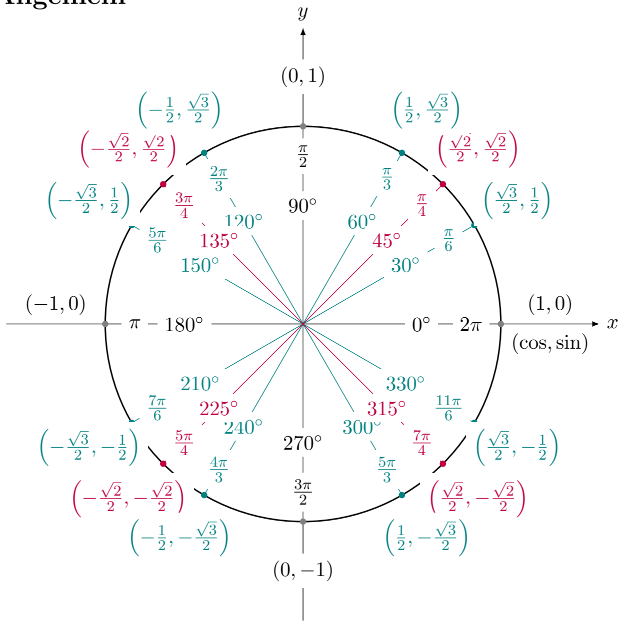
Analysis II

Patrick Eigensatz, Max Mathys
https://github.com/mmathys/analysis-ii-summary

Fixes und Verbesserungen: Issue/PR wären appreciated! 🙏

1 Allgemein



Rechenregeln: Sinus und Cosinus

- $e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$
- $\cos(x) = \mathrm{Re}(e^{ix})$
- $\sin(x) = \mathrm{Im}(e^{ix})$
- $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$
- $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$
- $\sin(x+y)\sin(x-y) = \cos^2(y) - \cos^2(x) = \sin^2(x) - \sin^2(y)$
- $\cos(x+y)\cos(x-y) = \cos^2(y) - \sin^2(x) = \cos^2(x) - \sin^2(y)$
- $\sin x \cos x = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$
- $\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$
- $\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$
- $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$, $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
- $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$, $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
- $\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$
- $\sin(\frac{x}{2}) = \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$
- $\cos(\frac{x}{2}) = \sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$
- $\tan(\frac{x}{2}) = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$
- $\cot(\frac{x}{2}) = \frac{1+\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{\sin(x)}{1-\cos(x)}$
- $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$
- $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$
- $\tan(\pi + x) = \tan(x)$
- $-\sin(-x) = \sin(x), \cos(-x) = \cos(x), \tan(-x) = -\tan(x)$
- Für alle $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, sodass $a^2+b^2 = 1$, gibt es $x \in \mathbb{R}$, sodass $a = \cos(x)$, $b = \sin(x)$.
- $\sin(x) = \frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}$
- $\cos(x) = \frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}$
- $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$
- $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$
- $\int_0^{2\pi} \sin(t)\cdot\cos(t)dt = \int_0^{2\pi}\sin(t)dt = \int_0^{2\pi}\cos(t)dt = 0$
- $\int \sin^2(x)dx = \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x))$
- $\int \cos^2(x)dx = \frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x))$
- $\int x\sin(x)dx = \sin(x) - x\cos(x)$
- $\int x\cos(x)dx = x\sin(x) + \cos(x)$

Rechenregeln: Ableitung

- **Summenregel** $(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x)$
- **Faktorregel** $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$
- **Produktregel** $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- **Quotientenregel** $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)} (g \neq 0)$
- **Kettenregel** $(f(g(x)))' = (f \circ g)' = f'(g(x))g'(x)$

Rechenregeln: Integration

- **Summe/Differenz:** $\int_a^b (f(x) +/- g(x))xd = \int_a^b f(x) +/- \int_a^b g(x)$
- **Konstanter Faktor:** $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$
- **Partielle Integration:** $\int_a^b f'(x)\cdot g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)$
- **Substitution:** $\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt$
- $a+c, b+c \in I$ $\int_a^b f(t+c)dt = \int_{a+c}^{b+c} f(x)dx$
- $ca, cb \in I$: $\int_a^b f(ct)dt = \frac{1}{c} f(x)dx$
- **Logarithmus:** (f stetig diffbar) $\int \frac{f'(t)}{f(t)}dt = \log(|f(x)|)$, bzw. $\int_a^b \frac{f'(t)}{f(t)}dt = \log(f(|b|)) - \log(f(|a|))$

Rechenregeln: Limes von Sinus und Cosinus

- $\lim_{x\to 0}\arctan(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty}\arctan(x) = \frac{\pi}{2}$
- $\lim_{x\to 0}\tan(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty}\tan(x) = \infty$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan(x) = \infty$
- $\lim_{x\to\infty}\cos(x) = [-1,1]$
- $\lim_{x\to\infty}\sin(x) = [-1,1]$

Nützliches

- Kreisgleichung $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$
- Ellipsengleichung $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$
- Mitternachtsformel $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
- Matrix Determinante $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
- Matrix Invertierbarkeit: Eine quadratische Matrix ist genau dann invertierbar, falls die Determinante $\neq 0$.
- Skalarprodukt $x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$
- Kreuzprodukt $a \times b = (a_2b_3 - a_3b_2, \quad a_3b_1 - a_1b_3, \quad a_1b_2 - a_2b_1)^\top$

Rechenregeln: Stammfunktionen, Ableitungen

differenzierbar $\implies$ stetig $\implies$ integrierbar

$\mathbf{f'(x)}$	$\mathbf{f(x)}$	$\mathbf{F(x)}$
0	c $(c \in \mathbb{R})$	cx
c	cx	$\frac{c}{2}x^2$
$r \cdot x^{r-1}$	$x^r (r \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$
$\frac{-1}{x^2} = -x^{-2}$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\log\lvert x\rvert$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$
$\cos x$	$\sin x$	$-\cos x$
$-\sin x$	$\cos x$	$\sin x$
$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$-\log\lvert\cos x\rvert$
$-\frac{1}{\sin^2(x)}$	$\cot x$	$\log\lvert\sin x\rvert$
e^x	e^x	e^x
$c \cdot e^{cx}$	e^{cx}	$\frac{1}{c}e^{cx}$
$\log a \cdot a^x$	a^x	$\frac{a^x}{\log a}$
$\frac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert$	$x(\log\lvert x\rvert - 1)$
$\frac{1}{\log a \cdot x}$	$\log_a\lvert x\rvert$	$\frac{x}{\log a}(\log\lvert x\rvert - 1)$
		$= x(\log_a\lvert x\rvert - \log_a e)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$x\arccos x - \sqrt{1-x^2}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	-
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	-
$tanh(x)$	$\frac{1}{cosh^2(x)}$	-
$2\sin(x)\cos(x)$	$\sin^2(x)$	$\frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x))$
$-2\sin(x)\cos(x)$	$\cos^2(x)$	$\frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x))$
$\frac{2\sin(x)}{\cos^3(x)}$	$\tan^2(x)$	$\tan(x) - x$

2 Differentialgleichungen

Definition 1: Differentialgleichung

Eine **Differentialgleichung** ist eine Gleichung, in welcher eine unbekannte Funktion $y(x)$ einer oder mehreren Variablen und ihre Ableitung vorkommnt. Im Falle, dass y eine auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte Funktion ist

$$y : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

spricht man von einer **gewöhnlichen Differentialgleichung**.

Definition 2: Ordnung, linear, homogen

Die **Ordnung** einer Gleichung ist die höchste vorkommende Ableitung. Bsp: $y'' \implies 2$.

Eine Differentialgleichung heisst **linear**, falls jeder Term y, y', y'' usw. nur linear vorkommt. Wichtig: Falls $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösungen der selben Differentialgleichung sind, dass ist auch die Linearkombination $ay_1(x) + by_2(x)$.

Eine Differentialgleichung heisst **homogen**, falls keine Terme vorkommen, die rein von den Funktionsvariablen abhängen (also kein y, y'', ... enthalten). Sonst heisst die Gleichung **inhomogen**.

Definition 3: Anfangswertproblem

Ein **Anfangswertproblem** n-ter Ordnung ist eine gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung zusammen mit n Anfangsbedingungen.

Satz 1: Grundprinzip für lineare, inhomogene Differenzialgleichungen

Die allgemeine Lösung einer linearen, inhomogenen Differentialgleichung hat die Form

$$\underbrace{y(x)}_{\text{Gesamtlösung}} = \underbrace{y_{hom}(x)}_{\text{allg. homogene Lösung}} + \underbrace{y_p(x)}_{\text{partikuläre Lösung}}$$

Rezept 1: Separation der Variablen

Diese Methode eignet sich für **Differentialgleichungen erster Ordnung** und ist die einfachste Methode.
Für eine Differentialgleichung der Form

$$y' = \frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y), \qquad \text{mit } g(y) \neq 0$$

gehen wir folgendermassen vor:

1. Wir nehmen alle Teile mit x und alle mit y auf verschiedene Seiten.
$$\frac{1}{g(y)} dy = h(x) dx$$
2. Nun integrieren wir direkt
$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int h(x) dx$$
3. Durch die Unbestimmtheit der Integrale führen wir eine Konstante C ein. Durch Anfangsbedingungen $y(x_0) = y_0$ (in einem Anfangswertproblem) kann diese bestimmt werden.

Rezept 2: Variation der Konstanten (1. Ordnung)

Diese Methode eignet sich für **inhomogene Differentialgleichungen erster Ordnung**, der Form

$$y' = h(x)y + b(x).$$

Wir benutzen den Grundsatz für inhomogene Differentialgleichungen. D.h. wir suchen die allgemeine homogene Lösung und eine partikuläre Lösung und addieren diese für die gesamte Lösung. Eine partikuläre Lösung kann manchmal erraten werden, ansonsten nutzen wir folgendes Rezept:

1. Die homogene Lösung $y_{hom}(x)$ suchen wir mit der Methode *Separation der Variablen.*
2. Die Integrationskonstante aus Schritt I fassen wir als eine von x abhängige Funktion auf
$$C \to C(x)$$
3. Die entstandene Funktion $y_p(x)$ (homogene Lösung mit $C(x)$ anstelle von C) setzen wir als Ansatz in die Differentialgleichung ein und lösen nach $C(x)$ auf. Dies gibt uns die partikuläre Lösung.
4. Wir nutzen den Grundsatz für die gesamte Lösung
$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$
.

Rezept 3: Euler-Ansatz

Für lineare, homogene Differentialgleichung $n-ter$ Ordnung mit konstanten Koeffizienten, können wir den **Euler-Ansatz** verwenden. Wir haben eine Gleichung der Form

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0,$$

wobei $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$ sind.
Wir wenden folgendes Rezept an:

1. Setze den **Euler-Ansatz** $y(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ in die Differentialgleichung ein und berechne das **charakteristische Polynom**.
2. Finde die Nullstellen λ_k mit Vielfachheiten m_k des charakteristischen Polynoms und konstruiere daraus die linear unabhängigen Lösungen gemäss
$$e^{\lambda x}, x \cdot e^{\lambda x}, x^2 \cdot e^{\lambda x}, \ldots, x^{m-1} \cdot e^{\lambda x}.$$
3. Diese Lösungen bilden ein **Fundamentalsystem** der Differentialgleichung.
4. Die allgemeinste Lösung ist eine Linearkombination aller Lösungen im Fundamentalsystem. Die Koeffizienten sind durch die Anfangsbedingungen zu bestimmen.

Rezept 4: Euler-Ansatz mit vielfachen/komplexen Nullstellen

Richtung: Lösungen der Charakteristischen Gleichung $\lambda_i \to$ Ansatz der **homogenen** Lösung y_h.

Lösung für λ	**Linearkombinationen für $y_h(x)$**
α	$c_1 \cdot e^{\alpha x}$
$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k$	$c_1 \cdot e^{\alpha x} + x \cdot e^{\alpha x} + .. + c_k \cdot x^{k-1} \cdot e^{\alpha x}$
$\alpha + \beta i,\ \beta > 0$	$c_1 \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x)$
$\alpha + \beta i,\ \beta < 0$	$c_1 \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x)$
$\alpha_1 + \beta_1 i = .. = \alpha_k + \beta_k i \ \ \beta > 0$	$c_1 e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x) + .. + c_k x^{k-1} \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x)$
$\alpha_1 + \beta_1 i = .. = \alpha_k + \beta_k i \ \ \beta < 0$	$c_1 e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) + .. + c_k x^{k-1} \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x)$

Nützliches

Manchmal sind die Terme in $y(x) = Ae^{ix} + Be^{-ix}$ nicht die geeignetste Form und man möchte lieber reelle Funktionen. Dann nutzt man die Formel

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Damit lassen sich zwei neue Integrationskonstanten definieren:

$$\widetilde{A} \sin x + \widetilde{B} \cos x$$

Rezept: Für kompliziertere Ausdrücke funktioniert:

$$y(x) = Ae^{2ix} + Be^{-2ix} = \widetilde{A} \sin(2x) + \widetilde{B} \cos(2x)$$

Rezept 5: Variation der Konstanten (2. Ordnung)

Wir suchen die Lösung für eine Differentialgleichung der Form

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = g(x)$$

1. Die homogene Lösung $y_h(x)$ finden wir mittels **Euler-Ansatz**.
2. Wir suchen nun eine Lösung der Form $y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$, wobei $y_1(x)$ und $y_2(x)$ aus dem Euler-Ansatz stammen und das System
$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = g(x) \end{cases}$$
d.h.
$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}}_{=:A} \cdot \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix}$$
erfüllt sein muss. Wir prüfen also, ob die Determinante
$$\det A = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$$
nicht verschwindet, denn aus LinAlg wissen wir, dass genau dann eine eindeutige Lösung existiert.
3. Wir finden nun C_1 und C_2 und somit $y_p(x)$ entweder durch
   (a) Inversion der Matrix
   $$\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)} \begin{pmatrix} y_2'(x) & -y_2(x) \\ -y_1'(x) & y_1(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix}$$
   und anschliessender Integration $C_1 = \int C_1'(x)dx$, $C_2 = \int C_2'(x)dx$

(b) oder mit der direkten Formel

$$y_p(x) = -y_1(x)\int \frac{y_2(x)g(x)}{y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)}dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x)g(x)}{y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)}dx.$$

4. Die gesamte Lösung erhalten wir aus $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.

Nützliches: Bei unchilligen Formeln kann $x \mapsto e^t, x^2 \mapsto e^{2t}, \ldots$ substituiert werden und anschliessend durch ein Gleichungssystem aufgelöst werden.

Rezept 6: Substitution

Gleichungen der Form $\boxed{y' = h\left(\frac{y}{x}\right)}$

Substitution

$$z(x) = \frac{y(x)}{x} \qquad \Leftrightarrow \qquad y(x) = xz(x),$$

dann wird y' durch

$$y' = z + xz'$$

ersetzt.

Gleichungen der Form $\boxed{y' = h(ax+by+c)}$

Substitution

$$z(x) = ax + by(x) + c \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \frac{z-ax-c}{b},$$

dann wird y' durch

$$y' = \frac{z'-a}{b}$$

ersetzt.

Gleichungen der Form $\boxed{y' = h\left(\frac{ax+by+c}{dx+ey+f}\right)}$

Wir wollen $y(x)$ und x ersetzen. Wir lösen das Gleichungssystem

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ dx+ey+f=0 \end{cases}$$

und wollen eine eindeutige Lösung (x_0, y_0), d.h. wir fordern

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \neq 0.$$

Jetzt setzen wir

$$z = y - y_0 \qquad \text{und} \qquad t = x - x_0.$$

Dann werden y' und z' zu

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(z+y_0)}{d(t+x_0)} = \frac{dz}{dt} = z'.$$

Gleichungen der Form $\boxed{y' = \frac{y}{x}h(xy)}$

Substitution

$$z(x) = xy(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \frac{z(x)}{x},$$

dann wird y' durch

$$y' = \frac{xz'-z}{x^2}$$

ersetzt.

Beispiel 1: Substitution: Funktion

Sei $xy' = y + x^2$ die DGL. Sei v die neue Variable und die Substitution $v = \frac{y}{x}$ oder $y = vx$.

Lösungsschritt I: Löse nach y auf: $y = v \cdot x$.
Lösungsschritt II: Berechne $\frac{dy}{dx} = y'$: $y' = v + xv'$
Lösungsschritt III: Setze y und y' in die DGL ein: $x(v'x + v) = vx + x^2$ und löse die DGL normal nach v auf (hier Separation der Variablen). Man bekommt $v = x + c$.
Lösungsschritt IV: Setze v zurück in die Substution $y = vx$ ein. Man bekommt $y = (x+c)x$.

Beispiel 2: Substitution: Variable

Sei $x^2y'' - 3xy' + 5y = 0$ die DGL. Sei $x = e^t$ bzw. $t = \log(x)$ die Variablensubstitution.

Lösungsschritt I: Definiere $h(t) = y(e^t)$ und berechne h' und h'':

$$\begin{aligned} h(t) &= y(e^t) = y(x) \\ h'(t) &= y'(e^t)e^t = xy(e^t) \\ h''(t) &= y''(e^t)e^{2t} + y'(e^t)e^t = x^2y''(x) + xy'(x) \end{aligned}$$

Lösungsschritt II: Löse auf, sodass alle Terme in der DGL (x^2y'', xy', y) durch counterparts in t und $h(t)$ ersetzt werden können. Setze in Diffgleichung ein. Man bekommt

$$h'' - 4h' + 5h = 0$$

Lösungsschritt III: Löse die Gleichung normal mit $h(t)$. Anschliessend, ersetze $t = \log(x)$

Rezept 7: Methode des direkten Ansatzes

Der Ansatz ist geeignet für lineare, inhomogene DGLs n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Also eine DGL der Form

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0y = b(x).$$

Die homogene Lösung finden wir mit dem Euler-Ansatz. Für die partikuläre Lösung nutzen wir folgende Idee:

$\boxed{\text{Der Ansatz für } y_p(x) \text{hat dieselbe Form wie der inhomogene Term } b(x).}$

Inhomogener Term $b(x)$	**Ansatz für** $y_p(x)$
a (const.)	b (const.)
$a_0 + a_1x + \ldots + a_mx^m$	$b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$
$ae^{\lambda x}$	$be^{\lambda x}$
$P(x)e^{\lambda x}$	$Q(x)e^{\lambda x}$
$P(x)\sin(mx)$	$Q(x)\sin(mx) + R(x)\cos(mx)$
$P(x)\cos(mx)$	$Q(x)\sin(mx) + R(x)\cos(mx)$
$a\sin(mx)$	$c\sin(mx) + d\cos(mx)$
$a\cos(mx)$	$c\sin(mx) + d\cos(mx)$
$a\sin(mx) + b\cos(mx)$	$c\sin(mx) + d\cos(mx)$
$\sum_{i=0}^m b_ix^i$	$\sum_{i=0}^m A_ix^i$
$e^{\alpha x}\sum_{i=0}^m b_ix^i$	$e^{\alpha x}\sum_{i=0}^m A_ix^i$
$\sin(\omega x)\sum_{i=0}^m b_ix^i$ $+\cos(\omega x)\sum_{i=0}^m c_ix^i$	$\sin(\omega x)\sum_{i=0}^m A_ix^i$ $+\cos(\omega x)\sum_{i=0}^m B_ix^i$
$\sinh(\omega x)\sum_{i=0}^m b_ix^i$ $+\cosh(\omega x)\sum_{i=0}^m c_ix^i$	$\sinh(\omega x)\sum_{i=0}^m A_ix^i$ $+\cosh(\omega x)\sum_{i=0}^m B_ix^i$
$e^{\alpha x}\sin(\omega x)\sum_{i=0}^m b_ix^i$ $+e^{\alpha x}\cos(\omega x)\sum_{i=0}^m c_ix^i$	$e^{\alpha x}\sin(\omega x)\sum_{i=0}^m A_ix^i$ $+e^{\alpha x}\cos(\omega x)\sum_{i=0}^m B_ix^i$

Bemerkung I: Verschiedene Ansätze können additiv kombiniert werden. So wählt man für $b(x) = 5x + \sin(x)e^{3x}$ als Ansatz

$$y_p(x) = \underbrace{Ax+B}_{\text{Teil I}} + \underbrace{(C + \sin x + D\cos x)e^{3x}}_{\text{Teil II}}.$$

Bemerkung II: Wenn ein Teil der für $y_p(x)$ zu wählende Funktion bereits in der Lösung des homogenen Problems vorhanden ist, wird der Ansatz zusätzlich mit x multipliziert. Wenn z.B. die homogene Lösung die Form $y_h(x) = Ax + B$ hat, wählt man anstelle des Ansatzes $y_p(x) = ax + b \Rightarrow y_p(x) = x \cdot (ax+b)$.

Rezept 8: Inhomogene AWP

Wie im Beispiel ($y' + y = 2\sin(x)$ mit $y(0) = 0$) vorgehen:

1. Homogene Lösung finden: $(\lambda+1)(e^{\lambda x}) = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow y_h = c_1 \cdot e^{-x}$
2. Gemäss Störfunktion den Ansatz für y_p wählen und dessen Ableitungen finden:
$$\begin{aligned} y_p &= c\cdot\sin(x) + d\cdot\cos(x) \\ y_p' &= c\cdot\cos(x) - d\cdot\sin(x) \end{aligned}$$
3. Dies in die ursprüngliche DGL einsetzen, um die Koeffizienten des Ansatzes und damit die partikuläre Lösung zu finden:
$$c\cdot\cos(x) - d\cdot\sin(x) + c\cdot\sin(x) + d\cdot\cos(x) \overset{!}{=} 2\sin(x)$$
$$\Leftrightarrow (c+d)\cos(x) + (c-d)\sin(x) \overset{!}{=} 2\sin(x) \iff c = 1,\ d = -1$$
4. Anfangswertbedingungen nutzen um c_k aus der homogenen Lösung zu finden
$$y(0) = \underbrace{c_1\cdot e^{-x}}_{y_h(0)} + \underbrace{\sin(x) - \cos(x)}_{y_p(0)} = c_1\cdot 1 + 0 - 1 \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow c_1 = 1$$
5. $$y(x) = 1 + sin(x) - cos(x)$$

3 Differentialrechnung in $\mathbb{R}^d$

3.1 Allgemein

Beschränkt (bounded) Falls $||x||$ beschränkt für alle $x \in M$.
Geschlossen (closed) Jede Folge (x_n) mit $x_n \in M$ ist $\lim(x_n) \in M$.
Kompakt (compact) Falls beschränkt und geschlossen.

3.2 Stetigkeit

Definition 4: Stetigkeit (Continuity)

Normale Definition:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Definition Stetigkeit mit Folgen: Für jede Folge (x_n) sodass $x_n \to x$ für $x \to \infty$:

$$(f(x_n)) \to f(x)$$

Sei f, g stetig: $f+g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $f \circ g$ stetig.
Falls f stetig, gilt

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(\lim_{x \to a} x)$$

f diffbar $\Rightarrow$ f stetig $\Rightarrow$ f integrierbar
f nicht integrierbar $\Rightarrow$ f nicht stetig $\Rightarrow$ f nicht diffbar.

Rezept 9: Polarkoordinatentrick (Change of Variable, Coordinates)

Ziel: Zeige oder widerlege Stetigkeit. Seien $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Berechne

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r \to 0} f(x,y)$$

Hängt das Resultat von φ ab $\Rightarrow$ der Grenzwert existiert nicht $\Rightarrow$ nicht stetig an dieser Stelle.

Rezept 10: Linientrick

Ziel: Stetigkeit widerlegen. Suche zwei Linien, die einen unterschiedlichen lim haben. Zeigt, dass ein lim nicht existieren kann. Sei $f(x,y) = \frac{y}{x+1}$ und $\{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$ für $(x,y) \to (-1,0)$. Linie $\{(x,y) \in \mathbb{R} \mid y = 0 \cap x \neq 1\} = 0$ und $\{(x,y) \in \mathbb{R} \mid y = x+1\} = 1$.

Bemerkung: Meistens à la: $f(x,y)$ verschwindet auf der Linie $\{x = ...\}$, dann müsste $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, aber für $x = ...y...$ sehen wir, dass $f(x,y) =$ fancy Expression $= 1 \neq 0$. Da $x = ...$ auf der Linie liegt, folgt der Widerspruch. **Todo: Quasi Ausnahme finden! intuitiv erläutern!**

Beispiel 3: Linientrick

$$\text{Gegeben } f(x,y) = \frac{y}{x-1} \quad \text{existiert} \quad \lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) \quad ?$$

Lösung: Wir sehen f auf der Linie $\{(x,y) | y = 0, \ x \neq 1\}$ verschwindet. Hätte also f einen Grenzwert für $(x,y) \to (1,0)$ wäre dieser gleich 0. Aber die Linie $y = x-1$ geht durch $(1,0)$ und auf dieser Linie ist f gleich 1. Also existiert $\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$ nicht.

Beispiel 4: Vergleichstrick / Sandwich

$$\text{Gegeben } f(x,y) = \frac{(x-1)^2 \ln(x)}{(x-1)^2 + y^2} \quad \text{existiert} \quad \lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) \quad ?$$

Lösung:

$$|f(x,y)| = \frac{|(x-1)^2|}{|(x-1)^2 + y^2|} |ln(x)| \quad \leq |ln(x)|$$

Wegen $\lim_{x \to 1} ln(x) = 0$ sehen wir, dass

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(1,0)} |f(x,y) \leq |\lim_{x \to 1} |\ln(x)| = 0$$

und damit ist auch der gesuchte Grenzwert $= 0$.

Rezept 11: Stetigkeit prüfen

Sei f die zu prüfende Funktion. 1) f muss überall definiert sein. 2) $\lim_{x \to a} f(x)$ existiert. 3) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

3.3 Differenzierbarkeit

Definition 5: Differenzierbarkeit

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \Omega$. f heisst **differenzierbar an Stelle** x_0, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \ to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0) =: \frac{df}{dx}$$

existiert. Wir nennen $f'(x_0)$ die Ableitung (das **Differential**) von f an der Stelle x_0. Eine solche Funktion heisst dann **differenzierbar auf** Ω, wenn sie an jeder Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar ist.

f diffbar $\Leftrightarrow$ alle Teil-f sind diffbar.
f, g diffbar $\Rightarrow$ $f+g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $g \circ f$ diffbar

Satz 2: Kettenregel

Seien $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : X \to Y$, $g : Y \to \mathbb{R}^p$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f$ differenzierbar und die Ableitung ist

$$d(g \circ f)(x_0) = dg(f(x_0)) \circ df(x_0)$$

und die Jakobi-Matrix ist

$$J_{g \circ f}(x_0) = J_g(f(x_0))J_f(x_0)$$

Definition 6: Partielle Differenzierbarkeit

f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, falls:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0)}{h} =: \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$

oder generell für alle Einheitsvektoren e_i zusammengefasst in Richtung $v \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h} =: D_v f(x_0)$$

Dieser lim existiert $\Leftrightarrow$ in Richtung e_i an Stelle x_0 partiell differenzierbar.

Definition 7: Totale Differenzierbarkeit

Sei $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. f heisst differenzierbar an der Stelle $x_0 \in \Omega$, falls eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ existiert (also eine $m \times n$ Matrix), sodass

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)|}{|x - x_0|} = 0$$

Dann heisst $df(x_0) := A$ das Differenzial von f in Punkt x_0.
Diese Matrix $A = Df(x_0)$ ist gegeben durch

$$\mathrm{D}f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x_0) \end{pmatrix}$$

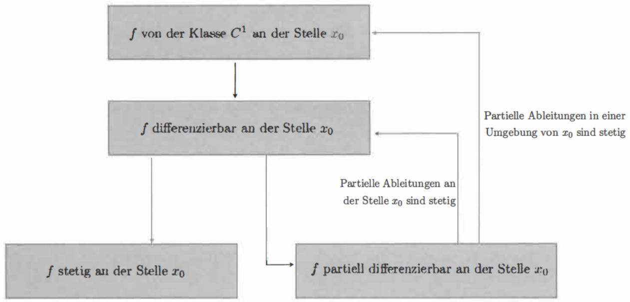
3.4 Stetigkeit vs Differenzierbarkeit

Rezept 12: Prüfen, ob f differenzierbar an x_0

f stetig an x_0? Nein $\Rightarrow$ f nicht diffbar.
$\Downarrow$ Ja
Ist f in x_0 partiell diffbar, existiert $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$? Nein $\Rightarrow$ f nicht diffbar.
$\Downarrow$ Ja
Ist $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ stetig? Ja $\Rightarrow$ f ist diffbar!
$\Downarrow$ Nein
Existiert eine lineare Abbildung A: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sodass $A = \nabla f(x_0)$, also existert:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - \nabla f(x_0) - (x - x_0)|}{||x - x_0||}$$

? Ja $\Rightarrow$ f ist diffbar!
Nein $\Rightarrow$ f ist nicht diffbar.



3.5 Partielle Ableitung (Partial Derivative)

f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ an Stelle a nach x_i

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_i + h, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_i, ..., a_n)}{h} =: \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

Wichtig: Alle anderen x_i werden als konstante behandelt bei Ableitung.

3.5.1 Satz von Schwarz (Higher derivatives)

$f \in C^2$. Gilt nur für zwei und drei verschiedene Variablen. Beliebige Potenzen von x_i und x_j möglich.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i} \forall i, j \in \{1, ..., n\}$$

3.5.2 Gradient

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Gradient eines Skalarfeldes: Richtung: Richtung des steilten Anstiegs; Betrag: Stärke des Anstiegs.

Regeln ($n \in \mathbb{N}$, c konstant, u, v Vektoren): $\text{grad}(c) = 0$, $\text{grad}(c \cdot u) = c \cdot \text{grad}(u)$ (Linearität), $\text{grad}(u + v) = \text{grad}(u) + \text{grad}(u)$ (Addition), $\text{grad}(u \cdot v) = \text{grad}(u) \cdot \text{grad}(u)$ (Produktregel), TODO andere gradienten regeln von der übungsstunde 5 TODO Serie 5 2.1 senkrecht satz $\text{grad}(u^n) = n \cdot u^{n-1} \cdot \text{grad}(u)$ $(n \neq 0)$.

3.5.3 Richtungsableitung (Directional Derivative)

f heisst an der Stelle a in Richtung u differenzierbar, falls der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + hu) - f(a)}{h} = \frac{d}{dh} f(a + hu)\Big|_{h=0} =: D_v f(a)$$

existiert. Ist $||u|| = 1$ (normiert), heisst dieser Grenzwert Richtungsableitung.

Rezept 13: Richtungsableitung $D_u f(a)$ existiert:

Falls $t \mapsto f(a + tu)$ differenzierbar ist bei $t = 0$, dann existiert $D_u f(a)$.

Die Richtungsableitung existiert für **jede Richtung**, falls $\frac{d}{dh} f(a + hu)\big|_{h=0}$ NICHT von φ abhängt (wenn mal $x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$ substituiert).

Rezept 14: Richtungsableitung $D_u f(a)$

Falls f in a differenzierbar ist: Für f in Richtung u in Punkt a: 1) u normieren: $\tilde{u} = \frac{u}{||u||}$ 2) Gradient $\nabla f(x)$ berechnen, dann:

$$D_u f(a) = \tilde{u} \underbrace{\cdot}_{\text{SP.}} \nabla f(a)$$

Definition 8: Hessematrix

$$\textbf{Hess}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Definition 9: Jakobimatrix

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ \vdots \\ f_n(x, y) \end{pmatrix} \quad \mathbf{J_f}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} & \frac{\partial f_n}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Für die Kettenregel von Jakobimatrizen siehe "generelle Kettenregel".

3.6 Taylorpolynome

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2} f''(a)(x - a)^2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}(a)(x - a)^3 + ...$$

In $\mathbb{R}^2$: $\Delta x = (x - x_0)$, $\quad \Delta y = (y - y_0)$

$$\begin{aligned} & f(x, y) = f(x_0, y_0) \\ & + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y \\ & + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)(\Delta x)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)(\Delta y)^2\right) \\ & + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0, y_0)(\Delta x)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x_0, y_0)(\Delta x)^2 \Delta y\right. \\ & \qquad \left. + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x_0, y_0)\Delta x(\Delta y)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0, y_0)(\Delta y)^3\right) \\ & + ... \end{aligned}$$

In $\mathbb{R}^n$: $\Delta x_i = x_i - x_i^0$

$$Tf(x; x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + ... + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^n f(x_1, ..., x_n)\Bigg|_{(x_1^0, ..., x_n^0)}$$

In $\mathbb{R}^n$ bis Grad 2:

$$T_2 f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^\top \text{Hess}_f(x_0)(x - x_0)$$

Rezept 15: Tangentialebene (Variante I)

Tangentialebene der Fläche $f(x, y)$ finden in Punkt (x_0, y_0).
Lösungsschritt I: Erstelle $F(x, y) = (x, y, f(x, y))^\top$ und berechne die Basisvektoren für die Tangentialebene

$$dF(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial F_3}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial F_3}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix}$$

(x_0 und y_0 einsetzen).
Lösungsschritt II: Berechne Normalvektor:

$$n = u \times v = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Berechne d mit $p = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$$d = p \cdot n$$

Lösungsschritt III: Konstruiere Gleichung, sodass:

$$ax + by + cz = d$$

Rezept 16: Tangentialebene (Variante II)

Idee: Annäherung von f im Punkt (x_0, y_0) durch Taylorpolynom I. Grades

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

kann direkt umgeformt werden in die Normalform der Ebenengleichung.

3.7 Extremstellen (Kritische Punkte)

Definition 10: Kritische und reguläre Punkte

Fall $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: Sei $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Ein Punkt $p_0 \in \Omega$ heisst **kritischer Punkt von** f, falls $df(p_0) = 0$. Ist der Punkt nicht kritisch, heisst er **regulär**.

Fall $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$: Sei $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar. Wir wissen, dass $df(x_0)$ eine lineare Abbildung ist. Diese lässt sich mit einer $m \times n$-Matrix darstellen. Der **Rang** der Matrix beschreibt die Dimension des Bildes. Für eine $m \times n$ Matrix A gilt

$$\text{Rang}(A) \leq \min(m, n)$$

Ein Punkt $p_0 \in \Omega$ heisst **regulär**, wenn die Matrix $df(x_0)$ einen maximalen Rang besitzt. Sonst heisst p_0 kritisch. Ein kritischer Punkt heisst **degeneriert**, wenn an dieser Stelle für die Hesse-Matrix gilt:

$$\det(H_f(p_0)) \neq 0$$

Ansonsten heisst der Punkt **nicht-degeneriert**.

Satz 3: Extremwerte in einer Variable

Sei $f : \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$ und $x_0 \in \Omega$ ein kritischer Punkt (d. h. $f'(x_0) = 0$), dann gilt

- x_0 ist ein Minimum, falls $f''(x_0) > 0$,
- x_0 ist ein Maximum, falls $f''(x_0) < 0$,
- x_0 ist ein Sattelpunkt, falls $f''(x_0) = 0$

Satz 4: Extremwerte in mehreren Variablen (Corollary 3.8.7)

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : X \to \mathbb{R} \in C^2$. Sei x_0 ein nicht-degenerierender kritischer Punkt von f. Sei p und q die Anzahl der positiven resp. negativen Eigenwerte von $\mathbf{Hess_f}(x_0)$.

1. Falls $p = n$, bzw. $q = 0$ ($\text{Hess}_f(x_0)$ ist **positiv definit**), besitzt f ein lokales **Minimum** an x_0
2. Falls $q = n$, bzw. $p = 0$ ($\text{Hess}_f(x_0)$ ist **negativ definit**), besitzt f ein lokales **Maximum** an x_0
3. Ansonsten, bzw. $pq \neq 0$, besitzt f kein Extremum an x_0. Man sagt deshalb, f besitzt einen **Sattelpunkt** an x_0.

Rezept 17: Eigenwerte finden

Charakteristisches Polynom mittels $\det(A - \lambda I)$ berechnen. Nullstellen des Polynoms sind die Eigenwerte.

Satz 5: Definitheit für symmetrische Hesse-Matrizen (Remark 3.8.8)

Für eine **symmetrische** Matrix gilt

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\textbf{positiv definit} \iff a > 0, \quad ad - b^2 > 0$$
$$\textbf{negativ definit} \iff a < 0, \quad ad - b^2 > 0$$
$$\textbf{indefinit} \iff ad - b^2 < 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & f \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

$$\textbf{positiv definit} \iff a > 0, \quad ae - b^2 > 0, \quad \det A > 0$$

Satz 6: Eigenwert-Kriterium

Seien $\lambda_1, ..., \lambda_n$ die Eigenwerte einer reellen, symmetrischen $n \times n$ Matrix A. Dann gilt

$$\begin{aligned} A \text{ ist positiv definit} &\iff \text{Alle } \lambda_i > 0, \\ A \text{ ist positiv semi-definit} &\iff \text{Alle } \lambda_i \geq 0, \\ A \text{ ist negativ definit} &\iff \text{Alle } \lambda_i < 0, \\ A \text{ ist negativ semi-definit} &\iff \text{Alle } \lambda_i \leq 0 \end{aligned}$$

Definition 11: Hauptminoren

Die Hauptminor einer symmetrischen, reellen Matrix A sind die nordwestlichen Unterdeterminanten der Matrix A. Sie werden mit A_i bezeichnet, wobei i die Grösse der Teilmatrix A_i ist.
Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

dann sind die n Hauptminoren $A_1, ..., A_n$ gegeben durch

$$A_1 = \det(a_{11}) = a_{11},$$
$$A_2 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$
$$A_3 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$
$$\vdots$$
$$A_n = \det(A)$$

Satz 7: Sylvester-Kriterium

NUR FÜR GROSSE MATRIZEN VERWENDEN. Sind $A_1, ..., A_n$ die Hauptminoren der reellen, symmetrischen $n \times n$ Matrix A, dann gilt:

$$\begin{aligned} A \text{ ist positiv definit} &\iff \text{Alle } A_i > 0, \\ A \text{ ist negativ definit} &\iff \text{Wechselndes Vorzeichen: } A_1 < 0, A_2 > 0, A_3 < 0, \dots \\ A \text{ ist indefinit} &\iff \text{Weder alle } A_i \leq 0 \text{ noch } A_i \geq 0 \end{aligned}$$

Rezept 18: Kritische Punkte finden in Skalarfeld (nicht abgegrenzt)

Lösungsschritt I: Gradient berechnen; Gradient $= 0$ setzen $\implies$ kritische Punkte.
Lösungsschritt II: Hessematrix berechnen; für jeden kritischen Punkt: Falls die Hessematrix positiv definit ist $\implies$ lokales Minimum; falls Hessematrix negativ definit ist $\implies$ lokales Maximum; sonst Sattelpunkt.

Rezept 19: Kritische Punkte finden in Skalarfeld (abgegrenzt)

Lösungsschritt I: Inneres Skalarfeld nach kritischen Punkten untersuchen nach Rezept 18. ($\nabla f \overset{!}{=} 0$)
Lösungsschritt II: Alle Begrenzungen des Skalarfeldes einzeln nach kritischen Punkten untersuchen. Beispiel Dreieck: alle Seiten parametrisieren und **alle Eckpunkte einzeln untersuchen**. Parametrisierungen ableiten und die Extrempunkte der Stücke untersuchen; Eckpunkte notieren. $\frac{d}{dt}(f \circ \gamma_1) \overset{!}{=} 0$, also t, resp. die kritischen Punkte so finden.
Lösungsschritt III: Alle gefundenen Punkte miteinander vergleichen und herausfinden, welches die Extrema sind (jeweils die Funktionswerte der Extrempunkte berechnen).

Rezept 20: Extremwertaufgaben ohne Nebenbedingungen

Gegeben: $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit Ω offen (d.h. ohne Rand) und f von der Klasse C^2.
Gesucht: Extremalstellen von f in Ω.

Lösungsschritt I:
Finde die kritischen Punkte $\{x_0\} \in \Omega$. D.h. alle Punkte, für die gilt

$$df(x_0) = 0$$

und $x_0 \in \Omega$.
Lösungsschritt II:
Untersuche die Hesse-Matrix von f in den Punkten $\{x_0\}$ um über die Art der Extremum zu entscheiden.

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_f(x_0) \text{ ist positiv definit} &\quad\Rightarrow\quad x_0 \text{ ist ein lokales Minimum von} f \\ \mathrm{H}_f(x_0) \text{ ist negativ definit} &\quad\Rightarrow\quad x_0 \text{ ist ein lokales Maximum von} f \\ \mathrm{H}_f(x_0) \text{ ist indefinit} &\quad\Rightarrow\quad x_0 \text{ ist ein Sattelpunkt von} f \end{aligned}$$

Wenn die Hesse-Matrix keine klare Aussage ergibt (degenerierte kritische Punkte), muss man die Funktion in einer Umgebung abschätzen (um ein Max/Min zu zeigen) oder konkrete Gegenbeispiele finden.

Rezept 21: Extremwerteaufgaben mit "einfachen" Nebenbedingungen

Gegeben: $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit Rand $\partial\Omega$ und f von der Klasse C^2.
Gesucht: Extremalstellen von f in Ω.

Lösungsschritt I:
Wir untersuchen das Innere $\mathring{\Omega}$ analog zu Rezept 20.

Lösungsschritt II:
Wir parametrisieren den Rand $\partial\Omega$ durch $\gamma(t)$. Die kritischen Punkte sind dann die Punkte $\gamma(t)$ für die gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \gamma)(t) = 0.$$

Lösungsschritt III:
Bestimme die Art der kritischen Punkte.

- Variante 1 (nur kleinstes Min/ grösstes Max):
  Werte alle kritischen Punkte auf dem Rand explizit aus. D.h. berechne $f(\gamma(t))$.
- Variante 2 (Min/Max/Sattelpunkt):
  Die Funktion $f(\gamma(t))$ ist nur von einer Variable abhängig. Bestimme die Art der kritischen Punkte anhand der Kriterien für 1D-Funktionen.

Lösungsschritt IV:
Ist der Rand stückweise parametrisiert durch $\gamma_1, \gamma_2, \dots$, muss die Funktion zusätzlich an allen Anfangs- und Endpunkten der γ_i explizit ausgewertet werden.

Bemerkung: Das Wort "einfach" bedeutet hier, dass wir eine Parametrisierung für den Rand finden können.

3.8 Lagrange Multiplikatoren

Sei $f(x) \in \mathbb{R}^n$ die zu maximierende Funktion, von der wir aber nur Punkte betrachten wollen, für welche gilt, dass $g(x) = 0$ mit $g(x) \in \mathbb{R}^l$ Definition der **Lagrange-Funktion**:

$$L = f - \lambda \cdot g = f - \lambda_1 g_1 - \ldots - \lambda_n g_n \quad \text{mit } \lambda \text{ in } \mathbb{R}^l$$

Dieses λ existiert immer, wenn $f, g \in C^1$. Die Kandidaten für Extrema von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ sind genau die kritischen Punkte der Lagrange-Funktion L. Mittels der Hesse-Matrix von L kann die Art der Extrema gefunden werden. Jeder Kandidat wird in f eingesetzt um zu erkennen, wo f mit welchen Werten Extrema annimmt.

Rezept 22: Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

Gegeben: $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g : \Omega \to \mathbb{R}^l$ der Klasse C^1.
Gesucht: ein Extremum der Funktion f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

Lösungsschritt I:
Bilde die Lagrange-Funktion

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = f(x_1, \ldots, x_n) - \lambda_1 g_1(x_1, \ldots, x_n) - \cdots - \lambda_l g_l(x_1, \ldots, x_n),$$

wobei $g_1, \ldots, g_l$ die l Komponenten von g sind. Oft ist $l = 1$.

Lösungsschritt II:

Bestimme die kriischen Punkte von L, d.h. löse

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} - \dots - \lambda_l \frac{\partial g_l}{\partial x_1} = 0$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n} - \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_n} - \dots - \lambda_l \frac{\partial g_l}{\partial x_n} = 0.$$

Löse dieses Gleichungssystem mit den zusätzlichen Gleichungen von $g = 0$.

Lösungsschritt III:
Die Lösungen $(x_1, \dots, x_n)$ sind die Kandidaten für Extremalstellen von f. Untersuche die Hesse-Matrix von L um den Typ zu bestimmen.

$\text{Hess}(L)(x_0, \lambda)$ ist positiv definit $\to x_0$ ist ein lokales Minimum von f auf $g^{-1}($
$\text{Hess}(L)(x_0, \lambda)$ ist negativ definit $\to x_0$ ist ein lokales Maximum von f auf $g^{-1}($
$\text{Hess}(L)(x_0, \lambda)$ ist indefinit $\to x_0$ ist ein Sattelpunkt von f auf $g^{-1}(0)$.

Ist man nur an den **globalen Extremwerten** interessiert, spart man sich diesen Schritt und wertet stattdessen die Funktion f an den Kandidaten aus.

Lösungsschritt IV:

Ist man auch an Extremalstellen im Innern $\mathring{\Omega}$ interessiert, sucht man diese mit dem bereits bekannten Rezept.

3.9 Satz der Impliziten Funktion

Ziel: Existenz von lokalen Umkehrungen. "Implizit", weil die Form der Gleichung stets ein Gleichungssystem impliziert. Sei das Gleichungssystem der Form:

$$f(x, y) = 0$$

$x = (x_1, ..., x_k)$, $y = (y_1, ..., y_l)$

$$df(x,y) = (df_x(x,y) \mid df_y(x,y)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_l}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_l}{\partial x_k} & \frac{\partial f_l}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_l}{\partial y_l} \end{pmatrix}$$

Satz 8: Implizite Funktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$ offen und sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^l$ stetig differenzierbar. Ist der Punkt $p_0 = (a, b) \in \Omega$ (mit a = erste k Koordinaten und b = letzte l Koordinaten von p_0) regulär mit

$$f(p_0) = 0 \text{ und } \det(d_y f(p_0)) \neq 0 \;(\iff d_y f(p_0) \text{ ist invertierbar})$$

wobei $d_y f(p_0)$ die partiellen Ableitungen der Koordinaten $y_1, ..., y_l$ enthält, so lässt sich das Gleichungssystem $f(x, y) = 0$ nach Koordinaten y auflösen. Das heisst es existiert ein $h : U \to V$ sodass

$$\exists h : f(x, h(x)) = 0$$

Beispiel 5: Zeigen, dass implizite Funktion existiert $f \to \mathbb{R}$

$$F(x, y) = x^4 + x^3y^2 - y + y^2 + y^3 - 1$$

Zeigen Sie, dass offene Intervalle $U, V \subset \mathbb{R}$ existieren, so dass $1 \in U$, $-1 \in V$ und eine C^1-Abbildung $f : V \to U$ mit $f(-1) = 1$ existiert, s.d. für alle $(x, y) \in U \times V$ gilt:

$$F(x, y) = 0 \iff x = f(x)$$

Berechnen Sie $f'(-1)$

Lösung: Es gilt

$$\partial_y F(x, y) = 2x^3y - 1 + 2y + 3y^2 \quad \text{mit} \quad \partial_y F(-1, 1) = 2 \neq 0$$

Dann existiert dank dem Satz über implizite Funktionen eine Funktion $f : V \to U$ mit den vorherigen Eigenschaften und es gilt

$$f'(1) = -\frac{\partial_x f(-1, 1)}{\partial_y f(-1, 1)} = \frac{1}{2}$$

sowie

$$x^4 + x^3 f(x)^2 - f(x) + f(x)^2 + f(x)^3 = 1$$
$$4x^3 + 3x^2 f(x)^2 + 2x^3 f'(x) f(x) - f'(x) + 2f'(x)f(x) + 3f'(x)f(x)^2 = 0$$

Da $f(-1) = 1$ gilt folglich:

$$0 = -4 + 3 - 2f'(-1) - f'(-1) + 2f'(-1) + 3f'(-1) = -1 + 2f'(-1)$$

also $f'(-1) = \frac{1}{2}$

Beispiel 6: Zeigen, dass implizite Funktion existiert $f \to \mathbb{R}^2$

$$F(x, y, z) = x + y + z + \sin(xyz)$$

Zeigen Sie, dass ein offener Bereich $U \subset \mathbb{R}^2$ und ein offenes Intervall $V \subset \mathbb{R}$ existieren, so dass $(0, 0) \in U$, $U \in V$ und eine C^1-Abbildung $f : U \leftarrow V$ mit $f(0, 0) = 0$ existiert, sodass für alle $(x, y, z) \in U \times V$ gilt:

$$F(x, y, z) = 0 \iff z = f(x, y)$$

Berechnen Sie $\nabla f(0, 0)$.

Lösung: Es gilt

$$\partial_z F(x, y, z) = 1 + xy\cos(xyz) \quad \text{mit} \quad \partial_x F(0, 0, 0) = 1 \neq 0$$

Daher existiert gem. Satz über implizite Funktionen die Funktion f und es gilt:

$$\nabla f(0, 0) = \left(-\frac{\partial_x F(0, 0, 0)}{\partial_z F(0, 0, 0)}, \; -\frac{\partial_y F(0, 0, 0)}{\partial_z F(0, 0, 0)}\right) = (-1, -1)$$

Rezept 23: Ableitung der Auflösungsfunktion h:

Bsp 2-dimensional (auflösen nach y) oder 3-dimensional (auflösen nach z)

$$dh(x) = -\frac{d_x f(x, h(x))}{d_y f(x, h(x))}$$

$$\nabla h(x, y) = \left(-\frac{\partial_x f(x, y, h(x, y))}{\partial_z f(x, y, h(x, y))}, -\frac{\partial_y f(x, y, h(x, y))}{\partial_z f(x, y, h(x, y))}\right)$$

Rezept 24: Typische Aufgabe

1. p_0 bestimmen, sodass $f(x, y) = 0$ stimmt.
2. $df(x, y)$ berechnen und d_y kontrollieren, ob $\neq 0$
3. Satz bewiesen, Ableiten der Auflösungsfunktion.

4 Integration in $\mathbb{R}^d$

4.1 Wegintegrale

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ stetig, d.h. für

$$f(t) = (f_1(t), \; \dots, \; f_n(t))$$

jedes f_i stetig, dann ist

$$\int_a^b f(t)dt = \left(\int_a^b f_1(t)dt, \; \dots, \; \int_a^b f_n(t)dt\right) \in \mathbb{R}^n$$

Für eine parametrisierte Kurve in $\mathbb{R}^n$, d.h. $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, s.d.

1. γ stetig
2. 2. $\exists t_0, \dots, t_k$, s.d. $t_0 = a < t_i < t_k = b$, s.d. $\gamma \mid]t_i, t_{i-1}[\in C^1$

nennen wir γ einen Pfad zwischen $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$.

Satz 9: Länge einer Kurve

Sei γ eine reguläre Kurve $t \to \gamma(t)$ sei $|.|$ die euklidische Norm: Die Länge ist

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'| dt$$

Rezept 25: Wegintegrale

Gegeben: Vektorfeld f von der Klasse C^1 und eine Kurve $\gamma \in C^1_{pw}$.
Gesucht: Wegintegral $\int_\gamma f \cdot ds$.

Lösungsschritt I:
Parametrisiere γ, d.h. finde eine Abbildung $\gamma(t) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $t \to \gamma(t)$.
Lösungsschritt II:
Berechne $\gamma'(t) = \frac{d}{dt}\gamma(t)$. Dabei wird jede Komponente des Vektors γ einzeln nach t abgeleitet.
Lösungsschritt III:
Das Wegintegral von f entlang γ ist definiert als

$$\int_\gamma f(s) \cdot d\vec{s} = \int_a^b \underbrace{\underbrace{f(\gamma(t))}_{\in\mathbb{R}^n} \cdot \underbrace{\gamma'(t)}_{\in\mathbb{R}^n}}_{\text{Skalarprodukt in } \mathbb{R}} \; dt \;\in \mathbb{R}$$

und ist unabhängig der gewählten Parametrisierung!

4.2 Potential

Intuition: Stärke der Änderung der Richtung der Vektoren in einem Vektorfeld.

Definition 12: Potentialfelder und Potentiale

Ein Vektorfeld $\vec{v} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heisst **Potentialfeld**, falls eine stetig differenzierbare Abbildung $\Phi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$\vec{v} = \nabla\Phi$$

gilt. Das skalare Feld Φ heisst dann **Potential** von $\vec{v}$. **Wichtig:** Es gibt sehr viele Vektorfelder, die sich nicht als Gradient eines skalaren Feldes schreiben lassen (also keine Potentialfelder sind)!

Rezept 26: Potential finden

Sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ ein Vektorfeld. Dann muss für das Potential Φ stimmen:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial\Phi}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

4.3 Konservative Vektorfelder (= Potentialfelder)

Rezept 27: Konservativität zeigen (mittels Integrabilitätsbedingungen)

Ein Vektorfeld $V : (x, y) \mapsto (f_1(x), f_2(y))$ ist konservativ (= ein Potentialfeld) wenn es **überall definiert und zusammenhängend** (für 2D: keine 'Löcher') ist und die **Integrabilitätsbedingungen** gelten:

Für $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$$

Für $\mathbb{R}^n$:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad \forall i \neq j, \quad i, j \in \{1, ..., n\}$$

Für $\mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \ \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_2}$$

Satz 10: Wegintegrale für Potentialfelder

Sei $\vec{v} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Potentialfeld mit Potential Φ. Dann gilt für jedes Wegintegrale entlang γ, dass

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{v}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt = \Phi(\gamma(b)) - \Phi(\gamma(a))$$

Wir müssen also nur die Potentiale am Anfangs- und Endpunkt der Kurve auswerten! Damit sieht man auch gerade, dass für jede geschlossene Kurve das Wegintegrale eines Potentialfeldes gleich 0 ist.

Nützliches: Zusammenfassung

Sei $\vec{v} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und Ω einfach zusammenhängend. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- $\vec{v}$ ist konservatives Vektorfeld
- $\vec{v}$ ist ein Potentialfeld
- Für alle geschlossene Kurven gilt $\oint \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0$
- Das Integral $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s}$ ist unabhängig vom Weg
- $\vec{v}$ erfüllt die Integrabilitätsbedingung auf Ω. Für $\mathbb{R}^3$ gilt also $\nabla \times \vec{v} = 0$

4.4 Integrationsregeln

Satz 11: Satz von Fubini

Reduzierung von mehrdimensionalen Integralen auf eine Dimension. Sei $f : [a, b] \times [c, d]$ stetig, dann gilt

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx = \int_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)d\mu(x, y)$$

Es sei der Quader $Q = [a_1, a_2] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ mit $f \in C^0(Q)$ gegeben. Dann gilt

$$\int_Q f(x)d\mu(x) = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \cdots \int_{a_n}^{b_n} dx_n f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Die Integrationsreihenfolge darf vertauscht werden.

Alternative Schreibweise von $dx\ dy$: $\mu(x, y)$, $\mu(x + y)$.

Satz 12: Substitutionsregeln in einer Dimension

Sei f eine Riemann-integrierbare Funktion. Für die Berechnung des Integrals

$$\int_a^b f(x)dx$$

führt die Substitution $x \to g(u)$ zu $dx = g'(u)du$ und damit wird das Integral

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(u))g'(u)du$$

Das heisst wir haben das Integrationselement dx durch $g'(u)du$ ersetzt und die Grenzen entsprechend angepasst.

Satz 13: Substitutionsregel in $\mathbb{R}^2$

$$\int_\Omega f(x, y)\ dxdy = \int_{\tilde{\Omega}} f(g(u, v),\ h(u, v)) \left| \underbrace{\det \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{pmatrix}}_{d\Phi = \nabla\Phi} \right| dudv$$

Satz 14: Substitutionsregeln in n Dimensionen

Sei f eine Riemann-integrierbare Funktion auf dem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und die Koordinatentransformation (Substitution)

$$(x_1, \ldots, x_n) = \Phi(u_1, \ldots, u_n)$$

oder in Komponenten

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \Phi(u) = \begin{pmatrix} g_1(u_1, \ldots, u_n) \\ \vdots \\ g_n(u_1, \ldots, u_n) \end{pmatrix}$$

ist ein C^1-Diffeomorphismus. Dann gilt

$$\int_\Omega f(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_1 = \int_{\tilde{\Omega}} f(g_1(u), \ldots, g_n(u)) \cdot |\det d\Phi|\ du_1 \ldots du_n$$

wobei das Gebiet $\tilde{\Omega} = \Phi^{-1}(\Omega)$ ist. $|\det d\Phi|$ ist die **Funktionaldeterminante** (Jakobi-Determinante).

Rechenregeln: Koordinatentransformation und Funktionaldet.

Wichtige Koordinatentransformationen und Funktionaldeterminanten

Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi & 0 \le r < \infty \quad & dxdy = r \cdot drd\varphi \\ y &= r\sin\varphi & 0 \le \varphi < 2\pi \quad & \end{aligned}$$

Elliptische Koordinaten $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} x &= r \cdot a\cos\varphi & 0 \le r < \infty \quad & dxdy = a \cdot b \cdot r \cdot drd\varphi \\ y &= r \cdot b\sin\varphi & 0 \le \varphi < 2\pi \quad & \end{aligned}$$

Zylinderkoordinaten $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} x &= r \cdot a\cos\varphi & 0 \le r < \infty \quad & dxdydz = r \cdot drd\varphi dz \\ y &= r \cdot b\sin\varphi & 0 \le \varphi < 2\pi \quad & \\ z &= z & \infty \le z < \infty \quad & \end{aligned}$$

Kugelkoordinaten $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \sin\theta\cos\varphi & 0 \le r < \infty \quad & dxdydz = r^2\sin\theta \cdot drd\theta d\varphi \\ y &= r \cdot \sin\theta\sin\varphi & 0 \le \theta < \pi \quad & \\ z &= r\cos\theta & 0 \le \varphi < 2\pi \quad & \end{aligned}$$

4.5 Geometrische Anwendungen von Integralen

Rezept 28: Area(D) - Vol(D) - Volumen eines Normalbereichs in $\mathbb{R}^n$

Analog zum Integrieren über Normalbereich:

$$\text{Vol}(D) = \int_D 1\ dX = \underbrace{\int\int \ldots \int}_{n} 1\ dx_1 \ldots dx_{n-1}dx_n, \qquad D \subseteq \mathbb{R}^n$$

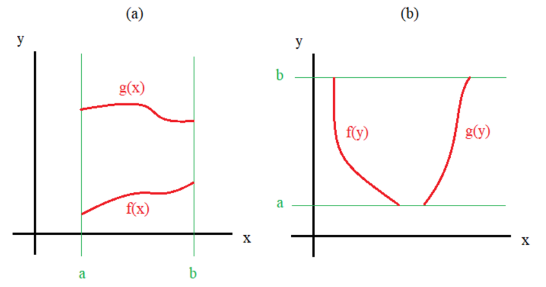
4.5.1 Normalbereiche in $\mathbb{R}^2$

Definition 13: Normalbereiche in zwei Dimensionen

Sei Ω eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Ω heisst **y-Normalbereich**, falls sich Ω wie folgt darstellen lässt:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b, f(x) \le y \le g(x)\}$$

wobei f, g stetige Funktionen der Variable x sind. Die Rolle von x und y darf vertauscht werden (es existiert also auch ein x-Normalbereich).



(a): y-Normalbereich, (b): x-Normalbereich

Satz 15: Integration auf Normalbereichen

Sei
$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$
ein **y-Normalbereich** mit stetigen Funktionen f, g und sei die zu integrierende Funktion $F \in C^0(\Omega)$, dann gilt:

$$\int_\Omega F d\mu = \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} dy F(x,y)$$

Das innere Integral wird zuerst ausgewertet.

Rezept 29: Integrieren über Normalbereichen

Am folgenden Beispiel:

$$\int_D f(x,y)\, dxdy \quad \text{wobei} \quad D = \mathbb{R}^2 \cap \{(x,y) \mid y \geq 0 \wedge x-y+1 \geq 0 \wedge x+2y-4 \leq 0\}$$

1. Es hilft, sich den Normalbereich visuell vorzustellen, um die Grenzen zu finden. Bedingungen nutzen:
$$y \geq 0 \ \wedge (y-1 \leq x \leq 4-2y)$$
Damit x nicht leer ist, muss $y-1 \leq 4-2y$ sein, resp. $y \leq \frac{5}{3}$
2. Für das äussere Integral sind die Integrationsgrenzen nun fest vorgegeben. Die inneren Grenzen werden abhängig von der äusseren Variable gewählt:
$$\int_D f(x,y)\, dxdy = \int_0^{\frac{5}{3}} \int_{y-1}^{4-2y} f(x,y)\, dxdy$$

4.5.2 Satz von Green

Dieser Satz erlaubt uns, eindimensionale Wegintegrale in zweidimensionale Gebietsintegrale umzuwandeln. D.h. wir rechnen dann jeweils die Variante aus, die einfacher geht. Idee: Beziehung Linienintegral und Flächenintegral.

Satz 16: Satz von Green in der Ebene

Sei $\vec{v} = (v_1, v_2)$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $C \subset \Omega$ ein beschränkter Bereich mit C^1_{pw} Rand ∂C, der sich nicht selbst schneidet. Dann gilt

$$\int_{\gamma=\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_C \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dxdy$$

Bemerkung I: Der Rand ∂C muss im positiven mathematischen Sinn durchlaufen werden. D.h. das Gebiet C muss jeweils links vom Rand sein, für ein Beobachter, der auf dem Rand läuft.

Bemerkung II: Der Satz von Green ist die zweidimensionale Version des Satzes von Stokes
Bemerkung III: $\gamma = \partial C$ muss den gesamten Rand abdecken. Evtl. Gebietsadditivität nutzen und gewisse Bereiche (Ränder) einzeln parametrisieren.

Rezept 30: Flächen berechnen mit Satz von Green

Gegeben: Gebiet $C \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt mit C^1_{pw} Rand ∂C.
Gesucht: Fläche $F(C)$

Lösungsschritt I:
Parametrisiere den Rand von C mit einer Kurve

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \gamma(t)$$

Beachte, dass die Parametrisierung in positiver mathematischer Richtung verläuft. D.h. das Gebiet muss jeweils links der Kurve sein.
Lösungsschritt II:
Berechne γ'
Lösungsschritt III:
Wähle ein geeignetes Vektorfeld: $\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 1$ Zum Beispiel $\vec{v} = (0, x)$ oder $\vec{v} = (-y/2, x/2)$ oder $\vec{v} = (-y, 0)$. Wende dafür den Satz von Green an,

$$F(C) = \int_{\gamma=\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

Satz 17: Masse und Schwerpunkt

Sei Ω ein zweidimensionales Gebiet mit Massendichte $\rho(x,y)$, welche die Massenverteilung auf Ω beschreibt. Die **Masse** von Ω ist dann

$$M(\Omega) = \int_\Omega \rho(x,y) dxdy$$

Der **Schwerpunkt** $S = (x_s, y_s)$ von Ω ist gegeben durch

$$x_s = \frac{1}{M} \int_\Omega x\rho(x,y) dxdy$$
$$y_s = \frac{1}{M} \int_\Omega y\rho(x,y) dxdy$$

Analog berechnen sich Masse, Schwerpunkt von dreidimensionalen Gebieten.

Satz 18: Satz von Stokes

Sei $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ und $C \subset \Omega$ eine offene Fläche durch die geschlossene C^1_{pw} Kurve $\gamma = \partial C$ berandet:

$$\int_{\gamma=\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_C (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot \vec{n}\ do$$

wobei $\vec{n}$ der nach aussen gerichtete Normalenvektor entlang C und do das zweidimensionale Integrationselement über die Fläche bezeichnen. Der Weg γ muss positiv orientiert sein.

4.5.3 Satz von Gauss

Satz 19: Satz von Gauss

Sei V ein beschränkter räumlicher Bereich mit Rand $\partial V \in C^1_{pw}$ gegeben. Sei das Vektorfeld $\vec{v}$ auf ganz V definiert und stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_{\partial V} \vec{v} \cdot \vec{n}\ do = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{v}\ d\mu$$

wobei $\vec{n}$ der nach aussen gerichtete Normalenvektor entlang ∂V, do das zweidimensionale Integrationselement über die Fläche und $d\mu$ das dreidimensionale Integrationselement über das Volumen bezeichnen.

5 Tricks und Umformungen

Rezept 31: $f(b) - f(a)$

Falls irgendwo die Differenz einer Funktion auftaucht, kann oft der Fundamentalsatz genutzt werden

$$f(b) - f(a) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}\, dx$$

Rezept 32: Beweise, dass z(t) konstant ist

$$z(t) \text{ konstant} \iff z'(t) = 0 \text{ bzw } \nabla z(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial z_n}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ also}$$
$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} : \frac{\partial z_i}{\partial t} = 0$$

6 Integrale

6.1 Spezielle unbestimmte Integrale

$\int 0\ dx = C,\ \int a\ dx = ax + C$

$\int x^s dx = \frac{1}{s+1}x^{s+1} + C,\ s \neq -1 \quad \int \frac{1}{x}\ dx = log|x| + C$

$\int (ax+b)^s\ dx = \frac{1}{a(s+1)}(ax+b)^{s+1} + C,\ s \neq -1$

$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ log|ax+b| + C$

$\int (ax^p+b)^s x^{p-1}\ dx = \frac{(ax^p+b)^{s+1}}{ap(s+1)} + C,\ s \neq -1, a \neq 0$

$\int (ax^p+b)^{-1} x^{p-1}\ dx = \frac{1}{ap}log|ax^p+b| + C,\ a \neq 0, p \neq 0$

$\int \frac{ax+b}{cx+d}dx = \frac{ax}{c} - \frac{ad-bc}{c^2}log|cx+d| + C$

$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}arctan(\frac{x}{a}) + C$

$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$

$\int \sqrt{a^2+x^2}\ dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}log(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C$

$\int \sqrt{a^2-x^2}\ dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}arcsin\left(\frac{x}{|a|}\right) + C$

$\int \sqrt{x^2-a^2}\ dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}log|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\ dx = log(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\ dx = log|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\ dx = arcsin\left(\frac{x}{|a|}\right) + C$

$\int e^{kx}\ dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C$

$\int a^{kx}\ dx = \frac{1}{k*log(a)}a^{kx} + C$

$\int e^{ax}p(x)\ dx = e^{ax}(a^{-1}p(x) - a^{-2}p'(x) + a^{-3}p''(x) - \ldots$
$+(-1)^n a^{-n-1}p^{(n)}(x)) + C$, $a \neq 0$, p: Polynom n-ten Grades

$\int e^{kx}sin(ax+b)\ dx = \frac{e^{kx}}{a^2+k^2}\Big(k\ sin(ax+b) -$
$a\ cos(ax+b)\Big) + C$

$\int e^{kx}cos(ax+b)\ dx = \frac{e^{kx}}{a^2+k^2}\Big(k\ cos(ax+b) ...$
$... + a\ sin(ax+b)\Big) + C$

$\int log|x|\ dx = x(log|x|-1) + C$

$\int x^k log(x)\ dx = \frac{x^{k+1}}{k+1}\left(log(x) - \frac{1}{k+1}\right) + C,\ k \neq -1$

$\int x^{-1}log(x)\ dx = \frac{1}{2}(log(x))^2 + C$

$\int sin(x)\ dx = -cos(x) + C$

$\int sin(ax+b)\ dx = -\frac{1}{a}cos(ax+b) + C$

$\int cos(x)\ dx = sin(x) + C$

$\int cos(ax+b)\ dx = \frac{1}{a}sin(ax+b) + C$

$\int tan(x)\ dx = -log|cos(x)| + C$

$\int sin^2(x)\ dx = \frac{1}{2}(x - sin(x)cos(x)) + C$

$\int cos^2(x)\ dx = \frac{1}{2}(x + sin(x)cos(x)) + C$

$\int tan^2(x)\ dx = tan(x) - x + C$

$\int \frac{1}{sin(x)}\ dx = log\left|tan\frac{x}{2}\right| + C$

$\int \frac{1}{cos(x)}\ dx = log\left|tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

$\int \frac{1}{tan(x)}\ dx = log|sin(x)| + C$

$\int arcsin(x)\ dx = x\ arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$

$\int arccos(x)\ dx = x\ arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + C$

$\int arctan(x)\ dx = x\ arctan(x) - \frac{1}{2}log(1+x^2) + C$

6.2 Spezielle bestimmte Integrale

$\int_0^{2\pi} sin(mx)cos(nx)\ dx = 0,\ m,n \in \mathbb{Z}$

$\int_0^{\infty} \frac{sin(ax)}{x}\ dx = \frac{\pi}{2},\ a > 0$

$\int_0^{\infty} sin(x^2)\ dx = \int_0^{\infty} cos(x^2)\ dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

$\int_0^{\infty} e^{-ax}x^n\ dx = \frac{n!}{a^{n+1}},\ a > 0$

$\int_0^{\infty} e^{-ax^2}\ dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}},\ a > 0$