Model M/M/1

1. Pracownik otrzymuje zadania do wykonania zgodnie z procesem Poissona ze średnią 5 zadań w ciągu dnia roboczego (8h). Na pojedyncze zadanie przeznacza średnio 45 min, a czas jego wykonania jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym.
(a) Przez jaką część dnia pracownik jest zajęty?
(b) Jaka powinna być intensywność napływania zadań, aby pracownik miał średnio nie więcej niż pół godziny wolnego w ciągu dnia?
(c) Ile średnio zadań czeka na realizację?
(d) Jaki jest średni czas od momentu przekazania zadania do zakończenia jego realizacji?
(*e**) Przeanalizuj wpływ parametrów strumienia wejściowego i obsługi na wartości charakterystyk stacjonarnych (średni czas przebywania i oczekiwania, średnia długość kolejki, średnia liczba zgłoszeń w systemie, średni czas trwania okresu zajętości, rozkład liczby zgłoszeń dla kilku *n*).

a)

$$\lambda = \frac{5}{8};$$

$$\mu = \frac{1}{(3/4)};$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \ // \ N$$

przy

0.46875

b)

$$\mu 2 \ = \frac{1}{(1/2)};$$

$$\lambda 2 = \mu 2 * \nu; \ (* \text{ zadania } / \text{ h } *)$$

$$i = \lambda 2 * 8$$

$16\,\nu$

c)

$$e = \frac{\rho^2}{1-\rho} \ // \ N$$

przybliżenie nu

0.413603

d)

$$t = \frac{1}{\mu * (1-\rho)}$$

1.41176

Model M/M/1 ze zmiennymi parametrami obsługi

2. Zgłoszenia tworzą strumień Poissona z parametrem λ. Obsługa zajmuje czas wykładniczy z parametrem μ. Jeśli liczba zgłoszeń w systemie spadnie poniżej pewnego poziomu M, szybkość obsługi zostaje zmniejszona do wartości $\mu_M < \mu$. Z kolei, jeśli liczba zgłoszeń przekroczy H, szybkość obsługi jest zwiększana do $\mu_H > \mu$.
(a) Jaki jest warunek stabilności modelu?
(b) Zakładając istnienie stanu stacjonarnego, wyznacz rozkład liczby zgłoszeń w systemie.
(c) Wyznacz średnią liczbę zgłoszeń w stanie stacjonarnym.
(d*) Przeanalizuj wpływ parametrów na charakterystyki stacjonarne

Przyjmijmy M=5, H=10

```
M = 5;
H = 10;
```

```
suma = p0 (1 + Sum[ρM^k, {k, 1, M - 1}] + Sum[ρM^(M - 1) ρ^(k - M + 1), {k, M, H}] +
      Sum[ρM^(M - 1) ρ^(H - M + 1) ρH^(k - H), {k, H + 1, ∞}])
```
sumowanie sumowanie sumowanie

$p0\ (1 + \rho M + \rho M^2 + \rho M^3 + 1.87299\ \rho M^4 + 0.0106083\ \rho H\ \rho M^4\ \text{HypergeometricPFQ}[\{1.\}, \{\}, 1.\ \rho H])$

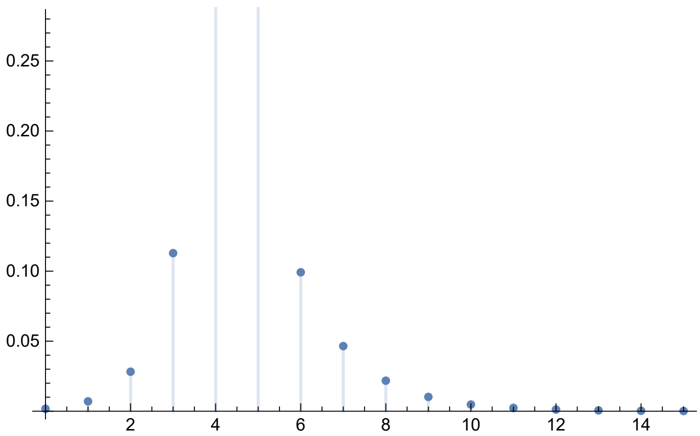
```
rozw = Solve[suma == 1, p0] // Flatten
```
rozwiąż równanie spłaszcz

$\{p0 \to 1. / (1. + \rho M + \rho M^2 + \rho M^3 + 1.87299\ \rho M^4 + 0.0106083\ \rho H\ \rho M^4\ \text{HypergeometricPFQ}[\{1.\}, \{\}, 1.\ \rho H])\}$

```
p[k_] = Piecewise[{{ρM^k p0, k < M}, {ρM^(M - 1) ρ^(k - M + 1) p0, k ≤ H},
      {ρM^(M - 1) ρ^(H - M + 1) ρH^(k - H) p0, k > H}}] /. rozw
```
funkcja odcinkowa

$$\begin{cases} \frac{1.\ \rho M^k}{1. + \rho M + \rho M^2 + \rho M^3 + 1.87299\ \rho M^4 + 0.0106083\ \rho H\ \rho M^4\ \text{HypergeometricPFQ}[\{1.\},\{\},1.\ \rho H]} & k < 5 \\ \frac{1. \times 0.46875^{-4+k}\ \rho M^4}{1. + \rho M + \rho M^2 + \rho M^3 + 1.87299\ \rho M^4 + 0.0106083\ \rho H\ \rho M^4\ \text{HypergeometricPFQ}[\{1.\},\{\},1.\ \rho H]} & k \le 10 \\ \frac{0.0106083\ \rho H^{-10+k}\ \rho M^4}{1. + \rho M + \rho M^2 + \rho M^3 + 1.87299\ \rho M^4 + 0.0106083\ \rho H\ \rho M^4\ \text{HypergeometricPFQ}[\{1.\},\{\},1.\ \rho H]} & k > 10 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

```
DiscretePlot[p[k] /. {ρM → 4, ρ → 1, ρH → 0.5}, {k, 0, 15}]
```
wykres dyskretny



```
Sum[i p[i], {i, 0, ∞}] /. {ρM → 4, ρ → 1, ρH → 0.5}
sumowanie
```

```
4.55717
```

Model M/M/1 z uciekającymi klientami

3. Samochody pojawiają się na stacji z jednym stanowiskiem obsługi zgodnie z procesem Poissona ze średnią $20/h$. Kierowca rezygnuje z tankowania z prawdopodobieństwem $q_n = \frac{n}{4}$ dla $n = 0, \ldots, 4$, gdzie n to liczba samochodów obecnych na stacji. Dla każdego klienta czas obsługi jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym ze średnią 3 min.
(a) Znajdź stacjonarny rozkład liczby samochodów na stacji
(b) Wyznacz średni czas przebywania samochodów na stacji w stanie stacjonarnym (uwzględniając wszystkie samochody)
(c) Wyznacz średni czas przebywania na stacji kierowców, którzy zdecydowali się na tankowanie.
(d^*) Niech $q_n = \frac{n}{k}$ dla $n = 1, \ldots, k$. Przeanalizuj wpływ wartości parametru k na rozkład i na średnią liczbę samochodów na stacji dla kilku wartości ρ (czy wymagamy, aby $\rho < 1$?).

```
p[k_] = 4! / (4 - k)! (ρ / 4)^k p0
```

$$\frac{24 \times 0.117188^k\, p0}{(4-k)!}$$

```
rozw = Solve[Sum[p[k], {k, 0, 4}] == 1, p0] // Flatten
       rozwi··· sumowanie                       spłaszcz
```

```
{p0 → 0.596411}
```

```
p[k_] = p[k] /. rozw
```

$$\frac{14.3139 \times 0.117188^k}{(4-k)!}$$

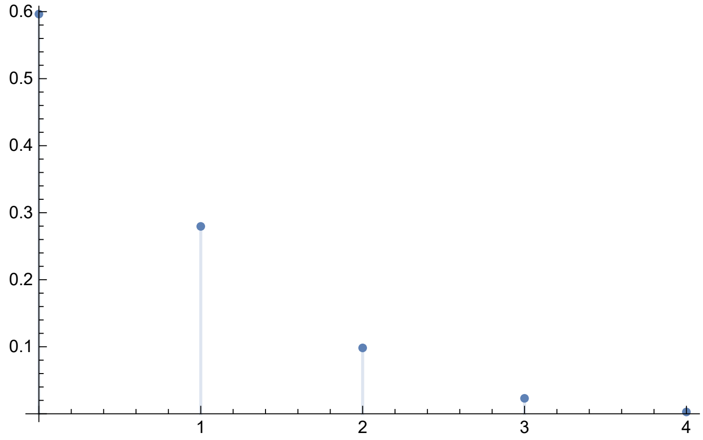
```
p[0]
```

```
0.596411
```

```
p[4]
```

```
0.00269949
```

```
DiscretePlot[p[k] /. ρ → 1, {k, 0, 4}]
```
wykres dyskretny




```
EL = Sum[k p[k], {k, 0, 4}] /. ρ → 1
```
sumowanie

```
0.556044
```

Ze wzoru Little'a

```
ES = EL / (1 / 3) // N
```
przybli

```
1.66813
```

W (c) możemy wykorzystać wzór Little'a, ale musimy użyć λ^* zamiast λ, gdzie λ^* jest parametrem strumienia odpowiadającego tylko tym klientom, którzy zdecydowali się zostać.

Model z grupami klientów

4. Zgłoszenia napływają do serwera zgodnie z procesem Poissona z parametrem λ. Każde z nich składa się z N niezależnych zadań do wykonania, a każde zadanie wymaga czasu wykładniczego ze średnią $\frac{1}{\mu}$ na wykonanie. Liczba zadań wchodzących w skład pojedynczego zgłoszenia ma rozkład $P(N = k) = (1 - p) p^{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$, gdzie $p \in [0, 1)$.
(a) Wyznacz rozkład czasu potrzebnego na realizację dowolnego zgłoszenia.

Wskazówka: Gdyby liczba zadań przypadająca na zgłoszenie była stała, to czas obsługi miałby pewien rozkład (jaki?), w którym jeden z parametrów odzwierciedla tę liczbę. Tutaj ten parametr jest zmienną losową o pewnym rozkładzie (jakim?). W takiej sytuacji możemy albo wyprowadzić ten rozkład ręcznie (zachęcam do spróbowania, w razie problemów służę pomocą) albo (jako, że są to laboratoria) pójść na łatwiznę i zmusić Mathematicę do zrobienia tego za nas :) Funkcja ParameterMixtureDistribution[rozklad[parametr], parametr≈inny rozklad] wyznaczy rozkład zmiennej losowej o pewnym rozkładzie, gdzie parametr tego rozkładu jest również zmienną losową. W przypadku tego zadania polecam wyznaczyć gęstość (PDF) rozkładu czasu obsługi (wyznaczenie dystrybuanty sprawia Mathematice pewne trudności, co można ominąć wyznaczając po prostu całkę z gęstości) i na tej podstawie ocenić z jakim rozkładem mamy do czynienia. Jak już przez to przebrniecie, pozostałe punkty to będzie łatwizna :)
(b) Znajdź stacjonarny rozkład liczby zgłoszeń w systemie

(c) Przeanalizuj wpływ wartości *p* na podstawowe stacjonarne charakterystyki modelu dla trzech różnych obciążeń *ρ*

```
(* tego nie nie potrafię :( *)
```