

**Laporan Tugas Besar 1**  
**Pembuatan Library Pengolahan Matriks Menggunakan Java**  
**IF2123 Aljabar Linier dan Geometri**



**Kelompok 20 - Kuli Java**

<b>Fawwaz Anugrah Wiradhika Dharmasatya</b>	<b>13520086</b>
<b>Andika Naufal Hilmy</b>	<b>13520098</b>
<b>Alifia Rahmah</b>	<b>13520122</b>

## DAFTAR ISI

<b>BAB I: Deskripsi Masalah</b>	<b>3</b>
<b>BAB II: Teori Singkat</b>	<b>3</b>
Matriks	3
Eliminasi Gauss dan Eliminasi Gauss-Jordan	3
Determinan	4
Metode Reduksi Baris	4
Metode Ekspansi Kofaktor	4
Matriks Kofaktor dan Adjoin	5
Kaidah Cramer	5
Matriks Balikan	5
Interpolasi Polinom	5
Regresi Linier Berganda	6
<b>BAB III: Implementasi Pustaka</b>	<b>7</b>
Struktur Class	7
Garis Besar Program	9
<b>BAB IV: Eksperimen</b>	<b>10</b>
1. Penyelesaian SPL berbentuk matriks $Ax = b$	10
2. Penyelesaian SPL berbentuk matriks augmented	14
3. Penyelesaian SPL berbentuk kumpulan persamaan	16
4. Studi kasus SPL: rangkaian listrik	17
5. Studi kasus SPL: sistem reaktor	18
6. Studi Kasus Interpolasi	19
Subsoal a	19
Subsoal b	22
Subsoal c	25
7. Studi Kasus Regresi Linier Berganda	27
<b>BAB V: Kesimpulan, Saran, dan Refleksi</b>	<b>28</b>
Kesimpulan	28
Saran	29
Refleksi	29
<b>DAFTAR REFERENSI</b>	<b>30</b>

## **BAB I: Deskripsi Masalah**

Sistem persamaan linier (SPL) banyak ditemukan di dalam bidang sains dan rekayasa. Anda sudah mempelajari berbagai metode untuk menyelesaikan SPL, termasuk menghitung determinan matriks. Sembarang SPL dapat diselesaikan dengan beberapa metode, yaitu metode eliminasi Gauss, metode eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks balikan ( $x = A^{-1}b$ ), dan kaidah Cramer (khusus untuk SPL dengan  $n$  peubah dan  $n$  persamaan). Solusi sebuah SPL mungkin tidak ada, banyak (tidak berhingga), atau hanya satu (unik/tunggal).

Pada Tugas Besar 1 ini, kami membuat library aljabar linier dalam Bahasa Java. Library tersebut berisi fungsi-fungsi seperti eliminasi Gauss, eliminasi Gauss-Jordan, menentukan balikan matriks, menghitung determinan, kaidah Cramer (kaidah Cramer khusus untuk SPL dengan  $n$  peubah dan  $n$  persamaan). Selanjutnya, library tersebut akan digunakan di dalam program Java untuk menyelesaikan berbagai persoalan yang dimodelkan dalam bentuk SPL, menyelesaikan persoalan interpolasi, dan persoalan regresi.

## **BAB II: Teori Singkat**

### **Matriks**

Matriks adalah sebuah struktur data dua dimensi yang memiliki baris dan kolom. Terdapat beberapa jenis operasi pada matriks, di antaranya penjumlahan dan pengurangan dua matriks berdimensi sama, perkalian matriks, perkalian skalar dengan matriks, transpos matriks, mencari determinan, dan mencari balikan matriks. Terdapat beberapa jenis matriks, yaitu matriks identitas -- diagonal utama satu dan sisa elemen selain diagonal utama nol, matriks nol -- semua elemennya bernilai nol, matriks eselon baris, serta matriks eselon baris tereduksi.

Matriks eselon baris adalah matriks yang memiliki satu utama pada setiap baris, kecuali baris yang seluruhnya nol, di mana setiap satu utama harus merupakan angka bukan nol pertama, dan Di dalam dua baris berturutan yang tidak seluruhnya nol, maka satu utama pada baris yang lebih rendah terdapat lebih jauh ke kanan daripada satu utama pada baris yang lebih tinggi. Matriks eselon baris tereduksi adalah matriks eselon baris di mana pada kolom yang terdapat satu utama, tidak boleh ada elemen bukan nol selain pada satu utama.

### **Eliminasi Gauss dan Eliminasi Gauss-Jordan**

Metode eliminasi Gauss adalah salah satu metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier (SPL) menggunakan matriks augmented. Matriks augmented adalah matriks yang menyatakan SPL secara ringkas. Proses eliminasi Gauss ini dilakukan dengan operasi baris elementer (OBE) terhadap matriks augmented hingga mendapatkan matriks eselon baris. Persamaan yang berkoresponden pada matriks eselon baris dilakukan dengan teknik penyulihan mundur hingga mendapatkan solusi unik, SPL disimpulkan tidak memiliki solusi, atau SPL disimpulkan memiliki banyak solusi. Untuk SPL dengan banyak solusi, diselesaikan dengan membuat solusi dalam bentuk parametrik. Metode eliminasi Gauss-Jordan adalah salah

satu metode perluasan dari eliminasi Gauss. Pada eliminasi Gauss-Jordan, OBE dilakukan hingga mendapatkan matriks eselon baris tereduksi, sebelum melakukan penyulihan mundur.

### Determinan

Determinan matriks  $A$  dilambangkan dengan  $\det(A)$ . Pada matriks  $2 \times 2$ , determinan matriks didapatkan dari selisih perkalian antara diagonal utama dan diagonal samping dari matriks. Pada matriks  $3 \times 3$ , determinan matriks dapat ditemukan dengan menggunakan operasi berikut

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{21}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

Terdapat beberapa teorema mengenai determinan, di antaranya:

- $\det(A) = 0$ , jika matriks  $A$  mengandung baris nol atau kolom nol
- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(A) = \det(B)\det(C)$  jika  $A = BC$
- $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$

### Metode Reduksi Baris

Metode reduksi baris yaitu mencari determinan dengan melakukan OBE pada matriks hingga memperoleh matriks segitiga atas atau bawah. Determinan matriks segitiga ini dapat dihitung dengan

$$\det(A) = (-1)^p a'_{11} a'_{22} \dots a'_{nn}$$

Di mana  $p$  menyatakan banyak operasi pertukaran baris dan  $a'_{11} \dots a'_{nn}$  menyatakan perkalian dari diagonal utama.

### Metode Ekspansi Kofaktor

Metode ekspansi kofaktor untuk mencari determinan dilakukan dengan memanfaatkan minor entri matriks tersebut. Minor entri adalah submatriks dengan semua elemennya tidak berada pada baris dan kolom tertentu di dalam matriks. Kofaktor entri pada baris  $i$  dan kolom  $j$  didapatkan dengan

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Dengan  $M_{ij}$  adalah minor entri pada baris  $i$  dan kolom  $j$ . Dengan demikian, determinan matriks dapat dihitung dengan menjumlahkan semua kofaktor entri dari semua elemen pada salah satu baris atau kolom.

### **Matriks Kofaktor dan Adjoin**

Matriks kofaktor adalah matriks dengan tiap elemen dengan baris  $i$  dan kolom  $j$  berisikan kofaktor entri pada baris  $i$  dan kolom  $j$  dari suatu matriks. Jika ditranspos, matriks kofaktor akan membentuk matriks adjoin, yang dapat digunakan untuk mencari balikan matriks.

### **Kaidah Cramer**

Kaidah Cramer merupakan kaidah yang dapat digunakan untuk menyelesaikan SPL. Jika  $Ax = b$  adalah SPL yang terdiri dari  $n$  persamaan linier dengan  $n$  variabel sedemikian sehingga  $\det(A) \neq 0$ , maka SPL tersebut memiliki solusi unik secara umum

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

Dengan  $A_i$  adalah matriks yang diperoleh dengan mengganti elemen-elemen pada kolom ke- $i$  dengan matriks  $b$ .

### **Matriks Balikan**

Sebuah matriks memiliki balikan jika determinan matriks tersebut tidak sama dengan nol. Untuk mencari matriks balikan, dapat dilakukan dengan membagi matriks adjoin dengan determinan matriks. Jika determinan matriks  $= 0$ , maka matriks balikan dari matriks tersebut tidak dapat ditemukan.

### **Interpolasi Polinom**

Persoalan interpolasi polinom yaitu menentukan polinom  $p_n(x)$  yang melewati seluruh titik-titik koordinat yang diberikan sedemikian rupa sehingga  $y_i = p_n(x_i)$  untuk  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ . Setelah polinom interpolasi ditemukan, polinom tersebut dapat digunakan untuk menghitung perkiraan nilai  $y$  di sembarang titik di dalam selang  $[x_0, x_n]$ . Persamaan pada interpolasi polinom dapat ditentukan dengan menggunakan metode eliminasi Gauss.

## Regresi Linier Berganda

Regresi linier adalah metode untuk memprediksi nilai selain menggunakan interpolasi polinom. Rumus umum dari regresi linier yang bisa digunakan untuk menghitung regresi linier berganda yaitu  $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_k x_{ki} + \epsilon_i$ . Untuk mendapatkan nilai dari setiap  $\beta$ , dapat digunakan *Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression* yang dapat diselesaikan dengan menggunakan metode eliminasi Gauss, sebagai berikut

$$\begin{array}{ccccccc} nb_0 + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i} & + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i} & + \dots & + b_k \sum_{i=1}^n x_{ki} & = & \sum_{i=1}^n y_i \\ b_0 \sum_{i=1}^n x_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i}^2 & + b_2 \sum_{i=1}^n x_{1i}x_{2i} & + \dots & + b_k \sum_{i=1}^n x_{1i}x_{ki} & = & \sum_{i=1}^n x_{1i}y_i \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_0 \sum_{i=1}^n x_{ki} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{ki}x_{1i} & + b_2 \sum_{i=1}^n x_{ki}x_{2i} & + \dots & + b_k \sum_{i=1}^n x_{ki}^2 & = & \sum_{i=1}^n x_{ki}y_i \end{array}$$

## BAB III: Implementasi Pustaka

### Struktur Class

- CramerMethod
  - public static Matriks solve(Matriks matA, Matriks matB)  
Menyelesaikan SPL dengan metode Cramer:  $\det(\text{matA})/\det(\text{matB})$
- EchelonRedux
  - public static void selfReduce(Matriks m)  
Prosedur antara, mengubah matriks m menjadi matriks eselon baris
  - public static void selfReduce(Matriks m, boolean reduced\_mode)  
Reduksi matriks m menjadi eselon baris atau eselon baris tereduksi jika reduced\_mode = true (default false)
- GaussMethod
  - public static double[] gaussElim(Matriks m)  
Melakukan eliminasi Gauss dan menyimpan hasil dalam array of double
  - public static double[] gaussJordanElim(Matriks m)  
Melakukan eliminasi Gauss-Jordan dan menyimpan hasil dalam array of double
  - public static Matriks augment(Matriks a, Matriks b)  
Menggabungkan matriks a dan b dengan banyak baris yang sama menjadi satu matriks augmented
  - public static String toParamEq(Matriks m)  
Mengembalikan persamaan parametrik dari matriks m, dengan syarat matriks m sudah merupakan matriks eselon baris.
  - public static String printSol(double[] solution, boolean toTxt)  
Mengembalikan string berisi solusi eliminasi Gauss, mengeluarkan ke bentuk string yang dapat disimpan dalam file jika toTxt = true, dan mengeluarkan ke bentuk string yang dapat ditampilkan ke layar jika toTxt = false
  - public static boolean isUniqueSol (Matriks m)  
Mengembalikan true jika matriks eselon baris m mempunyai solusi unik.
  - public static boolean isNoSol(Matriks m)  
Mengembalikan true jika matriks eselon baris m tidak mempunyai solusi
  - public static boolean isManySol(Matriks m)  
Mengembalikan true jika matriks eselon baris m mempunyai solusi banyak.
- InversMethod
  - public static Matriks makeIdentity(int dimension)  
Membuat matriks identitas
  - public static Matriks solve(Matriks a, Matriks b)

- `public static int ZeroUntilMainOne(double[] row)`  
Mengembalikan indeks baris dengan elemen nol terakhir sebelum '1' utama
- `public static Matriks invers(Matriks m)`  
Menentukan invers dari sebuah matriks
- `private static boolean isAllZero(double[] row)`  
Menentukan sebuah list/array/baris apakah semua nilainya nol
- Main
  - `public static void main(String[] args)`  
Program utama - menjalankan keseluruhan program
- Matriks
  - `public Matriks(int nbaris, int nkolom)`  
Konstruktor matriks
  - `public static Matriks makeIdentity(int dimension)`  
Membuat matriks identitas
  - `public void normalize()`  
Mengonversi elemen negatif nol menjadi positif nol pada matriks
  - `public void swapRows(int r1, int r2)`  
Mempertukarkan dua baris pada matriks
  - `public void rowReduce(int r1, int r2, int colidx)`  
Mengurangkan semua elemen pada r1 dengan semua elemen r2 \* multiplier satu per satu dimana multiplier = matriks[r1][colidx]/matriks[r2][colidx]
  - `public String repr()`  
Mengembalikan bentuk string dari sebuah matriks
  - `public String repr_forIO()`  
Mengembalikan bentuk string dari sebuah matriks dalam bentuk GUI
  - `public static Matriks parseMatrix(String text, int NBaris, int NKolom)`  
Membaca matriks dari masukan pengguna pada GUI
  - `public void writeMatriks()`  
Mencetak matriks pada layar (terminal mode)
  - `public String SimpanHasil()`  
Mengembalikan string hasil dari penyelesaian SPL
  - `public Matriks cloneMatriks()`  
Melakukan *hard copy*/kloning matriks (beda pointer, beda referensi) agar operasi pada matriks tidak mempengaruhi matriks awal
  - `public boolean isSquare()`  
Mengembalikan true jika jumlah baris sama dengan jumlah kolom
  - `public boolean isIdentity()`  
Mengembalikan true jika matriks adalah matriks identitas



- public static *Matriks* kali(*Matriks m1*, *Matriks m2*)  
Mengembalikan hasil kali dua matriks
- public *Matriks* scalarMult(double *x*)  
Mengembalikan hasil kali skalar matriks dengan konstanta
- public double determinantReduction()  
Mengembalikan determinan dari sebuah matriks dengan metode reduksi
- public *Matriks* submatrix(int *row*, int *col*)  
Mengembalikan submatriks dari matriks tanpa semua elemen pada baris *row* dan kolom *col*
- public double minor(int *row*, int *col*)  
Mengembalikan minor dari elemen matriks / determinan submatrix
- public *Matriks* cofactor()  
Mengembalikan matriks kofaktor dari sebuah matriks
- public *Matriks* transpose()  
Mengembalikan sebuah matriks hasil transpose dari matriks awal
- public double determinantCofactor()  
Menghasilkan nilai determinan dari sebuah matriks menggunakan metode ekspansi kofaktor
- RegresiLib
  - public static double sigma2Var(double[] *var1*, double[] *var2*)  
Menghasilkan jumlah dari perkalian tiap elemen berindeks sama di *var1* dan *var2* [ $\sum(\text{var1}_i * \text{var2}_i)$ ]
- PolynomialInterpretationLib
  - public static *Matriks* createAugmented(*Matriks coordMatrix*)  
Mengembalikan matriks augmented untuk digunakan dalam perhitungan interpolasi polinomial

## Garis Besar Program

Program ini dibuat untuk:

1. Menyelesaikan sistem persamaan linear (SPL) dengan metode Cramer, Eliminasi Gauss, Eliminasi Gauss-Jordan, dan metode matriks balikan
2. Menentukan determinan dari sebuah matriks dengan metode reduksi dan ekspansi kofaktor
3. Menentukan invers sebuah matriks dengan metode OBE dan matriks adjoin
4. Melakukan interpolasi polinomial dari sejumlah titik
5. Melakukan regresi linear berganda dari sejumlah data eksperimen

## BAB IV: Eksperimen

### 1. Penyelesaian SPL berbentuk matriks $Ax = b$

a.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & -7 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

b.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Kalkulator Matriks

Mencari Solusi SPL dengan N variabel dan N persamaan dengan menggunakan Kaidah Cramer

Masukkan ukuran matriks: 4

Masukkan Matriks A:

```

1 -1 0 0 1
1 1 0 -3 0
2 -1 0 1 -1
-1 2 0 -2 -1

```

Masukkan Matriks B:

```

3
6
5
-1

```

Simpan Hasil

Buka File

Hitung

Hasil: Tidak ada solusi atau solusi tak berhingga karena determinan matriks A adalah 0

c.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kalkulator Matriks

Mencari Solusi SPL dengan N variabel dan N persamaan dengan menggunakan Kaidah Cramer

Masukkan ukuran matriks: 3

Masukkan Matriks A:

```

0 1 0 0 1 0
0 0 0 1 1 0
0 1 0 0 0 1

```

Masukkan Matriks B:

```

2
-1
1

```

Simpan Hasil

Buka File

Hitung

Hasil: Tidak ada solusi atau solusi tak berhingga karena determinan matriks A adalah 0

d.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \dots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \dots & \frac{1}{2n+1} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

*H adalah matriks Hilbert. Cobakan untuk  $n = 6$  dan  $n = 10$ .*

Kalkulator Matriks

Mencari Solusi SPL dengan N variabel dan N persamaan dengan menggunakan Kaidah Cramer

Masukkan ukuran matriks:

6

Masukkan Matriks A:

1 0.5 0.3333 0.25 0.2 0.1667  
0.5 0.3333 0.25 0.2 0.1667 0.1429  
0.3333 0.25 0.2 0.1667 0.1429 0.125  
0.25 0.2 0.1667 0.1429 0.125 0.1111  
0.2 0.1667 0.1429 0.125 0.1111 0.1  
0.1667 0.1429 0.125 0.1111 0.1 0.0909

Masukkan Matriks B:

1  
0  
0  
0  
0  
0

Simpan Hasil

Buka File

Hitung

Hasil:

x1:9.59650162519171  
x2:-33.54912532916023  
x3:32.4250948998765  
x4:-210.50760018407124  
x5:522.6861557647433  
x6:-327.17189043434564

Solusi Matriks Hilbert Untuk  $n=6$

Kalkulator Matriks

Mencari Solusi SPL dengan Metode Matriks Balikan dengan format  $x = \text{invers}(A) \cdot B$

Masukkan ukuran matriks: 10

Masukkan Matriks A:

```

1 0.5 0.3333 0.25 0.2 0.1667 0.1429 0.125 0.1111 0.1
0.5 0.3333 0.25 0.2 0.1667 0.1429 0.125 0.1111 0.1 0.0909
0.3333 0.25 0.2 0.1667 0.1429 0.125 0.1111 0.1 0.0909 0.0833
0.25 0.2 0.1667 0.1429 0.125 0.1111 0.1 0.0909 0.0833 0.077
0.2 0.1667 0.1429 0.125 0.1111 0.1 0.0909 0.0833 0.077 0.0714
0.1667 0.1429 0.125 0.1111 0.1 0.0909 0.0833 0.077 0.0714 0.0667
0.1429 0.125 0.1111 0.1 0.0909 0.0833 0.077 0.0714 0.0667 0.0625
0.125 0.1111 0.1 0.0909 0.0833 0.077 0.0714 0.0667 0.0625 0.0588
0.1111 0.1 0.0909 0.0833 0.077 0.0714 0.0667 0.0625 0.0588 0.056
0.1 0.0909 0.0833 0.077 0.0714 0.0667 0.0625 0.0588 0.056 0.0526

```

Masukkan Matriks B:

```

1
0
0
0
0
0
0
0
0
0

```

Simpan Hasil

Buka File

Hitung

Hasil:

```

x1:27.87022602234751
x2:-293.7498247447388
x3:725.5726427715211
x4:-352.0382016728933
x5:-114.70313525436687
x6:-393.33744280296355
x7:94.6558941078167
x8:352.3929035610594
x9:46.09835945589638
x10:-80.0611425005994

```

Solusi Matriks Hilbert Untuk  $n=10$

## 2. Penyelesaian SPL berbentuk matriks augmented

a.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Kalkulator Matriks

Mencari Solusi SPL dengan Metode Matriks Balikan dengan format  $x = \text{invers}(A) \cdot B$

Masukkan ukuran matriks:

Masukkan Matriks A:

```
1 -1 2 -1
2 1 -2 -2
-1 2 -4 1
3 0 0 -3
```

Masukkan Matriks B:

```
-1
-2
1
-3
```

Simpan Hasil   Buka File   Hitung

Hasil: Tidak ada solusi atau solusi tak berhingga karena determinan matriks A adalah 0

b.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 6 \\ -4 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Eliminasi Gauss**

Mencari Solusi SPL dengan menggunakan Eliminasi Gauss

Masukkan ukuran baris matriks:  Masukkan ukuran kolom matriks:

Masukkan Matriks A:

```

2 0 8 0
0 1 0 4
-4 0 6 0
0 -2 0 3
2 0 -4 0
0 1 0 -2

```

Masukkan Matriks B:

```

8
6
6
-1
-4
0

```

Simpan Hasil      Buka File      Hitung

Hasil:      SPL memiliki persamaan parametrik.  $x_1, x_2, x_3, x_4, \epsilon \in \mathbb{R}$

### 3. Penyelesaian SPL berbentuk kumpulan persamaan

$$\begin{aligned} \text{a. } 8x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 - 2x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2 \\ x_1 + 6x_3 + 4x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Kalkulator Matriks

Mencari Solusi SPL dengan Metode Matriks Balikan dengan format  $x = \text{invers}(A) \cdot B$

Masukkan ukuran matriks:

Masukkan Matriks A:

8	1	3	2
2	9	-1	-2
1	3	2	-1
1	0	6	4

Masukkan Matriks B:

0
1
2
3

Simpan Hasil      Buka File      Hitung

Hasil:

x1:-0.2243243243243244  
x2:0.1824324324324325  
x3:0.7094594594594594  
x4:-0.2581081081081079

b.

$$\begin{aligned} x_7 + x_8 + x_9 &= 13.00 \\ x_4 + x_5 + x_6 &= 15.00 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 8.00 \\ 0.04289(x_3 + x_5 + x_7) + 0.75(x_6 + x_8) + 0.61396x_9 &= 14.79 \\ 0.91421(x_3 + x_5 + x_7) + 0.25(x_2 + x_4 + x_6 + x_8) &= 14.31 \\ 0.04289(x_3 + x_5 + x_7) + 0.75(x_2 + x_4) + 0.61396x_1 &= 3.81 \\ x_3 + x_6 + x_9 &= 18.00 \\ x_2 + x_5 + x_8 &= 12.00 \\ x_1 + x_4 + x_7 &= 6.00 \\ 0.04289(x_1 + x_5 + x_9) + 0.75(x_2 + x_6) + 0.61396x_3 &= 10.51 \\ 0.91421(x_1 + x_5 + x_9) + 0.25(x_2 + x_4 + x_6 + x_8) &= 16.13 \\ 0.04289(x_1 + x_5 + x_9) + 0.75(x_4 + x_8) + 0.61396x_7 &= 7.04 \end{aligned}$$



**Eliminasi Gauss**

Mencari Solusi SPL dengan menggunakan Eliminasi Gauss

Masukkan ukuran baris matriks:  Masukkan ukuran kolom matriks:

Masukkan Matriks A:

```

0 0 0 0 0 1 1 1
0 0 0 1 1 1 0 0 0
1 1 1 0 0 0 0 0 0
0 0 0.04289 0 0.04289 0.75 0.04289 0.75 0.61396
0 0.25 0.91421 0.25 0.91421 0.25 0.91421 0.25 0
0.61396 0.75 0.04289 0.75 0.04289 0 0.04289 0 0
0 0 1 0 0 1 0 0 1
0 1 0 0 1 0 0 1 0
1 0 0 1 0 0 1 0 0
0.04289 0.75 0.61396 0 0.04289 0.75 0 0 0.04289
0.91421 0.25 0 0.25 0.91421 0.25 0 0.25 0.91421
0.04289 0 0 0.75 0.04289 0 0.61396 0.75 0.04289

```

Masukkan Matriks B:

```

13
15
8
14.79
14.31
3.81
18
12
6
10.51
16.13
7.04

```

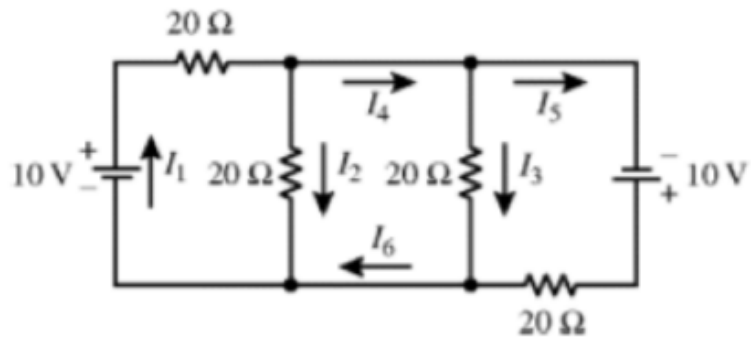
Simpan Hasil

Buka File

Hitung

Hasil:

#### 4. Studi kasus SPL: rangkaian listrik



Kalkulator Matriks

Mencari Solusi SPL dengan N variabel dan N persamaan dengan menggunakan Kaidah Cramer

Masukkan ukuran matriks: 6

Masukkan Matriks A:

```

40 0 0 -20 0 0
-20 0 0 40 -20 0
0 0 0 -20 40 0
-1 1 0 1 0 0
0 0 1 -1 1 0
0 0 0 -1 0 1

```

Masukkan Matriks B:

```

10
0
10
0
0
0

```

Simpan Hasil

Buka File

Hitung

Hasil:

```

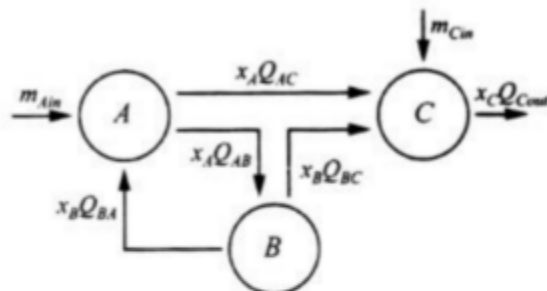
x1:0.5
x2:0.0
x3:0.0
x4:0.5
x5:0.5
x6:0.5

```

Solusi Permasalahan Rangkaian Elektrik

## 5. Studi kasus SPL: sistem reaktor

Lihatlah sistem reaktor pada gambar berikut



Dengan laju volume  $Q$  dalam  $\text{m}^3/\text{s}$  dan input massa  $m_{\text{in}}$  dalam  $\text{mg}/\text{s}$ . Konservasi massa pada tiap inti reaktor adalah sebagai berikut:

$$\text{A: } m_{A_{\text{in}}} + Q_{BA}x_B - Q_{AB}x_A - Q_{AC}x_A = 0$$

$$\text{B: } Q_{AB}x_A - Q_{BA}x_B - Q_{BC}x_B = 0$$

$$\text{C: } m_{C_{\text{in}}} + Q_{AC}x_A + Q_{BC}x_B - Q_{C_{\text{out}}}x_C = 0$$

Tentukan solusi  $x_A$ ,  $x_B$ ,  $x_C$  dengan menggunakan parameter berikut :  $Q_{AB} = 40$ ,  $Q_{AC} = 80$ ,  $Q_{BA} = 60$ ,  $Q_{BC} = 20$  dan  $Q_{C_{\text{out}}} = 150 \text{ m}^3/\text{s}$  dan  $m_{A_{\text{in}}} = 1300$  dan  $m_{C_{\text{in}}} = 200 \text{ mg}/\text{s}$ .

Kalkulator Matriks

Mencari Solusi SPL dengan N variabel dan N persamaan dengan menggunakan Kaidah Cramer

Masukkan ukuran matriks:

Masukkan Matriks A:

-120	60	0
40	-80	0
80	20	-150

Masukkan Matriks B:

-1300
0
-200

Simpan Hasil      Buka File      Hitung

Hasil:

x1:14.444444444444445  
x2:7.222222222222222  
x3:10.0

Solusi dari permasalahan sistem reaktor

## 6. Studi Kasus Interpolasi

### Subsoal a

- a. Gunakan tabel di bawah ini untuk mencari polinom interpolasi dari pasangan titik-titik yang terdapat dalam tabel. Program menerima masukan nilai  $x$  yang akan dicari nilai fungsi  $f(x)$ .

$x$	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3
$f(x)$	0.003	0.067	0.148	0.248	0.370	0.518	0.697

Lakukan pengujian pada nilai-nilai default berikut:

$$x = 0.2 \quad f(x) = ?$$

$$x = 0.55 \quad f(x) = ?$$

$$x = 0.85 \quad f(x) = ?$$

$$x = 1.28 \quad f(x) = ?$$

Interpolasi Polinom

Interpolasi Polinom dengan Regresi Linier

Masukkan jumlah titik:

7

Daftar Titik:

0.1 0.003  
0.3 0.067  
0.5 0.148  
0.7 0.248  
0.9 0.370  
1.1 0.518  
1.3 0.697

Buka File

Buat Persamaan

$p(x) = + 0.2400x + 0.1974x^2 + 0.0260x^4$

Simpan Hasil

Hitung nilai y untuk x =

0.2

Hitung Nilai Y

$p(0.2000) = 0.0330$

Interpolasi polinom untuk  $x = 0.2$

Interpolasi Polinom

Interpolasi Polinom dengan Regresi Linier

Masukkan jumlah titik:

7

Daftar Titik:

0.1 0.003  
0.3 0.067  
0.5 0.148  
0.7 0.248  
0.9 0.370  
1.1 0.518  
1.3 0.697

Buka File

Buat Persamaan

$p(x) = + 0.2400x + 0.1974x^2 + 0.0260x^4$

Simpan Hasil

Hitung nilai y untuk x =

0.55

Hitung Nilai Y

$p(0.2000) = 0.0330$

Interpolasi polinom untuk  $x = 0.55$

Interpolasi Polinom

Interpolasi Polinom dengan Regresi Linier

Masukkan jumlah titik:

7

Daftar Titik:

0.1 0.003  
0.3 0.067  
0.5 0.148  
0.7 0.248  
0.9 0.370  
1.1 0.518  
1.3 0.697

Buka File

Buat Persamaan

$p(x) = + 0.2400x + 0.1974x^2 + 0.0260x^4$

Simpan Hasil

Hitung nilai y untuk x =

0.85

Hitung Nilai Y

$p(0.8500) = 0.3372$

Interpolasi polinom untuk  $x = 0.85$

Interpolasi Polinom

Interpolasi Polinom dengan Regresi Linier

Masukkan jumlah titik:

7

Daftar Titik:

0.1 0.003  
0.3 0.067  
0.5 0.148  
0.7 0.248  
0.9 0.370  
1.1 0.518  
1.3 0.697

Buka File

Buat Persamaan

$p(x) = + 0.2400x + 0.1974x^2 + 0.0260x^4$

Simpan Hasil

Hitung nilai y untuk x =

0.85

Hitung Nilai Y

$p(0.8500) = 0.3372$

Interpolasi polinom untuk  $x = 1.28$

### Subsoal b

- b. Jumlah kasus positif baru Covid-19 di Indonesia semakin fluktuatif dari hari ke hari. Di bawah ini diperlihatkan jumlah kasus baru Covid-19 di Indonesia mulai dari tanggal 17 Juni 2021 hingga 31 Agustus 2021:

Tanggal	Tanggal (desimal)	Jumlah Kasus Baru
17/06/2021	6,567	12.624
30/06/2021	7	21.807
08/07/2021	7,258	38.391
14/07/2021	7,451	54.517
17/07/2021	7,548	51.952
26/07/2021	7,839	28.228
05/08/2021	8,161	35.764
15/08/2021	8,484	20.813
22/08/2021	8,709	12.408
31/08/2021	9	10.534

Tanggal (desimal) adalah tanggal yang sudah diolah ke dalam bentuk desimal 3 angka di belakang koma dengan memanfaatkan perhitungan sebagai berikut:

$$\text{tanggal(desimal)} = \text{bulan} + (\text{tanggal} / \text{jumlah hari pada bulan tersebut})$$

Sebagai **contoh**, untuk tanggal 17/06/2021 (dibaca: 17 Juni 2021) diperoleh tanggal(desimal) sebagai berikut:

$$\text{Tanggal(desimal)} = 6 + (17/30) = 6,567$$

Gunakanlah data di atas dengan memanfaatkan **polinom interpolasi** untuk melakukan prediksi jumlah kasus baru Covid-19 pada tanggal-tanggal berikut:

- 16/07/2021
- 10/08/2021
- 05/09/2021
- beserta masukan user lainnya berupa **tanggal (desimal) yang sudah diolah** dengan asumsi prediksi selalu dilakukan untuk tahun 2021.

Interpolasi Polinom

Interpolasi Polinom dengan Regresi Linier

Masukkan jumlah titik:

10

Daftar Titik:

6.567 12624  
7 21807  
7.258 38391  
7.451 54517  
7.548 51952  
7.839 28228  
8.161 35764  
8.484 20813  
8.709 12408  
9 10534

Buka File

Buat Persamaan

$$p(x) = 7187066071657.8670 + 5334203055240.1950x^2 + 368550807175.5339x^4 + 4695806315.4288x^6 + 9372849.2391x^8$$

Simpan Hasil

Hitung nilai y untuk x =

7.5333

Hitung Nilai Y

$p(7.5333) = 52760.3633$

Prediksi tanggal 16/07/2021 ( $7 + (16/30) = 7.5333$ )

Interpolasi Polinom

Interpolasi Polinom dengan Regresi Linier

Masukkan jumlah titik:

10

Daftar Titik:

6.567 12624  
7 21807  
7.258 38391  
7.451 54517  
7.548 51952  
7.839 28228  
8.161 35764  
8.484 20813  
8.709 12408  
9 10534

Buka File

Buat Persamaan

$$p(x) = 7187066071657.8670 + 5334203055240.1950x^2 + 368550807175.5339x^4 + 4695806315.4288x^6 + 9372849.2391x^8$$

Simpan Hasil

Hitung nilai y untuk x =

8.3333

Hitung Nilai Y

$p(7.5333) = 52760.3633$

Prediksi tanggal 10/08/2021 ( $8 + (10/30) = 8.3333$ )

Interpolasi Polinom

Interpolasi Polinom dengan Regresi Linier

Masukkan jumlah titik:

10

Daftar Titik:

6.567 12624  
7 21807  
7.258 38391  
7.451 54517  
7.548 51952  
7.839 28228  
8.161 35764  
8.484 20813  
8.709 12408  
9 10534

Buka File

Buat Persamaan

$$p(x) = 7187066071657.8670 + 5334203055240.1950x^2 + 368550807175.5339x^4 + 4695806315.4288x^6 + 9372849.2391x^8$$

Simpan Hasil

Hitung nilai y untuk x =

9.5

Hitung Nilai Y

$p(9.5000) = -13723501.8594$

Prediksi tanggal 15/09/2021 ( $9 + (15/30) = 9.5$ )

Interpolasi Polinom

Interpolasi Polinom dengan Regresi Linier

Masukkan jumlah titik:

10

Daftar Titik:

6.567 12624  
7 21807  
7.258 38391  
7.451 54517  
7.548 51952  
7.839 28228  
8.161 35764  
8.484 20813  
8.709 12408  
9 10534

Buka File

Buat Persamaan

$$p(x) = 7187066071657.8670 + 5334203055240.1950x^2 + 368550807175.5339x^4 + 4695806315.4288x^6 + 9372849.2391x^8$$

Simpan Hasil

Hitung nilai y untuk x =

10

Hitung Nilai Y

$p(10.0000) = -216931765.9375$

Prediksi tanggal 30/09/2021 ( $9 + (30/30) = 10$ )



### Subsoal c

c. Sederhanakan fungsi

$$f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{e^x + x}$$

dengan polinom interpolasi derajat  $n$  di dalam selang  $[0, 2]$ . Sebagai contoh, jika  $n = 5$ , maka titik-titik  $x$  yang diambil di dalam selang  $[0, 2]$  berjarak  $h = (2 - 0)/5 = 0.4$ .

The screenshot shows a software window titled "Interpolasi Polinom" with a subtitle "Interpolasi Polinom dengan Regresi Linier". It contains the following elements:

- A text box labeled "Masukkan jumlah titik:" with the value "5" entered.
- A list box labeled "Daftar Titik:" containing the following pairs of (x, y) values:  
0.4 0.418  
0.8 0.507  
1.2 0.561  
1.6 0.583  
2.0 0.576
- Two buttons: "Buka File" and "Buat Persamaan".
- A text box displaying the polynomial equation:  $p(x) = 0.2910 + 0.3675x + 0.0078x^3$ .
- A button labeled "Simpan Hasil".
- A text box labeled "Hitung nilai y untuk x =" with the value "0.4" entered.
- A button labeled "Hitung Nilai Y".
- A text box at the bottom showing the result:  $p(0.4000) = 0.4180$ .

$f(x)$  pada  $x = 0.4$  dengan interpolasi derajat 5

This screenshot is identical to the one above, showing the same software interface. The only difference is the value entered in the "Hitung nilai y untuk x =" text box, which is now "0.8". The "Hitung Nilai Y" button has been clicked, and the result at the bottom now shows:  $p(0.8000) = 0.5070$ .

$f(x)$  pada  $x = 0.8$  dengan interpolasi derajat 5

Interpolasi Polinom

Interpolasi Polinom dengan Regresi Linier

Masukkan jumlah titik:

5

Daftar Titik:

0.4 0.418  
0.8 0.507  
1.2 0.561  
1.6 0.583  
2 0.576

Buka File

Buat Persamaan

$p(x) = 0.2910 + 0.3675x + 0.0078x^3$

Simpan Hasil

Hitung nilai y untuk x =

1.2

Hitung Nilai Y

$p(1.2000) = 0.5610$

$f(x)$  pada  $x = 1.2$  dengan interpolasi derajat 5

Interpolasi Polinom

Interpolasi Polinom dengan Regresi Linier

Masukkan jumlah titik:

5

Daftar Titik:

0.4 0.418  
0.8 0.507  
1.2 0.561  
1.6 0.583  
2 0.576

Buka File

Buat Persamaan

$p(x) = 0.2910 + 0.3675x + 0.0078x^3$

Simpan Hasil

Hitung nilai y untuk x =

1.6

Hitung Nilai Y

$p(1.2000) = 0.5610$

$f(x)$  pada  $x = 1.6$  dengan interpolasi derajat 5

Interpolasi Polinom

Interpolasi Polinom dengan Regresi Linier

Masukkan jumlah titik:

5

Daftar Titik:

0.4 0.418  
0.8 0.507  
1.2 0.561  
1.6 0.583  
2.0 0.576

Buka File

Buat Persamaan

$p(x) = 0.2910 + 0.3675x + 0.0078x^3$

Simpan Hasil

Hitung nilai y untuk x =

2

Hitung Nilai Y

$p(2.0000) = 0.5760$

$f(x)$  pada  $x = 2$  dengan interpolasi derajat 5

## 7. Studi Kasus Regresi Linier Berganda

Diberikan sekumpulan data sesuai pada tabel berikut ini.

Table 12.1: Data for Example 12.1

Nitrous Oxide, $y$	Humidity, $x_1$	Temp., $x_2$	Pressure, $x_3$	Nitrous Oxide, $y$	Humidity, $x_1$	Temp., $x_2$	Pressure, $x_3$
0.90	72.4	76.3	29.18	1.07	23.2	76.8	29.38
0.91	41.6	70.3	29.35	0.94	47.4	86.6	29.35
0.96	34.3	77.1	29.24	1.10	31.5	76.9	29.63
0.89	35.1	68.0	29.27	1.10	10.6	86.3	29.56
1.00	10.7	79.0	29.78	1.10	11.2	86.0	29.48
1.10	12.9	67.4	29.39	0.91	73.3	76.3	29.40
1.15	8.3	66.8	29.69	0.87	75.4	77.9	29.28
1.03	20.1	76.9	29.48	0.78	96.6	78.7	29.29
0.77	72.2	77.7	29.09	0.82	107.4	86.8	29.03
1.07	24.0	67.7	29.60	0.95	54.9	70.9	29.37

Source: Charles T. Hare, "Light-Duty Diesel Emission Correction Factors for Ambient Conditions," EPA-600/2-77-116. U.S. Environmental Protection Agency.

Gunakan *Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression* untuk mendapatkan regresi linear berganda dari data pada tabel di atas, kemudian estimasi nilai Nitrous Oxide apabila Humidity bernilai 50%, temperatur 76°F, dan tekanan udara sebesar 29.30.

Dari data-data tersebut, apabila diterapkan *Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression*, maka diperoleh sistem persamaan linear sebagai berikut.

$$20b_0 + 863.1b_1 + 1530.4b_2 + 587.84b_3 = 19.42$$

$$863.1b_0 + 54876.89b_1 + 67000.09b_2 + 25283.395b_3 = 779.477$$

$$1530.4b_0 + 67000.09b_1 + 117912.32b_2 + 44976.867b_3 = 1483.437$$

$$587.84b_0 + 25283.395b_1 + 44976.867b_2 + 17278.5086b_3 = 571.1219$$

Regresi Linear Berganda

Regresi Linear Berganda dengan Persamaan Estimasi Normal

Banyak peubah: 3 Banyak data: 20

Petunjuk: Masukkan data x1, x2, ..., xn, y sampai semua data sudah terisi

Masukkan data, atau baca file

Masukkan data yang ingin dicari nilainya:

Format: x1 x2 .. xn

72.4 76.3 29.18 0.90  
 41.6 70.3 29.35 0.91  
 34.3 77.1 29.24 0.96  
 35.1 68.0 29.27 0.89  
 10.7 79.0 29.78 1.00  
 12.9 67.4 29.39 1.10  
 8.3 66.8 29.69 1.15  
 20.1 76.9 29.48 1.03  
 72.2 77.7 29.09 0.77  
 24.0 67.7 29.60 1.07  
 23.2 76.8 29.38 1.07  
 47.4 86.6 29.35 0.94  
 31.5 76.9 29.63 1.10  
 10.6 86.3 29.56 1.10  
 11.2 86.0 29.48 1.10  
 73.3 76.3 29.40 0.91  
 75.4 77.9 29.28 0.87  
 96.6 78.7 29.29 0.78  
 107.4 86.8 29.03 0.82  
 54.9 70.9 29.37 0.95

Hitung Regresi

SPL yang didapat:  
 $y = -3.5077781408836017 - 0.0026249907458790744x_1 + 7.989410472200864E-4x_2 + 0.1541550301985808x_3$

Solusi:

Simpan...

## BAB V: Kesimpulan, Saran, dan Refleksi

### Kesimpulan

Dengan menggunakan pemrograman, beberapa persoalan aljabar linier dan geometri, terutama yang bersifat repetitif, dapat diselesaikan. Bagi program, menghitung angka yang banyak, besar, dan repetitif bukan masalah, sehingga pembuatan program dapat memudahkan berbagai persoalan matematika. Modularitas program juga sangat penting agar program berjalan dengan efektif dan memudahkan pengembangan bersama-sama.

Secara keseluruhan, program kami dapat berjalan dengan baik. Meskipun demikian, terdapat kekurangan dalam kasus eliminasi Gauss dan Gauss-Jordan, di mana kami belum dapat membuat persamaan parametrik dalam eliminasi Gauss dengan banyak solusi berjalan dengan baik.

### **Saran**

Untuk kelangsungan pengembangan program ini, program ini bisa diperluas fungsionalitasnya seperti membuat tab khusus untuk menyelesaikan permasalahan kelistrikan, reaktor pabrik, prediksi menggunakan regresi beserta grafiknya, dsb.

### **Refleksi**

Dari tugas ini kami belajar tentang cara membuat algoritma yang bisa menyelesaikan berbagai permasalahan yang apabila diselesaikan secara manual akan menjadi sangat repetitif.

Kami juga belajar cara beradaptasi dengan cepat karena tugas besar ini menggunakan bahasa Java yang tergolong baru bagi kami dalam menggunakannya sehingga bisa dibilang pembuatan tubes ini dimulai dari nol.

Kedepannya juga mungkin kami akan lebih strict dalam membagi tugas serta membuat semacam “milestone” agar pemantauan progressnya bisa lebih detail.

## DAFTAR REFERENSI

- Materi Kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri oleh Rinaldi Munir dan tim  
<https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2021-2022/algeo21-22.htm>
- Gireesh Sundaram - Building Linear Regression (Least Squares) with Linear Algebra  
<https://towardsdatascience.com/building-linear-regression-least-squares-with-linear-algebra-2adf071dd5dd>
- Statmat - Contoh Soal Pembahasan Regresi Linier Berganda  
<https://www.statmat.net/regresi-linier-berganda/>
- JetBrains IntelliJ IDEA Documentation - Compile and build applications with IntelliJ IDEA  
<https://www.jetbrains.com/help/idea/compiling-applications.html>
- Dokumentasi Javax Swing API  
<https://docs.oracle.com/javase/7/docs/api/javax/swing/>