Оптимизация экономического портфеля с использованием методов машинного обучения

Бакалаврский диплом

Михаил Давыдов

ФПМИ МФТИ, кафедра дискретной математики

23 июня 2024 г.

Введение

Инвесторы вкладывают свои деньги в акции, и хотят использовать для распределения денег эффективные алгоритмы.

Введение

Инвесторы вкладывают свои деньги в акции, и хотят использовать для распределения денег эффективные алгоритмы. Если инвестор изначально не обладает информацией о стоимости активов, то в качестве модели можно использовать модель многоруких бандитов

Введение

Инвесторы вкладывают свои деньги в акции, и хотят использовать для распределения денег эффективные алгоритмы. Если инвестор изначально не обладает информацией о стоимости активов, то в качестве модели можно использовать модель многоруких бандитов

- Есть n рычагов, i-ый рычаг соответствует какому-то распределению со средним m_i. Изначально распределения, как и средние, неизвестны.

Введение

Инвесторы вкладывают свои деньги в акции, и хотят использовать для распределения денег эффективные алгоритмы. Если инвестор изначально не обладает информацией о стоимости активов, то в качестве модели можно использовать модель многоруких бандитов

- Есть n рычагов, i-ый рычаг соответствует какому-то распределению со средним m_i. Изначально распределения, как и средние, неизвестны.
- При нажатии на i-ый рычаг выдается награда в соответствии с i-ым распределением.

Введение

Инвесторы вкладывают свои деньги в акции, и хотят использовать для распределения денег эффективные алгоритмы. Если инвестор изначально не обладает информацией о стоимости активов, то в качестве модели можно использовать модель многоруких бандитов

- Есть n рычагов, i-ый рычаг соответствует какому-то распределению со средним m_i. Изначально распределения, как и средние, неизвестны.
- При нажатии на i-ый рычаг выдается награда в соответствии с i-ым распределением.
- Задача – найти $\arg\max\limits_{\mathbf{p}\in\Delta^n} \mathbf{p}^T \cdot \mathbf{m} = \sum_{i=1}^n p_i m_i$, где $\Delta^n = \{\mathbf{p} = (p_1, ..., p_n) : (\sum_{i=1}^n p_i = 1) \wedge (\forall i \ p_i \geqslant 0)\}$, $\mathbf{p}$ отвечает за долю от общих средств, вкладываемых в каждый актив на каждом шаге.

Введение

Инвесторы вкладывают свои деньги в акции, и хотят использовать для распределения денег эффективные алгоритмы. Если инвестор изначально не обладает информацией о стоимости активов, то в качестве модели можно использовать модель многоруких бандитов

- Есть n рычагов, i-ый рычаг соответствует какому-то распределению со средним m_i. Изначально распределения, как и средние, неизвестны.
- При нажатии на i-ый рычаг выдается награда в соответствии с i-ым распределением.
- Задача – найти $\arg\max\limits_{\mathbf{p}\in\Delta^n} \mathbf{p}^T \cdot \mathbf{m} = \sum_{i=1}^n p_i m_i$, где $\Delta^n = \{\mathbf{p} = (p_1, ..., p_n) : (\sum_{i=1}^n p_i = 1) \wedge (\forall i\ p_i \geqslant 0)\}$, $\mathbf{p}$ отвечает за долю от общих средств, вкладываемых в каждый актив на каждом шаге.
- Равносильно нахождению рычага с наибольшим средним

Учет рисков

- Появляется дисперсия σ_i^2.

Учет рисков

- Появляется дисперсия σ_i^2.
- Задача – найти

$$\underset{\mathbf{p}\in\Delta^n}{\arg\max}\left(\mathbf{p}^T\cdot\mathbf{m}-\lambda\left(\mathbf{p}^T\right)^2\cdot\boldsymbol{\sigma}^2\right)=\sum_{i=1}^n p_i m_i-\lambda\sum_{i=1}^n p_i^2\sigma_i^2$$

где $\lambda > 0$ – коэффициент отвращения, или неприятия к риску.

Учет рисков

- Появляется дисперсия σ_i^2.
- Задача – найти

$$\arg\max_{\mathbf{p}\in\Delta^n} \left(\mathbf{p}^T \cdot \mathbf{m} - \lambda \left(\mathbf{p}^T\right)^2 \cdot \boldsymbol{\sigma}^2\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i m_i - \lambda \sum_{i=1}^{n} p_i^2 \sigma_i^2$$

где $\lambda > 0$ – коэффициент отвращения, или неприятия к риску.
- В этой трактовке задачи вектор вероятностей может не сосредотачиваться в одном рычаге.

Задачи

1. Проанализировать известные подходы в классической задаче о многоруких бандитах на предмет применимости для распределений, отличных от нормального.

Задачи

1. Проанализировать известные подходы в классической задаче о многоруких бандитах на предмет применимости для распределений, отличных от нормального.
2. Придумать алгоритмы и подходы для решения задачи о многоруких бандитах с учетом степени отвращения к риску.

Задачи

1. Проанализировать известные подходы в классической задаче о многоруких бандитах на предмет применимости для распределений, отличных от нормального.
2. Придумать алгоритмы и подходы для решения задачи о многоруких бандитах с учетом степени отвращения к риску.
3. Протестировать созданные подходы на степенных распределениях.

Задачи

1. Проанализировать известные подходы в классической задаче о многоруких бандитах на предмет применимости для распределений, отличных от нормального.
2. Придумать алгоритмы и подходы для решения задачи о многоруких бандитах с учетом степени отвращения к риску.
3. Протестировать созданные подходы на степенных распределениях.
4. Оценить степень применимости оценки риска через дисперсию

Алгоритмы

1. Greedy и ϵ-greedy

$$A_t = \begin{cases} \arg\max_a Q_t(a), & \text{with probability } 1-\epsilon, \\ \text{a random action}, & \text{with probability } \epsilon. \end{cases}$$

Алгоритмы

1. Greedy и ϵ-greedy

$$A_t = \begin{cases} \arg\max_a Q_t(a), & \text{with probability } 1-\epsilon, \\ \text{a random action}, & \text{with probability } \epsilon. \end{cases}$$

2. Стратегия с позитивной инициализацией ($\forall a\ Q_t(a) = d,\ d > 0$)

Алгоритмы

1. Greedy и ϵ-greedy

$$A_t = \begin{cases} \arg\max_a Q_t(a), & \text{with probability } 1-\epsilon, \\ \text{a random action}, & \text{with probability } \epsilon. \end{cases}$$

2. Стратегия с позитивной инициализацией ($\forall a \ Q_t(a) = d, \ d > 0$)
3. Upper-Confidence Bound selection

$$A_t = \arg\max_a \left[Q_t(a) + c\sqrt{\frac{ln\ t}{N_t(a)}} \right], \ c > 0$$

Алгоритмы

1. Greedy и ϵ-greedy

$$A_t = \begin{cases} \arg\max_a Q_t(a), & \text{with probability } 1-\epsilon, \\ \text{a random action}, & \text{with probability } \epsilon. \end{cases}$$

2. Стратегия с позитивной инициализацией ($\forall a \ Q_t(a) = d, \ d > 0$)
3. Upper-Confidence Bound selection

$$A_t = \arg\max_a \left[Q_t(a) + c\sqrt{\frac{ln\ t}{N_t(a)}} \right], \ c > 0$$

4. Gradient bandit

Алгоритмы

1. Greedy и ϵ-greedy

$$A_t = \begin{cases} \arg\max_a Q_t(a), & \text{with probability } 1-\epsilon, \\ \text{a random action}, & \text{with probability } \epsilon. \end{cases}$$

2. Стратегия с позитивной инициализацией ($\forall a \; Q_t(a) = d, \; d > 0$)
3. Upper-Confidence Bound selection

$$A_t = \arg\max_a \left[Q_t(a) + c\sqrt{\frac{ln\, t}{N_t(a)}} \right], \quad c > 0$$

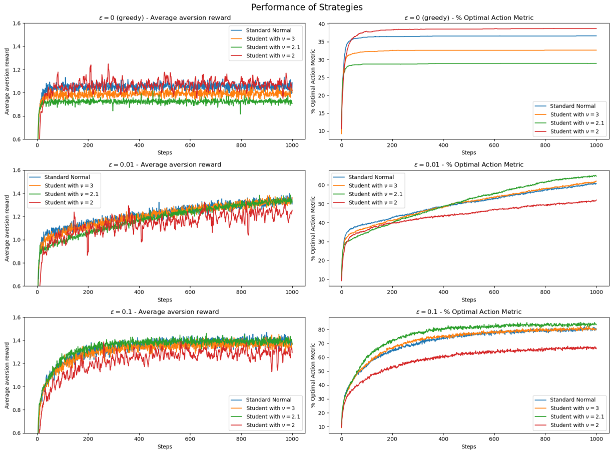
4. Gradient bandit

В конце все алгоритмы были сравнены в зависимости от их гиперпараметров

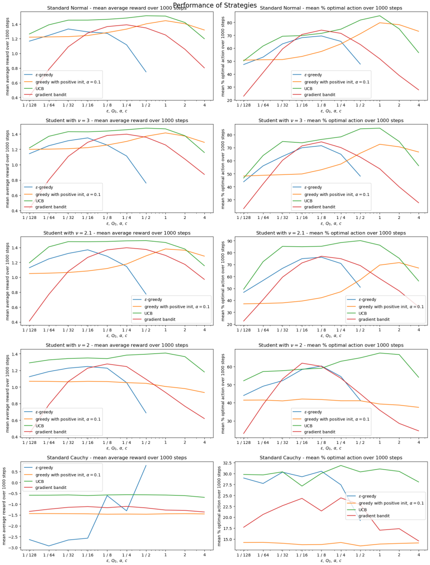
Параметры

- Стандартное нормальное ($N(0,1)$ или t_∞)
- Распределение Стьюдента с дисперсией 1 и 3-мя степенями свободы t_3 (для единичной дисперсии распределение было домножено на $\sqrt{\frac{1}{3}}$)
- Распределение Стьюдента нормированное $t_{2.1}$ с 2.1 степенями свободы.
- Распределение Стьюдента с 2-мя степенями свободы t_2
- Распределение Коши t_1 (только в задаче без учета риска)

Результаты – ϵ-greedy



Результаты – финальное тестирование



Выводы

Проделанные эксперименты позволяют судить о том, что Gradient bandits, ϵ-greedy и UCB – стратегии показывают высокую эффективность на степенных распределениях. UCB при этом лучшая из стратегий.

Результаты

1. Разработаны градиентный жадный и алгоритмический жадный алгоритмы для вычисления

$$\arg\max_{\mathbf{p}\in\Delta^n} = \sum_{i=1}^{n} p_i m_i - \lambda \sum_{i=1}^{n} p_i^2 \sigma_i^2$$

, при известных m_i и σ_i^2, причем последний работает за $O(n \log n)$

Результаты

1. Разработаны градиентный жадный и алгоритмический жадный алгоритмы для вычисления

$$\underset{\mathbf{p}\in\Delta^n}{\arg\max} = \sum_{i=1}^{n} p_i m_i - \lambda \sum_{i=1}^{n} p_i^2 \sigma_i^2$$

, при известных m_i и σ_i^2, причем последний работает за $O(n \log n)$

2. Адаптированы стратегии ϵ-greedy, adaptive ϵ, positive initialization, UCB, gradient bandits.

Результаты

1. Разработаны градиентный жадный и алгоритмический жадный алгоритмы для вычисления

$$\arg\max_{\mathbf{p}\in\Delta^n} = \sum_{i=1}^{n} p_i m_i - \lambda \sum_{i=1}^{n} p_i^2 \sigma_i^2$$

, при известных m_i и σ_i^2, причем последний работает за $O(n \log n)$

2. Адаптированы стратегии ϵ-greedy, adaptive ϵ, positive initialization, UCB, gradient bandits.
3. Создана стратегия с корректировкой дисперсии, переработана стратегия VDBE.

Метрики

- Среднее сожаление: чем ближе к 0, тем лучше. Если < 0, то алгоритм “переоценивает” себя.

Метрики

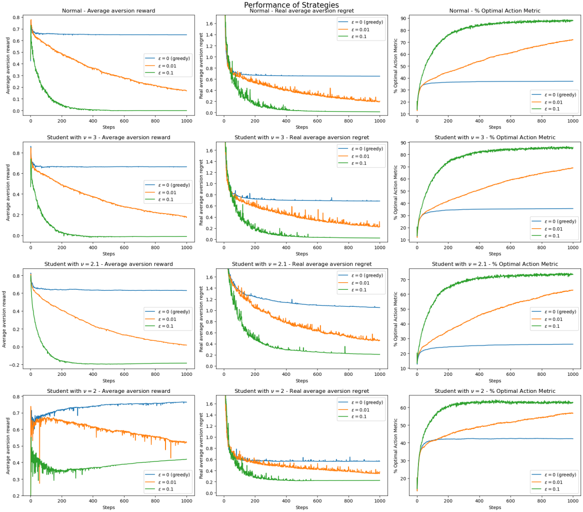
- Среднее сожаление: чем ближе к 0, тем лучше. Если < 0, то алгоритм “переоценивает” себя.
- Среднее реальное сожаление: всегда ≥ 0, чем ниже, тем лучше.

Метрики

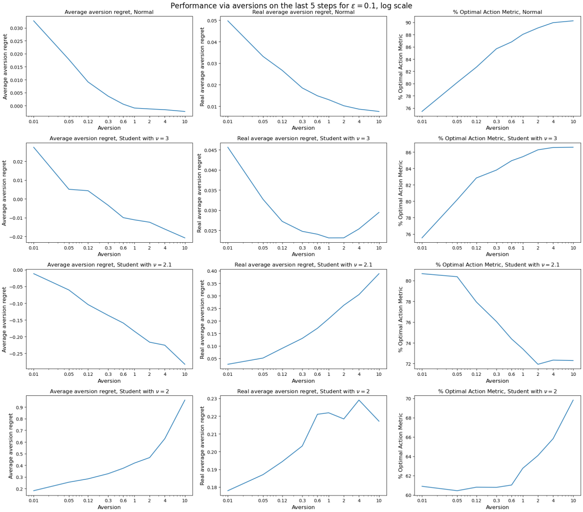
- Среднее сожаление: чем ближе к 0, тем лучше. Если < 0, то алгоритм “переоценивает” себя.
- Среднее реальное сожаление: всегда ≥ 0, чем ниже, тем лучше.
- Процент оптимальных действий (чем выше, тем лучше):

$$\delta = 1 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} |p_i - p_{i,max}|$$

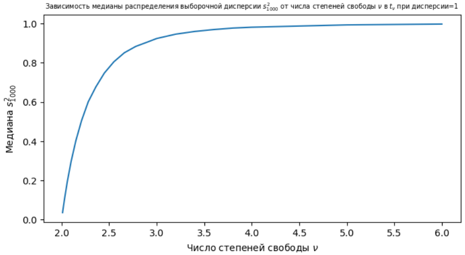
Результаты – ϵ-greedy

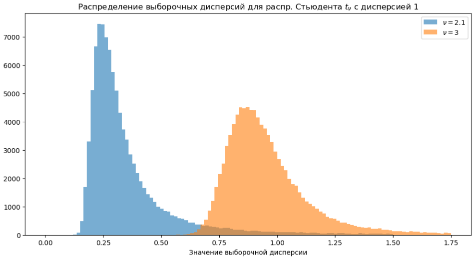


Результаты – ϵ-greedy



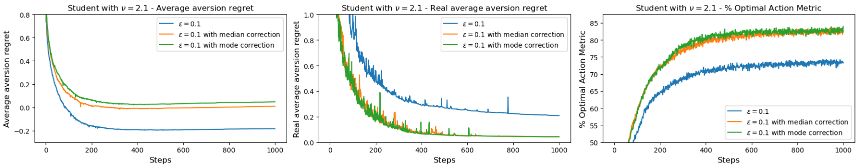
Результаты – Причины плохих метрик для $t_{2.1}$



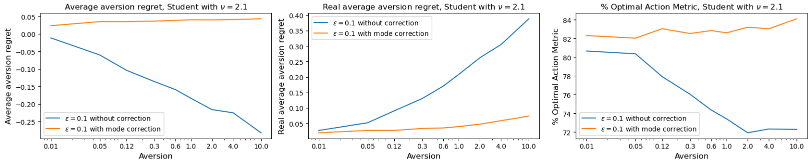


Результаты – Коррекция выборочной дисперсии

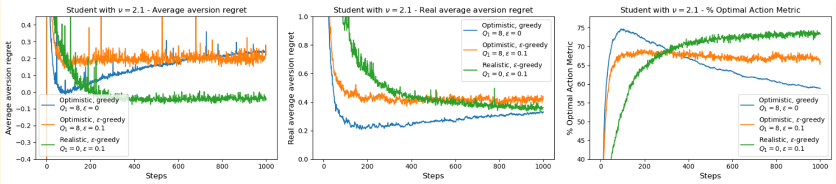
Performance of Strategies



Performance via aversions on the last 5 steps for $\varepsilon = 0.1$ with and without correction, log scale

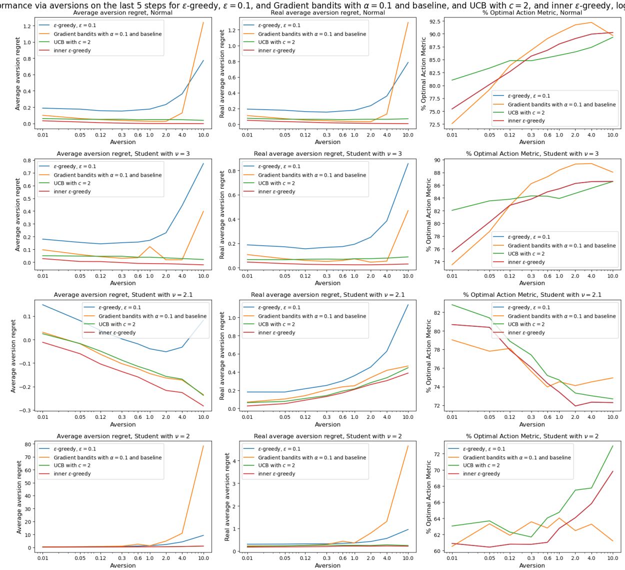


Жадная позитивная инициализация



Результаты – UCB и gradient bandits

Performance via aversions on the last 5 steps for ε-greedy, $\varepsilon = 0.1$, and Gradient bandits with $\alpha = 0.1$ and baseline, and UCB with $c = 2$, and inner ε-greedy, log scale



Выводы

- ϵ-greedy дает высокую эффективность для t_3 и t_∞

Выводы

- ϵ-greedy дает высокую эффективность для t_3 и t_∞
- Для улучшения метрик для $t_{2.1}$ можно использовать коррекцию дисперсии.

Выводы

- ϵ-greedy дает высокую эффективность для t_3 и t_∞
- Для улучшения метрик для $t_{2.1}$ можно использовать коррекцию дисперсии.
- UCB даже без замены дисперсии устраняет разрыв между внутренней и внешней вероятностями в ϵ-greedy

Выводы

- ϵ-greedy дает высокую эффективность для t_3 и t_∞
- Для улучшения метрик для $t_{2.1}$ можно использовать коррекцию дисперсии.
- UCB даже без замены дисперсии устраняет разрыв между внутренней и внешней вероятностями в ϵ-greedy
- Gradient bandits показывают хорошие результаты и могут быть использованы при больших λ

Выводы

- ϵ-greedy дает высокую эффективность для t_3 и t_∞
- Для улучшения метрик для $t_{2.1}$ можно использовать коррекцию дисперсии.
- UCB даже без замены дисперсии устраняет разрыв между внутренней и внешней вероятностями в ϵ-greedy
- Gradient bandits показывают хорошие результаты и могут быть использованы при больших λ
- Оценка рисков через дисперсию при ν, близких к 2, слабоприменима

Заключение

В результате написания работы:

- Проанализированы известные подходы в классической задаче о многоруких бандитах на предмет применимости для распределений, отличных от нормального. По результатам UCB показывает себя лучше других алгоритов на всех распределениях.

Заключение

В результате написания работы:

- Проанализированы известные подходы в классической задаче о многоруких бандитах на предмет применимости для распределений, отличных от нормального. По результатам UCB показывает себя лучше других алгоритов на всех распределениях.
- Придуманы и адаптированы алгоритмы и подходы для решения задачи о многоруких бандитах с учетом степени отвращения к риску. Среди них: жадный алгоритм за $O(n \log n)$, жадный алгоритм через градиентный подъем, ϵ-greedy, UCB, gradient bandits.

Заключение

В результате написания работы:

- Проанализированы известные подходы в классической задаче о многоруких бандитах на предмет применимости для распределений, отличных от нормального. По результатам UCB показывает себя лучше других алгоритов на всех распределениях.
- Придуманы и адаптированы алгоритмы и подходы для решения задачи о многоруких бандитах с учетом степени отвращения к риску. Среди них: жадный алгоритм за $O(n \log n)$, жадный алгоритм через градиентный подъем, ϵ-greedy, UCB, gradient bandits.
- Протестированы созданные подходы на различных распределениях, получена высокая эффективность стратегий на распределениях Стьюдента с $\nu \geq 3$. Сделан вывод о слабой применимости оценки риска через дисперсию при ν, близких к 2.