Laboratorium nr 4

Statystyka matematyczna rok ak. 2023/24

ROZKŁAD WEIBULLA

Ernst Hjalmar Waloddi Weibull (1887 – 1979) był szwedzkim inżynierem i matematykiem. W 1951 roku opublikował artykuł, w którym zaproponował nowy rozkład prawdopodobieństwa. Rozkład Weibulla jest to ciągły rozkład stosowany do modelowania sytuacji, gdy prawdopodobieństwo awarii zmienia się w czasie. Rozkład Weibulla jest bardziej ogólny niż rozkład wykładniczy. Charakteryzuje się zmienną intensywnością uszkodzeń, które dla rozkładu wykładniczego są stałe. Rozkładem tym opisuje się między innymi trwałość zmęczeniową materiałów i konstrukcji mechanicznych. Stosowanie rozkładu Weibulla jest zalecane wówczas, gdy obiekty przechodzą do stanu niezdatności głównie na skutek nagłego zużycia. Rozkład Weibulla wykorzystany jest również w energetyce wiatrowej do opisu zmienność wiatru w ciągu roku. Rozkład ten stosuje się nawet w modelowaniu czasu istnienia firm i przedsiębiorstw.

Definicja. Powiemy, że zmienna losowa X ma **rozkład Weibulla z parametrami** $\alpha > 0$ **i** $\beta > 0$ jeśli jej funkcja gęstości dana jest wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{\left(-\frac{x}{\beta}\right)^\alpha}, & \text{dla } x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Parametr α nazywa się parametrem **kształtu**, a parametr β nazywa się parametrem **skali**.

Parametr α określa zachowanie prawdopodobieństwa awarii (śmierci) w czasie.

Dla $\alpha < 1$ prawdopodobieństwo awarii (śmierci) maleje z czasem, co w przypadku modelowania awarii urządzenia sugeruje, że urządzenie może posiadać wady fabryczne.

Dla $\alpha = 1$ (rozkład wykładniczy) prawdopodobieństwo awarii jest stałe, co oznacza, że awarie mają charakter zewnętrzny.

Dla $\alpha = 2$ (rozkład Rayleigha) prawdopodobieństwo awarii rośnie liniowo z czasem.

Dla $\alpha > 1$ prawdopodobieństwo awarii rośnie z czasem, co sugeruje, że główną przyczyną awaryjności jest zużycie części z upływem czasu.

UWAGA. Oznaczenia parametrów rozkładu Weibulla α i β często są używane zamiennie. Należy zwrócić na to szczególną uwagę.

Wartość oczekiwana i wariancja zmiennej losowej X

o rozkładzie Weibulla z parametrami α **i** β

$\mathbf{E}X = \beta\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right);$

$\mathbf{D}^2 X = \beta^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\right)^2\right],$

gdzie $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ jest tak zwaną funkcją gamma.

PRZYDATNE FUNKCJE I POLECENIA

dweibull(x,shape=alfa, scale=beta) - wartość funkcji gęstości w punkcie x

pweibull(x,shape=alfa, scale=beta) - wartość dystrybuanty w punkcie x

qweibull(x,shape=alfa, scale=beta) - kwantyl rzędu p

rweibull(x,shape=alfa, scale=beta) - n losowych wartości

gamma(x) - wartość funkcji gamma w punkcie x

Dwie krzywe gęstości na jednym rysunku z legendą

```r
curve(dweibull(x, 10, 2), from=0, to=6,col="red")
curve(dweibull(x, 10,4), from=0, to=6, col="green",add = T)
legend("topright",legend=c("beta=2","beta=4"),
       col = c("red","green"),lwd=1)
```

ZADANIE 4.1. Naszkicuj na wspólnym rysunku wykresy funkcji gęstości rozkładu Weibulla z parametrami

(a) $\alpha = 10$, $\beta = 0.5, 1, 2$,

(b) $\alpha = 0.5, 1, 2$, $\beta = 0.5$.

Pamiętaj o dopasowaniu osi układu, tytułu rysunku i legendy.

ZADANIE 4.2 Na dwóch oddzielnych rysunkach naszkicuj wykresy funkcji prawdopodobieństwa rozkładu wykładniczego z parametrem 2 i rozkładu Weibulla z parametrami 1, 0.5. Co można zaobserwować i dlaczego?

ZADANIE 4.3. Czas awarii ekranu komputerowego produkowanego przez pewną fabrykę ma rozkład Weibulla z parametrami $\alpha = 0.6$ i $\beta = 1000$.

(a) Oblicz średni czas awarii ekranu komputerowego wyprodukowanego przez tę fabrykę.

(b) Jakie jest odchylenie standardowe czasu awarii ekranu komputerowego wyprodukowanego przez tę fabrykę?

(c) Załóżmy, że kupiliśmy ekran wyprodukowany przez rozważaną fabrykę. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że ten ekran będzie pracował bezawaryjnie dłużej niż 5000 godzin?

(d) Oblicz kwantyl rzędu 0.9 czasu awarii rozważanego ekranu komputerowego. Jak można zinterpretować otrzymany wynik?

Do obliczeń wykorzystaj odpowiednie funkcje programu R.