

# Statistiques descriptives bivariées

## *Objectifs*

- Observer simultanément des individus d'une population sur deux caractères
- Mesurer un lien éventuel entre deux caractères en utilisant un résumé chiffré qui traduit l'importance de ce lien
- Qualifier ce lien :
  - en cherchant une relation numérique approchée entre deux caractères quantitatifs
  - en cherchant des correspondances entre les modalités de deux caractères qualitatifs

2 types de variables  $\Rightarrow$  3 types de croisements :

- qualitatif  $\times$  qualitatif
- qualitatif  $\times$  quantitatif
- quantitatif  $\times$  quantitatif

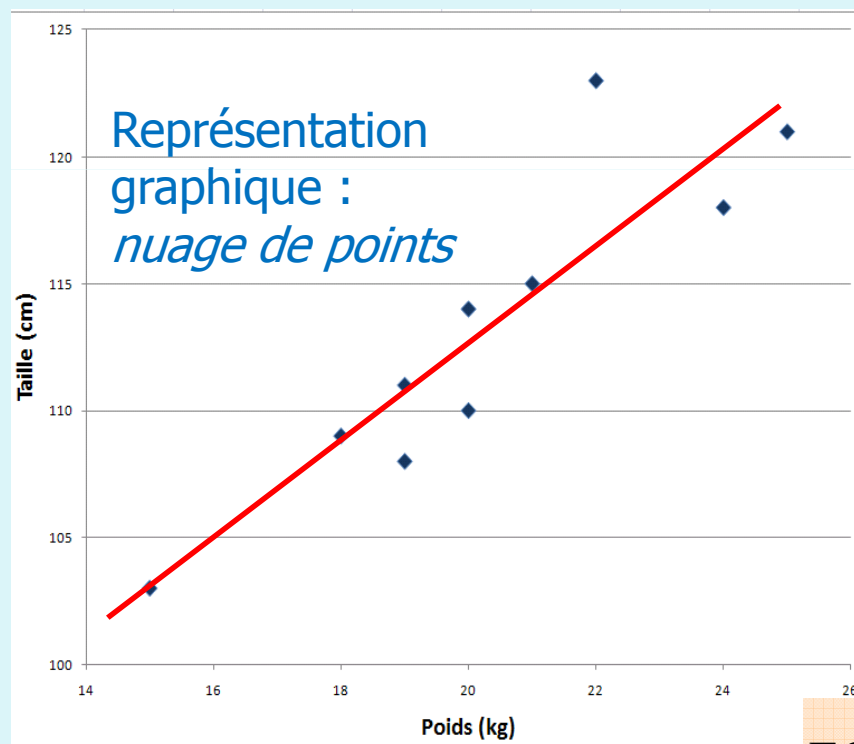
# Croisement quantitatif $\times$ quantitatif

# Croisement Quantitatif × Quantitatif

## Droite de régression

*Exemple : Etude du lien entre l'âge et le poids chez les enfants de 6 ans*

| Enfant | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   | 10  |
|--------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Taille | 121 | 123 | 108 | 118 | 111 | 109 | 114 | 103 | 110 | 115 |
| Poids  | 25  | 22  | 19  | 24  | 19  | 18  | 20  | 15  | 20  | 21  |



On considère X et Y deux variables qualitatives sur une population de taille n.

On note  $\{x_i\}_{i=1,\dots,n}$  la série observée pour X et  $\{y_i\}_{i=1,\dots,n}$  la série observée pour Y.

L'objectif est de trouver une fonction f telle que

$$y_i \approx f(x_i).$$

On se restreint aux fonctions affines  $f(x) = ax + b$

Et on cherche les coefficients a et b qui minimisent *l'erreur quadratique moyenne*

$$EQ(a, b) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2$$

# Croisement Quantitatif × Quantitatif

## Droite de régression

On obtient les coefficients :

$$\hat{a} = \frac{c_{xy}}{s_x^2} \quad \text{et} \quad \hat{b} = \bar{y} - \hat{a}\bar{x}$$

où  $c_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$  est la **covariance** entre X et Y.

1.  $y = \hat{a}x + \hat{b}$  est appelée **droite de régression** de Y en X. Elle traduit les variations de Y qui peuvent être expliquées par X.
2. Attention la droite de régression de X en Y n'est nécessairement la même que celle de Y en X

Exemple : Etude du lien entre l'âge et le poids chez les enfants de 6 ans

| $\bar{x}$ | $\bar{y}$ | $s_x^2$ | $s_y^2$ | $C_{xy}$ |
|-----------|-----------|---------|---------|----------|
| 113,20    | 20,30     | 38,62   | 8,46    | 16,27    |

L'équation de la droite de Y en X :  $y = 0,42x - 27,38$

L'équation de la droite de X en Y :  $y = 1,92x - 74,15$

# Croisement Quantitatif × Quantitatif

## Covariance et coefficient de corrélation

A partir de la covariance, on définit le *coefficient de corrélation linéaire* (coefficient de Pearson) à valeurs dans  $[-1,1]$

$$r_{xy} = \frac{c_{xy}}{s_x s_y}$$

1.  $|r|$  est proche de 1 alors X et Y sont très liés entre eux par une droite affine.
2.  $r < 0$  : globalement X et Y varient en sens inverse .
3.  $r > 0$  : globalement X et Y varient dans le même sens .
4.  $|r| \cong 0$  : on ne peut rien dire sur un lien éventuel entre X et Y.

### Remarques :

- Le coefficient de corrélation correspond à la covariance des séries centrées et réduites

$$\hat{a} = \frac{c_{xy}}{s_x^2} = r_{xy} \frac{s_y}{s_x}$$

Exemple : Etude du lien entre l'âge et le poids chez les enfants de 6 ans

On trouve

$$r_{xy} = 0,90$$

- $r_{xy} \cong 1 \Rightarrow$  L'équation de droite est donc pleinement justifiée
- $r_{xy} > 0 \Rightarrow$  plus la taille est grande et plus le poids est important (et vice-versa)

# Croisement Quantitatif × Quantitatif

## Prévision

On appelle *prévisions* les valeurs données par la droite de régression. Pour chaque point  $x_i$  de la série observée, on peut calculer la prévision (i.e. une valeur approchée de  $y_i$  par la droite de régression)

$$\hat{y}_i = \hat{a}x_i + \hat{b}$$

Propriétés :

1)

$$\bar{\hat{y}} = \bar{y}$$

Le caractère Y et la partie de cette variable expliquée par la droite de régression ont la même moyenne.

2)

$$s_{\hat{y}}^2 = s_y^2 \times r_{xy}^2$$

1. La variance de Y expliquée la droite de régression est plus petite que la variance de Y.
2. La variance de Y expliquée la droite de régression est d'autant meilleure que le coefficient de Pearson est proche de 1 en valeur absolue.

# Croisement Quantitatif × Quantitatif

## Les résidus

On appelle *résidu* l'écart entre la valeur observée  $y_i$  et la valeur prédite  $\hat{y}_i$

$$e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - (\hat{a}x_i + \hat{b})$$

On calcule alors l'erreur globale

$$EQ(\hat{a}, \hat{b}) = s_e^2 = s_y^2(1 - r_{xy}^2)$$

1. L'erreur globale est proportionnelle à la variance de la variable Y.
2. L'erreur est d'autant plus petite que le coefficient est proche de 1 en valeur absolue.

Propriétés :

1) La moyenne des résidus est nulle,  $\bar{e} = 0$

2) Les résidus et la série explicative x sont non corrélés,  $c_{ex} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i(x_i - \bar{x}) = 0$

Les résidus ne contiennent plus « d'information » pouvant expliquer y.

3) Formule de décomposition de la variance

*coefficient de détermination*

$$\underbrace{s_y^2}_{\text{variance totale}} = \underbrace{s_{\hat{y}}^2}_{\text{variance expliquée}} + \underbrace{s_e^2}_{\text{variance résiduelle}}$$



$$R^2 = \frac{s_{\hat{y}}^2}{s_y^2} = r_{xy}^2 \in [0,1]$$

# Croisement Quantitatif × Quantitatif

## Transformations

- Les droites de régression n'explique que les liaisons linéaires.
- Si  $X$  et  $Y$  sont liées par une relation de la forme  $Y=aX^2$  alors  $r_{XY}=0$   
Le coefficient de corrélation linéaire de Pearson ne peut pas détecter cette liaison.
- Il n'existe pas de mesure universelle pour détecter des relations quelconques
- On essaie par des transformations de se ramener à une droite affine

| Famille       | Fonctions                        | Transformation                        | Forme affine          |
|---------------|----------------------------------|---------------------------------------|-----------------------|
| exponentielle | $y = a.e^{bx}$                   | $y' = \log(y)$                        | $y' = \log(a) + b.x$  |
| puissance     | $y = ax^b$                       | $y' = \log(y) \quad x' = \log(x)$     | $y' = \log(a) + b.x'$ |
| inverse       | $y = a + \frac{b}{x}$            | $x' = \frac{1}{x}$                    | $y' = a + b.x'$       |
| logistique    | $y = \frac{1}{1 + e^{-(a.x+b)}}$ | $y' = \log\left(\frac{y}{1-y}\right)$ | $y' = a.x + b$        |