Metody numeryczne - NUM2

Dawid Bytys gr. 3

17 października 2022

1 Wstęp

Niech $\varphi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ będzie pewną funkcją odpowiednio wiele razy różniczkowalną i niech $x \in \mathbb{R}^n$.

Mówimy, że zagadnienie obliczenia $\varphi(x)$ jest numerycznie **dobrze uwarunkowane**, jeżeli niewielkie względne zmiany danych dają niewielkie względne zmiany rozwiązania. Zagadnienia, które nie są numerycznie dobrze uwarunkowane, nazywamy **źle uwarunkowanymi**.

Rozpatrzmy dwie macierze:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 2.34332898 & -0.11253278 & -0.01485349 & 0.33316649 & 0.71319625 \\ -0.11253278 & 1.67773628 & -0.32678856 & -0.31118836 & -0.43342631 \\ -0.01485349 & -0.32678856 & 2.66011353 & 0.85462464 & 0.16698798 \\ 0.33316649 & -0.31118836 & 0.85462464 & 1.54788582 & 0.32269197 \\ 0.71319625 & -0.43342631 & 0.16698798 & 0.32269197 & 3.27093538 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 2.34065520 & -0.05353743 & 0.00237792 & 0.32944082 & 0.72776588 \\ -0.05353743 & 0.37604149 & -0.70698859 & -0.22898376 & -0.75489595 \\ 0.00237792 & -0.70698859 & 2.54906441 & 0.87863502 & 0.07309288 \\ 0.32944082 & -0.22898376 & 0.87863502 & 1.54269444 & 0.34299341 \\ 0.72776588 & -0.75489595 & 0.07309288 & 0.34299341 & 3.19154447 \end{bmatrix}$$

oraz wektory:

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3.55652063354463 \\ 1.86337418741501 \\ 5.84125684808554 \\ 1.74587299057388 \\ 0.84299677124244 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b'} = \boldsymbol{b} + \begin{bmatrix} 10^{-5} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Chcemy obliczyć $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{b}$ oraz $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{y'}_i = \boldsymbol{b'}$, gdzie $i \in \{1, 2\}$. Możemy się już domyślać, że otrzymane wyniki będą zależne od tego, jak dobrze uwarunkowana jest dana macierz $\boldsymbol{A}_i$. **Współczynnik uwarunkowania macierzy** liczymy ze wzoru:

$$\kappa(A) = ||A^{-1}|| \cdot ||A||$$

, gdzie dla macierzy symetrycznych, rzeczywistych sprowadza się to do:

$$\kappa(A) = \frac{|\lambda_{max}(A)|}{|\lambda_{min}(A)|}$$

Interesuje nas wartość jak najniższa, ponieważ jest to maksymalny stosunek relatywnego błędu wyniku, do relatywnego błędu wyrazów wolnych. Wynik będzie się również różnił, jeżeli wybierzemy inną normę do naszych obliczeń. Na potrzeby zadania korzystam z normy Euklidesowej.

2 Wyniki

Wyniki obliczeń $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{y'}_1 = \boldsymbol{b'}$:

$$\boldsymbol{y}_1 = \begin{bmatrix} 2.03163246 \\ -1.03652186 \\ 3.22032664 \\ -3.52251753 \\ -0.1394951 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{y'}_1 = \begin{bmatrix} 2.03163717 \\ -1.0365219 \\ 3.22032706 \\ -3.52251858 \\ -0.13949605 \end{bmatrix}$$

oraz $\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{y'}_2 = \boldsymbol{b'}$:

$$\boldsymbol{y}_2 = \begin{bmatrix} 1.99998045 \\ -0.33814057 \\ 3.42431038 \\ -3.56662167 \\ 0.0329788 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{y'}_2 = \begin{bmatrix} 3.42873475 \\ -31.86258865 \\ -5.78337449 \\ -1.57579144 \\ -7.75237481 \end{bmatrix}$$

Widzimy, że wyniki pierwszych dwóch równań mało się od siebie różnią, natomiast wyniki pozostałych dwóch widać gołym okiem. Popatrzmy na błędy, jakie wynikły, na wskutek zaburzenia wektora $\boldsymbol{b}$ oraz na współczynniki uwarunkowania poszczególnych macierzy:

$$\boldsymbol{\Delta}_1 = ||\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y'}_1|| \approx 4.93458713552989 \cdot 10^{-6}$$

$$\boldsymbol{\Delta}_2 = ||\boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{y'}_2|| \approx 33.84063773324914$$

$$\kappa(\boldsymbol{A}_1) \approx 4.000000025064921$$

$$\kappa(\boldsymbol{A}_2) \approx 320612865.9813718$$

3 Podsumowanie

Analizując otrzymane wartości, spodziewaliśmy się, że współczynnik uwarunkowania macierzy $\boldsymbol{A}_1$ będzie relatywnie mały, natomiast macierzy $\boldsymbol{A}_2$ relatywnie duży. Potwierdziły to obliczenia. Podsumowując, macierz $\boldsymbol{A}_1$ jest macierzą dobrze uwarunkowaną, natomiast macierz $\boldsymbol{A}_2$ jest macierzą źle uwarunkowaną. Znając już metodę, jaką jesteśmy w stanie określić czułość naszych układów równań na drobne zaburzenia, miejmy to na uwadze i zawsze popierajmy to obliczeniami.