades électromagnétiques, dont je vais passer l'essentiel de ce rapport à décrire le fonctionnement d'un point de vue théorique puis d'un point de vue pratique.

Décrivons maintenant le processus de cascade. Nous considérons au départ une source ponctuelle de photons γ de très hautes énergies (typiquement ~ 10 TeV). Comme source de ces rayons γ , on peut citer :

- Certains noyaux actifs de galaxies (AGN), en particulier les blazars.
- Les sursauts Gamma (GRBs).
- Des rayons cosmiques de ultra hautes énergies, en particulier des protons, qui interagissent avec le CMB.

Les photons émis par cette source vont se propager dans le milieu intergalactique. Ces photons γ vont ensuite interagir avec des photons de plus basse énergie. Ces derniers peuvent venir de la lumière diffuse extragalactique (EBL) ou du corps noir cosmologique (CMB) pour produire des paires électron/positron [1, 2]. Ces derniers vont ensuite subir des interactions Compton inverse avec (principalement) des photons du CMB, ce qui peut donc produire d'autres photons γ qui peuvent à leur tour produire des paires électron/positron, et ainsi de suite. Ces photons γ de très hautes énergies sont donc responsables de cascades électromagnétiques dans le milieu intergalactique. De plus, on peut prendre en compte la déflexion par le champs magnétique extragalactique (EGMF) des particules chargées (électron/positron) et le rayonnement synchrotron qui en résultera.

Ainsi, les sources gamma lointaines n'apparaissent plus comme ponctuelles mais étendues. Cela a deux conséquences principales. Dans un premier temps cela rend plus compliqué l'interprétation des données dans la bande des très hautes énergies (VHE) comprise entre 0.1 et 10 TeV. Dans un deuxième temps, on s'est rendu compte que les propriétés observables du résultat de la cascade (comme la taille de son image, ou les retards temporels entre différentes bandes d'énergies) peuvent être utilisées non seulement pour reconstruire le spectre de la source, mais aussi pour sonder les caractéristiques physiques du milieu dans lequel la cascade s'est développée. Cela nécessite évidemment des instruments de mesure avec suffisamment de résolution spectrale et angulaire.

Ces cascades électromagnétiques dans le milieu intergalactique ont été étudié depuis plusieurs dizaines d'années [3]. Mais ce qu'elles impliquent, tant sur le spectre que sur l'étendue de la tache résultante de la cascade, n'a pas encore été bien observé.

Pour modéliser ces cascades, on va considérer qu'elles ne sont gouvernées que par les trois processus cités précédemment. Le premier est la production d'une paire électron/positron par interaction entre un photon γ et un photon du fond diffus :

$$\gamma + \gamma_{fond} \rightarrow e^+ + e^-$$

Le second processus est la diffusion Compton inverse des électrons (ou positrons) avec des photons de l'EBL ou du CMB (le CMB domine largement car il a une densité plus grande) :

$$\begin{aligned} e^\pm + \gamma_{CMB} &\rightarrow e^\pm + \gamma_{CMB} \\ e^\pm + \gamma_{EBL} &\rightarrow e^\pm + \gamma_{EBL} \end{aligned}$$

Le troisième processus concerne les effets du champ magnétique extragalactique (EGMF) : une déflexion angulaire des électrons/positrons et une émission de photons (rayonnement synchrotron). Ces deux effets sont décrits de façon approximative dans la section 8, et je n'ai pas eu le temps d'effectuer une analyse théorique plus approfondie.

Pour la modélisation des processus radiatifs des ces cascades, on choisit en général d'utiliser des méthodes Monte-Carlo. Cela consiste à considérer le système que l'on va étudier comme un ensemble de distributions de probabilités que l'on va simuler. Elles ne sont pas la seule manière de modéliser ce type de processus. Cependant, elles présentent plusieurs avantages :

- Elles sont en général plus rapides que les méthodes classiques quand on s'occupe d'un problème à plusieurs dimensions.
- Elles évitent d'avoir recours à un formalisme complexe décrivant le transport des particules dans son ensemble.
- Certains processus sont de toutes façons intrinsèquement probabilistes car d'origine quantique. Par exemple, les énergies et les directions des deux leptons produits lors d'une production de paire n'est pas déterministe.

Au cours de ce stage, j'ai découvert qu'il existait déjà un code, nommé Elmag (voir [4]), modélisant ces mêmes cascades électromagnétiques. Je propose donc aussi de comparer les spectres énergétiques obtenus à partir du programme développé au cours de ce stage avec ceux de Elmag dans les cas d'un champ magnétique extragalactique nul. On va voir que ces derniers vont présenter certaines différences que nous allons tenter d'analyser.

Le code Elmag présente trois différences majeures avec le code développé lors de ce stage. La méthode d'inversion sur la profondeur optique pour tirer un redshift d'interaction (voir section 6.1) n'y est pas utilisée ; un tirage direct sur les taux d'interaction est utilisé à la place. La modélisation de l'EBL utilisée dans Elmag (réf [5, 6]) est différente de celle utilisée dans mon code (réf [7]). Enfin, Elmag permet d'obtenir le spectre énergétique résultant de la cascade (avec différents intervalles de temps d'arrivée), mais pas l'image finale de la cascade, car il reste sur un schéma de cascades unidimensionnelles (dans l'approximation des petits angles).

Mon but est donc de réaliser un code dans lequel je dois utiliser le moins d'approximations possible. Contrairement à Elmag, mon programme devra donc calculer, en trois dimensions, les positions et directions de toutes les particules pour tous les temps considérés (pour tous les redshifts en fait). Pour que mon code soit complet, je devrais aussi modéliser exactement les déflexions du champ magnétique et les pertes synchrotron, ce que je n'ai pas eu le temps de faire.

Dans la section 2, je vais décrire comment je modélise les photons du fonds diffus (CMB + EBL). Dans les sections 3.1, 3.2 et 3.3, je vais décrire les processus radiatifs des cascades électromagnétiques, pour au final calculer leur profondeur optique. En section 5 je présenterai des résultats théoriques simples pour les spectres de ces cascades, qui serviront à discuter des résultats de mon programme. Dans la section 4 je vais détailler comment je modélise le transport des particules dans l'univers. La dernière partie du travail effectué lors de ce stage consiste à créer et à exploiter un code Monte-Carlo pour simuler ces cascades électromagnétiques, basé sur les équations présentées lors des sections précédentes. Je consacre la section 6 aux techniques Monte-Carlo décrivant les processus radiatifs¹. Enfin, dans la section 7, je présenterai le code réalisé lors de ce stage, et je montrerai et discuterai les résultats de certaines simulations.

L'ensemble du travail de programmation a été fait en Fortran 95. Le compilateur utilisé est *gfortran* (version 4.7). La plupart du travail s'est fait sur un système d'exploitation Ubuntu, qui est une distribution LINUX ; le reste du travail ayant été fait sur une distribution LINUX Red Hat sur une station SUN de l'institut d'astronomie de Cambridge. La plupart des graphes ont été réalisés avec GNUPLOT et certains avec Matlab.

1. Une étude plus complète de la modélisation des processus radiatifs par méthode Monte-Carlo est disponible dans la thèse de Julien Malzac (voir réf. [8])

2 Modélisation des densités de photons

Les cascades reposent sur l'interaction de photons de très hautes énergies avec des photons cibles plus froids du milieu intergalactique. Deux sources ont été identifiées : le CMB et l'EBL. Pour analyser les cascades, il faut donc d'abord savoir comment les modéliser.

On peut définir² la lumière diffuse extragalactique (EBL en Anglais, pour Extragalactic Background Light) comme l'accumulation de toute la radiation dans l'univers due à la formation d'étoiles, plus une contribution des AGNs. Elle couvre une longueur d'onde dans un intervalle compris entre $\sim 0.1\mu\text{m}$ et $\sim 1000\mu\text{m}$ (ce sont les régions UV, visible et IR du spectre électromagnétique). Elle forme le second fond diffus le plus énergétique, après le CMB. L'EBL est assez difficile à modéliser car ça nécessite de connaître le nombre et les propriétés des galaxies tout au long de l'histoire de l'univers, ce qui est loin d'être accessible aux observations. La modélisation de l'EBL repose donc sur des modèles d'évolutions des galaxies. Il existe en plusieurs modèles d'EBL. Nous allons utiliser ici celui présenté par Dominguez et al (voir ref. [7]).

On définit le fond diffus cosmologique micro-onde (CMB en Anglais, pour Cosmic Microwave Background) comme le résidu du rayonnement émis lors de la recombinaison qui a eu lieu environ 380 000 ans après le Big Bang, et refroidi par l'expansion de l'univers. Son domaine de longueur d'ondes est dans les micro-ondes, entre l'infrarouge et les ondes radio (autour de 3 mm, 100 GHz ou 10^{-3} eV). Le CMB est très précisément modélisé à n'importe quel redshift z par un corps noir de température $(1+z)T_0$, avec $T_0 = 2.725 \text{ K}$ [9]. Le spectre de ces deux fonds diffus sont représentés pour deux différents redshifts en figure 3.

2.1 Modélisation de la densité du CMB

Le CMB est modélisé de façon très précise par un corps noir de température $T_0 = 2.725 \text{ K}$ [9]. En unités cgs, [2, 10] la densité des photons ($\text{photons}/\text{cm}^3/\text{erg}$) du CMB prend la forme :

$$n_{CMB}(\epsilon, z) = (\hbar c)^{-3} \left(\frac{\epsilon}{\pi} \right)^2 \frac{1}{e^{\frac{\epsilon}{kT_0(1+z)}} - 1}$$

Avec $\epsilon = h\nu$

Par ailleurs, pour ne pas avoir de problème de calcul numérique de $n_{CMB}(\epsilon, z)$ lorsque le rapport $\theta = \frac{\epsilon}{kT_0(1+z)}$ est trop proche de zéro (et comme c'est le calcul numérique de l'exponentielle qui pose ce problème), il est intéressant de développer n_{CMB} autour de $\theta = 0$:

$$n_{CMB}(\epsilon, z) = (\hbar c)^{-3} \left(\frac{\epsilon}{\pi} \right)^2 \left[\frac{1}{\theta + \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^4}{24} + O(x^5)} \right], \text{ quand } \theta \ll 1$$

2.2 Modélisation de l'intensité de l'EBL

Pour modéliser l'EBL, on utilise le fichier fourni par Dominguez et al. sur le site internet de l'*Instituto de Astrofísica de Andalucía* (IAA) : <http://side.iaa.es/EBL/>. La méthodologie utilisée pour établir ce fichier est longuement décrite dans le papier de Dominguez et al. [7]. Pour résumer, ils utilisent l'évolution des populations de galaxies telle qu'elle est directement observée, dans un intervalle de redshifts qui contribue significativement à l'EBL. L'évolution de la fonction de luminosité des galaxies dans la bande K (référentiel au repos) jusqu'à un redshift 4 est prise en compte, combinée avec une détermination des fractions de galaxies dans différentes distributions spectrales d'énergies. Ces dernières sont basées sur un ajustement de spectres de la librairie SWIRE³ sur un échantillon multi-longueurs d'ondes d'environ 6000 galaxies de l'AEGIS (All wavelength Extended Groth Strip International Survey) dans un intervalle de redshift allant de 0.2 à 1.

Il existe d'autres façons de modéliser l'EBL, en particulier celle utilisée dans Elmag est différente (voir références [4, 5, 6]).

Le fichier de l'IAA (partiellement tracé en figure 1) contient les valeurs des intensités $\lambda I_\lambda(\epsilon, z)$ (en $nW/m^2/Sr$) de l'EBL, échantillonnées de la manière suivante :

2. Attention car il existe une autre définition de l'EBL où il est constitué de tous les fonds diffus extragalactiques et elle est utilisée dans certaines références, en particulier c'est celle utilisée dans le papier du code Elmag. Pour ma part, j'appellerai DEBRA (Diffuse Extragalactic Background Radiation) l'ensemble constitué de tous les fonds diffus extragalactiques.

3. La librairie SWIRE contient 25 spectres de galaxies obtenus en utilisant des modèles, des codes numériques et des mesures, et couvre des longueurs d'ondes entre 1000 Angstrom et 1000 microns.

Pour plus de détails, voir www.iasf-milano.inaf.it/~polletta/templates/swire_templates.html.

- Pour un redshift donné, on a 50 valeurs de l'intensité pour 50 énergies de photons réparties de $\lambda = 0.1\mu\text{m}$ à $\lambda = 1000\mu\text{m}$.
- On a cela pour 18 redshifts différents, allant de $z = 0$ à $z = 3.9$. Les intervalles en redshift sont non-réguliers.

Ce fichier contient également des barres d'erreurs sur ses valeurs. Il serait intéressant de voir comment elles influent sur le résultat final, mais je n'ai pas eu le temps de me pencher là-dessus.

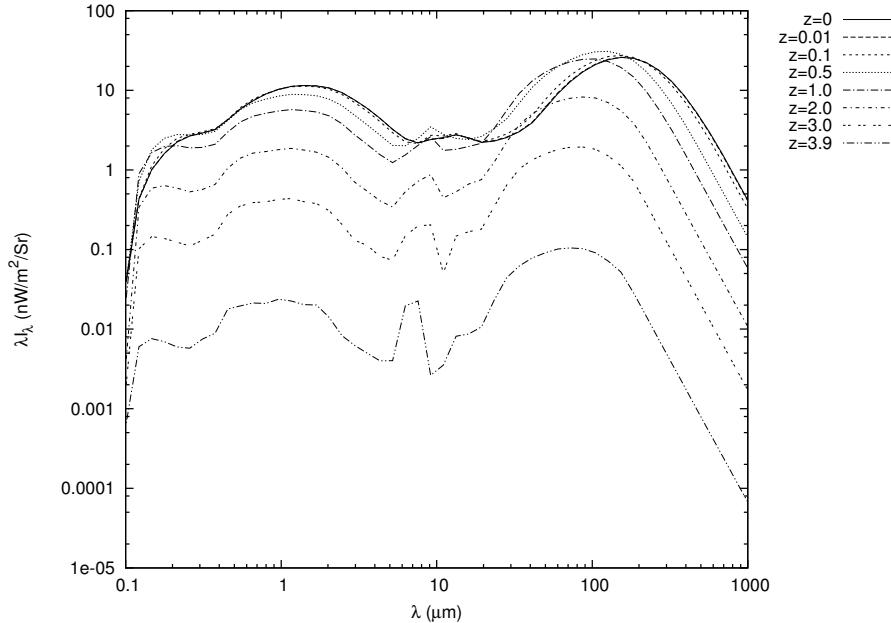


FIGURE 1 – Valeurs de l’EBL exprimées en intensité pour différents redshifts tracées directement à partir du fichier fourni par l’IAA [7].

On peut voir sur la figure 1 que l’intensité de l’EBL diminue avec le redshift. Comme l’EBL représente l’accumulation de toute la radiation dans l’univers due à la formation d’étoiles, on s’attend donc effectivement à voir son intensité diminuer à partir d’un certain redshift. Ce n’est pas le cas pour le CMB dont l’intensité va augmenter avec le redshift.

2.2.1 Conversion de λI_λ vers $n(e, z)$

L’IAA nous fournit $\lambda I_\lambda(\epsilon, z)$ (en $nW/m^2/Sr$) pour l’EBL. Les équations utilisées en sections 3.1 et 3.2 nécessitent de convertir cette intensité en densité $n_{EBL}(e, z)$ ($\text{photons}/\text{cm}^3/\text{erg}$). On effectue la conversion de l’un à l’autre (pour avoir n_{EBL} en unités cgs) de la manière suivante :

$$n_{EBL}(\epsilon, z) = \lambda I_\lambda(\epsilon, z) \times (1+z)^3 \times (10^{-9}) \times (10^7) \times (10^{-4}) \times (4\pi) \times \frac{1}{\epsilon^2 c} \quad (1)$$

Avec $\epsilon = \frac{hc}{\lambda}$. Détaillons les différents facteurs de cette conversion :

- $(1+z)^3$ pour prendre en compte l’effet qu’a l’expansion de l’univers sur la densité.
- (10^{-9}) pour le passage de nW en W ($= J/s$)
- (10^7) pour le passage de J en erg
- (10^{-4}) pour le passage de m^{-2} à cm^{-2}
- (4π) pour enlever la normalisation angulaire, car la distribution des photons de l’EBL est considérée isotrope.
- La division par $\epsilon^2 c$ (avec évidemment c en unités cgs, c’est-à-dire en cm/s) nous donne finalement la bonne dimension.

En plus de nous fournir les valeurs de $\lambda I_\lambda (\epsilon, z)$, l'IAA met également à disposition un fichier de valeurs de la profondeur optique. L'exactitude de cette conversion est donc finalement vérifiée par la bonne correspondance entre la profondeur optique calculée lors de ce stage et celle fournie par l'IAA (voir figure 7).

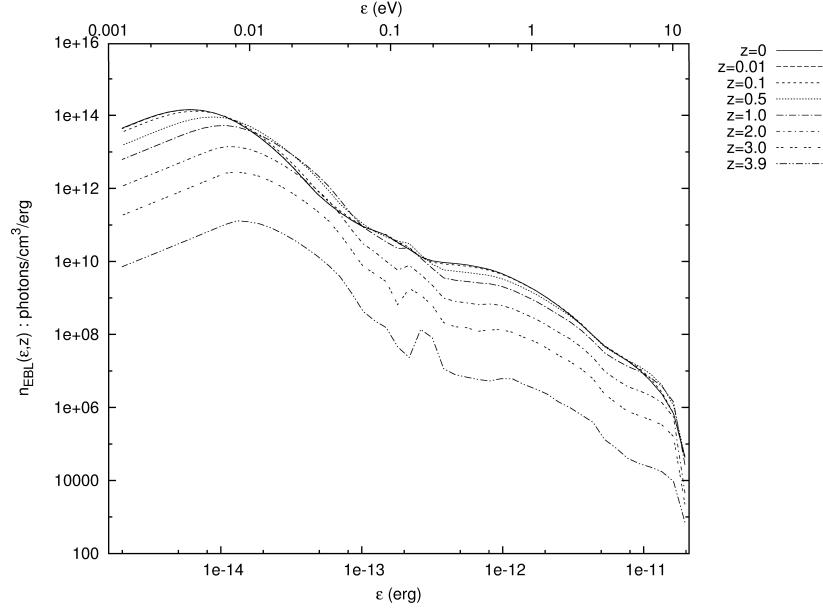


FIGURE 2 – Densité de photons de l’EBL en fonction de leur énergie (représentée en eV et en erg) et du redshift. On a juste convertit les valeurs de la figure 1. On va ensuite interpoler ces valeurs pour avoir $n_{EBL}(\epsilon, z)$ à n’importe quel redshift ou énergie.

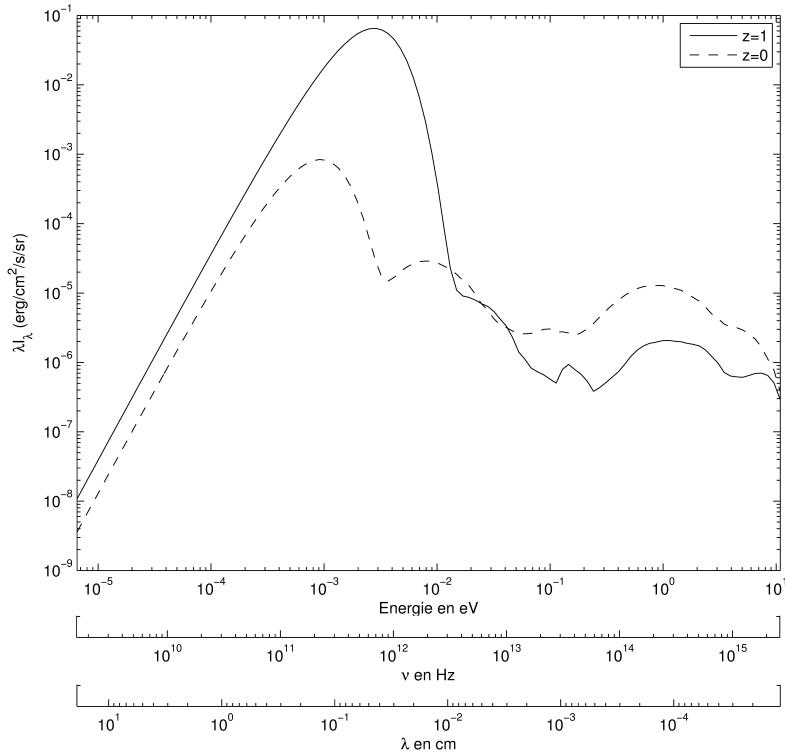


FIGURE 3 – Intensité des photons (CMB, EBL) du milieu en fonction de leur énergie deux redshifts.

Sur la figure 3, on voit que quand on passe d'un redshift de 0 à un redshift de 1, l'intensité de l'EBL diminue alors que celle du CMB augmente. L'intensité du CMB est de 4 ordres de grandeur plus importante que celle de l'EBL. Par contre les photons de l'EBL ont des énergies d'au moins 3 ordres de grandeur plus grandes que celles du CMB.

2.2.2 Interpolation bilinéaire

Comme indiqué précédemment, le fichier de densités de l'EBL de l'IAA contient évidemment des valeurs discrètes de la densité de l'EBL. Pour avoir des valeurs à n'importe quel redshift et n'importe quelle énergie, il va donc falloir les interpoler. Pour cela on va faire une interpolation bilinéaire.

Nous disposons d'un tableau de densités $n(\epsilon, z)$, dont les valeurs des colonnes et des lignes correspondent aux vecteurs d'énergie ϵ et de redshift z . On veut déterminer une valeur de densité n_* correspondant à une énergie quelconque ϵ_* et à un redshift quelconque z_* . Pour cela on détermine d'abord quels sont les éléments successifs de ϵ et de z qui encadrent ϵ_* et z_* . Appelons-les ϵ_1, ϵ_2 et z_1, z_2 . Ensuite on calcule les facteurs :

$$f_x = \frac{\epsilon_* - \epsilon_1}{\epsilon_2 - \epsilon_1}, \quad f_y = \frac{z_* - z_1}{z_2 - z_1}$$

L'intensité interpolée n_* sera donnée par :

$$n_*(\epsilon_*, z_*) = (1 - f_x)(1 - f_y)n(\epsilon_1, z_1) + (1 - f_x)f_y n(\epsilon_1, z_2) + f_x(1 - f_y)n(\epsilon_2, z_1) + f_x f_y n(\epsilon_2, z_2) \quad (2)$$

De plus, si jamais on est à l'extérieur (en redshift ou en énergie) des bornes du fichier de l'IAA, on prend simplement la densité égale à 0.

3 Sections efficaces d'interaction et profondeurs optiques

Comme mentionné en introduction, une cascade fonctionne de la manière suivante : un photon γ va produire une paire électron/positron par interaction avec un photon de l'EBL, ces leptons vont diffuser des photons du CMB par interaction Compton inverse qui peuvent à leur tour créer des paires. Elle fait donc intervenir deux processus fondamentaux : la diffusion Compton et la production de paire. Dans cette partie, je vais présenter les sections efficace d'interaction ainsi que la manière dont nous allons les utiliser pour calculer les expressions de $\frac{d\tau}{dx}$, qui traduit la probabilité de subir une interaction par unité de distance. J'introduirai aussi la profondeur optique totale τ , qui est le $\frac{d\tau}{dx}$ intégré sur tout le trajet entre l'apparition du photon (ou du lepton) et son hypothétique arrivée sur Terre.

3.1 Production de paire e^+e^- par interaction photon-photon

3.1.1 Calcul⁴ du taux d'interaction par unité de longueur $\frac{d\tau_{\gamma\gamma}}{dx}$

Soit un photon γ d'énergie E_γ qui interagit avec un photon de plus basse énergie ϵ (du CMB ou de l'EBL). Soit θ l'angle entre les deux photons. La réaction entre ces deux photons peut produire une paire électron/positron dont chacun aura pour énergie E_e dans le repère du centre des moments (et la répartition des énergies dans le repère du « laboratoire » n'est pas déterministe). La relation entre ces quatre quantités est donnée par la conservation de la norme du quadri-vecteur énergie-impulsion, qui nous donne :

$$2\epsilon E_\gamma (1 - \cos\theta) = 4E_e^2 \quad (3)$$

Dans le cas limite où les électrons sont produits sans énergie cinétique, on a $E_e = mc^2$ et avec $\theta = \pi$ (collision frontale), on trouve une énergie seuil en dessous de laquelle les photons ne produiront pas de paire de $E_{\text{seuil}} = \frac{m^2 c^4}{\epsilon}$. Si on prend une énergie des photons de l'EBL de ~ 1 eV on a $E_{\text{seuil}} \sim 2 \times 10^{11}$ eV. Les leptons produits ont typiquement des énergies de $\frac{E_\gamma}{2}$.

La section efficace totale pour le processus de création de paire [11] est donnée par :

$$\sigma_{pp} = \frac{1}{2}\pi r_0^2 (1 - \beta^2) \left[(3 - \beta^4) \ln \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) - 2\beta(2 - \beta^2) \right] \quad (4)$$

4. Les équations de cette partie sont en grande partie reprises de l'article de Gould et Schréder de 1967 [2]

Où $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$ est le rayon classique de l'électron et βc est la vitesse de l'électron (et du positron) créé, dans le référentiel du centre de masse.

On peut ensuite définir :

$$s = \left(\frac{E_e}{mc^2} \right)^2 = \frac{\epsilon E_\gamma}{2m^2c^4} (1 - \cos\theta)$$

m étant la masse de l'électron. On a ainsi :

$$\beta = |\mathbf{p}_e| \frac{c}{E_e} = \sqrt{1 - \frac{1}{s}}$$

\mathbf{p}_e étant le vecteur impulsion de l'électron. La densité différentielle de photons pour une énergie ϵ et un angle θ est donnée par :

$$dn = \frac{1}{2} n(\epsilon) \sin\theta d\epsilon d\theta$$

$n(\epsilon)$ étant la densité des photons. La vitesse relative entre les deux photons est $c(1 - \cos(\theta))$. On obtient donc le taux d'interaction par unité de longueur avec l'intégrale suivante :

$$\frac{d\tau_{\gamma\gamma}}{dx} = \int \int \frac{1}{2} \sigma_{pp} n(\epsilon) (1 - \cos\theta) \sin\theta d\epsilon d\theta$$

On peut ensuite effectuer le changement de variable de θ vers s :

$$\frac{d\tau_{\gamma\gamma}}{dx} = \pi r_0^2 \left(\frac{m^2 c^4}{E_\gamma} \right)^2 \int_{\frac{m^2 c^4}{E_\gamma}}^{\infty} \epsilon^{-2} \bar{\sigma} n(\epsilon) \bar{\varphi}(s_0) d\epsilon ds \quad (5)$$

$$\text{où } \bar{\varphi}(s_0) = \int_1^{s_0} s \bar{\sigma}(s) ds, \quad \bar{\sigma}(s) = \frac{2\sigma_{pp}(s)}{\pi r_0^2} \quad (6)$$

Cette intégrale n'est pas totalement calculable analytiquement. L'intégrale sur la variable s se ramène à un développement en série (voir section ci-après) et on calcule l'intégrale sur l'énergie avec une quadrature de Gauss-Legendre [12]. Le $\frac{d\tau_{\gamma\gamma}}{dx}$ pour les distribution de photons de l'EBL et du CMB est représenté en figure 4.

Un photon de 10^{14} eV va parcourir une distance typique de quelques Mpc avant d'interagir, soit un temps de vol typique de quelques millions d'années.

3.1.2 Développement de $\bar{\varphi}(s_0)$

$\bar{\varphi}$ peut se mettre sous la forme suivante⁵ :

$$\bar{\varphi}(s_0) = \left(\frac{1 + \beta_0^2}{1 - \beta_0^2} \right) \ln(\omega_0) - \beta_0^2 \ln(\omega_0) - \ln^2(\omega_0) - \frac{4\beta_0}{1 - \beta_0^2} + 2\beta_0 + 4\ln(\omega_0)\ln(\omega_0 + 1) - 4L(\omega_0) \quad (7)$$

$$\text{avec } \beta_0^2 = 1 - \frac{1}{s_0}, \quad \omega_0 = \frac{1 + \beta_0}{1 - \beta_0}$$

$$\text{et } L(\omega_0) = \int_1^{\omega_0} \omega^{-1} \ln(\omega + 1) d\omega$$

Cette dernière fonction est développable sous la forme suivante :

$$L(\omega_0) = \frac{1}{2} \ln^2(\omega_0) + L'(\omega_0)$$

$$L'(\omega_0) = \int_1^{\omega_0} \omega^{-1} \ln\left(1 + \frac{1}{\omega}\right) d\omega = \frac{\pi^2}{12} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-2} \omega_0^{-n}$$

5. On peut remarquer qu'il y a bien un facteur 4 devant $L(\omega_0)$ qui a été oublié dans l'article de Gould et Schréder [2].

Pour le calcul numérique de $\bar{\varphi}$, cette forme sera plus rapide à calculer et se comportera mieux numériquement qu'une intégration numérique directe de (6).

On peut ensuite intégrer numériquement l'équation (5) pour les deux distributions de photons (voir section 2 pour savoir comment on modélise les distribution de photons du CMB et de l'EBL).

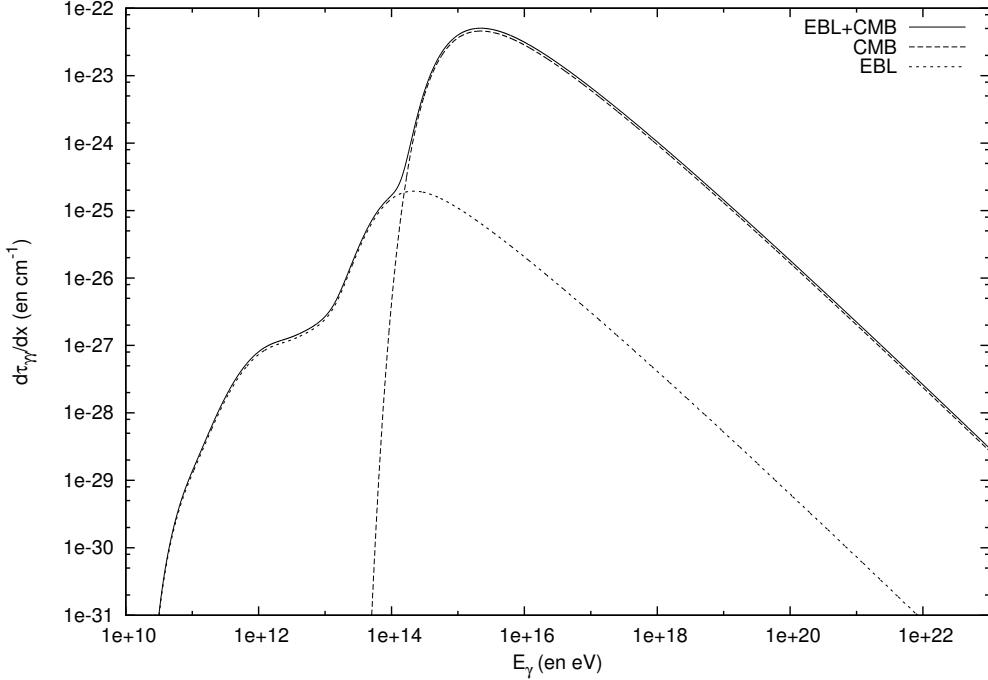


FIGURE 4 – $\frac{d\tau_{\gamma\gamma}}{dx}$ en cm^{-1} pour un photon γ d'énergie E_γ . On se place ici à un redshift $z = 0$.

On voit sur la figure 4 que l'interaction de création de paire est dominée par l'EBL avant une certaine énergie du photon γ (aux alentours de 10^{14} eV et qui correspond à l'énergie de la coupure exponentielle du CMB à $\sim 6.2 \times 10^{-3}$ eV), puis c'est le CMB qui domine. On voit que l'énergie à partir de laquelle la production de paire est possible est aux alentours de $E_{\text{seuil}} \sim 2 \times 10^{11}$ eV (ce qui confirme la valeur trouvée à partir de l'équation (3) dans la section 3.1). Cela correspond à un seuil pour la production de paire. On peut se demander si ce seuil ne vient pas principalement du fait que je ne considère pas l'ensemble de la radiation diffuse extragalactique (DEBRA). Je ne vais en effet pas au-delà de l'UV dans le modèle de fond diffus que j'utilise (voir réf. [7] et la section 2.2). Cependant, pour les photon γ d'énergies inférieures à $\sim 10^{11}$ eV, la contribution du fonds diffus UV-X est importante, mais la probabilité d'interaction devient très faible, car il y a peu de photons cibles. Pour les photon γ d'énergies supérieures à $\sim 10^{11}$ eV, la contribution du fonds UV-X est négligeable devant celle de l'EBL (qui correspond à l'intervalle de fonds diffus UV-Visible-IR). Donc la valeur de E_{seuil} ne devrait pas être différente si je considérais l'ensemble du DEBRA.

De plus, si on compare cette les figures 3, 4 et 5, on voit que le CMB dominera pour la diffusion Compton et que l'EBL dominera pour la production de paire pour des énergies de photons inférieures à 10^{14} eV. Au-delà de cette énergie, le CMB va dominer toutes les interactions.

Le maximum d'efficacité de l'annihilation photon-photon se fait pour des énergies très proches du seuil, c'est-à-dire pour $\epsilon E_\gamma = m^2 c^4$. Donc, un photon γ d'énergie E_γ interagit surtout avec des photons du milieux d'énergie $\epsilon = \frac{m^2 c^4}{E_\gamma}$. C'est un point qualitatif très important, il explique pourquoi la courbe de $\frac{d\tau}{dx}$ (sur la figure 4) ressemble au spectre de photon cibles (sous la forme $n_{EBL}(\epsilon, z)$), mais inversé de droite à gauche.

3.2 Diffusion Compton

3.2.1 Calcul du taux d'interaction par unité de longueur

Un électron (qui est ici souvent ultra-relativiste) d'énergie E_e qui se propage dans le milieu intergalactique subit des interactions Compton avec des photons d'énergie ϵ qui viennent du CMB et de l'EBL. Les directions de propagation des deux particules incidentes forment un angle θ . Typiquement, un photon du CMB qui a une énergie de $\epsilon \sim 10^{-3}$ eV sera diffusé en un photon de $\gamma^2 \epsilon \sim 10^5$ eV par un électron d'énergie $\gamma mc^2 \sim 10^{10}$ eV. Le CMB domine largement le nombre d'interactions Compton car sa densité est bien plus élevée que celle de l'EBL. [11] La section efficace de cette interaction est celle de Klein-Nishina :

$$\sigma_c = \sigma_{KN} = \frac{3\sigma_T}{4x} \left[\left(1 - \frac{4}{x} - \frac{8}{x^2} \right) \ln(1+x) + \frac{1}{2} + \frac{8}{x} - \frac{1}{2(1+x)^2} \right]$$

$$\text{Avec } x = 2\gamma(1-\beta\mu)\omega, \gamma = \frac{E_e}{mc^2}, \omega = \frac{\epsilon}{mc^2}, \beta = \sqrt{1-\gamma^{-2}}, \text{ et } \mu = \cos(\theta)$$

$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_0^2$ est la section efficace de Thomson. $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$ est le rayon classique de l'électron.

Considérons que les photons du CMB et de l'EBL suivent une distribution $n(\epsilon) = n_{CMB}(\epsilon) + n_{EBL}(\epsilon)$. [13] Le taux d'interaction par unité de longueur est donné par :

$$\frac{d\tau_c}{dx} = \int_0^\infty n(\epsilon) R(\epsilon) d\epsilon \quad (8)$$

$$\text{Avec } R(\epsilon) = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (1-\beta\mu) \sigma_{KN} d\mu$$

Soit, plus explicitement :

$$R(\epsilon) = \frac{3\sigma_T}{32\gamma^2\beta\omega^2} \int_{2\gamma(1-\beta)\omega}^{2\gamma(1+\beta)\omega} \left[\left(1 - \frac{4}{x} - \frac{8}{x^2} \right) \ln(1+x) + \frac{1}{2} + \frac{8}{x} - \frac{1}{2(1+x)^2} \right] dx \quad (9)$$

Contrairement à la production de paire, je n'ai pas trouvé de développement en série *utile en pratique* pour avoir un calcul analytique (au moins partiel) de l'intégrale double du calcul de $R(\epsilon)$. Il existe des développements qui sont peu utiles en pratique car ils font intervenir, entre autres, un dilogarithme. Pour plus de détails sur ces développements, voir [14]. On va donc intégrer directement l'équation (8) sur le CMB et l'EBL avec une quadrature de Gauss-Legendre [12]. Le résultat est présenté en figure 5.

L'équation (9) pour avoir $R(\epsilon)$ possède une forme approchée calculable directement sans passer par une intégration numérique. Pour l'obtenir, il suffit [13] de prendre pour $R(\epsilon)$ la section efficace de Klein-Nishina en posant $x = 2\gamma\omega$. L'erreur commise au final dans le calcul de τ_c (voir section 3.3 pour le passage de $\frac{d\tau_c}{dx}$ à τ_c) en utilisant cette expression plutôt que l'équation (9) est inférieure à 10%. Cette formule devient même pratiquement exacte dans les cas $x \ll 1$ et $x \gg 1$.

Sur la figure 5 on peut voir premièrement que la contribution de l'EBL à $\frac{d\tau_c}{dx}$ est très faible. Ensuite, on peut voir que plus le redshift est élevé, plus les électrons vont faire d'interactions Compton (c'est normal, puisque la densité du CMB augmente avec le redshift). Ensuite on peut voir que l'on est dans le régime Thomson pour des électrons avec des énergies γmc^2 en-dessous de 10^{14} eV et dans le régime Klein-Nishina au-delà. Dans le régime Thomson, $\frac{d\tau_c}{dx}$ est à peu près constant, on a $\epsilon \ll \gamma^{-1}$ (ϵ est l'énergie d'un photon du milieu). Dans le régime Klein-Nishina on a $\epsilon \gg \gamma^{-1}$, et le taux d'interaction diminue rapidement avec l'énergie. Dans le régime Thomson, les électrons vont parcourir typiquement quelques kpc entre deux interactions Compton, et il va donc s'écouler typiquement 3000 ans entre deux interactions Compton.

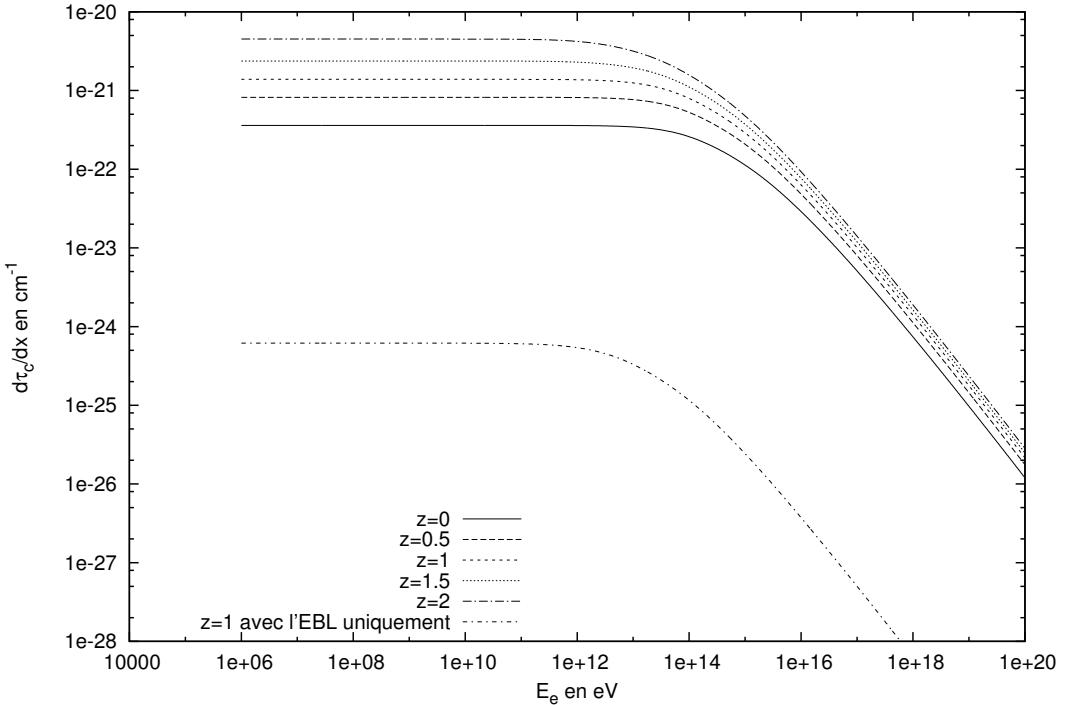


FIGURE 5 – Taux d’interaction $\frac{d\tau_c}{dx}$ pour un lepton d’énergie E_e pour différents redshifts.

3.2.2 Développement

Que l’on soit dans le cas exact ($x = 2\gamma(1 - \beta\mu)\omega$) ou approché ($x = 2\gamma\omega$), il est important de développer en série de Taylor la section efficace de Klein-Nishina autour de $x = 0$ pour éviter le mauvais comportement numérique de l’équation (9) quand $x \ll 1$.

$$\sigma_{KN} = \sigma_T \left[1 - x + \frac{13}{10}x^2 - \frac{133}{80}x^3 + \frac{143}{70}x^4 + O(x^5) \right], \text{ quand } x \ll 1$$

$$\text{et } R(\epsilon) \approx \sigma_{KN}(x = 2\gamma\omega)$$

3.3 Calcul de la profondeur optique à partir des taux d’interaction

Dans notre cas la profondeur optique τ est directement liée à la probabilité d’interaction (comprise entre 0 et 1). La probabilité d’interaction à une profondeur optique τ est donnée par $P = 1 - e^{-\tau}$. On cherche à établir la relation entre la profondeur optique (que ce soit $\tau_{\gamma\gamma}$ pour la production de paire ou τ_c pour la diffusion Compton) et le redshift. Cela passe par un de calcul de cosmologie [15]. L’équation de Friedmann-Lemaître nous donne :

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{kc^2}{R^2} \quad (10)$$

On définit les paramètres cosmologiques suivants :

$$\Omega_M = \frac{8\pi G}{3H_0^2}\rho_0, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2}, \quad \Omega_k = -\frac{kc^2}{R_0^2 H_0^2} \quad (11)$$

La profondeur optique se calcule en intégrant le taux d’interaction sur la distance parcourue :

$$\tau = \int \frac{d\tau}{dx} dx \quad (12)$$

Comme $dx = \beta cdt$, et en utilisant les équations (10), (12) et (14) on peut montrer que la profondeur optique peut se mettre sous la forme :

$$\tau = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{d\tau}{dx} \frac{\beta(z') dz'}{(1+z') \sqrt{\Omega_M (1+z')^3 + \Omega_k (1+z')^2 + \Omega_\Lambda}} \quad (13)$$

Dans le cas des photons, on a $\beta(z') = 1$. Pour les électrons, ces derniers sont souvent ultra-relativistes donc $\beta(z') \approx 1$. Dans le cas général, la formule pour $\beta(z')$ est établie dans la section 4.3.

$\frac{d\tau}{dx}$ est le taux d'interaction par unité de longueur de l'interaction considérée, dont nous avons déjà détaillé l'expression pour les cas de la production de paire et de la diffusion Compton dans les sections 3.1 et 3.2. Dans le cadre de cette étude, on se place dans un modèle cosmologique Λ CDM de concordance. On a ainsi :

$$\Omega_M = 0.3, \quad \Omega_\Lambda = 0.7, \quad \Omega_k = 0$$

On trace les différentes profondeurs optiques entre⁶ un certain redshift z et un redshift de 0 dans les figures 7, 6 et 8. La différence relative entre les profondeurs optique $\tau_{\gamma\gamma}$ obtenues dans le cadre de ce stage et celles données par Dominguez et al. dans l'intervalle $3 \times 10^{10} - 3 \times 10^{13}$ eV est inférieure à 7%, et même inférieure à 2% sur la majeure partie de cet intervalle d'énergie.

Sur la figure 7, on peut voir que la profondeur optique pour la production de paire va augmenter avec le redshift. C'est-à-dire que contrairement à ce que pourrait laisser penser la figure 2 (où la l'intensité de l'EBL diminue avec le redshift), la probabilité d'interaction pour la production de paire augmente avec le redshift. Et c'est normal puisque dans le calcul de la profondeur optique on va sommer (intégrer) toutes les composantes entre 0 et z , donc $\tau_{\gamma\gamma}$ ne peut qu'augmenter avec le redshift.

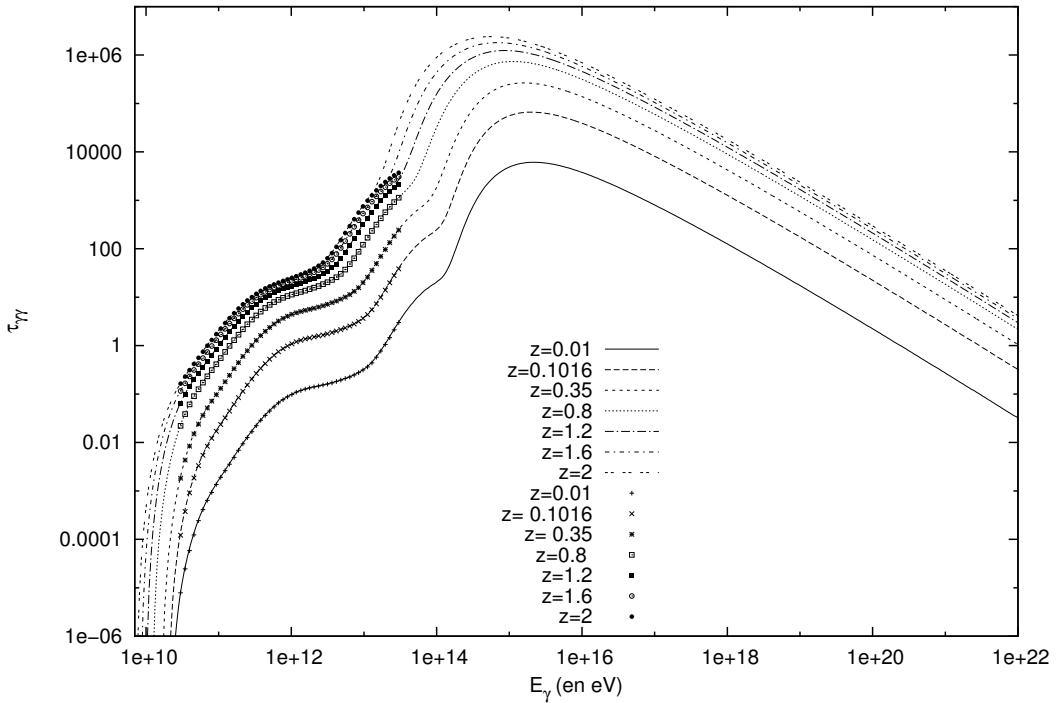


FIGURE 6 – Profondeur optique de la production de paires pour un photon d'énergie E_γ en prenant en compte le CMB et l'EBL, et pour différents redshifts. Sont tracés les résultats obtenus dans ce stage (traits pleins et pointillés) et ceux fournis par l'IAA (points, croix, rectangles, ...) qui ne prennent en compte que l'EBL [7].

6. Petite précision : dans le programme on va en fait calculer les profondeurs optiques entre z et z_{lim} . z_{lim} correspond au redshift où la particule atteindrait la Terre si cette dernière ne subissait aucune interaction. z_{lim} est toujours assez proche de 0.

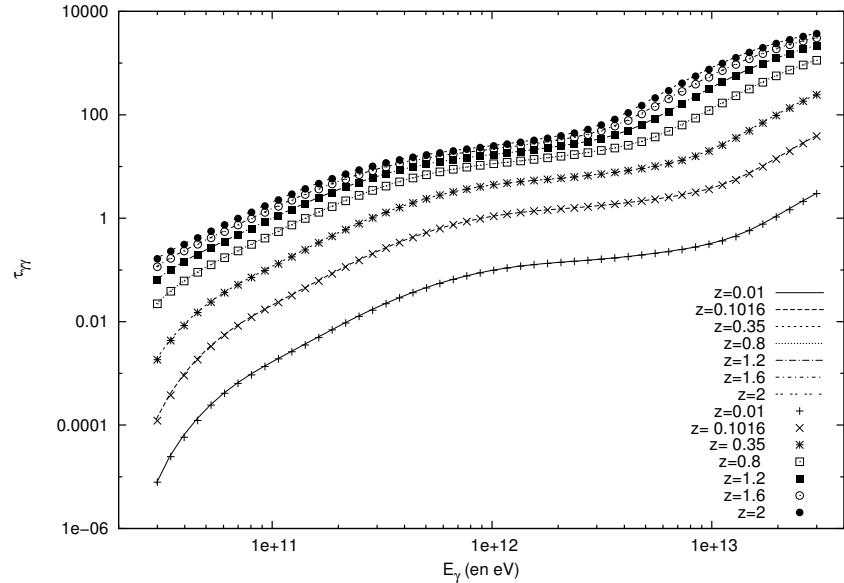


FIGURE 7 – Profondeur optique de la production de paires entre un photon d'énergie E_γ et l'EBL uniquement, pour différents redshifts. Sont tracés les résultats obtenus dans ce stage (traits) et ceux fournis par l'IAA (points) [7].

La figure 8 est très similaire à la figure 5. Le passage de $\frac{d\tau_c}{dx}$ à τ_c revient pratiquement à la multiplication par un facteur constant. Toutes les remarques faites sur la figure 5 dans la section 3.2.1 sont tout aussi valables ici.

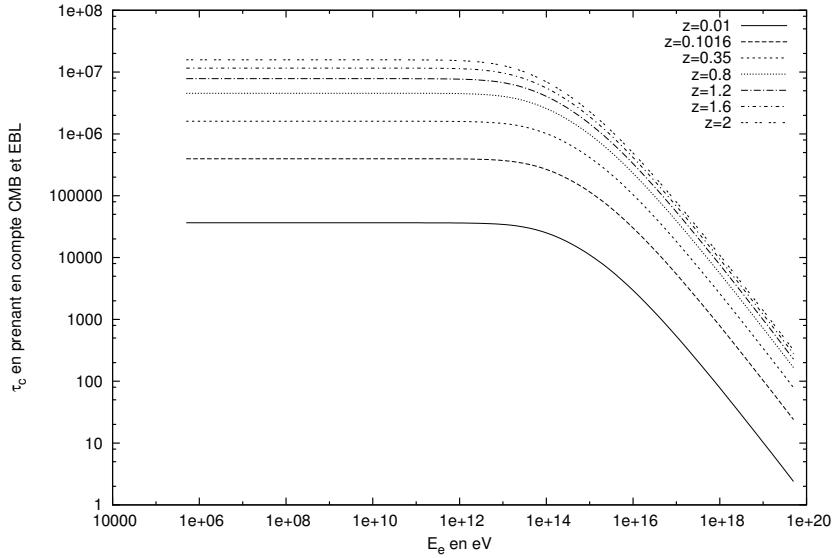


FIGURE 8 – Profondeur optique de la diffusion COMPTON avec le CMB et l'EBL d'un électron (ou un positron) d'énergie E_e pour différents redshifts.

4 Calcul des parcours et des énergies des photons et des leptons sur des distances cosmologiques

Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, on peut associer à chaque processus (Diffusion Compton et production de paire) une probabilité d'interaction par unité de longueur $\frac{d\tau}{dx}$. Cependant entre deux interaction,

une particule va se déplacer et être affectée par les effets de l'expansion de l'univers. Dans cette partie, je vais décrire la transport de ces particules (photon ou lepton) entre deux redshift d'interaction. Je ferais notamment le lien entre temps, redshift et distance pour les photons et les leptons.

4.1 Conversion redshift/temps

Dans le cadre de notre modèle cosmologique, l'équation de Friedmann-Lemaitre nous permet de déduire que :

$$dt = \frac{-dz}{H_0 (1+z) \sqrt{\Omega_M (1+z)^3 + \Omega_k (1+z)^2 + \Omega_\Lambda}} \quad (14)$$

On peut donc en déduire que le temps écoulé entre deux redshift z et z_1 ($z_1 > z$) vaut :

$$\Delta t = \frac{1}{H_0} \int_z^{z_1} \frac{dz'}{(1+z') \sqrt{\Omega_M (1+z')^3 + \Omega_k (1+z')^2 + \Omega_\Lambda}} \quad (15)$$

Cette intégrale n'est pas calculable analytiquement. Il faut donc l'intégrer numériquement, avec par exemple avec une quadrature de Gauss-Legendre [12]. Si on prend $z = 0$ et $z_1 \rightarrow \infty$, le résultat de cette intégrale s'appelle le « temps lookback », que j'ai représenté en figure 9.

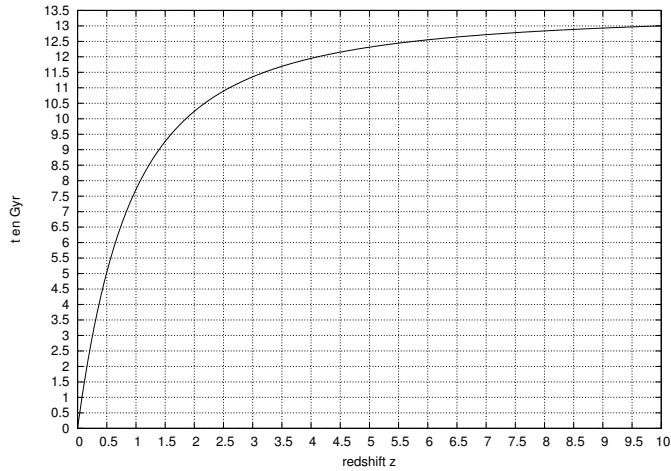


FIGURE 9 – Temps lookback pour un modèle d'univers ΛCDM avec $\Omega_M = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0.7$ et $\Omega_k = 0$.

Il est important de remarquer la non-linéarité de cette relation temps/redshift. Sur la figure 9 on peut voir que pour un redshift de 2 on est déjà à 10.2 Gyr et qu'il faudrait un redshift infini pour arriver au big bang. On peut aussi lire l'âge de l'univers pour ce jeu de paramètres cosmologiques, qui est aux alentours de 13 Gyr.

4.2 Photons

Un photon est émis à z_1 avec une énergie E_1 et interagit à un redshift $z < z_1$ avec une énergie E . On a $E \neq E_1$ à cause de l'effet de décalage vers le rouge (redshift) du à l'expansion de l'univers. On connaît la direction initiale, la position initiale et l'énergie initiale du photon. On cherche sa direction, sa position et son énergie au moment de l'interaction. Son énergie au moment de l'interaction sera simplement :

$$E = E_1 \frac{1+z}{1+z_1} \quad (16)$$

Comme on considère un univers homogène, isotrope et plat, on va utiliser la métrique de Robertson-Walker et la direction du photon ne va pas changer au cours de son déplacement (sans interagir). La métrique de Robertson-Walker avec un paramètre de courbure nul ($k = 0$) a pour expression :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) (dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2)) \quad (17)$$

$a(t)$ est le facteur d'échelle. Sa dépendance en terme de redshift est simple :

$$a(z) = \frac{a_0}{1+z} \quad (18)$$

a_0 étant la valeur actuelle du facteur d'échelle (que l'on peut poser égale à 1). r est une distance comobile, c'est-à-dire qu'elle ne va pas varier à cause de l'expansion de l'univers, car elle est exprimée dans une unité de longueur qui varie avec l'expansion de l'univers (c'est ce que je vais appeler des « centimètres comobiles » dans la figure 10). On considère uniquement ce type de distance dans l'ensemble du programme. Elle coïncide avec les autres définition possibles de distances (qui peuvent être définies comme lumineuse ou angulaire, voir [15]) si on prend $a_0 = 1$ et si l'on se place à $z = 0$ (c'est-à-dire à l'instant actuel). Cette propriété va s'avérer utile dans la simulation numérique pour définir la limite quand la particule atteint l'observateur. Les photons suivent des géodésiques nulles donc $ds^2 = 0$ et comme la distance parcourue ne dépend pas de l'orientation, on peut choisir n'importe quels angles, en particulier $\theta = 0$ et $\phi = 0$. On a donc :

$$0 = c^2 dt^2 - a^2(t) dr^2 \quad (19)$$

On peut ensuite effectuer le changement de variable du temps avec le redshift (voir équation (14)) :

$$0 = \frac{c^2}{H_0^2} \frac{dz^2}{(1+z)^2 (\Omega_\lambda + \Omega_k (1+z)^2 + \Omega_M (1+z)^3)} - \frac{a_0^2}{(1+z)^2} dr^2 \quad (20)$$

La distance parcourue est donc :

$$\Delta r = \frac{c}{H_0 a_0} \int_z^{z_1} \frac{dz'}{\sqrt{\Omega_\lambda + \Omega_k (1+z')^2 + \Omega_M (1+z')^3}} \quad (21)$$

Comme on connaît maintenant la position initiale du photon, sa direction et la distance qu'il a parcouru, on peut en déduire facilement sa position au moment de l'interaction. Cette intégrale n'est pas calculable analytiquement. On la calcule avec une quadrature de Gauss-Legendre [12] et on trace le résultat en figure 10.

4.3 Leptons

On part d'un lepton à un redshift z_1 , avec une énergie (adimensionnée) γ_1 . On cherche son énergie γ à un redshift $z < z_1$. Les leptons se déplacent dans le même milieu que les photons, ils subissent la même métrique que pour photons. Mais dans ce cas, les géodésiques ne sont pas nulles :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) dr^2 \quad (22)$$

On représente les trajectoires des leptons sous forme paramétrique : $x^\mu = x^\mu(\lambda)$. Comme les particules sont en chute libre, leur trajectoires suivent des géodésiques de l'espace temps :

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \quad (23)$$

Ces équations décrivent des lignes d'univers.

Les $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ sont les coefficients de connexion linéaire. Ils peuvent être calculés à partir de la métrique⁷ avec la relation suivante⁸ :

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\alpha g_{\nu\beta} + \partial_\beta g_{\nu\alpha} - \partial_\nu g_{\alpha\beta}) \quad (24)$$

Les seuls coefficients qui ne sont pas nuls sont :

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{a \frac{da}{dt}}{c^2}$$

7. On choisit de prendre t comme variable temporelle, mais on aurait très bien pu prendre ct . Évidemment, le résultat final ne dépend pas de ce choix. La métrique se lit directement sur l'équation (22) : $g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} c^2 & 0 \\ 0 & -a^2(t) \end{pmatrix}$; et cette matrice est diagonale et donc très facilement inversible.

8. On remarquera que $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ est symétrique par rapport à ses deux indices du bas.

$$\Gamma_{10}^1 = \Gamma_{01}^1 = -\frac{\frac{da}{dt}}{a} \rightarrow \text{On reconnaît } H, \text{ le paramètre de Hubble}$$

On aura donc deux équations de géodésiques. On choisit la paramétrisation $\lambda = \tau$ qui est l'abscisse curviligne de la ligne d'univers telle que $(\frac{ds}{d\tau})^2 = c^2$. τ est donc aussi le temps propre⁹. Dans ce cas on a $\frac{dt}{d\tau} = \gamma$ qui est le facteur de Lorentz du lepton. La première équation des géodésiques nous donne :

$$\begin{aligned} \frac{d^2t}{d\tau^2} &= \frac{d\gamma}{d\tau} = -\frac{a(t) \frac{da}{dt} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2}{c^2} \\ \text{Soit } \frac{d\gamma}{dt} &= -\frac{\gamma a(t) \frac{da}{dt} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2}{c^2} \end{aligned} \quad (25)$$

La métrique nous donne :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{c}{a} \sqrt{1 - \gamma^{-2}} = \frac{\beta c}{a} \quad (26)$$

En combinant (25) et (26) on a donc :

$$\frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} \frac{d\gamma}{dt} = -\frac{1}{a} \frac{da}{dt}$$

Dont la solution analytique est $\gamma = \sqrt{1 + \left(\frac{a_1}{a}\right)^2 (\gamma_1^2 - 1)}$. Et on peut finalement l'exprimer facilement en terme de redshift car $a = \frac{a_0}{1+z}$ et $a_1 = \frac{a_0}{1+z_1}$:

$$\gamma = \sqrt{1 + \left(\frac{1+z}{1+z_1}\right)^2 (\gamma_1^2 - 1)} \quad (27)$$

En fait cette relation revient simplement à dire que l'impulsion de l'électron évolue de la même manière suivante :

$$p = p_1 \frac{1+z}{1+z_1} \quad (28)$$

Et c'est vrai pour toutes les particules. Et en particulier dans le cas du photon, son énergie est proportionnelle à l'impulsion et donc elle évolue avec le redshift de la même manière que l'impulsion dans l'équation (16). On remarque aussi que l'équation (27) tends vers l'équation (16) quand l'énergie initiale de l'électron γ_1 est grande. Un électron ultra-relativiste se comporte donc comme un photon.

$$dr = \frac{c}{a(t)} \beta dt \quad (29)$$

Ensuite, on peut calculer la distance parcourue si on repart de l'équation (26), en utilisant (27) et en faisant le changement de variable de t vers z (équation (14)) :

$$dr = -\frac{c}{H_0 a_0} \frac{\beta(z)}{\sqrt{\Omega_M (1+z')^3 + \Omega_k (1+z')^2 + \Omega_\Lambda}} dz$$

Donc finalement :

$$\Delta r = \frac{c}{H_0 a_0} \int_z^{z_1} \frac{\beta(z')}{\sqrt{\Omega_M (1+z')^3 + \Omega_k (1+z')^2 + \Omega_\Lambda}} dz' \quad (30)$$

$$\text{Avec } \beta(z') = \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{1+z'}{1+z_1}\right)^2 (\gamma_1^2 - 1)}}.$$

Le calcul de cette intégrale ne pourra pas se faire analytiquement, on va le faire numériquement, avec une quadrature de Gauss-Legendre [12]. On trace le résultat en figure 10.

9. Attention à ne pas confondre le τ (temps propre) et le τ (profondeur optique).

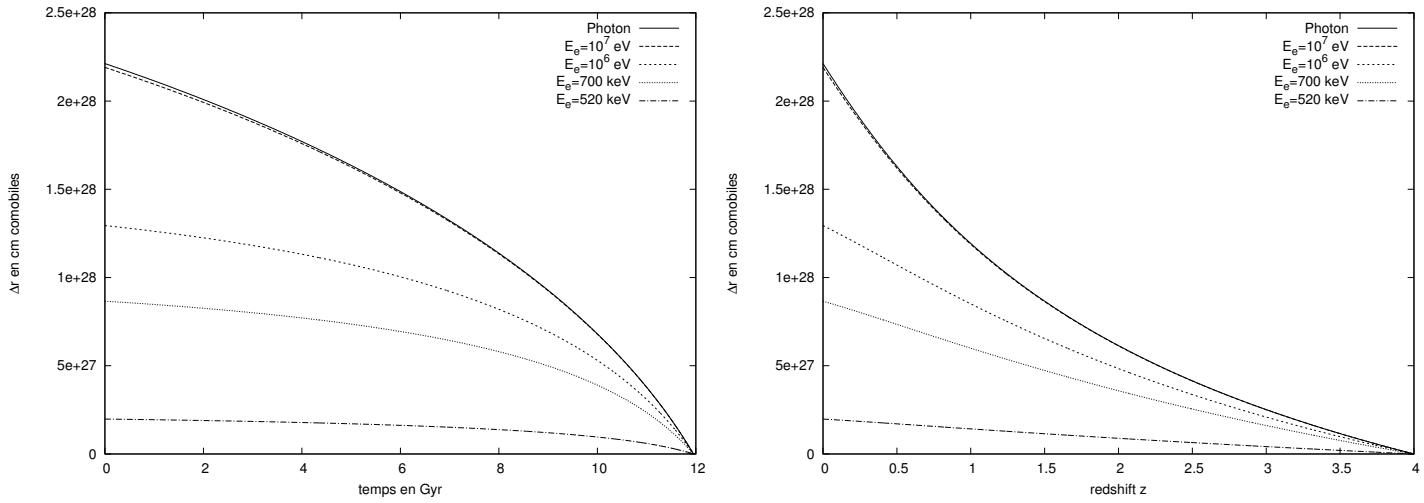


FIGURE 10 – Distance parcourue Δr en fonction du temps lookback et du redshift pour différentes énergies initiales du lepton et pour un photon. Quand l'énergie de l'électron est bien supérieure à son énergie de masse (c'est-à-dire quand $E_e \gg 511$ keV), la courbe tends vers celle d'un photon.

Sur la figure 10 on peut voir que les particules vont décélérer entre leur émission et aujourd'hui (donc en regardant les graphes de droite à gauche). C'est en fait une fausse décélération pour les photons (elle vient du fait qu'on utilise la distance comobile) mais c'est quand même en partie une vraie décélération pour les leptons car ils perdent de l'énergie au cours de l'expansion de l'univers. Le signe moins entre les éléments différentiels de temps et de redshift (voir équation (14)) fait que les particules vont par contre « accélérer en terme de redshift ».

5 Approximation analytique des spectres des cascades

Dans les parties précédentes, j'ai présenté la théorie nécessaire à la modélisation des cascades. Avant de décrire le code qui fait ce travail précisément, je détaille ici un modèle analytique approché de ces cascades. On démarre de photons d'énergies supérieures au seuil de création de paire $\approx 10^{11}$ eV (voir figure 4). La cascade électromagnétique, régie dans notre modèle par les processus de création de paire et de diffusion Compton, va se développer exponentiellement jusqu'à ce que l'énergie des photons secondaires passe en-dessous du seuil de production de paire. On définit $\nu = 2.7kT \approx 6.35 \times 10^{-4}(1+z)$ eV comme l'énergie moyenne d'un photon du CMB pour un redshift proche de 0. A partir d'un moment, les photons résultants des diffusions Compton vont arrêter de faire des paires et donc les électrons vont « se refroidir » en faisant de la diffusion Thomson, diffusant ainsi (principalement) des photons du CMB. La distance typique parcourue par un lepton entre deux interactions Compton est de quelques kpc , et donc le temps typique entre deux interactions est de ~ 3000 ans. On peut établir analytiquement le taux de production $\frac{dN}{dE}$ des photons de la cascade par unité de volume :

$$E^2 \frac{dN}{dE} = \begin{cases} K \left(\frac{E}{\epsilon_x} \right)^{0.5} & \text{si } \epsilon_{min} \leq E \leq \epsilon_x \\ K & \text{si } \epsilon_x \leq E \leq \epsilon_{max} \end{cases}$$

E est l'énergie des photons détectés et N est la densité de photons. La constante K définit la normalisation du taux de production car $K = \frac{dN}{dE}(\epsilon_x)$. Ce résultat analytique est démontré dans les références [16, 17, 18] pour un fond diffus monochromatique.

ϵ_x est l'énergie à partir de laquelle le nombre d'électrons reste à peu près constant. L'énergie seuil de production de paire est d'environ $E_{seuil} = \frac{m^2 c^4}{\epsilon} \approx 2 \times 10^{11}$ eV (voir équation (3) et la discussion juste après cette équation, et aussi la figure 5). Les électrons produits auront pour énergie $\gamma mc^2 = \frac{E_{seuil}}{2}$. En dessous de cette énergie, le nombre d'électrons reste à peu près constant. Ces électrons vont ensuite diffuser dans le régime Thomson des photons du CMB. L'énergie en-dessous de laquelle le nombre d'électrons reste à peu près constant est $\epsilon_x \approx \frac{4}{3}\gamma^2\nu \approx \frac{1}{3}\frac{E_{seuil}^2}{m^2 c^4}\nu$. En dessous de ϵ_x , il n'y a plus d'électrons injectés dans la cascade

et donc le spectre doit être celui de la perte d'énergie d'électrons dans le régime Thomson, caractérisée par une pente de 0.5. Typiquement, on a $\epsilon_x \approx 3 \times 10^7$ eV.

Soit E_γ l'énergie des photons qui vont initier la cascade. $E_e \approx \frac{E_\gamma}{2}$ est une estimation de l'énergie des premiers électrons produits par les photons initiaux (d'énergie E_γ). Dans le régime Thomson, ces électrons vont diffuser des photons du CMB vers des photons d'énergie $\epsilon_{max} \approx \frac{4}{3}\gamma^2\nu = \frac{4}{3}\frac{E_e^2}{m_e^2c^4}\nu = \frac{1}{3}\frac{E_\gamma^2}{m_e^2c^4}\nu$. Dans le spectre, pour des énergie supérieures à ϵ_{max} , il doit y avoir une chute très rapide de l'intensité car peu de photons vont pouvoir être diffusés au-delà de cette énergie. Typiquement, pour le fond diffus considéré ici (voir section 2) et pour les cas présentés en section 5 on a :

$$\epsilon_{max} \approx 8 \times 10^{12} (1+z) \text{ eV} \left(\frac{E_\gamma}{10^{14} \text{ eV}} \right)^2 \text{ et } \epsilon_{max} \approx 2 \times 10^9 (1+z) \text{ eV} \left(\frac{E_e}{10^{12} \text{ eV}} \right)^2$$

La loi de puissance 0.5 dans le cas $\epsilon_{min} \leq E \leq \epsilon_x$ est caractéristique de la perte d'énergie des électrons par diffusion Compton inverse dans le régime Thomson. On peut la justifier de la manière suivante :

- La conservation du flux de particule nous donne $n(\gamma) \frac{d\gamma}{dt} = cste$. $n(\gamma)$ est la densité d'électrons d'énergie γmc^2 .
- La perte d'énergie des électrons par unité de temps est proportionnelle à γ^2 : $\frac{d\gamma}{dt} \propto \gamma^2$. Avec la conservation du flux, on a donc $n(\gamma) \propto \frac{1}{\gamma^2}$.
- L'énergie des photons diffusés dans le régime Thomson est aussi proportionnelle à γ^2 : $E \propto \gamma^2$. On a donc $n(\gamma) \propto \frac{1}{E}$ et $\frac{d\gamma}{dE} \propto \frac{1}{\sqrt{E}}$.
- Le nombre de photons créés par unité de temps dans un intervalle $[E, E+dE]$ est proportionnel au nombre d'électron dans l'intervalle $[g, g+dg]$, donc $\frac{dN}{dt}dE \propto n(\gamma) d\gamma$. On a donc $\frac{dN}{dt} \propto n(\gamma) \frac{d\gamma}{dE}$ et $E^2 \frac{dN}{dt} \propto E^{0.5}$. De plus on a $\frac{dN}{dE} \propto \frac{dN}{dt}$ car $\frac{dE}{dt} = cste$. Donc finalement $E^2 \frac{dN}{dE} \propto E^{0.5}$.

Par contre la pente de 0 dans le cas $\epsilon_x \leq E \leq \epsilon_{max}$, démontrée dans les références [16, 17, 18], n'est pas explicable simplement, et elle n'est de toutes façons pas très robuste avec les résultats du programme présentés en section 5.

L'estimation de ϵ_{min} a été établie lors de ce stage, et elle n'est donc pas discutée dans les références. La loi de puissance en 0.5 doit vraisemblablement disparaître quand E devient plus bas qu'une certaine énergie ϵ_{min} , qui correspond à l'énergie des photons diffusés par les électrons qui n'auront pas le temps de perdre l'essentiel de leur énergie avant d'arriver sur Terre. La perte d'énergie par diffusion Thomson est estimée par :

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{4}{3}c\sigma_T U_p \gamma^2 \quad (31)$$

$$\text{avec } U_p(T) = \frac{aT^4}{mc^2}, \quad a = \frac{8\pi^5 k^4}{15(hc)^3}, \quad T = (1+z)T_0, \quad T_0 = 2.725 \text{ K}$$

On se propose donc de déterminer jusqu'à quelle énergie (adimensionnée) γ_f l'électron va perdre de l'énergie sachant qu'il a une énergie (adimensionnée) initiale γ_i . Pour cela on résout l'équation (31) et cette dernière nous donne comme solution :

$$\gamma_f = \left(\frac{1}{\gamma_i} + \frac{4}{3} \frac{c\sigma_T}{H_0} \frac{aT_0^4}{mc^2} \int_0^{z_0} \frac{(1+z)^3 dz}{\sqrt{\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_\Lambda}} \right)^{-1} \quad (32)$$

On n'a pas pris en compte l'effet cosmologique de la perte d'énergie de l'électron à cause de l'expansion de l'univers, mais ce dernier produira un facteur de l'ordre de l'unité, qui n'est pas très important pour ce calcul d'ordre de grandeur. Les photons du CMB diffusés par un électron d'énergie (adimensionnée) γ_f auront une énergie aux alentours de :

$$\epsilon_{min} = \frac{4}{3}\gamma_f^2 \nu_{moy} \quad (33)$$

ν_{moy} est l'énergie moyenne des photons du milieu entre $z = 0$ et $z = z_0$, en général aux alentours de 10^{-3} eV. On s'attend donc à ce que la loi de puissance de 0.5 s'étende jusqu'à ce que $E < \epsilon_{min}$. Comme valeurs typiques de γ_f et ϵ_{lim} on peut regarder un cas discuté dans la section 7.2. Dans ce cas on a une source de photons de 10^{14} eV située à un redshift $z = 0.0308$ et on trouve $\gamma_f \approx 1.5 \times 10^4$ et $\epsilon_{min} \approx 3.5 \times 10^5$ eV

Dans la section 7.2, je vais tester l'exactitude des relations analytiques présentées ici.

6 Simulation Monte-Carlo

Dans cette partie, je vous présente la méthode numérique Monte-Carlo que j'ai adopté pour modéliser les cascades. Ces méthodes procèdent par tirages aléatoires successifs et "suivent" particules le long de leur trajectoire, au fil de leurs interaction successives. Je vais présenter en particulier comment tirer aléatoirement la distance parcourue entre deux interactions, l'énergie du photon cible (CMB ou EBL) mis en jeu à chaque interaction, ou encore le résultat de cette interaction. Je vais également présenter quelques techniques d'optimisation utiles pour améliorer le temps de calcul.

6.1 Méthode d'inversion pour tirer un redshift d'interaction

La méthode d'inversion est décrite en détails dans la thèse de Julien Malzac [8]. On va ici présenter les choses de manière plus brève.

On part d'une particule à un redshift z_1 . On veut tirer une certaine profondeur optique d'interaction à laquelle va correspondre un redshift d'interaction $z_{int} < z_1$. La probabilité d'interaction (comprise entre 0 et 1) à une profondeur optique τ_{int} est donnée par :

$$P = 1 - e^{-\tau_{int}} \quad (34)$$

τ_{int} peut être considéré comme équivalent à une mesure adimensionnée de la distance parcourue dans le milieu intergalactique. La méthode d'inversion consiste tout d'abord à tirer une nombre aléatoire x compris entre 0 et 1 qui correspondra à P . Pour cela on utilise le générateur de nombre aléatoire `ran0` des numerical recipies [12]. Une fois ce nombre tiré, la profondeur optique d'interaction correspondante sera donnée en inversant (34), ce qui donne :

$$\tau_{int} = -\ln(1-x)$$

On peut ensuite trouver le redshift d'interaction z_{int} qui correspond au τ_{int} en inversant l'intégrale (13). Cette dernière n'est pas inversible analytiquement, mais on peut l'inverser numériquement, à l'aide d'une dichotomie par exemple (c'est ce qui est fait dans mon code).

6.2 Conditions limites

On va définir ici deux conditions limites qui correspondront à la détection des photons au niveau de la Terre.

Premièrement, il peut arriver que l'on tire des redshifts d'interactions pour les photons (ou des leptons) qui ne correspondent pas à une interaction entre leur émission et leur arrivée sur Terre : ils interagiront plus tard. Or, nous voulons prendre en compte les photons (leurs énergies et leur positions) tels qu'ils seront au moment de leur détection, c'est-à-dire à un redshift limite z_{lim} (qui n'est pas nul en général¹⁰) où la particule arriverait au niveau de la distance de la Terre si elle n'interagissait pas en chemin. On peut éviter de tirer des redshifts d'interaction inférieurs à z_{lim} en appliquant plutôt la méthode d'inversion à la quantité suivante :

$$xp_0 = 1 - e^{-\tau}$$

$$\text{Avec } p_0 = 1 - e^{-\tau(z_{lim})}$$

Il faudra donc aussi tester si x , le nombre aléatoire tiré uniformément entre 0 et 1, est supérieur à p_0 . Si c'est le cas, alors on considère que la particule ne va pas interagir avant z_{lim} et on calcule donc ses caractéristiques lors de son arrivée au niveau de la Terre (donc à $z = z_{lim}$).

10. Précision : si un photon est émis à un redshift z_0 et à la distance comobile l correspondante (définie juste après) et qu'il arrive tout droit sur la Terre sans interaction, alors son redshift limite z_{lim} est nul. Si jamais une particule émise au même redshift z_0 a une trajectoire légèrement déviée par rapport à ce photon, alors elle atteindra la Terre à un redshift z_{lim} qui sera légèrement négatif.

Deuxièmement, on va calculer à chaque étape la distance radiale parcourue par la particule. Si cette distance est supérieure à une certaine limite l correspondant à la Terre, alors on va la considérer comme détectée, et on calcule ses caractéristiques à z_{lim} . La distance limite peut être choisie n'importe comment (la source peut à priori être n'importe où dans l'univers), mais un choix judicieux peut être la distance comobile :

$$l = \frac{c}{H_0} \int_{z_{lim}}^{z_1} \frac{dz'}{(1+z) \sqrt{\Omega_M (1+z')^3 \Omega_k (1+z')^2 + \Omega_\Lambda}} \quad (35)$$

Si tout se passe bien, l'énergie de l'ensemble des particules détectées au niveaux de la Terre devrait être très proche de l'énergie des photons γ initiaux divisée par $(1+z_{ini})$: ce sera un moyen de vérifier le bon fonctionnement de la simulation numérique. En effet, l'apport énergétique du CMB et de l'EBL au bilan total d'énergie est assez faible. Plus précisément :

- l'énergie des photons de l'EBL est au maximum d'une dizaine d' eV , celle des photons du CMB bien inférieure à 1 eV , et comme il n'y aura que quelques dizaines d'interactions de production de paire, l'apport en énergie totale de ces photons est négligeable, car on démarre avec des photons d'énergies de l'ordre de 100 TeV.
- l'énergie des photons du CMB est au grand maximum de 1 eV. Donc même si plusieurs million d'interaction Compton ont lieu entre le CMB et les leptons, leur apport à l'énergie totale de la cascade sera très faible relativement à l'énergie totale, car on va démarrer avec des photons d'énergies de l'ordre de 100 TeV.
- Les interactions Compton avec le l'EBL sont très peu probables et les photons de l'EBL ont au maximum une énergie d'une dizaine d' eV , donc leur apport énergétique est encore plus négligeable.

6.3 Tirage aléatoire des photon du milieu (CMB et EBL).

Pour tirer un photon du milieu (c'est-à-dire tirer une énergie et une direction) on utilise des techniques Monte-Carlo qui sont déjà bien expliquées dans la thèse de Julien Malzac [8] (en particulier pour tirer une direction de manière isotrope). J'ai choisis décrire ici une procédure que j'ai du modifier (tirage d'un photon du CMB) et une que j'ai du programmer moi-même (tirage d'un photon de l'EBL).

6.3.1 Tirage d'un photon du CMB

Pour tirer un photon du CMB, on utilise la méthode décrite dans Pozdnyakov et al. [19] et aussi dans la thèse de Julien Malzac [8]. Il faut d'abord tirer quatre nombres aléatoires $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$. A partir de ξ_1 on définit ensuite α tel que :

$$\alpha = 1 \quad \text{si} \quad (1.202)^{-1} \xi_1 < 1$$

$$\alpha = m \quad \text{si} \quad \sum_{j=1}^{m-1} j^{-3} \leq 1.202 \xi_1 < \sum_{j=1}^m j^{-3}$$

Où $m = 2, 3, \dots$ L'énergie du photon du CMB est alors :

$$\epsilon = \frac{-kT_0 (1+z_{int})}{\alpha} \ln (\xi_2 \xi_3 \xi_4)$$

$T_0 = 2.725$ K étant la température du CMB [9]. Par rapport à ce qui est présenté dans la thèse de Julien Malzac, j'ai simplement ajouté le facteur $(1+z_{int})$.

6.3.2 Tirage d'un photon de l'EBL

Pour tirer un photon de l'EBL on calcule d'abord le spectre d'énergie $n_{EBL}(\epsilon, z_{int})$ des photons de l'EBL à partir du fichier de Dominguez et al. [7] (ce qui est fait dans la section 2.2.1) et on applique ensuite une méthode de réjection de Von Neumann [8]. Les valeurs tabulées contiennent des énergies bornées entre ϵ_{min} et ϵ_{max} . Il a fallut que j'adapte la méthode pour pouvoir tirer les énergies logarithmiquement (car le spectre est très piqué en échelle linéaire, comme on peut le déduire de la figure 2).

Pour appliquer cette méthode :

- (i) on tire deux nombres aléatoires ξ_1 et ξ_2 .
- (ii) A partir de ces nombres on peut alors obtenir une valeur dans le spectre et une valeur dans les énergies (il faut tirer les énergies logarithmiquement) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \text{eps} &= \log(\epsilon_{max}) + \xi_2 (\log(\epsilon_{max}) - \log(\epsilon_{min})) \\ N &= \xi_2 \max(\epsilon n_{EBL}(\epsilon, z_{int})) \end{aligned}$$

$\epsilon n(\epsilon, z_{int})$ désigne le vecteur des produits terme à terme des vecteurs ϵ et $n(\epsilon, z_{int})$.

- (iii) On regarde ensuite la valeur¹¹ de $\text{eps} \times n(\text{eps}, z_{int})$:

Si $N < \text{eps} \times n(\text{eps}, z_{int})$ alors on garde eps

Si $N \geq \text{eps} \times n(\text{eps}, z_{int})$ alors on revient au (i)

6.4 Modélisation Monte-Carlo des interactions.

6.4.1 Production de paire

On veut modéliser l'interaction de production paire elle-même, c'est-à-dire connaître les propriétés (énergie et directions) des électrons et positrons résultants à partir des propriétés (énergies et directions) des photons initiaux. Pour cette modélisation j'ai repris et adapté des morceaux de code développés par Julien Malzac. Je vais simplement décrire ici ce que j'ai modifié, toutes les formules et les détails étant présents dans sa thèse [8]. J'ai brièvement vérifié leur bon fonctionnement avant de continuer.

Par rapport au code que m'a donné Julien, j'ai dû prendre en compte le fait qu'il faille tirer soit sur un photon du CMB, soit sur un Photon de l'EBL. Ce choix se fait en faisant un tirage aléatoire sur les rapports entre les taux d'interactions dû à chaque composante du milieu prise séparément avec le taux interaction en considérant les deux composantes à la fois. J'ai dû aussi rajouter les effets cosmologiques sur les énergies des photons et des leptons (voir section 4).

6.4.2 Diffusion Compton

Comme pour la production de paire, j'ai repris et adapté des un code développé par Julien Malzac. Ce code est basé sur la méthode présentée par Pozdziakov et al. [19] et reprise dans la thèse de Julien Malzac [8] dans une version adaptée pour des électrons ultra-relativistes. J'ai tout d'abord vérifié le bon fonctionnement de ces routines. Ensuite j'ai du, comme pour la production de paire, prendre en compte le fait qu'il faille tirer soit sur un photon du CMB, soit sur un Photon de l'EBL (même si les interactions Compton avec un photon de l'EBL sont très rares) et les effets cosmologiques. J'ai dû également rajouter un calcul pour déterminer la direction de l'électron après l'interaction, car à la base le code de Julien considérait un champ d'électrons isotropes, ce qui n'est évidemment pas mon cas ici.

6.5 Techniques pour accélérer les calculs numériques

Le nombre de particules à traiter dans la cascade va croître exponentiellement au cours du temps. Pour certaines simulations, le temps de calcul peut donc être trop long. On a donc besoin d'utiliser des techniques pour d'accélérer les calculs. Je vais présenter ici deux techniques : l'échantillonnage pondéré et l'accélération des interactions Compton. Dans le code Elmag, l'échantillonnage pondéré est utilisé, mais pas la technique d'accélération des interactions Compton présentée ici.

Les particules sont stockées dans une pile qui contient toutes les particules qu'il reste à traiter à un moment donné de la simulation. A chaque particule de la cascade est associé un poids qui correspond en fait à un nombre de particules ayant les mêmes caractéristiques. Pour faire le spectre final, il faudra multiplier par le poids de ces particules quand il faudra en compter leur nombre.

11. On précise bien que eps est la valeur de l'énergie tirée aléatoirement et ϵ est un vecteur contenant toutes les énergies tabulées entre ϵ_{min} et ϵ_{max} .

6.5.1 Échantillonnage pondéré

A chaque étape, chaque particule créée par production de paire (l'électron et le positron) ou diffusion Compton inverse (même si pour la diffusons Compton les particules ne sont pas réellement créées) est ajoutée à cette pile de particules et les particules interagissant sont enlevées de cette pile.

A chaque interaction on calcule les deux rapport d'énergie y_1 et y_2 entre l'énergie de chaque particule produite et l'énergie totale avant l'interaction. Cette dernière est en pratique égale à l'énergie du photon γ ou de l'électron incident, car les énergies de photons du CMB et de l'EBL (\sim eV) sont très faibles comparées aux énergies des électrons (\gg 511 keV), ou des photons suffisamment énergétiques pour pouvoir créer des paires ($> 10^{11}$ eV, voir figure 4).

On choisit ensuite un facteur d'échantillonnage α_s compris entre 0 et 1. Chaque particule produite lors de l'interaction est rajoutée à la pile avec la probabilité y^{α_s} , sinon on ne la rajoute pas et elle ne sera pas traitée. En compensation, on va multiplier le poids des particules gardées par le facteur y^{α_s} . Donc si on prend $\alpha_s = 0$, cela n'aura aucun effet, il n'y aura pas d'échantillonnage ; et si on prend $\alpha_s = 1$ on ne gardera en moyenne qu'une particule secondaire par interaction. En pratique, il va être nécessaire de tirer un grand nombre de photons initiaux (au moins plusieurs centaines) pour que l'énergie soit conservée quand on utilise cette méthode.

6.5.2 Accumulation des interactions Compton.

La profondeur optique des interaction Compton est assez importante (voir figure 8). Donc entre un redshift de création de l'électron z_0 et l'arrivée de l'électron à $z \approx 0$, il va y avoir un nombre énorme (plusieurs million) d'interactions Compton. Pour diminuer le temps de calculs on peut utiliser une approximation pour accumuler les interactions Compton. Le but est de calculer vraiment qu'une seule interaction Compton, et de dire qu'elle va compter pour un certain nombre χ d'interactions.

On considère tout d'abord l'échange moyen d'énergie (adimensionnée par mc^2) dû à la diffusion Compton inverse (dans le régime Thomson) :

$$\Delta\gamma = \frac{4}{3}\gamma^2\bar{\nu} \quad (36)$$

Pour le CMB on a $\bar{\nu} = 2.7 \frac{kT_{CMB}(1+z)}{mc^2}$ et pour l'EBL on ne va pas considérer d'accumulation car plus de 99,9% des interactions Compton sont dues au CMB (voir figure 5 pour une comparaison des taux d'interaction) et donc le gain en temps de calcul sera minime.

e_i est l'énergie *cinétique*¹² de l'électron avant l'interaction Compton. On choisit ensuite un certain seuil d'accumulation $\eta = \frac{\Delta e_i}{e_i}$ qui correspond au transfert relatif d'énergie cinétique, en général inférieur à 1%, qui va servir à calculer une valeur du nombre d'interactions accumulées. On teste¹³ si e_i est inférieure à $E_{max} = \frac{3\eta}{4\bar{\nu}} - 2$. Si c'est le cas alors on fait l'accumulation des interactions Compton.

L'équation (36) nous donne $\Delta e_i = \frac{4}{3}e_i(e_i + 2)\bar{\nu}$ et $\Delta E_{max} = \frac{4}{3}E_{max}(E_{max} + 2)\bar{\nu}$, donc le nombre d'interaction qui vont être traitées simultanément est de :

$$\chi = \frac{\Delta E_{max}}{\Delta E} = \left(\frac{E_{max} + 2}{e_i + 2} \right) \frac{E_{max}}{e_i}$$

Mais c'est en fait valeur arbitraire, que l'on essaye de choisir de façon à ce qu'elle pose le moins de problèmes possible¹⁴, et en pratique il sera moins problématique de prendre $\chi = (E_{max} + 2) / (e_i + 2)$ car ce χ sera plus petit. L'énergie de l'électron après avoir subit cette accumulation de χ interactions Compton sera de :

$$e_f = e_i + \chi(e_{ap} - e_i)$$

(ou e_{ap} est l'énergie de l'électron après de l'unique interaction Compton que l'on a calculé)

12. Qui est très proche de l'énergie de l'électron car les électrons considérés ici sont en général ultra-relativistes. On a donc aussi $\Delta\gamma \approx \frac{4}{3}(\gamma^2 - 1)\bar{\nu}$

13. E_{max} prend cette valeur du fait que l'on a dans le cas maximum $E_{max} = \gamma - 1$ et donc $\eta = \frac{\Delta E_{max}}{E_{max}} = \frac{4}{3} \frac{(\gamma^2 - 1)\bar{\nu}}{E_{max}} = \frac{4}{3} \frac{E_{max}(E_{max} + 2)\bar{\nu}}{E_{max}} = \frac{4}{3}(E_{max} + 2)\bar{\nu}$ et donc $E_{max} = \frac{3\eta}{4\bar{\nu}} - 2$.

14. Le « problème » correspond au fait que e_f , définit juste après, puisse devenir négatif, du fait des fluctuation statistiques autour de $\Delta\gamma$.

De plus l'angle de diffusion Compton sera modifié de la manière suivante :

$$\alpha_f = \sqrt{\chi} \alpha_{ap}$$

(où α_{ap} est l'angle de diffusion après l'unique interaction Compton que l'on a réalisé)

Et pour prendre en compte cette modification en terme pour la direction (u, v, w) on procède comme suit. Soit (u_i, v_i, w_i) la direction initiale de l'électron et soit (u_{ap}, v_{ap}, w_{ap}) sa direction après l'interaction. Leur différence est donnée par $(\Delta u, \Delta v, \Delta w) = (u_{ap} - u_i, v_{ap} - v_i, w_{ap} - w_i)$. La direction de l'électron résultant des diffusions Compton cumulées sera donnée par :

$$\begin{pmatrix} u_f \\ v_f \\ w_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_i + l\Delta u \\ v_i + l\Delta v \\ w_i + l\Delta w \end{pmatrix} \quad \text{avec } l = \frac{\cos(\alpha_f) - 1}{u_i\Delta u + v_i\Delta v + w_i\Delta w}$$

e_f peut éventuellement devenir négatif si χ (et donc η à la base) est trop grand. Il ne faudra pas oublier de faire cette vérification dans le programme. Il ne faudra pas non plus oublier d'appliquer le facteur χ sur les poids des photons résultants de ces interactions Compton, mais aussi de diviser la section efficace de l'interaction par χ pour le calcul de la profondeur optique.

Cette méthode d'accélération ne pose pas de problème au niveau la conservation de l'énergie, mais elle peut quand même modifier les spectres obtenus si on choisit un facteur η trop grand (en général quand il est supérieur à 0.01).

7 Présentation du programme de modélisation des cascades électromagnétiques.

7.1 Structure du programme

Je vais présenter ici brièvement le programme de simulation des cascades électromagnétiques réalisé lors de ce stage. Je vais en particulier détailler les différents fichiers et certaines routines qui me semblent importantes pour comprendre le fonctionnement global du code.

Le programme est constitué de plusieurs fichiers. Le fichier `Cascades.f95` contient le programme principal. Il faut modifier ce fichier pour changer le nombre et les propriétés des particules initiales à la cascade. Le fichier `Modules.f95` contient toutes les variables globales et certains paramètres du programme, en particulier `alphaS` et `SeuilAccCompton` qui régulent le niveau d'échantillonnage pondéré (voir section 6.5.1) et d'accumulation du calcul des interactions Compton (voir section 6.5.2). Le fichier `Integrands.f95` contient l'ensemble des fonctions qu'il va falloir intégrer. Le fichier `RoutinesFonctions.f95` contient toutes les routines et les fonctions qui ne sont pas intégrées. Le fichier `EBL` contient les intensités λI_λ (en $nW/m^2/Sr$) de l'EBL pour différents redshifts et énergies (la première colonne donnant en fait les longueurs d'ondes λ) tandis que `z_EBL` contient les redshifts correspondants. Voir section 2.2 pour une description complémentaire de ce fichier.

Détailons maintenant certaines fonctions et routines :

- **subroutines EBLecture et NeInterpol.** La subroutine `EBLecture` est appelée une seule fois au début du programme principal pour lire les fichiers `EBL` et `z_EBL` et va convertir les intensités contenues dans `EBL` en densités (voir section 2.2.1). La routine va ensuite stocker ces densités dans la matrice variable globale `nez`. La subroutine `NeInterpol` calcule l'interpolation bilinéaire (voir section 2.2.2) des valeurs de la matrice `nez` pour l'énergie (qui doit être adimensionnée par mc^2) et le redshift spécifié.
- **fonctions gauleg, qgauss, qgaussZ et qgaussDr.** La fonction `gauleg` calcule les abscisses et les coefficients pour la quadrature de Gauss-Legendre. Elle est appelée une seule fois au début du programme. La fonction `qgauss(func, a, b)` calcule l'intégrale de la fonction `func` (qui se trouve forcément dans le fichier `Integrands.f95`) entre `a` et `b`.
- **subroutines distancePhoton et trajectoireLepton.** Ces subroutines calculent respectivement le parcours d'un photon et d'un lepton. Elles prennent en argument les redshift initiaux et finaux, l'énergie, la position et la direction initiale et calculent l'énergie, la position et la direction finale (cette dernière ne change pas par rapport à l'initiale si ne met pas d'EGMF).

- **subroutines** TrouveZlimPhot et TrouveZlimLep. Ces subroutines calculent le redshift limite où la particule serait détectée si n'interagissait plus.
- **subroutines** CalculZintPairprod et CalculZintCompton. Ces deux subroutines calculent, pour un redshift et un redshift limite donnés (ce dernier étant obtenu grâce aux subroutines TrouveZlimPhot et TrouveZlimLep), le redshift d'interaction pour, respectivement, la production de paire (donc pour un photon) et pour la diffusion Compton (donc pour un électron). Elle met à jour les variables globales vaInteragir et duetoCMB. vaInteragir indique si l'interaction va avoir lieu. Dans le cas où elle a lieu, duetoCMB indique si elle est due au CMB (sinon elle est forcément due à l'EBL).

Les subroutines suivantes sont très fortement inspirées du programme Elmag [4] :

- **subroutine** get_particle. Cette subroutine permet de tirer la particule de la pile (variable globale par) avec l'énergie la plus faible et décrémente le compteur du nombre de particules dans la pile (qui est la variable globale TaillePile).
- **subroutine** store_particle. Rajoute la particule spécifiée dans la pile et classe la pile par rapport aux énergies, de façon à ce que la particule suivante extraite de la pile par get_particle soit celle de plus basse énergie (parmi les particules contenues dans la pile). Si on choisit de mettre l'échantillonnage pondéré (c'est-à-dire si la variable alphaS est non nulle), cette routine va aussi faire un test pour savoir si la particule est ajoutée à la pile ou non.

Le programme va créer trois fichiers de sortie :

- Le fichier **Result** où le programme enregistre toutes les particules (photons ou leptons) détectées et leur propriétés. Il contient un tableau dont les colonnes donnent de gauche à droite : la nature de la particule¹⁵, son redshift d'arrivée (dont on peut déduire le temps), son énergie, ses coordonnées (x, y, z), sa direction (u, v, w) et enfin son poids. De ce fichier, on peut en déduire les spectres, les retards temporels ou les positions angulaires des particules. Ce fichier est en général assez gros, donc par soucis de mémoire on peut toujours désactiver cette sortie en commentant les lignes appropriées du programme.
- Le fichier **1ep** où le programme enregistre tous les leptons et leur propriétés au moment de leur création. Cela s'avère utile, en particulier pour pouvoir calculer ϵ_{min} qui nécessite de connaître approximativement le redshift moyen des électrons au moment où ils sont créés par production de paire.
- Le fichier **Spec** contient un spectre calculé (indépendamment du fichier **Result**) entre les deux énergies Ed et Em et avec un nombre de bin **n_bin**. Ces paramètres sont spécifiés au début du fichier **Cascade.f95**. Cela permet d'obtenir le spectre en énergie sans devoir traiter le fichier **Result** (si par exemple ce dernier est trop gros).

¹⁵. Qui est un entier qui vaut 0 pour photon, -1 pour un électron et 1 pour un positron.

7.2 Quelques résultats de mon programme

Je vais présenter ici quelques résultats produits par le programme développé lors de ce stage dans différentes configurations intéressantes et comparer mes spectres avec ceux d'Elmag. On pourrait évidemment tester bien d'autres configurations pour étudier divers problèmes astrophysiques. Des idées sont données dans les perspectives, en section 9.

Premièrement, dans les figures 12 et 11 on se place dans un cas réaliste : le blazar *Mrk 421* (redshift de 0.0308). Environ 1.26×10^9 photons secondaires sont détectés, mais je n'en ai représenté qu'une partie la figure du bas de la figure 11. Le champ de vue du télescope MAGIC est de 3° . Celui du télescope HESS est de 5° . Si on considère que la PSF de ces deux instruments est de 0.1° pour ces énergies, la « tâche » de hautes énergies de la figure 12 qui fait environ 0.02° n'est donc pas détectable avec ces instruments dans ce cas là (où l'on considère uniquement la diffusion Compton et la production de paires). Par contre la présence d'un champ magnétique extragalactique (EGMF) avec une intensité appropriée peut étendre cette tache sans modifier de manière significative l'énergie des particules à l'arrivée et donc rendre cette tache éventuellement mesurable. Dans la référence [20] on peut voir que la tache occupe environ 8° pour une EGMF de 10^{-14} G et environ 2° pour un EGMF de 10^{-15} G.

On peut ensuite comparer ce spectre avec les formules analytiques présentées dans la section 5. Dans le spectre en figure 11 on voit bien une pente de 0.5 pour des énergies inférieures à $\epsilon_x \approx 3 \times 10^7$ eV. On a bien un maximum aux alentours de $\epsilon_{max} \approx 8 \times 10^{12}$ eV. Par contre le spectre entre ϵ_x et ϵ_{max} n'est pas constant, comme le prévoit la forme du spectre dans la section 5. Les photons de ce blazar sont émis avec un redshift de 0.0308 donc si on prend un redshift moyen où les électrons sont créés de $z_0 \sim 0.01$ (on peut lire cette valeur dans le fichier `1ep` où le programme écrit tous les leptons et leur propriétés au moment de leur création par production de paire) et avec le modèle d'univers de concordance (voir section 3.3) on trouve que $\gamma_f \approx 1.5 \times 10^4$ (voir section 5 pour la définition de ce terme et des suivants). Ce qui nous donne $\epsilon_{lim} \approx 3.5 \times 10^5$ eV (voir équation (33)). En dessous de cette énergie, on perd bien la pente de 0.5 sur la figure 11.

Pour les figures 13 et 14, on s'est placé dans le cas où on démarre d'un paquet d'électrons émis à un redshift $z = 2$ avec une énergie de 10^{12} eV. Environ 740 million de photons secondaires sont détectés, mais je n'en ai représenté qu'une partie la figure du bas de la figure 13. Les photons secondaires ne produiront pas de paires électron/positron car leurs énergies seront toujours inférieures au seuil de $\sim 10^{11}$ eV. Dans ce cas là, on a $\epsilon_{lim} \sim 1$ eV donc on ne voit pas sur ce graphe la pente de 0.5 disparaître quand l'énergie baisse. On a bien un maximum du spectre pour $\epsilon_{max} \approx 6 \times 10^9$ eV. ϵ_x n'est pas défini dans ce cas puisqu'il n'y a pas de production de paires. La taille de la tâche est ici aux alentours de 1° . Donc elle serait à priori observable avec HESS ou MAGIC pour une PSF de 0.1° . Mais ce n'est pas un cas très réaliste, en particulier à cause de la non-présence de l'EGMF.

On constate aussi en comparant les figures 12 et 14 que plus l'énergie des particules initiales est élevée, plus la tâche est petite. Il serait intéressant d'étudier en détails cette évolution et de savoir si elle est toujours présente si on inclus l'EGMF.

On peut aussi remarquer que les spectres des figures 11 et 13 présentent un peu de bruit. Mais en fait si on avait tiré un nombre de photons initiaux plus grand les spectres seraient plus lisses. Les spectres auraient également été plus lisses si on avait utilisé une facteur d'échantillonnage pondéré α_s plus petit (il est à 0.5 dans les deux cas présentés ici). Avec les méthodes statistiques Monte-Carlo, plus on lance de photons (ou moins on échantillonne les particules secondaires), plus les résultats sont précis, mais plus le temps de calcul est important. Tirer 300 photons initiaux avec $\alpha_s = 0.5$ était un bon compromis rapidité/fiabilité.

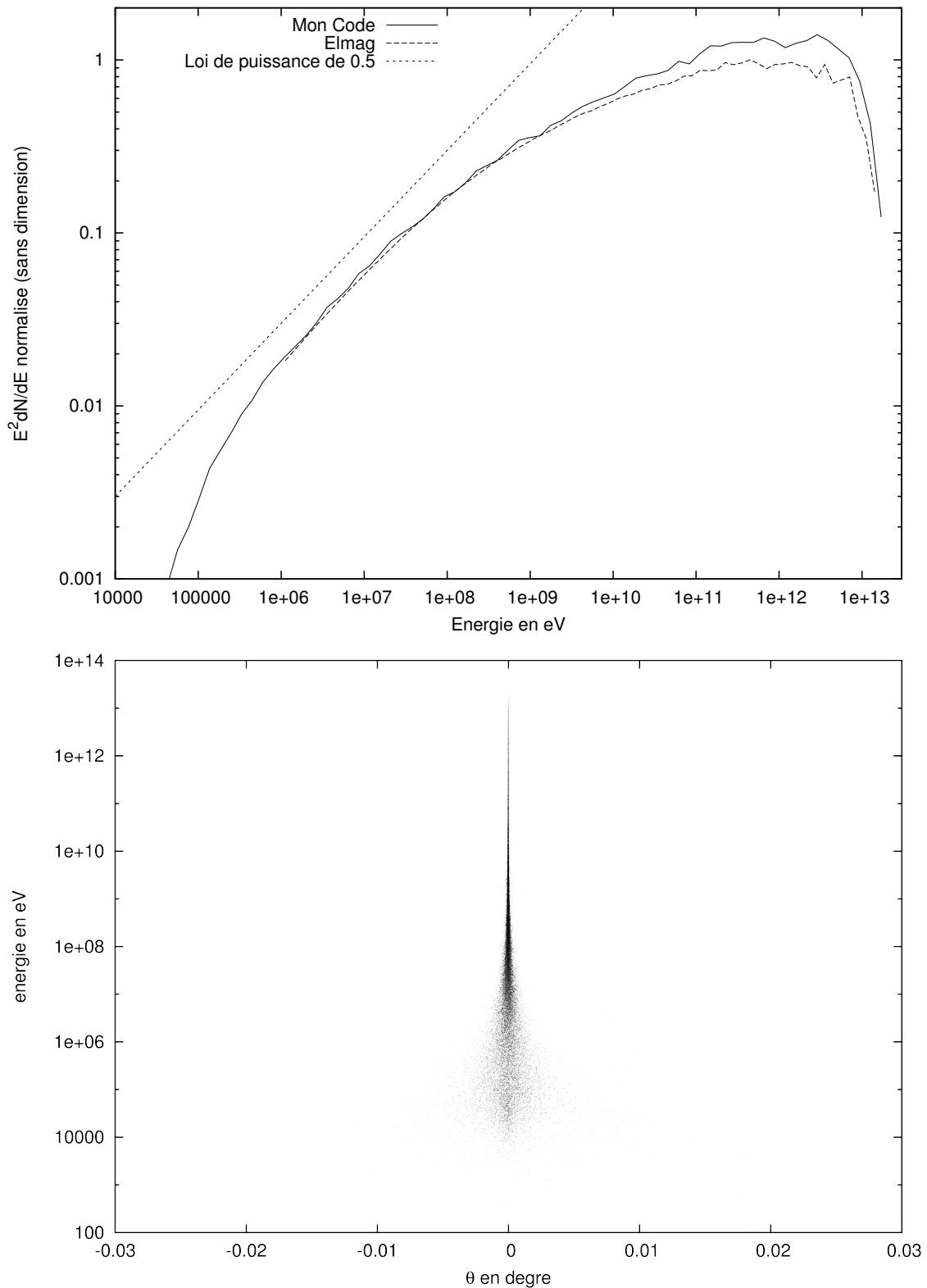


FIGURE 11 – En haut : Spectre pour d’arrivée avec initialement 300 photons injectés à $z = 0.0308$ avec une énergie de 10^{14} eV, l’angle d’ouverture du jet est nul. L’accord entre mon code et Elmag est bon sur les énergies basses. Dans les plus hautes énergies, il y a un excès d’énergie dans mon code par rapport à Elmag. La différence est certainement due à l’utilisation de modèles d’EBL différents.
En bas : Distribution angulaire de l’énergie en terme de θ , pour le même cas. On part de 300 photons injectés à $z = 0.0308$ avec une énergie de 10^{14} eV.

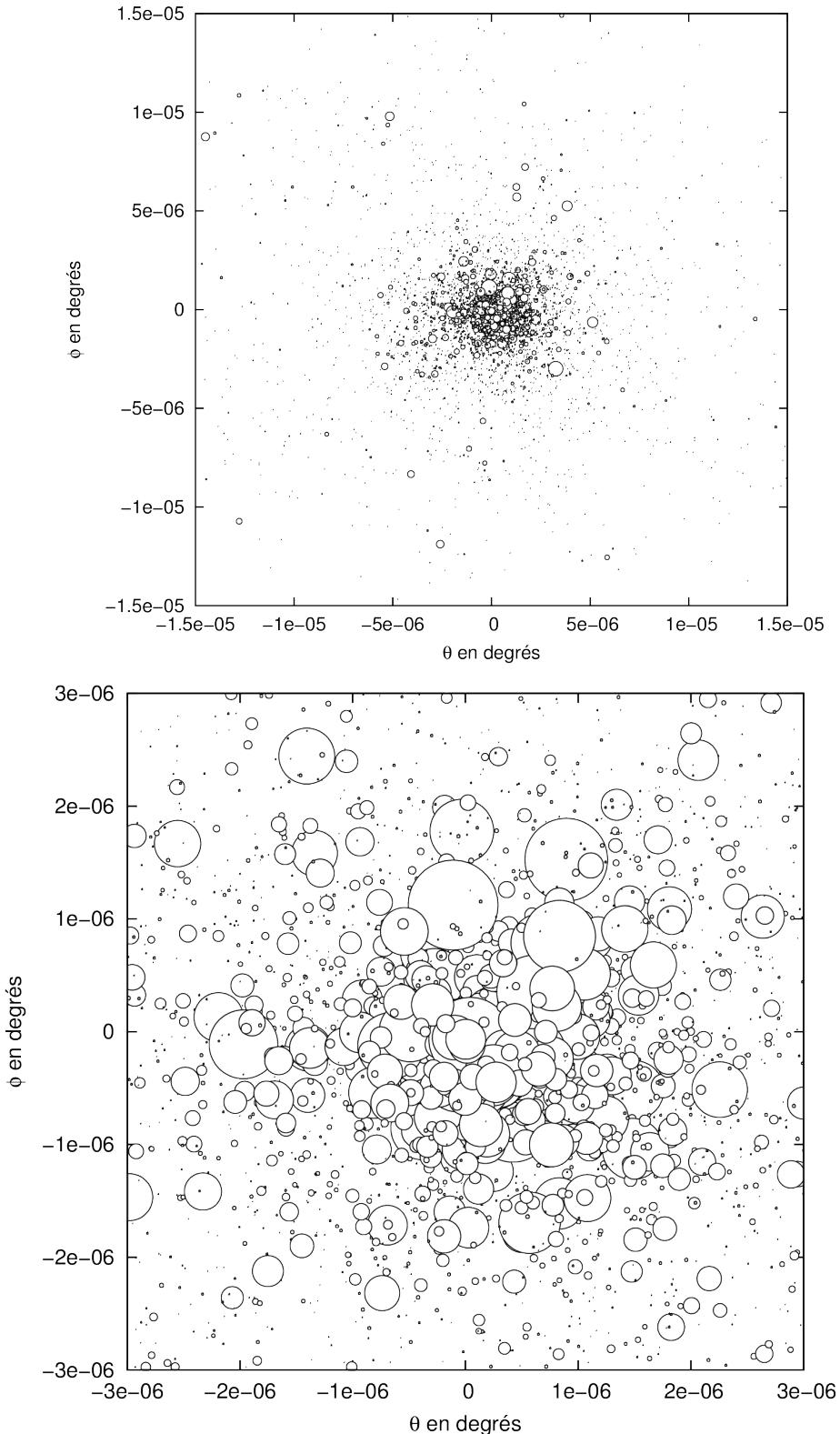


FIGURE 12 – Deux niveaux de zoom pour les positions d’arrivée et énergies des photons primaires et secondaires de la cascade pour une source ponctuelle située à un distance lumineuse $D_{lum} = 122\text{Mpc}$ (soit un redshift de $z = 0.0308$, et cela correspond à la distance du blazar Mrk 421). On suppose que le blazar a émis 300 photons avec une énergie de 10^{14} eV. L’effet du champ magnétique extragalactique n’est pas pris en compte. Le rayon des cercles est proportionnelle à l’énergie des particules qui arrivent (essentiellement des photons). Les plus gros cercles correspondent à des énergies de 20 TeV et les plus petits cercles (qui apparaissent comme des points en fait) correspondent à des énergies de 100 eV (voir figure précédente).

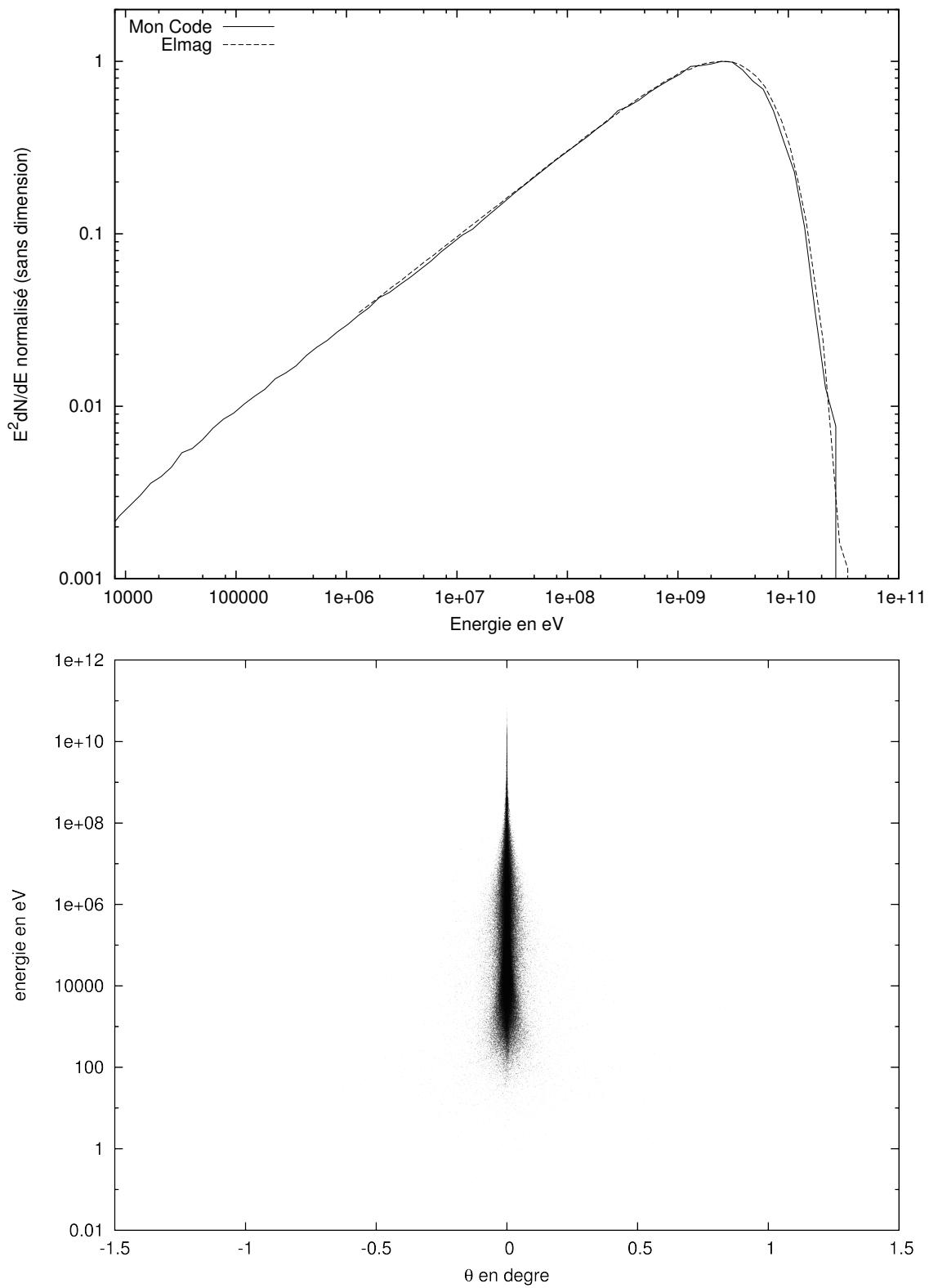


FIGURE 13 – En haut : Spectre pour des électrons émis à $z = 2$ avec une énergie de 10^{12} eV. L'accord avec Elmag est très bon (les différences relatives sont inférieures à 5% sur la grande majorité du spectre). En bas : Distribution angulaire des énergies pour le même cas.

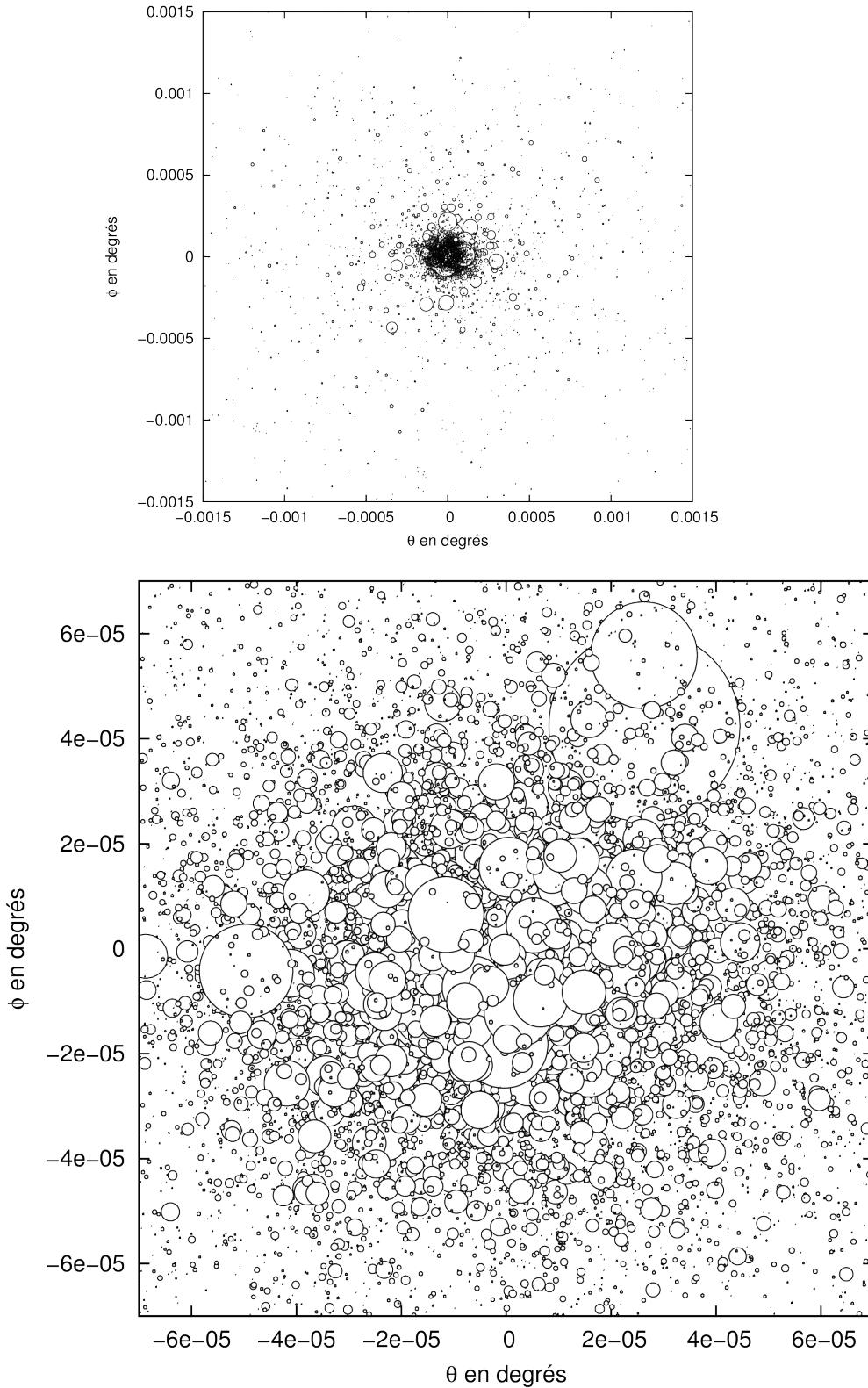


FIGURE 14 – Deux niveaux de « zoom » pour les positions d’arrivée et énergies des photons secondaires (il n’y a pas de photons primaires puisqu’on démarre d’électrons). La cascade a pour origine une source ponctuelle d’électrons d’énergie de 10^{12} eV située à un redshift de $z = 2$ (l’étendue angulaire du jet est nulle). On a sélectionné uniquement une particule sur dix pour plus de lisibilité. L’effet du champ magnétique extragalactique n’est pas pris en compte. Le rayon des cercles est proportionnel à l’énergie des particules qui arrivent. En comparant avec la figure 13 on voit que plus gros cercles correspondent à une énergie d’environ 50 GeV et les plus petits (les points) à une énergie d’environ 1 eV.

8 Effets du champ magnétique extragalactique

Jusqu'ici, nous avons développé un modèle de cascade qui permet de connaître le spectre et son image géométrique finale, telle qu'elle serait détectée. Cependant, celui-ci ne prend pas en compte la possible présence d'un champ magnétique extragalactique (EGMF). Or, de nombreux indices laissent à penser que ce champ est présent sur de grandes distances, sans que son intensité ait pu être mesurée jusqu'à présent [21, 22, 23]. Or, l'existence de ce champ pourrait avoir des conséquences extrêmement importantes sur l'évolution de l'univers, la mesure de son intensité est un point important de recherche en physique des galaxies, en cosmologie et au-delà. Selon son intensité, la présence d'un tel champ pourrait modifier significativement les propriétés des cascades étudiées ici.

Concernant les effets de l'EGMF, je n'ai pas eu le temps de réaliser un étude plus complète (ou du moins suffisamment poussée et convaincante pour être présentable ici) que les simples résultats analytiques que je vais présenter dans cette section. Je m'y consacrerai certainement pendant les dernières semaines de mon stage. Mais si une telle étude vous intéresse, vous pouvez aller voir, entre autres, la référence [20].

Qualitativement, si l'EGMF est assez fort (c'est-à-dire supérieur à $10^{-16} G$), les électrons secondaires sont suffisamment déviés et donc le flux de photons diffusés par ces électrons ne sera pas ponctuel. Ainsi, le flux de photons la partie centrale du flux observé ne contient que les photons primordiaux qui nous arrivent sans avoir interagi (c'est-à-dire ceux qui n'ont pas créé de paire). Le flux ponctuel des photons n'ayant pas interagi doit donc être entouré d'un halo dû aux photons secondaires. Si l'intensité de l'EGMF dépasse $10^{-10} G$ dans un volume extragalactique assez grand, les leptons sont trop déviés, le halo devient trop grand et donc son intensité devient trop faible pour pouvoir être détectée. Dans l'intervalle d'intensités intermédiaires (entre $10^{-16} G$ et $10^{-10} G$), les déviations et donc la taille du halo peuvent être suffisamment petites pour qu'une observation avec des télescopes à imagerie Čerenkov atmosphérique (tels que HESS, MAGIC ou VERITAS) soit faisable [24]. Le futur instrument CTA pourrait rendre ces observations encore plus probables puisqu'il va avoir des performances d'au moins un ordre de grandeur supérieur aux instruments cités précédemment.

Récemment, en utilisant les données du télescope spatial Fermi, l'existence d'EGMF de l'ordre de $\sim 10^{-15}$ Gauss a été suggérée, basée sur la limite supérieure de l'émission secondaire de quelques blazars [25], qui est en fait le résultat des mêmes cascades électromagnétiques discutées ici. Une telle intensité de champ magnétique pourrait rendre observable ces tâches avec des instruments tels que HESS, MAGIC ou VERITAS dans certaines conditions. La détection de halos (probablement dû aux phénomènes de cascades décrit ici) dans des images combinées d'un grand nombre de sources suggère également qu'il peut exister ce type de champ magnétique [26]. Faute de temps, je ne pourrais pas discuter en détails dans ce présent rapport de l'effet de l'EGMF sur les cascades et sur les contraintes que les résultats de ces cascades peuvent donner sur l'EGMF. J'ai mit en références [20, 27] deux études intéressantes à ce sujet.

Pour évaluer l'importance qu'aura la diffusion Compton par rapport au synchrotron dans le spectre d'énergie, on peut évaluer le rapport entre l'énergie due au champ magnétique et celle due au milieu :

$$\frac{E_{mag}}{E_{fond}} \approx \frac{B^2/8\pi}{aT^4} \text{ (unités cgs)}$$

$$\text{avec } a = \frac{8\pi^5 k^4}{15(hc)^3}, \quad T = (1+z)T_0, \quad T_0 = 2.725 \text{ K}$$

Typiquement avec des EGMF de l'ordre de $10^{-15} G$, l'énergie magnétique est largement négligeable devant l'énergie apportée par le fond diffus :

$$\frac{E_{mag}}{E_{fond}} \approx 9.5 \times 10^{-20} (1+z)^{-4} \left(\frac{B}{10^{-15} G} \right)^2 \quad (37)$$

Donc avec des champs magnétiques de l'ordre de $10^{-15} G$, l'effet sur le spectre d'énergie final n'est pas important. Par contre l'effet sur la distribution spatiale et temporelle des particules ne sera pas négligeable (voir équation (38)).

Les équations des trajectoires des photons et des leptons soumis au champ magnétique extragalactique (EGMF) peuvent être établies dans le cadre d'un modèle relativiste (c'est-à-dire en prenant en compte l'expansion de l'univers) en utilisant les équations de Maxwell en relativité générale [28, 29]. C'est ce que je devrais essayer de faire pour la prise en compte de l'EGMF dans mon programme, puisque une modélisation

plus approximative, présentée ci-après, est déjà faite dans Elmag. Les effets de l'EGMF peuvent ainsi être approximées à l'aide d'une marche aléatoire si la longueur de cohérence de l'EGMF (à priori inconnue) est beaucoup plus grande que le libre parcours moyen des électrons (de l'ordre de quelques kpc). Alors, si on suppose également que l'EGMF reste à peu près constant pendant que l'électron parcourt la distance d_i , [27] l'angle de déflexion élémentaire de la $i^{\text{ème}}$ déviation est donné par :

$$\beta_i \approx 0.52^\circ \left(\frac{p_{\perp} c}{\text{TeV}} \right)^{-1} \left(\frac{d_i}{10 \text{kpc}} \right) \left(\frac{B}{10^{-15} \text{G}} \right) \quad (38)$$

p_{\perp} désigne l'impulsion perpendiculaire à la direction locale du champ magnétique. B est la norme de l'EGMF. Toutes ces déflexions du parcours des électrons sur des bouts de trajectoires où le champ magnétique est cohérent peuvent être sommées quadratiquement [27], dans l'approximation d'une marche aléatoire avec des petits angles :

$$\beta = \sqrt{\sum_i \beta_i^2}$$

On peut ensuite approximer les pertes synchrotron par une perte d'énergie continue. Un électron d'énergie $E_e = \gamma mc^2$ va subir des pertes synchrotron moyennes de :

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{4}{3} c \sigma_T U_B \gamma^2, \text{ avec } U_B = \frac{B^2}{8\pi} \text{ (unités cgs)}$$

Typiquement on a :

$$\frac{dE}{dt} \approx -3 \times 10^{-23} \text{ eV/Myr} \left(\frac{E_e}{10^{10} \text{ eV}} \right)^2 \left(\frac{B}{10^{-15} \text{ G}} \right)^2$$

Ces pertes synchrotrons sont donc très faibles. C'est cohérent avec le résultat en équation (37).

9 Conclusions et perspectives

Au cours de ce stage, j'ai développé un code permettant de simuler les cascades électromagnétiques. Comme il existait déjà un code faisant ce travail dans le cadre de plusieurs d'approximations (voir réf. [4]), le but a été de réaliser un programme qui ne se permette aucune approximation, pour permettre en particulier de calculer les positions exactes des particules au cours de la cascade.

J'ai d'abord présenté comment je modélise les fonds diffus. J'ai ensuite présenté comment calculer de manière exacte les taux d'interaction, puis les profondeurs optiques d'interactions pour la production de paire et la diffusion Compton. J'ai ensuite présenté les techniques Monte-Carlo qui permettent de tirer les profondeurs optiques et les redshifts d'interactions.

Pour programmer la modélisation des interaction Compton et de production de paire, j'ai repris des routines fournies par Julien Malzac, en vérifiant leur bon fonctionnement et j'ai décrit ce que j'ai dû modifier pour qu'elles cadrent avec mon problème. Par contre, le code que j'ai réalisé ne prend pas (encore) en compte les effets du champs magnétique extragalactique (EGMF), et je compte bien consacrer les quelques semaines qu'il me reste à travailler dessus. J'ai d'ailleurs déjà commencé à étudier la question, mais sans résultats suffisants pour être présentables ici. Une modélisation très simplifiée de déviation par l'EGMF de type marche aléatoire et avec des pertes synchrotron continues (tel que présenté en section 8 et dans Elmag [4]) est facile à implémenter, mais comme ce travail est déjà effectué dans Elmag, je compte bien tenter une approche moins simplifiée, en utilisant les équations des champs électromagnétiques dans un espace-temps courbe [28] et en modélisant les pertes synchrotron sans approximations, avec des routines fournies par Julien Malzac.

Il faudrait aussi, comme c'est fait dans Elmag, prendre en compte le retard temporel des particules détectées (ce qui est d'ailleurs l'effet principal de l'EGMF dans Elmag car ce code ne calcule pas l'image finale de la cascade). On aurait pu essayer de calculer ce retard en prenant en compte seulement la diffusion Compton et la production de paire, mais ce retard temporel n'est vraiment important qu'une fois qu'on a pris en compte l'EGMF.

J'ai pu constater que les spectres produits par le code développé au cours de ce stage et ceux produits par Elmag sont en bon accord, les différences étant probablement dues à l'utilisation de modèle d'EBL différents

et à un calcul un peu différent des redshifts d'interaction. Ensuite on a aussi constaté que les relations analytiques présentées en section 5 se sont révélées en bon accord avec les calculs numériques, en tous cas dans les quelques cas présentés ici. Dans l'article [4] de Elmag, ces relations analytiques (sauf le ϵ_{lim} n'y est pas discuté car il a été établi dans le cadre de ce stage) se sont révélées également proches de la réalité dans d'autres cas ($z = 0.15$, $z = 0.01$ avec $E_\gamma = 10^{14}$ eV). Un étude plus poussée pour tester la robustesse ces relations serait intéressante à effectuer.

On a pu aussi voir que la taille de la tache observée en l'absence d'EGMF (ce qui à priori n'est pas réaliste puisque des limites inférieures de l'EGMF ont été établies [25]) dans le cas réaliste du blazar *Mrk 421* n'est pas détectable avec les instruments HESS ou MAGIC si les photons de la source sont émis aux alentours de 10^{14} eV. Il serait intéressant d'étudier comment évolue la taille de la tache quand on change cette énergie. De plus l'instrument CTA aura des performances supérieures aux instruments cités précédemment et donc pourrait permettre éventuellement de tester ce résultat.

Le code développé lors de ce stage pourrait être utilisé pour traiter des problèmes astrophysiques. Je vais ici présenter quelques idées d'applications.

Premièrement, ce code pourrait aider pour le calcul de différentes contributions au fond diffus de rayons gamma extragalactiques (EGRB). L'univers agissant comme un calorimètre pour la radiation électromagnétique (dans l'intervalle MeV-TeV), les limites mesurées de l'EGRB vont limiter tous les processus durant l'histoire de l'univers qui injectent de l'énergie au-dessus du seuil de création de paire. On peut par exemple citer les productions de paire par photo-pion ou par des protons de ultra-hautes énergies qui interagissent avec le CMB ($p + \gamma_{CMB} \rightarrow p + e^+ + e^-$) ou encore une éventuelle décroissance radioactive de matière-noire (qui doit être suffisamment massive). En généralisant, on peut même dire ce code peut en théorie être utilisé pour contraindre l'ensemble des fonds diffus.

Une autre application importante de ces cascades électromagnétiques est le calcul du spectre de sources ponctuelles, comme certains blazars qui émettent des photons γ de l'ordre du TeV. Une utilisation d'un tel code pourrait nous permettre de reconstituer le spectre de la source originale à partir du spectre détecté.

L'image de la tache résultante de la cascade électromagnétique est très dépendante de l'EGMF, en tout cas pour un certain intervalle d'intensités. Donc l'utilisation de ce code doit pouvoir permettre de poser des contraintes sur l'intensité et la forme de l'EGMF.

Enfin, l'utilisation de ce programme pourrait permettre d'étudier l'annihilation des positrons galactiques car il pourrait permettre d'estimer le nombre de positrons produits dans des cascades extragalactiques et qui sont susceptibles d'être à l'origine de l'émission à 511 KeV observée par INTEGRAL dans la galaxie.

Pour conclure, je dois dire que le code développé au cours de ce stage est plus précis que Elmag car il utilise moins d'approximations, et il permet d'avoir l'image de la cascade en 3D, en plus du spectre. Le temps de calcul pour avoir des spectres équivalents n'est pas plus long dans mon programme que dans Elmag, notamment grâce à une utilisation judicieuse de la technique d'accélération des calculs des interactions Compton. Les spectres de ces deux programmes peuvent présenter des différences, mais elles sont surtout dues à l'utilisation d'un modèle d'EBL différent. De plus, le modèle d'EBL que j'utilise [7], qui date de 2011, est plus récent que celui utilisé dans Elmag [4, 6]. Cependant, mon programme n'est pas encore totalement terminé (il manque les effets de l'EGMF), mais une fois terminé (à la fin de mon stage, fin Juin), j'espère qu'il permettra de faire pas mal de recherche en astrophysique.

Références

- [1] J. V. Jelley. High-Energy γ -Ray Absorption in Space by a 3.5 K Microwave Field. *Physical Review Letters*, 16 :479–481, March 1966.
- [2] R. J. Gould and G. P. Schréder. Opacity of the Universe to High-Energy Photons. *Physical Review*, 155 :1408–1411, March 1967.
- [3] A. I. Nikishov. *Sov. Phys. JETP*, 14 :393, 1962.
- [4] M. Kachelrieß, S. Ostapchenko, and R. Tomàs. ELMAG : A Monte Carlo simulation of electromagnetic cascades on the extragalactic background light and in magnetic fields. *Computer Physics Communications*, 183 :1036–1043, April 2012.
- [5] V. Berezinsky, A. Gazizov, M. Kachelrieß, and S. Ostapchenko. Restricting UHECRs and cosmogenic neutrinos with Fermi-LAT. *Physics Letters B*, 695 :13–18, January 2011.
- [6] T. M. Kneiske, T. Bretz, K. Mannheim, and D. H. Hartmann. Implications of cosmological gamma-ray absorption. II. Modification of gamma-ray spectra. *aap*, 413 :807–815, January 2004.
- [7] Domínguez et al. Extragalactic background light inferred from AEGIS galaxy-SED-type fractions. *MNRAS*, 410 :2556–2578, February 2011.
- [8] J. Malzac. *Modélisation de l'émission X et gamma des objets compacts par les méthodes Monte-Carlo*. 1999.
- [9] D. J. Fixsen. The Temperature of the Cosmic Microwave Background. *ApJ*, 707 :916–920, December 2009.
- [10] A. A. Zdziarski and R. Svensson. Absorption of X-rays and gamma rays at cosmological distances. *ApJ*, 344 :551–566, September 1989.
- [11] Josef M. Jauch and F. Rohrlich. *The theory of photons and electrons : the relativistic quantum field theory of charged particles with spin one-half / J. M. Jauch and F. Rohrlich*. Springer-Verlag, New York :, 2d expanded ed. edition, 1976.
- [12] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, and Brian P. Flannery. *Numerical recipes in Fortran 90 (2nd ed.) : the art of parallel scientific computing*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 1996.
- [13] P. S. Coppi and R. D. Blandford. Reaction rates and energy distributions for elementary processes in relativistic pair plasmas. *MNRAS*, 245 :453–507, August 1990.
- [14] D. I. Nagirner and J. Poutanen. *Single Compton scattering*. 1994.
- [15] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology : Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. July 1972.
- [16] V. S. Berezinskii and A. I. Smirnov. Cosmic neutrinos of ultra-high energies and detection possibility. *apss*, 32 :461–482, February 1975.
- [17] V. S. Berezinskii, S. V. Bulanov, V. A. Dogiel, and V. S. Ptuskin. *Astrophysics of cosmic rays*. 1990.
- [18] V. S. Berezinsky. Neutrino astronomy and massive long-lived particles from the big bang. *Nuclear Physics B*, 380 :478–506, August 1992.
- [19] L. A. Pozdnyakov, I. M. Sobol, and R. A. Syunyaev. Comptonization and the shaping of X-ray source spectra - Monte Carlo calculations. *Astrophysics and Space Physics Reviews*, 2 :189–331, 1983.
- [20] A. Elyiv, A. Neronov, and D. V. Semikoz. Gamma-ray induced cascades and magnetic fields in the intergalactic medium. *prd*, 80(2) :023010, July 2009.
- [21] P. P. Kronberg. Extragalactic magnetic fields. *Reports on Progress in Physics*, 57 :325–382, April 1994.
- [22] D. Grasso and H. R. Rubinstein. Magnetic fields in the early Universe. *physrep*, 348 :163–266, July 2001.
- [23] L. M. Widrow. Origin of galactic and extragalactic magnetic fields. *Reviews of Modern Physics*, 74 :775–823, 2002.
- [24] A. Neronov and D. V. Semikoz. A method of measurement of extragalactic magnetic fields by TeV gamma ray telescopes. *ArXiv Astrophysics e-prints*, April 2006.
- [25] A. Neronov and I. Vovk. Evidence for Strong Extragalactic Magnetic Fields from Fermi Observations of TeV Blazars. *Science*, 328 :73–, April 2010.
- [26] S. Ando and A. Kusenko. Evidence for Gamma-ray Halos Around Active Galactic Nuclei and the First Measurement of Intergalactic Magnetic Fields. *apjl*, 722 :L39–L44, October 2010.
- [27] K. Dolag, M. Kachelrieß, S. Ostapchenko, and R. Tomàs. Blazar Halos as Probe for Extragalactic Magnetic Fields and Maximal Acceleration Energy. *apj*, 703 :1078–1085, September 2009.
- [28] Christos G Tsagas. Electromagnetic fields in curved spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, 22(2) :393, 2005.
- [29] A. Havare, T. Yetkin, and K. Sogut. On the Equivalence of the Massless DKP Equation and Maxwell Equations in Robertson-Walker spacetime. *Chinese Journal of Physics*, 41 :465, October 2003.