PRACOWNIA FIZYCZNA 1
Instytut Fizyki - Centrum Naukowo Dydaktyczne
Politechnika Śląska

P1-M3. Wyznaczanie przyspieszenia ziemskiego za pomocą wahadła rewersyjnego*

Zagadnienia

Siła grawitacji. Przyspieszenie ziemskie, jednostka, zależność wartości od szerokości geograficznej i wysokości nad poziomem morza. Wahadło fizyczne. Wahadło rewersyjne. Długość zredukowana wahadła rewersyjnego. Odwracalność wahadła rewersyjnego. Zależność okresu drgań od długości wahadła matematycznego.

1 Wprowadzenie

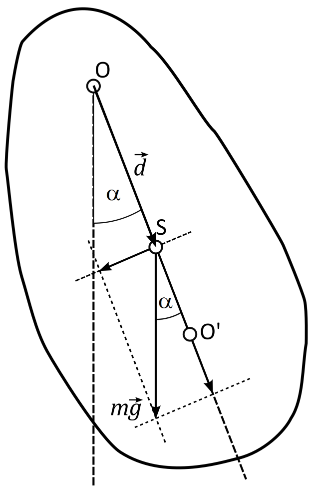

Fig. 1: Wahadło fizyczne

Wahadło rewersyjne jest wahadłem fizycznym, czyli bryłą, mogącą wykonywać obroty względem osi nie przechodzącej przez środek ciężkości. Na rysunku 1 przedstawiono wahadło fizyczne, wychylone z położenia równowagi. Oś obrotu wahadła jest prostopadła do płaszczyzny rysunku i przechodzi przez punkt O. W położeniu równowagi, prosta poprowadzona przez punkt O i przez środek masy bryły (S) jest prostą pionową, wzdłuż której na bryłę działa siła ciężkości $m\vec{g}$. Gdy wahadło wychylone jest z położenia równowagi, powstaje moment siły ciężkości, zależny od odległości OS $= d$ i kąta wychylenia

$$\vec{M} = m\vec{d} \times \vec{g}, \tag{1}$$

$$M = mgd \sin\alpha. \tag{2}$$

Z drugiej zasady dynamiki ruchu obrotowego

$$\vec{M} = I\vec{\epsilon}, \tag{3}$$

gdzie I jest momentem bezwładności wahadła względem osi obrotu przechodzącej przez punkt O, można zapisać

$$I\epsilon = -mgd \sin\alpha. \tag{4}$$

Znak minus wynika z tego, że moment siły powoduje obrót w kierunku położenia równowagi bryły. Dla małych kątów wychylenia α

$$\sin\alpha \approx \alpha$$

i równanie przyjmuje postać

$$I\epsilon = -mgd\alpha. \tag{5}$$

Wstawiając

$$I = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

i przekształcając, otrzymuje się równanie drgań harmonicznych

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgd}{I}\alpha = 0, \tag{6}$$

*Opracowanie: dr inż. Alina Domanowska

którego jedno z rozwiązań szczególnych ma postać

$$\alpha(t) = A \sin \omega_0 t, \tag{7}$$

gdzie

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

jest częstotliwością kołową (pulsacją) drgań własnych wahadła. Okres drgań wahadła jest zatem równy

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}. \tag{8}$$

Długość zredukowana wahadła fizycznego

Wielkość $D = mgd$ nazywana jest *momentem kierującym* wahadła fizycznego. W przypadku wahadła matematycznego $d = l$ oraz $I = ml^2$, gdzie m i l są odpowiednio masą i długością wahadła. Zatem wzór na okres drgań wahadła matematycznego przyjmuje dobrze znaną postać

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{9}$$

Korzystając z zależności (8) i (9), można wywnioskować, że dla wahadła matematycznego

$$l = \frac{I}{md}. \tag{10}$$

Wielkość l nazywana jest *długością zredukowaną* wahadła fizycznego, czyli taką długością l wahadła matematycznego o masie m, dla której okres drgań jest taki sam, jak dla wahadła fizycznego o momencie bezwładności I i odległości środka masy od osi obrotu d.

Odwracalność wahadła fizycznego

Jeśli przez I_S oznaczyć moment bezwładności wahadła fizycznego względem osi obrotu przechodzącej przez środek masy S, wówczas na mocy twierdzenia Steinera, moment bezwładności względem równoległej osi przechodzącej przez punkt O wynosi

$$I = I_S + md^2. \tag{11}$$

Podstawiając powyższe do wzoru (10) i przekształcając, otrzymuje się

$$l = d + \frac{I_S}{md}. \tag{12}$$

Jeśli na przedłużeniu odcinka OS odłożyć odcinek o długości wahadła zredukowanego l, wówczas otrzyma się punkt nazywany *środkiem wahań* wahadła fizycznego, oznaczony na rysunku 1 przez O'. Okres drgań wahadła względem równoległej osi obrotu przechodzącej przez ten punkt, wynosi

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{I'}{mg(l-d)}}, \tag{13}$$

a jego moment bezwładności względem tej osi jest równy

$$I' = I_S + m(l-d)^2. \tag{14}$$

Długość zredukowana dla nowej osi wynosi

$$l' = \frac{I'}{m(l-d)} = \frac{I_S + m(l-d)^2}{m(l-d)} = \frac{I_S}{m(l-d)} + (l-d). \tag{15}$$

Ze wzoru (12) można wyznaczyć

$$l - d = \frac{I_S}{md},$$

i, co za tym idzie

$$d = \frac{I_S}{m(l-d)}. \tag{16}$$

Zatem

$$l' = l - d + d = l. \tag{17}$$

Zatem okres drgań wahadła fizycznego względem osi O' równy jest okresowi drgań względem osi O i równy okresowi drgań wahadła matematycznego o długości l = OO'. Ten fakt wykorzystuje się w wahadle rewersyjnym. Jest to zwykle pręt z przesuwanymi masami, którymi można regulować położenie środka masy, mogący wykonywać drgania względem dwóch różnych, równoległych do siebie osi obrotu. Poszukuje się takich położeń mas, by wahadło było odwracalne, to znaczy by okresy drgań względem obu osi były jednakowe. Ten okres drgań T, wraz z długością l = OO', służą do wyznaczenia wartości przyspieszenia ziemskiego ze wzoru na okres drgań wahadła matematycznego (9).

2 Układ pomiarowy

Układ pomiarowy jest przedstawiony na rysunku 2. W podstawie urządzenia osadzona jest kolumna z poprzeczką, na której z jednej strony zawieszono wahadło matematyczne, a z drugiej - wahadło rewersyjne. Długość wahadła matematycznego można zmieniać za pomocą pokrętła, a jego długość odczytuje się ze skali naniesionej na kolumnę, względem białego paska narysowanego na obciążniku.

Wahadło fizyczne, po drugiej stronie kolumny, składa się z pręta z podziałką centymetrową, na którym umieszczone są dwa obciążniki. Jeden z nich jest nieruchomy, a drugi można przesuwać na pręcie, zmieniając w ten sposób położenie środka masy. Wahadło ma dwie nieruchome osie obrotu, których odległość l można odczytać ze skali naniesionej na kolumnę.

Czasomierz wykorzystuje złącze optoelektroniczne - fotokomórkę, umieszczoną na wsporniku o regulowanym położeniu. Niepewność maksymalna (graniczna) pomiaru czasu wynosi

$$u_{max}(t) = 0,5\% \cdot W + 5 \cdot C, \tag{18}$$

gdzie W oznacza wskazanie czasomierza w sekundach, a C jest cyfrą znaczącą wyświetlacza. Niepewność standardowa typu B pomiaru czasu t wynosi

$$u_B(t) = \frac{u_{max}(t)}{\sqrt{3}} = \frac{0,5\% \cdot W + 5 \cdot C}{\sqrt{3}}. \tag{19}$$

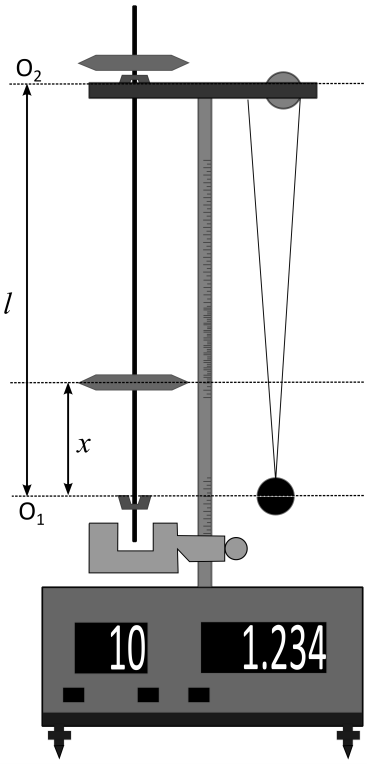

Fig. 2: Wahadło rewersyjne

3 Pomiary

1. Zmierzyć odległość l między ostrzami wahadła.
2. Zawiesić wahadło na ostrzu O_1, wprawić wahadło w ruch i zmierzyć czas N okresów.
   ↬ *Ilość okresów N ustala prowadzący. Kąt wychylenia nie powinien być większy od 20°. Pręt nie może się ocierać o pryzmaty na których jest zawieszony.*
3. Zawiesić wahadło na ostrzu O_2 i ponownie zmierzyć czas N okresów.
4. Wykonywać czynności opisane wyżej dla położeń ciężarka, zmienianych co 1 cm, w zakresie długości pręta.

<table>
<tr><td colspan="3">l, cm</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="3">liczba okresów N</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>Lp.</td><td>x, cm</td><td>x, m</td><td>t_1, s</td><td>t_2, s</td><td>T_1, s</td><td>T_2, s</td></tr>
<tr><td>1.</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

5. Sporządzić wykres zależności okresu wahań T od odległości x ciężarka od ostrza 1, dla obydwu sposobów zawieszenia na jednym wykresie.
   ↬ *Pamiętać o prawidłowym wyborze skali na osi T - skala nie powinna zaczynać się od zera.*
6. Z wykresu określić położenia x_1 i x_2 ciężarka, przy których okresy drgań są jednakowe dla obu zawieszeń.
7. Ciężarek ustawić w położeniu odwracalnym x_1 lub x_2, określonym z wykresu, i zmierzyć czas 100 okresów dla obu zawieszeń wahadła w wybranym położeniu.
8. Zmierzyć czas 100 okresów dla wahadła matematycznego o długości l.

4 Opracowanie wyników pomiarów

1. Obliczyć okres drgań wahadła rewersyjnego T_R, w położeniu odwracalnym. Obliczyć okres drgań wahadła matematycznego T_M.
2. Wyznaczyć niepewność pomiaru czasu $u(t)$ dla wahadła rewersyjnego w położeniu odwracalnym i dla wahadła matematycznego.
3. Korzystając z prawa przenoszenia niepewności, wyznaczyć niepewności standardowe okresów drgań $u(T_R)$ i $u(T_M)$.
4. Zapisać okres wraz z niepewnością w prawidłowym formacie, z jednostką.
5. Obliczyć niepewności rozszerzone $U(T_R)$ i $U(T_M)$ i zapisać wynik w odpowiednim formacie, z jednostką. Ocenić zgodność okresów T_R i T_M.
6. Korzystając ze wzoru na okres drgań wahadła matematycznego, obliczyć wartość przyśpieszenia ziemskiego g dla okresu drgań wahadła rewersyjnego w położeniu odwracalnym T_R.
7. W oparciu o prawo przenoszenia niepewności, obliczyć niepewność wyznaczonej wartości g .
8. Obliczyć niepewność rozszerzoną.
9. Przeprowadzić test zgodności otrzymanej wartości z wartością przyspieszenia ziemskiego obliczoną dla szerokości geograficznej i wysokości nad poziomem morza dla Gliwic.