Funkcje tworzące i transformaty

Funkcje tworzące

W Mathematice funkcję tworzącą ciągu {a_n} wyznaczamy w następujący sposób:

```
GeneratingFunction[a[n], n, z];
```
funkcja tworząca

```
P[z_] = GeneratingFunction[PDF[PoissonDistribution[λ], n], n, z]
```
funkcja tworząca fu··· rozkład Poissona

... Set: Tag PoissonProcess in PoissonProcess[8][z_] is Protected.

$$e^{(-1+z)\lambda}$$

Postać szeregu możemy zobaczyć używając funkcji Series

```
Series[P[z], {z, 0, 10}]
```
szereg

$$\text{PoissonDistribution}[0] + 8\,\text{PoissonDistribution}'[0]\,z + 32\,\text{PoissonDistribution}''[0]\,z^2 + \frac{256}{3}\text{PoissonDistribution}^{(3)}[0]\,z^3 + \frac{512}{3}\text{PoissonDistribution}^{(4)}[0]\,z^4 + \frac{4096}{15}\text{PoissonDistribution}^{(5)}[0]\,z^5 + \frac{16\,384}{45}\text{PoissonDistribution}^{(6)}[0]\,z^6 + \frac{131\,072}{315}\text{PoissonDistribution}^{(7)}[0]\,z^7 + \frac{131\,072}{315}\text{PoissonDistribution}^{(8)}[0]\,z^8 + \frac{1\,048\,576\,\text{PoissonDistribution}^{(9)}[0]\,z^9}{2835} + \frac{4\,194\,304\,\text{PoissonDistribution}^{(10)}[0]\,z^{10}}{14\,175} + O[z]^{11}$$

Współczynnik przy wybranym składniku znajdziemy przy pomocy funkcji SeriesCoefficient

```
Table[SeriesCoefficient[P[z], {z, 0, k}], {k, 0, 10}]
```
tabela znajdź współczynnik szeregu

$$\Big\{\text{PoissonDistribution}[0],\ 8\,\text{PoissonDistribution}'[0],\ 32\,\text{PoissonDistribution}''[0],\ \frac{256}{3}\text{PoissonDistribution}^{(3)}[0],\ \frac{512}{3}\text{PoissonDistribution}^{(4)}[0],\ \frac{4096}{15}\text{PoissonDistribution}^{(5)}[0],\ \frac{16\,384}{45}\text{PoissonDistribution}^{(6)}[0],\ \frac{131\,072}{315}\text{PoissonDistribution}^{(7)}[0],\ \frac{131\,072}{315}\text{PoissonDistribution}^{(8)}[0],\ \frac{1\,048\,576\,\text{PoissonDistribution}^{(9)}[0]}{2835},\ \frac{4\,194\,304\,\text{PoissonDistribution}^{(10)}[0]}{14\,175}\Big\}$$

Dla λ=1, prawdopodobieństwo, że zmienna losowa o rozkładzie Poissona przyjmie wartość 3 wynosi

```
SeriesCoefficient[P[z], {z, 0, 3}] /. λ → 1.
```
znajdź współczynnik szeregu

$$\frac{256}{3}\text{PoissonDistribution}^{(3)}[0]$$

Wartość oczekiwaną dla danego rozkładu możemy znaleźć licząc pochodną funkcji tworzącej w punkcie 1

```
D[P[z], z] /. z → 1
oblicz pochodną
```

```
8 PoissonDistribution′[8]
```

Transformata Laplace’a

Transformatę Laplace’a Stieltjesa dystrybuanty rozkładu ciągłego dostaniemy wyznaczając transformatę Laplace’a jej gęstości

```
F[s_] = LaplaceTransform[PDF[ExponentialDistribution[μ], t], t, s]
        transformata Laplace'a fu⋯ rozkład wykładniczy
```

$$\left\{\left\{\frac{15\, e^{2y}\mu}{4 y^5 + 15\, e^{2y}\mu}, \frac{14175\, e^{2y}\mu}{4 y^{10} + 14175\, e^{2y}\mu}, \frac{638512875\, e^{2y}\mu}{16 y^{15} + 638512875\, e^{2y}\mu}, \frac{9280784638125\, e^{2y}\mu}{4 y^{20} + 9280784638125\, e^{2y}\mu}\right\},\right.$$
$$\left\{\frac{15\, e^{4y}\mu}{128 y^5 + 15\, e^{4y}\mu}, \frac{14175\, e^{4y}\mu}{4096 y^{10} + 14175\, e^{4y}\mu},\right.$$
$$\left.\frac{638512875\, e^{4y}\mu}{524288 y^{15} + 638512875\, e^{4y}\mu}, \frac{9280784638125\, e^{4y}\mu}{4194304 y^{20} + 9280784638125\, e^{4y}\mu}\right\},$$
$$\left\{\frac{5\, e^{6y}\mu}{324 y^5 + 5\, e^{6y}\mu}, \frac{175\, e^{6y}\mu}{2916 y^{10} + 175\, e^{6y}\mu}, \frac{875875\, e^{6y}\mu}{314928 y^{15} + 875875\, e^{6y}\mu},\right.$$
$$\left.\frac{1414538125\, e^{6y}\mu}{2125764 y^{20} + 1414538125\, e^{6y}\mu}\right\}, \left\{\frac{15\, e^{8y}\mu}{4096 y^5 + 15\, e^{8y}\mu}, \frac{14175\, e^{8y}\mu}{4194304 y^{10} + 14175\, e^{8y}\mu},\right.$$
$$\left.\left.\frac{638512875\, e^{8y}\mu}{17179869184 y^{15} + 638512875\, e^{8y}\mu}, \frac{9280784638125\, e^{8y}\mu}{4398046511104 y^{20} + 9280784638125\, e^{8y}\mu}\right\}\right\}$$

Wartość oczekiwaną zmiennej losowej można obliczyć przy pomocy pochodnej transformaty

```
-D[F[s], s] /. s → 0
```
oblicz pochodną

... D: Multiple derivative specifier

$$\left\{\left\{\frac{4}{15}e^{-2y}y^5, \frac{4e^{-2y}y^{10}}{14175}, \frac{16e^{-2y}y^{15}}{638512875}, \frac{4e^{-2y}y^{20}}{9280784638125}\right\}, \left\{\frac{128}{15}e^{-4y}y^5, \frac{4096e^{-4y}y^{10}}{14175}, \frac{524288e^{-4y}y^{15}}{638512875}, \frac{4194304e^{-4y}y^{20}}{9280784638125}\right\}, \left\{\frac{324}{5}e^{-6y}y^5, \frac{2916}{175}e^{-6y}y^{10}, \frac{314928e^{-6y}y^{15}}{875875}, \frac{2125764e^{-6y}y^{20}}{1414538125}\right\}, \left\{\frac{4096}{15}e^{-8y}y^5, \frac{4194304e^{-8y}y^{10}}{14175}, \frac{17179869184e^{-8y}y^{15}}{638512875}, \frac{4398046511104e^{-8y}y^{20}}{9280784638125}\right\}\right\}$$ does not have the form {variable, n}, where n is symbolic or a non-negative integer.

... General: 0 is not a valid variable.

$$-\partial_0\left\{\left\{\frac{15e^{2y}\mu}{4y^5+15e^{2y}\mu}, \frac{14175e^{2y}\mu}{4y^{10}+14175e^{2y}\mu}, \frac{638512875e^{2y}\mu}{16y^{15}+638512875e^{2y}\mu}, \frac{9280784638125e^{2y}\mu}{4y^{20}+9280784638125e^{2y}\mu}\right\}, \left\{\frac{15e^{4y}\mu}{128y^5+15e^{4y}\mu}, \frac{14175e^{4y}\mu}{4096y^{10}+14175e^{4y}\mu}, \frac{638512875e^{4y}\mu}{524288y^{15}+638512875e^{4y}\mu}, \frac{9280784638125e^{4y}\mu}{4194304y^{20}+9280784638125e^{4y}\mu}\right\}, \left\{\frac{5e^{6y}\mu}{324y^5+5e^{6y}\mu}, \frac{175e^{6y}\mu}{2916y^{10}+175e^{6y}\mu}, \frac{875875e^{6y}\mu}{314928y^{15}+875875e^{6y}\mu}, \frac{1414538125e^{6y}\mu}{2125764y^{20}+1414538125e^{6y}\mu}\right\}, \left\{\frac{15e^{8y}\mu}{4096y^5+15e^{8y}\mu}, \frac{14175e^{8y}\mu}{4194304y^{10}+14175e^{8y}\mu}, \frac{638512875e^{8y}\mu}{17179869184y^{15}+638512875e^{8y}\mu}, \frac{9280784638125e^{8y}\mu}{4398046511104y^{20}+9280784638125e^{8y}\mu}\right\}\right\}$$

Proces Poissona

```
M = PoissonProcess[λ]
```
proces Poissona

```
PoissonProcess[λ]
```

Przykładowo wyznaczymy prawdopodobieństwo, że przez czas t proces Poissona z intensywnością λ wygeneruje mniej niż 4 zdarzenia

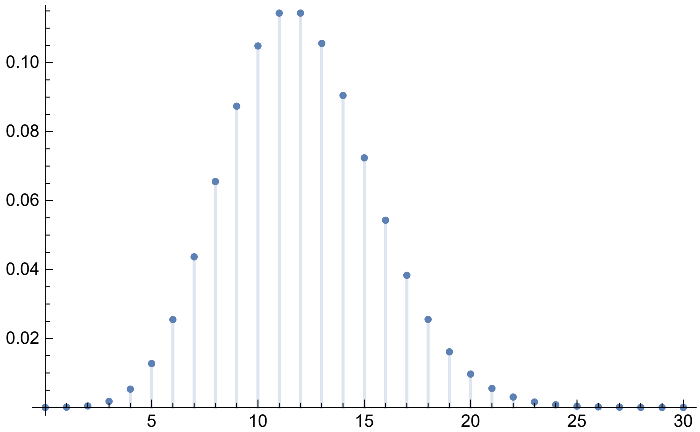
```
Probability[m[t] < 4, m ≈ M]
```
prawdopodobieństwo

$$\frac{1}{6}e^{-t\lambda}\left(6+6t\lambda+3t^2\lambda^2+t^3\lambda^3\right)$$

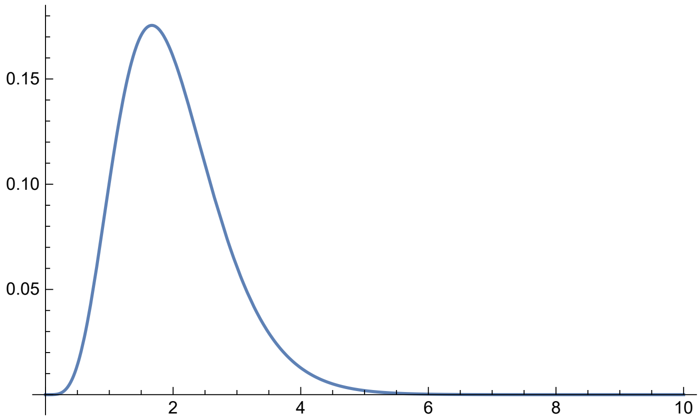
```
p[k_, t_] = PDF[M[t], k]
```
funkcja gęstości p

$$\begin{cases} \frac{e^{-t\lambda}(t\lambda)^k}{k!} & k \geq 0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

```
DiscretePlot[p[k, 4] /. λ → 3, {k, 0, 30}]
```
wykres dyskretny



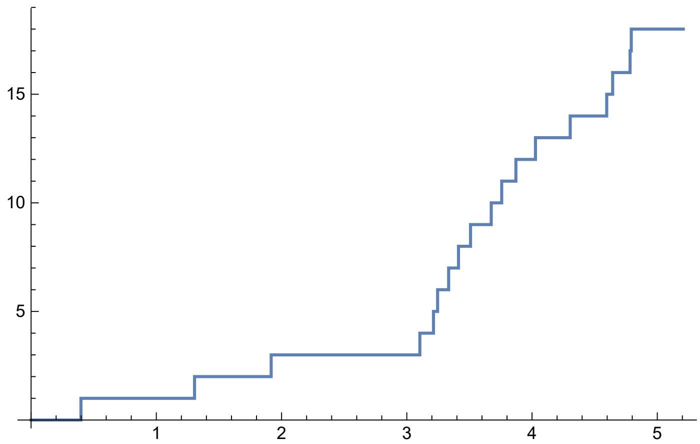

```
Plot[p[5, t] /. λ → 3, {t, 0, 10}]
```
wykres



Generowanie procesu Poissona

```
proces = RandomFunction[M /. λ → 3, {0, 5}];
```
funkcja losowa

```
ListStepPlot[proces]
```
wykres stopniowy listowy



Czas pomiędzy zdarzeniami z procesu Poissona z parametrem λ ma rozkład wykładniczy z tym samym parametrem. Jeśli rozważamy dwa (ten wynik można uogólnić na większą liczbę procesów) procesy Poissona z intensywnościami λ i μ, to prawdopodobieństwo, że jako pierwsze nastąpiło zdarzenie np. z tego pierwszego procesu wynosi

```
Probability[X == Min[X, Y],
prawdopodobieństwo minimum
 {X ≈ ExponentialDistribution[λ], Y ≈ ExponentialDistribution[μ]}]
        rozkład wykładniczy                  rozkład wykładniczy
```

$$\frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

Zadania

1. Trzy razy dziennie kierowca parkuje swój samochód na pół godziny bez uiszczenia opłaty za postój.Kontroler odwiedza każde miejsce postojowe zgodnie z procesem Poissona z parametrem λ (na godzinę).Jeśli natrafi na samochód, za który nie została wniesiona opłata, wystawia mandat.
(a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że danego dnia kierowcy się upiecze?
(b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że kierowca otrzyma w jednym dniu dwa mandaty?
(c) Załóżmy, że opłata za parkowanie wynosi 5 zł/h, a jednorazowa kara za nieopłacenie miejsca wynosi 50 zł.Jaka jest wartość oczekiwana łącznej kary dla naszego niesfornego kierowcy?-Jaka musiałaby być intensywność kontroli, żeby kierowcy opłacało się
ryzykować?

1. Ze względu na właściwości procesu Poissona, nie jest ważne, w jakich kawałkach kierowca parkuje samochód, istotny jest tylko łączny czas parkowania w ciągu dnia.

```
Kontrola = PoissonProcess[λ];
           proces Poissona
```

a) Szukane prawdopodobieństwo:

```
Probability[k[1.5] == 0, k ≈ Kontrola]
prawdopodobieństwo
```

$e^{-1.5\,\lambda}$

b) Prawdopodobieństwo, że kierowca dostanie dwa mandaty wynosi:

```
Probability[m[1.5] == 2, m ≈ Kontrola]
prawdopodobieństwo
```

$1.125\, e^{-1.5\,\lambda}\,\lambda^2$

c) Wartość oczekiwana kary w ciągu dnia to

```
kara[λ_] = Expectation[50 m[1.5], m ≈ Kontrola]
           wartość oczekiwana
```

$75.\,\lambda$

Żeby ryzyko było opłacalne, wartość oczekiwana kary nie powinna przekroczyć zaoszczędzonej kwoty

```
Reduce[{kara[λ] < 5 * 1.5, λ > 0}, λ]
zredukuj
```

Reduce: Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

```
0 < λ < 0.1
```

2. Student wychodzi z zajęć o losowej godzinie między 16 : 00 a 17 : 00. Do domu dojechać może jednym z dwóch autobusów, A i B.Autobus A odjeżdża regularnie co 10 min., a autobus B zgodnie z procesem Poissona z tą samą częstością.Zakładając, że student zawsze wybiera autobus, który pojawi się wcześniej, jakie jest prawdopodobieństwo, że danego dnia pojedzie do domu autobusem A?

2. Przez A i B oznaczymy rozkłady czasu oczekiwania na każdy autobusów.

```
A = UniformDistribution[{0, 10}];
    rozkład jednostajny
B = ExponentialDistribution[1 / 10];
    rozkład wykładniczy

Probability[a < b, {a ≈ A, b ≈ B}] // N
prawdopodobieństwo                  przybliżenie numeryczne
```

NIntegrate: Tag Times in $\frac{4398046511104\, e^{-8 y}\, y^{20}}{9280784638125}$ is Protected.

NIntegrate: Tag Times in $\frac{4398046511104\, e^{-8 y}\, y^{20}}{9280784638125}$ is Protected.

NIntegrate: Tag Times in $0.473887\ 2.71828^{-8. y}\, y^{20}$ is Protected.

General: Further output of NIntegrate::write will be suppressed during this calculation.

```
NProbability[0.473887 × 2.71828^(-8. y) y^20 < b, {0.473887 × 2.71828^(-8. y) y^20, b} ≈
  ProductDistribution[UniformDistribution[{0., 10.}], ExponentialDistribution[0.1]]]
```

3. Pieszy chce przejść przez ulicę dwukierunkową.Z obu stron samochody nadjeżdżają zgodnie z procesem Poissona z intensywnościami λ1 z lewej i λ2 z prawej strony.Przejście możliwe jest, jeśli przez czas T z żadnej ze stron nie nadjedzie samochód.
(a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że pieszy nie będzie musiał czekać na przejście?
(b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że pierwszy samochód nadjedzie z lewej strony?
(c) Jaki jest rozkład liczby samochodów, które miną pieszego zanim ten będzie mógł bezpiecznie przejść na drugą stronę?

a)

```
lp = PoissonProcess[λ1];
     proces Poissona
```

```
pp = PoissonProcess[λ2];
      proces Poissona
```

```
praw = Probability[l[T] == 0, l ≈ lp] * Probability[p[T] == 0, p ≈ pp] // N
        prawdopodobieństwo               prawdopodobieństwo                pr
```

$2.71828^{-1.\ T\ \lambda1-1.\ T\ \lambda2}$

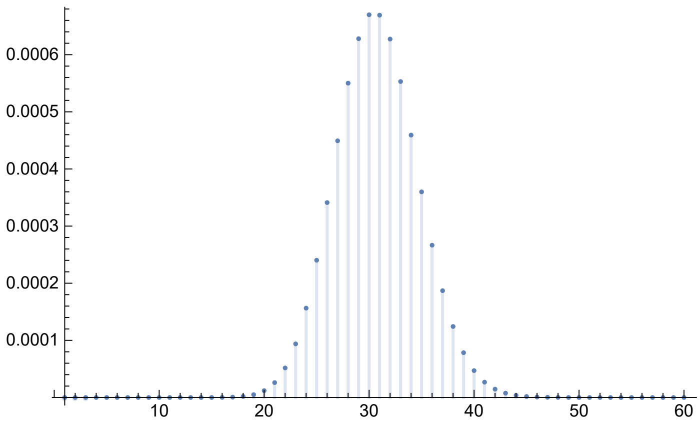
b)

```
Probability[X == Min[X, Y],
prawdopodobieństwo minimum
  {X ≈ ExponentialDistribution[λ1], Y ≈ ExponentialDistribution[λ2]}];
       rozkład wykładniczy             rozkład wykładniczy
```

c)

```
p[k_, t_] = PDF[lp[t], k] PDF[pp[t], k];
            funkcja gęstości⋯ funkcja gęstości prav
```

```
DiscretePlot[p[k, 2] /. {λ1 → 12, λ2 → 20}, {k, 1, 60}]
wykres dyskretny
```



4. Zgłoszenia napływają do serwera zgodnie z procesem Poissona z parametrem λ.
(a) Dla wartości λ = 2, 4, 6, 8 [/min] oblicz i przedstaw w tabeli i w formie graficznej prawdopodobieństwo, że w ciągu dwóch minut pojawi się k (=0,...,10) zgłoszeń.
(b) Dla wartości λ z (a) i t=0.1, 0.2, ..., 1 przedstaw w tabeli i w formie graficznej prawdopodobieństwa, że odstęp pomiędzy kolejnymi zgłoszeniami będzie mniejsza niż t
(c) Dla tych samych λ przedstaw w formie graficznej rozkład czasu do pojawienia się 5, 10, 15, i 20 zgłoszeń.

a)

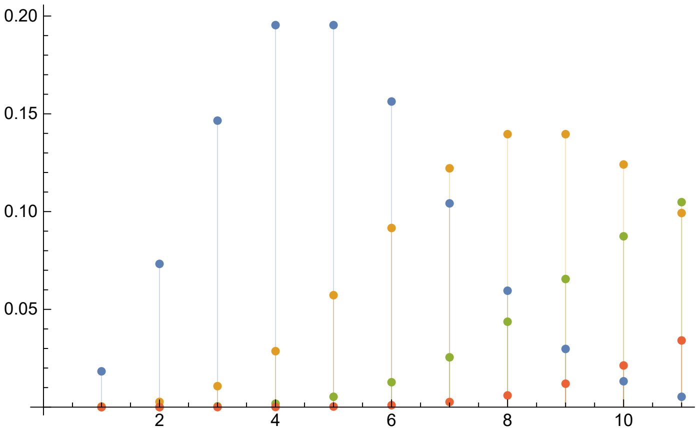
```
praw = Table[P = PoissonProcess[i];
       tabela    proces Poissona
   a = Probability[m[2] == j, m ≈ P], {i, 2, 8, 2}, {j, 0, 10}];
       prawdopodobieństwo
```

```
Grid[praw, Frame -> All];
krata      ramka    wszystk
```

%39

$\frac{1}{e^4}$	$\frac{4}{e^4}$	$\frac{8}{e^4}$	$\frac{32}{3 e^4}$	$\frac{32}{3 e^4}$	$\frac{128}{15 e^4}$	$\frac{256}{45 e^4}$	$\frac{1024}{315 e^4}$	$\frac{512}{315 e^4}$	$2048/(2835\ e^4)$	$4096/(14175\ e^4)$
$\frac{1}{e^8}$	$\frac{8}{e^8}$	$\frac{32}{e^8}$	$\frac{256}{3 e^8}$	$\frac{512}{3 e^8}$	$\frac{4096}{15 e^8}$	$\frac{16384}{45 e^8}$	$131072/(315\ e^8)$	$131072/(315\ e^8)$	$1048576/(2835\ e^8)$	$4194304/(14175\ e^8)$
$\frac{1}{e^{12}}$	$\frac{12}{e^{12}}$	$\frac{72}{e^{12}}$	$\frac{288}{e^{12}}$	$\frac{864}{e^{12}}$	$\frac{10368}{5 e^{12}}$	$\frac{20736}{5 e^{12}}$	$\frac{248832}{35 e^{12}}$	$\frac{373248}{35 e^{12}}$	$\frac{497664}{35 e^{12}}$	$2985984/(175\ e^{12})$
$\frac{1}{e^{16}}$	$\frac{16}{e^{16}}$	$\frac{128}{e^{16}}$	$\frac{2048}{3 e^{16}}$	$\frac{8192}{3 e^{16}}$	$131072/(15\ e^{16})$	$1048576/(45\ e^{16})$	$16777216/(315\ e^{16})$	$33554432/(315\ e^{16})$	$536870912/(2835\ e^{16})$	$4294967296/(14175\ e^{16})$

```
ListPlot[Table[P = PoissonProcess[i];
wykres d⋯  tabela    proces Poissona
  a = Probability[m[2] == j, m ≈ P], {i, 2, 8, 2}, {j, 0, 10}], Filling -> Axis]
      prawdopodobieństwo                                 wypełnienie  oś
```



b)

```
s = Table[P = PoissonProcess[i];
    tabela    proces Poissona
   a = Probability[m[y] < t, m ≈ P], {i, 2, 8, 2}, {t, 0.1, 1, 0.1}];
       prawdopodobieństwo
Grid[s, Frame -> All]
krata  ramka  wszystko
```

e^{-2y}	e^{-2y}	e^{-2y}	e^{-2y}	e^{-2y}	e^{-2y}	e^{-2y}	e^{-2y}	e^{-2y}	e^{-2y}
e^{-4y}	e^{-4y}	e^{-4y}	e^{-4y}	e^{-4y}	e^{-4y}	e^{-4y}	e^{-4y}	e^{-4y}	e^{-4y}
e^{-6y}	e^{-6y}	e^{-6y}	e^{-6y}	e^{-6y}	e^{-6y}	e^{-6y}	e^{-6y}	e^{-6y}	e^{-6y}
e^{-8y}	e^{-8y}	e^{-8y}	e^{-8y}	e^{-8y}	e^{-8y}	e^{-8y}	e^{-8y}	e^{-8y}	e^{-8y}

c)

```
s = Table[P = PoissonProcess[i];
      tabela      proces Poissona
    a = Probability[m[y] == j, m ≈ P], {i, 2, 8, 2}, {j, 5, 20, 5}];
          prawdopodobieństwo
Grid[s, Frame -> All]
krata   ramka      wszystko
```

$\frac{4}{15}\, e^{-2 y} y^5$	$\frac{4\, e^{-2 y} y^{10}}{14\,175}$	$\frac{16\, e^{-2 y} y^{15}}{638\,512\,875}$	$\frac{4\, e^{-2 y} y^{20}}{9\,280\,784\,638\,125}$
$\frac{128}{15}\, e^{-4 y} y^5$	$\frac{4096\, e^{-4 y} y^{10}}{14\,175}$	$\frac{524\,288\, e^{-4 y} y^{15}}{638\,512\,875}$	$\frac{4\,194\,304\, e^{-4 y} y^{20}}{9\,280\,784\,638\,125}$
$\frac{324}{5}\, e^{-6 y} y^5$	$\frac{2916}{175}\, e^{-6 y} y^{10}$	$\frac{314\,928\, e^{-6 y} y^{15}}{875\,875}$	$\frac{2\,125\,764\, e^{-6 y} y^{20}}{1\,414\,538\,125}$
$\frac{4096}{15}\, e^{-8 y} y^5$	$\frac{4\,194\,304\, e^{-8 y} y^{10}}{14\,175}$	$\frac{17\,179\,869\,184\, e^{-8 y} y^{15}}{638\,512\,875}$	$\frac{4\,398\,046\,511\,104\, e^{-8 y} y^{20}}{9\,280\,784\,638\,125}$