Politechnika Łódzka
FTIMS
Kierunek: INFORMATYKA
rok akademicki: 2008/2009
sem. 2.

Termin: 6 IV 2009

Nr. ćwiczenia: **112**

Temat ćwiczenia:

WYZNACZANIE PRZYSPIESZENIA ZIEMSKIEGO ZA POMOCĄ WAHADŁA REWERSYJNEGO (KATERA)

Nr. studenta: …
Nr. albumu: 150875
Grupa: II

Nazwisko i imię:

GRACZYK GRZEGORZ

Ocena z kolokwium: …

Ocena z raportu: …

Nr. studenta: …
Nr. albumu: 148976
Grupa: I

Nazwisko i imię:

KRASOŃ KATARZYNA

Ocena z kolokwium: …

Ocena z raportu: …

Data wykonania ćw.:

6 IV 2009

Data oddania raportu:

20 IV 2009

Uwagi:

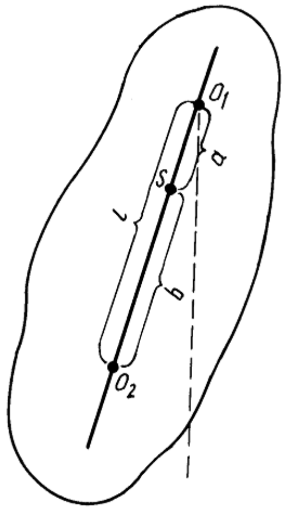
Wstęp

Celem ćwiczenia było poznanie jednej z metod wyznaczania przyśpieszenia ziemskiego a następnie wyznaczenie lokalnej wartości tego przyśpieszenia.

Opis metody i przebieg pomiarów

Wartość przyśpieszenia ziemskiego możemy wyznaczyć z dużą dokładnością przy pomocy wahadła rewersyjnego (Katera).

Bryła sztywna umieszczona w polu sił ciężkości i zawieszona na stałej poziomej osi, nieprzechodzącej przez jej środek ciężkości tworzy tzw. grawitacyjne wahadło fizyczne.



Rysunek 1: Dwuosiowe wahadło fizyczne

Odchylona z położenia równowagi wykonuje wokół tego położenia drgania a każdy jej punkt porusza się po łuku. Przy ograniczeniu do zapisu skalarnego, równanie ruchu bryły ma postać:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I}\sin\theta = 0, \tag{1}$$

gdzie m - masa bryły, d - odległość osi zawieszenia od środka masy S bryły sztywnej, I - moment bezwładności bryły względem osi zawieszenia. Powyższe równanie opisuje ruch okresowy nieharmoniczny, którego okres zależy od amplitudy. Dla małego wychylenia możemy w przybliżeniu przyjąć $\sin\theta = 0$ i wtedy równanie (1) opisuje ruch harmoniczny. Okres drgań harmonicznych wahadła fizycznego (m.in. z II zasady dynamiki) wyraża się wtedy wzorem

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}. \tag{2}$$

Chcąc na bazie powyższego wzoru wyznaczyć przyśpieszenie ziemskie g należy oprócz okresu drgań T i masy wahadła m (które można zmierzyć bezpośrednio) znać również wielkość I oraz

d (których pomiar jest kłopotliwy). Aby tych trudności uniknąć, w ćwiczeniu stosujemy wahadło fizyczne o dwóch osiach obrotu (O1, O2) umieszczonych po przeciwnych stronach środka ciężkości S (). Jest to tzw. wahadło rewersyjne dla którego okresy drgań są takie same dla obu punktów zawieszenia wahadła. Odległość tych punktów jest równa długości zredukowanej tego wahadła l_{zr}. Długość zredukowana wahadła fizycznego jest to długość wahadła matematycznego, które posiada ten sam okres drgań, co dane wahadło fizyczne. Porównując wzory na te okresy otrzymujemy równość:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_{zr}}{g}}, \tag{3}$$

i dalej wzór na długość zredukowaną wahadła:

$$l_{zr} = \frac{I}{md}. \tag{4}$$

Jeżeli punkt O_1 () jest punktem zawieszenia bryły sztywnej wahającej się względem osi O_1, to okres wahań T_1 jest równy

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_1}{mga}}. \tag{5}$$

gdzie I_1 jest momentem bezwładności wahadła względem osi O_1 przechodzącej przez jego środek ciężkości S i równoległej do osi zawieszenia O_1.

Z twierdzenia Steinera o momentach bezwładności, wzór (5) można zapisać

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_S + ma^2}{mga}}, \tag{6}$$

Analogicznie dla drugiej osi obrotu O_2

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I_S + mb^2}{mgb}}, \tag{7}$$

przy założeniu, że oś O_2 przechodzi przez prostą O_1S i jest równoległa do osi O_1 a wahadło waha się z takim samym okresem, jak względem osi O_1.

Okresy drgań są równe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{I_S + ma^2}{a} = \frac{I_S + mb^2}{b}, \tag{8}$$

co po przekształceniu daje

$$(b - a)(I_S + mab) = 0. \tag{9}$$

Dla dowolnej osi O_1 okresy będą równe

(i) gdy oś O_2 wyznaczona zostanie w odległości $b = a$; lub

(ii) gdy oś O_2 wyznaczymy w odległości, przy której spełniony będzie warunek

$$ab = \frac{I_S}{m}. \tag{10}$$

Sytuacja (i) odpowiada przypadkowi równości okresów takich samych wahadeł, czym nie zajmujemy się w ćwiczeniu. Natomiast dla sytuacji (ii), wykorzystując wzory (6), (7) i warunek (10) mamy

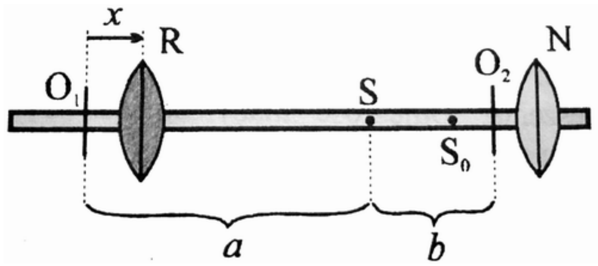
$$T_1 = T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{mab + mb^2}{mgb}} = 2\pi\sqrt{\frac{a+b}{g}}. \tag{11}$$

A wobec wzoru (3) przyjmujemy $l_{zr} = a + b$, na mocy czego otrzymujemy

$$T_1 = T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_{zr}}{g}}. \tag{12}$$

Pokazaliśmy więc, że odległość między osiami O_1 i O_2 jest równa $a + b$ i odpowiada długości zredukowanej wahadła fizycznego.

Budowę wahadła znajdującego się w pracowni przedstawia rysunek. Na pręcie z dwiema osiami obrotu umieszczony jest między osiami ciężarek przesuwany wzdłuż pręta.



Rysunek 2: Wahadło rewersyjne asymetryczne

Przesuwając położenie masy ruchomej x i mierząc okresy względem obu osi poszukujemy sytuacji kiedy $T_1 = T_2$, której odpowiada warunek wyrażony wzorem (10). Przy warunku $l_{zr} = a + b$, wzór (10) ma postać

$$a(l_{zr} - a) = \frac{I_S}{m}. \tag{13}$$

Przesuwanie masy R wzdłuż pręta zmienia parametr a w powyższym równaniu i ma wpływ na wartość I_S, powyższe równanie jest równaniem stopnia drugiego, a zatem możemy spodziewać się dwóch rozwiązań a, i dwóch wartości położenia x masy R, przy których spełnienia warunku $T_1 = T_2$ zawartego w równaniu (12) pozwala na obliczenie przyśpieszenia korzystając ze wzoru

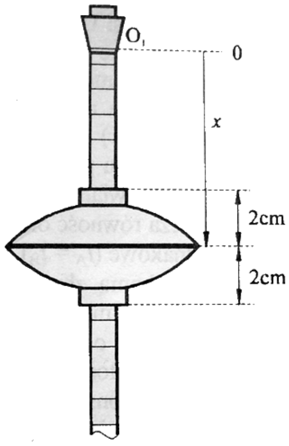
$$g = \frac{4\pi^2 l_{zr}}{T^2}, \tag{14}$$

gdzie T - okres drgań wahadła dla obu osi zawieszenia.

Przebieg pomiaru

Aby wyznaczyć wartość przyśpieszenia ziemskiego przy użyciu wahadła rewersyjnego, należy przesuwając masę ruchomą R znaleźć położenia, przy których okresy drgań wahadła zawieszonego na osiach O_1 i O_2 są równe. W tym celu przesuwamy masę x o pewną ustaloną odległość, zaczynając od osi O_1 i notujemy pomiary okresów drgań dla obu osi. Aby uzyskać odpowiednią dokładność pomiaru okresu, należy zmierzyć czas t trwania $n = 20$ drgań wahadła dla kolejno wahadła zawieszonego na osi O_1 i O_2. Okres drań następnie liczymy ze wzoru $T = \frac{t}{n}$, a błąd pomiarowy ze wzoru $\Delta T = \frac{\Delta t}{n}$.

Przy przeprowadzaniu doświadczenia należy pamiętać, że drgania wahadła są harmoniczne jeśli wychylenie z położenia równowagi jest nieduże, ale nie może być ono również zbyt małe ponieważ opór powietrza jak i siły występujące na osiach zawieszenia mogą doprowadzić do zatrzymania wahadła podczas pomiaru.

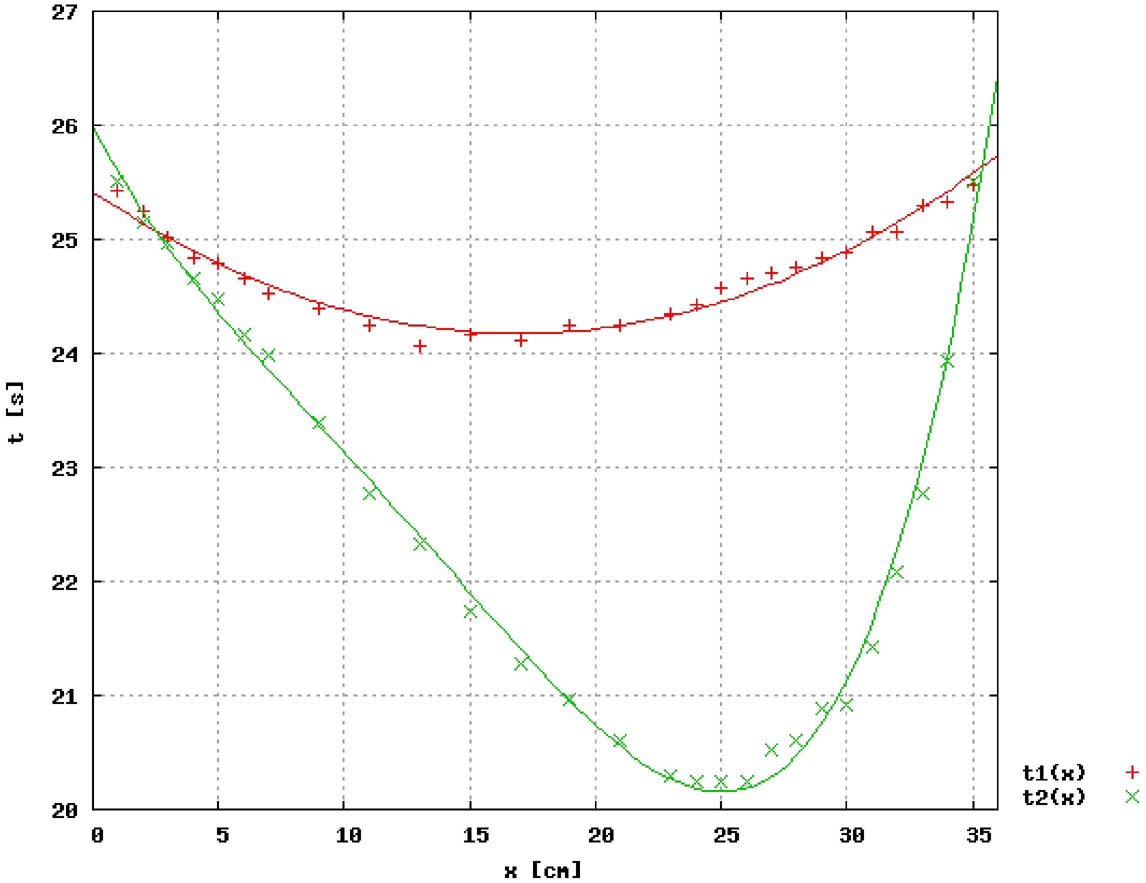


Rysunek 3: Sposób pomiaru odległości x masy ruchomej od osi O_1 wahadła rewersyjnego

Wyniki pomiarów

$x[cm]$	$t_1[s]$	$t_2[s]$
1	25.42	25.51
2	25.24	25.15
3	25.02	24.97
4	24.84	24.66
5	24.79	24.48
6	24.66	24.16
7	24.52	23.98
9	24.39	23.40
11	24.25	22.77
13	24.07	22.32
15	24.16	21.73
17	24.12	21.28
19	24.25	20.97
21	24.25	20.61
23	24.34	20.29
24	24.43	20.25
25	24.57	20.25
26	24.66	20.25
27	24.70	20.52
28	24.75	20.61
29	24.84	20.88
30	24.88	20.92
31	25.06	21.42
32	25.06	22.09
33	25.29	22.77
34	25.33	23.94
35	25.47	25.51

Obliczenia



Wykres przedstawia obliczenia, a także pewne funkcje dopasowane do dokonanych pomiarów w celu umożliwienia wyznaczenia punktów przecięcia. Jak można odczytać z wykresu:

$$x_A = 2.51cm$$

$$x_B = 35.42cm$$

$$t_A = 25.07s$$

$$t_B = 25.64s$$

Stąd:

$$t_{sr} = \frac{t_A + t_B}{2} = 25.36s$$

$$T = \frac{t_{sr}}{n} = 1.27s$$

$$l_{zr} = 40.0cm = 0.400m$$

Zgodnie z wzorami:

$$g = \frac{4\pi^2 l_{zr}}{T^2}$$

$$\Delta g = g(\frac{\Delta l_{zr}}{l_{zr}} + \frac{2\Delta T}{T})$$

Wyznaczamy wartość przyśpieszenia ziemskiego:

$$g = 9.791 \pm 0.017 \frac{m}{s^2}$$

Wnioski

- Rzeczywista wartość przyśpieszenia $9.80665 \frac{m}{s^2}$ mieści się w zakresie błędu otrzymanego wyniku co świadczy o prawidłowym wykonaniu ćwiczenia.
- Żródłami błędu, które nie zostało uwzględnione może być czas reakcji w czasie zatrzymywania stopera, który jest znacznie większy niż błąd pomiarowy stopera.

Bibliografia

- Praca zbiorowa pod red. Grzegorza Derfla, *Instrukcje do ćwiczeń i Pracowni Fizycznej*, Instytut Fizyki PŁ, Łódź 1998