Metody numeryczne - NUM1

Dawid Bytys gr. 1

5 października 2022

1 Wstęp

Podczas wykonywania obliczeń numerycznych, możemy spotkać się z kilkoma rodzajami błędów. Są to:

- **Błędy grube** - pomyłki z winy człowieka, które w teorii można wyeliminowac, lecz gdy kod jest liczony w tysiącach linii, jest to praktycznie niemożliwe. Zalecana jest niezwykła ostrożność i staranność podczas pisania algorytmów.
- **Błędy algorytmu/metody (obcięcia)** - błędy wynikające z tego, że do uzyskania dokładnego rozwiązania, potrzebujemy wykonać nieskończenie wiele obliczeń. Jeżeli chcemy, aby nasz program był wydajny, nie możemy sobie na to pozwolić i musimy kiedyś skończyć liczenie.
- **Błędy zaokrągleń** - pomyłki wynikające z tego, że komputer nie jest "idealny", toteż nie jest w stanie reprezentować wszystkich liczb dokładnie, a zatem obliczenia wykonywane są ze skończoną precyzją (dokładnością). W znacznej większości problemów, nie jesteśmy w stanie ich wyeliminować.

Przykładem problemu numerycznego, w którym napotykamy się na **błąd zaokrąglenia** jest liczenie wartości pochodnej w punkcie. Rozpatrujemy dwie metody aproksymacji oczekiwanego wyniku definiując tzw. **pochodne dyskretne**:

$$\text{(A)}\quad f'(x) \approx D_h f(x) = \tfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

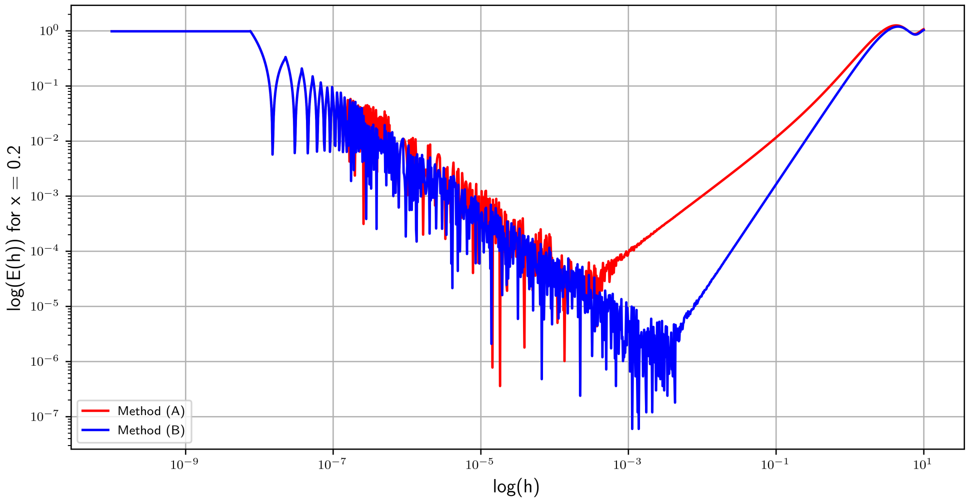
$$\text{(B)}\quad f'(x) \approx D_h f(x) = \tfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

Pierwszą rzeczą, jaka przychodzi nam do głowy, to jaką wartość h należy dobrać, aby uzyskać możliwie jak najmniejszy błąd. Oczywistym się wydaje, że jak najmniejszą, lecz czy takie podejście zagwarantuje nam poprawny wynik? Gdzie zatem leży "haczyk"? Otóż komputer jest tylko naiwną maszyną, która ma pewne ograniczenia i takim ograniczeniem jest znalezienie optymalnej wartości parametru h, dla której uzyskamy możliwie jak najmniejszy błąd. Jest to konieczne ze względu na to, iż komputer nie jest w stanie reprezentować liczb relatywnie bliskich zeru, ponieważ bezmyślnie zaokrągli je właśnie do zera.

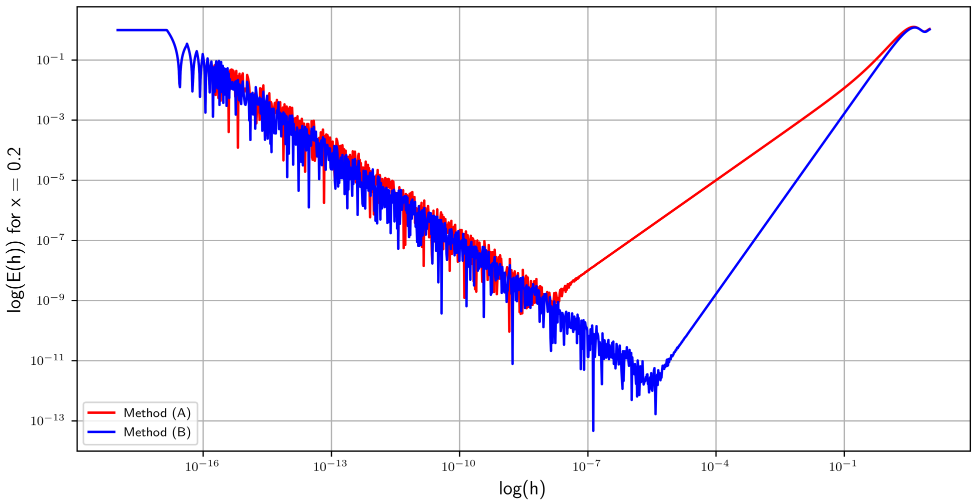
2 Wyniki

Zobaczmy jak nasz błąd zależy od tego, jaką wartość h wybraliśmy dla funkcji $f(x) = sin(x)$ w punkcie $x_0 = 0.2$, jakiej metody aproksymacji użyliśmy oraz czy korzystamy z pojedynczej, czy podwójnej precyzji reprezentacji liczb. Skorzystamy ze wzoru:

$$E = |D_h f(x) - f'(x)|$$



Rysunek 1: $E(h)$ - zależność błędu E od wyboru h w skali logarytmicznej dla `float32`



Rysunek 2: $E(h)$ - zależność błędu E od wyboru h w skali logarytmicznej dla `float64`

Analizując wykresy możemy zauważyć, że gdy h jest zbyt małe, widoczny jest szum obarczony coraz to wiekszym błędem pod wpływem zmniejszania h, zaś gdy wartość jest zbyt duża, mamy liniową progresję. Widzimy również, że metoda (B) jest bardziej efektywna w porównaniu z metodą (A).

3 Podsumowanie

Podsumowując wyniki, zauważamy, że podwojenie precyzji przy reprezentacji liczb, pozwoliło nam uzyskać mniejszy błąd. Widzimy też, że metoda jakiej używamy do liczenia ma również ogromne znaczenie. Zatem nieobojętnym jest dobór optymalnej wartości h w celu uzyskania poprawnych wyników. Czasem to co się wydaje być oczywistym, nie zawsze jest dobre. Miejmy to na uwadze przy skomplikowanych operacjach liczbowych. Liczmy się również z tym, że błędów nigdy się nie pozbędziemy.