

Metody numeryczne - NUM5

Dawid Bytys gr. 3

22 listopada 2022

1 Wstęp

Metody iteracyjne (przybliżone) służą do obliczania przybliżonych wartości pierwiastków układu równań liniowych za pomocą kolejnych aproksymacji. W tym celu należy przyjąć pewien dowolny wektor $x^{(0)}$ jako rozwiązanie początkowe (*ang. initial guess*) i według określonego schematu tworzyć kolejno ciąg wektorów $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \dots$ tak, aby wektor $x^{(k+1)}$ lepiej przybliżał rozwiązanie dokładne od wektora $x^{(k)}$. Jedną z takich metod jest **Metoda Jacobiego**. Opiszmy ją na przykładzie.

Niech $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ będzie układem n równań liniowych takich, że:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Wtedy macierz A może zostać rozłożona na sumę trzech macierzy - diagonalnej, trójkątnej dolnej i trójkątnej górnej:

$$A = D + L + U, \text{ gdzie } D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie jest uzyskiwane iteracyjnie korzystając z następującej formuły:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = D^{-1}(\mathbf{b} - (L + U)\mathbf{x}^{(k)}),$$

gdzie $x^{(k)}$ jest k -tą iteracją obliczania x , natomiast $x^{(k+1)}$ jest $(k+1)$ -tą iteracją obliczania x . Formuła umożliwia obliczenie i -tego rozwiązania:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Obliczenie $x_i^{(k+1)}$ wymaga każdego elementu z $x^{(k)}$ oprócz samego siebie. W przeciwieństwie do **Metody Gaussa-Seidel'a**, nie możemy nadpisać $x_i^{(k)}$ poprzez $x_i^{(k+1)}$, ponieważ wartość ta jest potrzebna do dalszych obliczeń. Zaletą drugiej metody jest fakt, iż do przechowywania rozwiązań, wystarczy nam tylko jeden wektor, natomiast w tej pierwszej potrzebujemy minimalnie dwóch o wielkości n . Procedura jest na ogół kontynuowana, aż zmiany dokonane przez iterację będą poniżej pewnej tolerancji, np. dla $\varepsilon = 10^{-6}$. Formułą dla obliczenia przybliżenia rozwiązania dla metody Gaussa-Seidel'a możemy zdefiniować w następujący sposób:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = L^{-1}(\mathbf{b} - U\mathbf{x}^{(k)}).$$

Jednakże, korzystając z macierzy L , elementy $x^{(k+1)}$ mogą zostać obliczone stosując *forward-substitution*:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

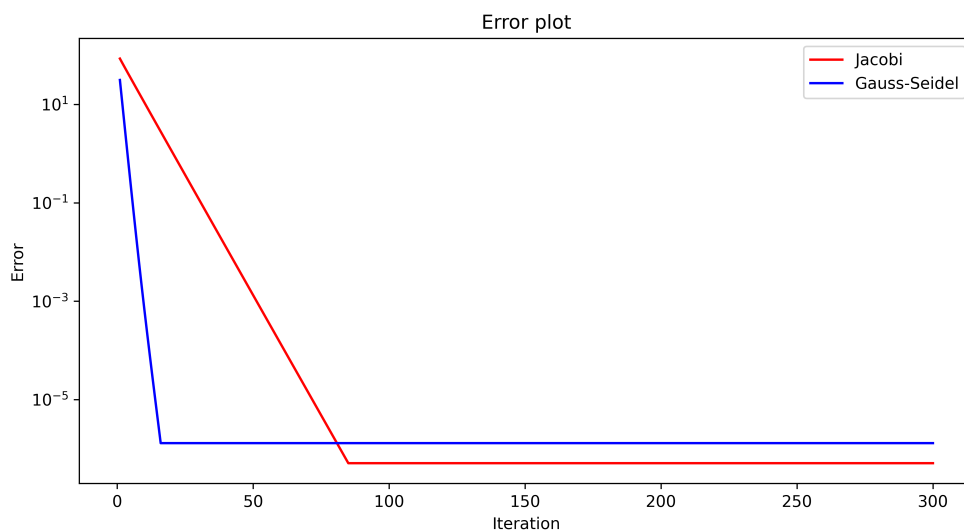
2 Wyniki

Ćwiczenie opiera się na rozwiązaniu układu równań liniowych $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ o wielkości N i porównaniu wyników z dokładnym rozwiązaniem.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0.2 & & & & \\ 1 & 3 & 1 & 0.2 & & & \\ 0.2 & 1 & 3 & 1 & 0.2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0.2 & 1 & 3 & 1 & 0.2 \\ & & & 0.2 & 1 & 3 & 1 \\ & & & & 0.2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ (N-2) \\ (N-1) \\ N \end{bmatrix}.$$

Wtedy x_1, x_2, x_3 są kolejno rozwiązaniami uzyskanymi, korzystając z metod Jacobie'go, Gaussa-Seidel'a oraz algorytmu, którego wynik jest wynikiem dokładnym w 1000 iteracjach:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0.17126009370908257 \\ 0.3752397397090892 \\ 0.5548999286924846 \\ \vdots \\ 18.031154086014798 \\ 16.956038075687328 \\ 26.479243715885588 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 0.1712600803626909 \\ 0.3752397283920805 \\ 0.5548999155332801 \\ \vdots \\ 18.031154070596113 \\ 16.95603806077885 \\ 26.479243708367306 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 0.1712600924915493 \\ 0.3752397374515707 \\ 0.5548999253689071 \\ \vdots \\ 18.031154065721086 \\ 16.956038061792974 \\ 26.479243708354268 \end{bmatrix}.$$



Rysunek 1: Porównanie różnicy pomiędzy dokładnym rozwiązaniem, a rozwiązaniem uzyskanym stosując poszczególną metodę w N -tej iteracji. Tolerancja jaką przyjąłem wynosi 10^{-6} .

3 Podsumowanie

Niesłychanie ważne jest znanie struktury macierzy, ponieważ dobranie odpowiedniego algorytmu rozwiązywania układów skończonych równań liniowych pozwala nam w diametralny sposób przyspieszyć obliczenia. Porównując metody Jacob’iego i Gaussa-Seidel’a zauważamy, że błąd obliczeń zbiega szybciej dla tej drugiej metody, co implikuje uzyskanie dokładniejszego rozwiązania w mniejszej ilości iteracji. Metody iteracyjne są przydatne wtedy, gdy faktoryzacja wydaje się zbyt kosztowna, a nie potrzebujemy dokładnego rozwiązania.