

Badanie rezonansu w szeregowym obwodzie LC

1 Wstęp teoretyczny

1.1 Drgania wymuszone

Drganiami wymuszonymi¹ nazywamy drgania, które wywołane są poprzez siłę, której wartość zmienia się okresowo. Dodatkowo siła ta nie może powodować zmian parametrów układu drgań.

W drganiach wymuszonych amplituda zależy od różnicy między częstotliwością Ω siły wymuszającej, a częstotliwością ω_0 drgań swobodnych układu drgającego. Zatem równanie różniczkowe drgań wymuszonych to²:

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{RdI}{Ldt} + \frac{I}{LC} = \frac{U_0 \Omega}{L} \sin \Omega t$$

1.2 Rezonans

Pojęciem rezonansu³ określa się zjawisko fizyczne, dotyczące drgań wymuszonych, objawiające się wzrostem amplitudy drgań układu drgającego przy określonej częstotliwości siły wymuszającej. Częstotliwością drgań układu drgającego przy którym występuje rezonans nazywamy częstotliwością rezonansową.

Dobroć jest wielkością charakteryzującą układ rezonansowy, określającą o ile razy amplituda wymuszonych drgań rezonansowych jest większa od amplitudy w obszarze częstości nierezonansowym. Wyrażana jest wzorem⁴

$$Q = 2\pi f_r \frac{E_d}{P}$$

gdzie E_d to energia drgań, f_r to częstotliwość rezonansowa, P to średnia moc tracona przez układ. Szerokość połówkowa krzywej rezonansowej to szerokość krzywej mierzona w połowie jej wysokości.

$$\Delta f = \frac{f_0}{Q}$$

Aby określić częstotliwość rezonansową obwodu LC możemy zastosować wzór Thomsona:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

gdzie f – częstotliwość obwodu w hercach, L – indukcyjność cewki w henrach, C – pojemność kondensatora w faradach, ω – częstość kołowa w radianach na sekundę.

Warunkiem rezonansu w szeregowym układzie jest spełnienie równania:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

¹https://pl.wikipedia.org/wiki/Drgania_wymuszone, data: 06.04.2017

²http://www.if.pw.edu.pl/~anadam/WykLadyFO/FoWWW_15.html, data: 06.04.2017

³<https://pl.wikipedia.org/wiki/Rezonans>, data: 06.04.2017

⁴<https://pl.wikipedia.org/wiki/Dobroć>, data: 06.04.2017

Przesunięcie fazowe względem napięcia wymuszającego wynosi:

$$\phi_r = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}{\beta}$$

gdzie $\beta = \frac{R}{2L}$ to współczynnik tłumienia, $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ to częstość drgań własnych. Dobroć w szeregowym układzie LC obliczamy wzorem:

$$Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{\omega_0 L}$$

gdzie R to zastępcza szeregową rezystancja układu.

2 Przebieg i cel ćwiczenia

Celem naszego zadania jest zbadanie zjawiska rezonansu dla drgań wymuszonych w szeregowym obwodzie LC.

2.1 Opracowanie pomiarów

f [Hz]	U[V]	I [mA]	U _L [V]	U _c [V]
2,169	1,496	0,47	0,308	1,818
2,739	1,513	0,71	0,569	2,098
3,285	1,507	1,06	0,981	2,507
3,83	1,5	1,7	1,74	3,258
4,303	1,5	2,86	3,149	5,6
4,721	1,507	5,45	7,95	9,66
4,918	1,502	8,31	12,71	14,19
5,022	1,503	10,68	16,75	17,85
5,146	1,5	12,5	20,2	20,5
5,244	1,5	12,94	21,34	20,8
5,375	1,502	10,48	17,75	16,52
5,458	1,506	9	15,51	14,01
5,542	1,49	7,66	13,41	11,77
5,967	1,502	4,23	8,14	6,13
6,44	1,499	2,86	6,07	2,808
7,01	1,51	2,06	4,96	1,867
7,586	1,493	1,58	4,32	1,335
8,063	1,512	1,35	4,1	1,083
8,539	1,514	1,16	2,397	0,889
9,024	1,507	1,01	2,243	0,74
10	1,492	0,77	2,027	0,534
11,02	1,51	0,62	1,916	0,405
12,01	1,507	0,47	1,822	0,313
13,06	1,505	0,37	1,764	0,252
14,01	1,496	0,26	1,702	0,201
14,99	1,51	0,19	1,688	0,164
16,51	1,509	0,08	1,639	0,118
18,03	1,496	0,03	1,596	0,083
19,51	1,504	0,01	1,585	0,057
20,99	1,501	0,01	1,565	0,036
23	1,509	0	1,558	0,017

3 Opracowanie wyników pomiarów

Zmierzyliśmy wstępną maksymalną wartość prądu I_{max} w obwodzie i wynosiła ona 12,94.

Wyznaczyliśmy opór obwodu

$$R = \frac{U_0}{I_{max}}$$
$$R = \frac{1,500}{0,01294} = 115,9196$$

Obliczyliśmy teoretyczną dobroć układu rezonansowego

$$Q_T = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$C = 20nF, L = 45mH$$

$$Q_T = 12,94$$

Obliczyliśmy teoretyczną szerokość połówkową krzywej rezonansowej Δf_T

$$\Delta f_T = \frac{f_T}{Q_T}$$
$$\Delta f_T = \frac{5000}{12,94} = 386,3988$$

Obliczyliśmy niepewność

$$u_a = \frac{\delta}{\sqrt{3}}$$

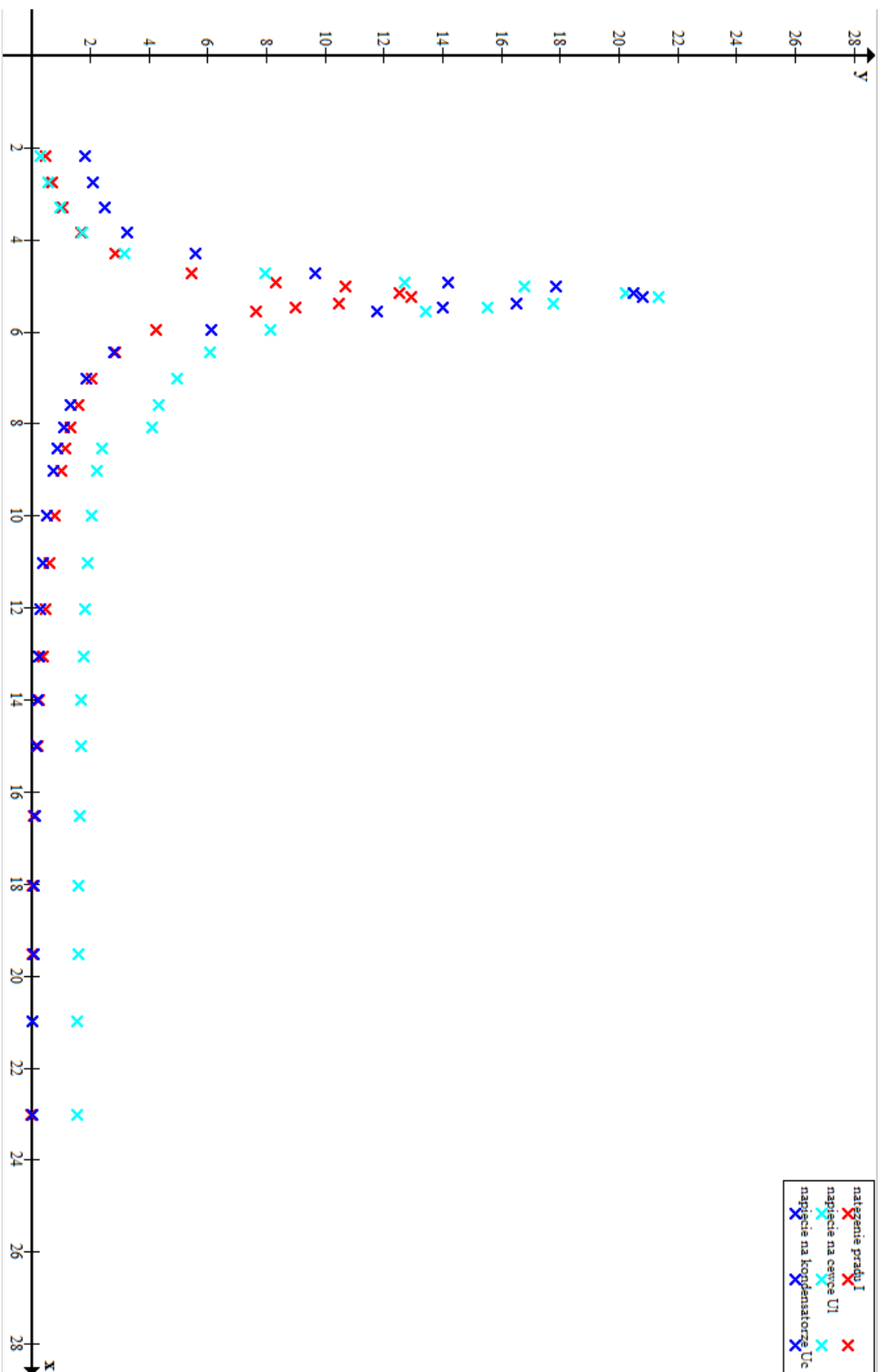
Gdzie δ to:

1,8%W + 30 μ A niepewność miernika cyfrowego amperomierza,

0,6%W + 3V niepewność miernika cyfrowego woltomierza,

0,1%W + 3Hz niepewność generatora sygnału

Sporządziliśmy wykres



Odczytaliśmy z wykresu częstotliwość rezonansową f_R , która wynosi 5,244
 Oceniliśmy niepewność $u(f_R)$ która wynosiła 8,244
 Metodą szerokości połówkowej krzywej rezonansowej obliczyliśmy dobroć badanego układu rezonansowego

$$Q = \frac{f_R}{\Delta f} = 13,11$$

$$\Delta f = 5440 - 5040 = 400 \text{ Hz}$$

Korzystając z prawa propagacji niepewności obliczyliśmy niepewność Q oraz Q_T

$$u(U_0) = 1,737$$

$$u(I_{max}) = 1,866$$

$$u(R) = \sqrt{\left(\frac{u(U_0)}{I_{max}}\right)^2 + \left(-u(I_{max}) \cdot \frac{U_0}{I_{max}^2}\right)^2} = 0,1352723$$

$$u(Q_T) = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \frac{-u(R)}{R^2}\right)^2} = 0,01510034$$

$$u(Q) = \sqrt{\left(\frac{-f_r}{(f_2 - f_1)^2} u(f_2)\right)^2 + \left(\frac{f_r}{(f_2 - f_1)^2} u(f_1)\right)^2 + \left(\frac{1}{(f_2 - f_1)^2} u(f_r)\right)^2} = 0,0143578$$

Obliczyliśmy teoretyczną wartość natężenia prądu w rezonansie I_0

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L + \frac{1}{\omega C})^2}} = 12,94$$

$\omega = 2\pi f_2$ Obliczyliśmy przesunięcie fazowe natężenia prądu względem napięcia wymuszającego

$$\cos\phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (2\pi f_r L + \frac{1}{2\pi f_r C})^2}} = 1$$

3.1 Wniosek

Obliczona teoretyczna wartość natężenia prądu w rezonansie zgadza się z wartością pomiarową. Obliczenia wykazały brak przesunięcia fazowego ponieważ wartość $\cos\phi = 1$ wynosi 0. Teoretyczne wartości, które zostały przez nas przyjęte ku naszemu niezadowoleniu były błędne. Teoretyczna dobroć układu rezonansowego różniła się od wartości obliczonej dobroci. Różnice te mogły wynikać z niepewności urządzeń pomiarowych i wahań napięć generatora.