Wyznaczanie przyspieszenia ziemskiego przy pomocy wahadła matematycznego

Wstęp teoretyczny

Siła grawitacji

Siła grawitacji to w typowym dla nas - ludzi rozumieniu przyciąganie otaczających nas przedmiotów przez glob ziemski, czyli zjawisko ciężaru. W fizyce jest to jedno z oddziaływań podstawowych, określone jako zjawisko naturalne, polegające na tym, że wszystkie obiekty , które posiadają masę oddziałują na siebie wzajemnie i przyciągają się. Kiedy znajdujemy się na powierzchni Ziemi, odległość od środka jej ciężkości jest dużo większa niż wysokość, na której możemy się przemieszczać. W takiej sytuacji można przyjąć, że pole grawitacyjne jest z dużą dokładnością jednorodne.

Korzystając z zależności na siłę grawitacyjną można obliczyć, że na przedmiot o masie m na powierzchni naszej planety działa siła F_g:

$$F_g = \frac{GM_z m}{r_z^2}$$

gdzie: $M_z \approx 5,9736 \cdot 10^{24} kg$ - masa Ziemi, $r_z \approx 6373,14 km$, a zgodnie z drugą zasadą dynamiki:

$$a = \frac{F_g}{m}$$

Źródło: *http://www.fizykon.org/grawitacja/grawitacja_wprowadzenie.htm*

http://pl.wikipedia.org/wiki/Grawitacja

Przyspieszenie ziemskie, jednostka, zależność wartości od szerokości geograficznej i wysokości nad poziomem morza

Przyspieszenie ziemskie - przyspieszenie grawitacyjne ciał swobodnie spadających na Ziemię, bez oporów ruchu.Podstawiając zależność na siłę można obliczyć przyspieszenie ziemskie g:

$$g = \frac{GM_z}{r^2} \approx \frac{6,6732 \cdot 10^{-11} \cdot m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s{-}2 \cdot 5,9736 \cdot 10^{24} kg}{(6373,14 km)^2} \approx 9,81 \frac{m}{s^2}$$

Jednostkami przyspieszenia ziemskiego są jednostki przyspieszenia:

$$[g] = [\gamma] = \frac{N}{kg} = \frac{m}{s^2}$$

Wartość przyspieszenia ziemskiego zależy od szerokości geograficznej oraz wysokości nad poziomem morza. Wraz z wysokością przyspieszenie maleje odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości do środka Ziemi i jest wynikiem zmniejszania się siły grawitacji zgodnie z prawem powszechnego ciążenia. Zmniejszanie się przyspieszenia ziemskiego wraz ze zmniejszaniem szerokości geograficznej jest spowodowane działaniem pozornej siły odśrodkowej, która powstaje na skutek ruchu obrotowego Ziemi. Ponieważ siła ta jest proporcjonalna do odległości od osi obrotu, stąd największą wartość osiąga na równiku. Ponieważ siła odśrodkowa ma tu zwrot przeciwny do siły grawitacji, przyspieszenie ziemskie na równiku osiąga najmniejszą wartość. Dodatkowe zmniejszenie przyspieszenia ziemskiego

w okolicach równika spowodowane jest spłaszczeniem Ziemi (większą odległością od środka Ziemi). Nie obserwuje się zależności przyspieszenia ziemskiego od długości geograficznej.
Przybliżoną zależność przyspieszenia ziemskiego, z uwzględnieniem podanych efektów, podaje wzór:

$$g_\varphi \approx 9,78318(1 + 0,0053024 sin^2\varphi - 0,0000058 sin^2 2\varphi) - 3,086 \cdot 10^{-6} h$$

gdzie: h - wysokość nad poziomem morza [m], φ - szerokość geograficzna [°]

Źródło: *http://pl.wikipedia.org/wiki/Przyspieszenie_ziemskie*

Wahadło matematyczne

Idealne *wahadło matematyczne* to punktowa masa m zawieszona na nieważkiej i nierozciągliwej lince. W rzeczywistości niewielka ciężka kulka zawieszona na mocnej lince i cienkiej nici jest dobrym przybliżeniem.

Źródło: *http://fizyka.pisz.pl/strona/121.html*

Zależność okresu drgań od długości wahadła matematycznego

Okres drgań wahadła matematycznego jest niezależny od masy m i wynosi dla małych kątów α

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

gdzie, l - długość wahadła

Źródło: *http://fizyka.pisz.pl/strona/121.html*

Przebieg i cel ćwiczenia

Celem tego ćwiczenia jest wyznaczenie przyspieszenia ziemskiego przy pomocy wahadła matematycznego. Nasze stanowisko pomiarowe składa się z osadzonej w urządzeniu poprzeczki ze skalą milimetrową, na której jest zawieszone wahadło matematyczne. Długość wahadła można zmniejszać za pomocą pokrętła. Składa się również z czasomierza, który wykorzystuje złącze optoelektroniczne - fotokomórkę i mierzy czas N wahnięć wahadła w sekundach (W naszym wypadku $N = 10$). Na początku ćwiczenia ustalono początkową długość wahadła ($L = 30cm$). Fotokomórka umieszczona jest tak, aby kula zawieszona na sznurku, podczas wykonywania wahnięć przechodziła przez jej światło, tym samym uruchamiając ją.
Ćwiczenie polegało na wykonaniu pięciokrotnie pomiarów czasu wahnięć $[s]$ przy danej długości wahadła, następnie należało zwiększać długość wahadła. Nasz zakres długości to $30 - 90cm$. Czasomierz mierzył czas 10 wahnięć. Odchylenie wahadła matematycznego nie mogło być większe niż 7°. Odchylenie wahadła było kontrolowane przez kątomierz umieszczony na górze.

Opracowanie pomiarów

Pomiary zostały zapisane w tabeli:

$L[cm]$	$t[s]$				
	1	2	3	4	5
30	11,02	11,03	11,02	11,03	11,01
35	11,92	11,94	11,94	11,95	11,94
40	12,75	12,75	12,75	12,77	12,76
45	13,52	13,52	13,51	31,53	13,51
50	14,25	14,25	14,26	14,27	14,28
55	14,99	14,97	14,98	14,98	14,98
60	15,28	15,27	15,28	15,28	15,28
65	16,25	16,26	16,26	16,26	16,27
70	16,88	16,88	16,87	16,88	16,87
75	17,43	17,43	17,43	17,43	17,43
80	17,99	17,99	17,99	17,99	18
85	18,53	18,54	18,54	18,55	18,55
90	19,06	19,06	19,06	19,07	19,06

Niepewności pomiarowe wynoszą odpowiednio:
- czasomierz: $\Delta t = 0,01s$
- skala milimetrowa: $u(L) = 0,5cm$

Dla każdej długości wahadła obliczono wartości $\sqrt{L}$ oraz średnie wartości mierzonego czasu N wahnięć:

t_{sr}	$\sqrt{L}$
11,022	0,547722558
11,936	0,591607978
12,756	0,632455532
13,518	0,670820393
14,262	0,707106781
14,98	0,741619849
15,278	0,774596669
16,26	0,806225775
16,876	0,836660027
17,43	0,866025404
17,992	0,894427191
18,542	0,921954446
19,06	0,948683298

Następnie została obliczona statystyczna niepewność typu $u_a(t_{sr})$, dla każdej długości wahadła, jako odchylenie standardowe wartości średniej, pomnożone przed odpowiedni współczynnik Studenta Fishera, który w tym przypadku wynosił $1,141$. Otrzymano następujące wyniki:

Lp.	$u_a(t_{sr})$
1.	0,009546291
2.	0,013009402
3.	0,010205414
4.	0,009546291
5.	0,01487682
6.	0,008068088
7.	0,005102707
8.	0,008068088
9.	0,006249514
10.	0
11.	0,005102707
12.	0,009546291
13.	0,008068088

Korzystając ze wzoru ogólnego

$$u(x) = \frac{\Delta_p x}{\sqrt{3}}$$

obliczono $u_b(t)$. Wzór wygląda następująco:

$$u_b(t) = \frac{\Delta t}{\sqrt{3}}$$

, a wartość $u_b(t)$ wynosi: **0,005773503**.

Niepewności pomiarowe całkowite średnich czasów wyliczone ze wzoru:

$$u(t_{sr}) = \sqrt{u_a^2(t_{sr}) + u_b^2(t)}$$

wynoszą:

$u_a(t_{sr})$
0,011156387
0,014232984
0,011725348
0,011156387
0,015957853
0,009921056
0,007705253
0,009921056
0,008508216
0,0057735
0,007705253
0,011156387
0,009921056

Następnie obliczono okres drgań T ze wzoru:

$$T = \frac{t_{sr}}{N}$$

,wiedząc, że $N = 10$

T
1,1022
1,1936
1,2756
1,3518
1,4262
1,498
1,5278
1,626
1,6876
1,743
1,7992
1,8542
1,906

Korzystając z prawa propagacji niepewności obliczono niepewności powyższych danych ze wzoru:

$$u(T) = |\frac{u(t_{sr})}{N}|$$

i wynoszą one:

$u(T)$
0,001115639
0,001423298
0,001172535
0,001115639
0,001595785
0,000992106
0,000770525
0,000992106
0,000850822
0,00057735
0,000770525
0,001115639
0,000992106

Na podstawie wszystkich danych sporządzono wykresy: T(N) i T($\sqrt{N}$). Na obu wykres niepewności nie zostały zaznaczone, gdyż są one zbyt małe i nie byłyby widoczne na wykresie.

Na powyższym wykresie dopasowano prostą za pomocą regresji liniowej. Równanie prostej wynosi: $y = 2,0019x + 0,0071$ oraz $R^2 = 0,9987$.
Niepewności współczynników wynoszą kolejno: $u(a) = 0,02164, u(b) = 0,01676$

Na podstawie wyliczonego współczynnika, można obliczyć przyspieszenie ziemskie, korzystając ze wzoru opartego na równaniu ruchu:

$$g = \frac{4\pi^2}{a^2}$$

, co po podstawieniu dało wynik: **g = 9,850590064** [$\frac{m}{s^2}$].
Następnie korzystając z prawa niepewności można obliczyć niepewność $u(g)$ ze wzoru:

$$u(g) = \sqrt{(\frac{4\pi^2}{a^2} \cdot u(a))^2}$$

, co dało wynik: **u(g)=0,004614123**[$\frac{m}{s^2}$] Niepewność rozszerzona została obliczona ze wzoru

$$u_p(g) = k_p \cdot u(g), k_p = 2$$

i wynosi $u_p(g) =$ **0,009228247** Następnie obliczono wartości przyspieszenia ziemskiego dla szerokości geograficznej i wysokości nad poziomem morza dla Gliwic. Do obliczenia były nam potrzebne wartości:
$h = 240[m.n.p.m.]$
$\varphi = 50,31[°]$ Następnie podstawiając do wzoru:

$$g_\varphi \approx 9780318(1 + 0,0053024sin^2\varphi - 0,0000058sin^2 2\varphi) - 3,086 \cdot 10^{-6}h$$

otrzymujemy wynik dla Gliwic:
g=9,7796 [$\frac{m}{s^2}$]

Test zgodności

Dla otrzymanej wartości test zgodności został przeprowadzony na podstawie następującego wzoru:

$$\frac{|x - y|}{\sqrt{u^2(x) + u^2(y)}}$$

i wynosi 5,31 co jest większe od 3.

Wnioski

Obliczona wartość przyspieszenia ziemskiego nie jest zgodna z wartością tablicową, nawet dla potrojonej niepewności $u(g)$. Przyczyną niedokładnego wyniku może być zróżnicowanie odchylenia wahadła matematycznego od pionu, mimo, że pomiary przy tych samych długościach wahadła były niemal identyczne.