Metody numeryczne - NUM4

Dawid Bytys gr. 3

15 listopada 2022

1 Wstęp

Rozwiązanie układu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, gdy $\mathbf{A}$ jest macierzą $n \times n$, przy użyciu rozkładu $\mathbf{LU}$ wymaga $O(n^2)$ operacji. Jeśli $\mathbf{A}$ ma szczególną postać, np. trójkątną lub rzadką, to złożoność obliczeniowa może być zredukowana nawet do $O(n)$. Wzór **Shermana-Morrisona** dostarcza sprawnego rozwiązywania $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, gdy $\mathbf{A}$ jest jedną ze specjalnych form, dla których istnieje bardziej wydajny algorytm rozwiązywania układów równań. Podstawowym celem tego zadania jest implementacja formuły Shermana-Morrisona. Wzór na odwrotność macierzy przyjmuje następującą postać:

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{1+v^TA^{-1}u}.$$

Rozważmy układ równań $\mathbf{Ay} = \mathbf{b}$, $N = 50$, gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 8 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 8 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 10 & 8 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 10 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 10 & 8 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 10 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 10 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 10 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ \\ 5 \\ \vdots \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że macierz A możemy zapisać jako $A = B + uv^T$, gdzie:

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 7 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 7 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 9 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 9 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}, \mathrm{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \mathrm{v}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Widzimy, że pojawiła nam się macierz wstęgowa trójkątna górna, dla której rozwiązywanie układu równań przy pomocy **backward-substitution** sprowadza się do złożoności $O(n)$. Korzystając ze wzoru Shermana-Morissona i przekształceń, które wykonaliśmy na ćwiczeniach, możemy wykorzystać następujący rozkład na naszą korzyść, rozwiązać układ równań i wstawić wyniki do wzoru:

$$y = (B + uv^T)^{-1}b = B^{-1}b - \tfrac{B^{-1}uv^TB^{-1}b}{1+v^TB^{-1}u} = z - \tfrac{xv^Tz}{1+v^Tx},$$

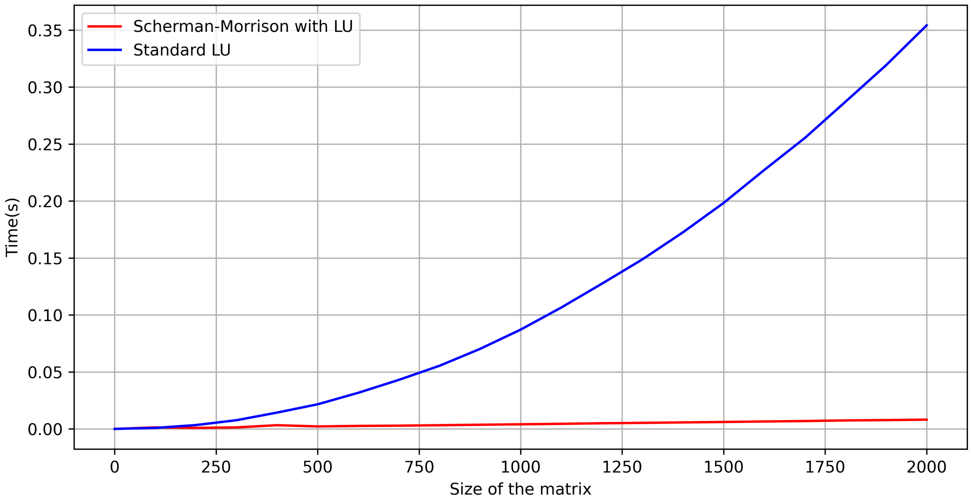
$$\begin{cases} Bz = b \\ Bx = u \end{cases}$$

Łącznie otrzymujemy złożoność $O(n)$ dla macierzy wstęgowej B, oraz $O(n)$ dla powyższego układu równań, co finalnie daje nam złożoność $O(n)$.

2 Wyniki

Wyniki, jaki mi wyszły zgadzają się z wynikami z bilbioteki **numpy**:

$$y = \begin{bmatrix} 0.07525844089350037 \\ 0.07525904117533852 \\ 0.07525826938440369 \\ 0.07525926168703423 \\ 0.07525798586936636 \\ \vdots \\ 0.13379325069654147 \end{bmatrix}.$$



Rysunek 1: Porównanie czasu rozwiązywania układu równań z wykorzystaniem formuły Shermana-Morissona oraz bez wykorzystania, stosując jedynie rozkład LU i forward/backward-substitution, w zależności od wielkości macierzy.

3 Podsumowanie

Znając strukturę macierzy, możemy dobrać odpowiedni algorytm rozwiązywania z nią układów równań. Formuła Shermana-Morissona jest tego świetnym przykładem, ponieważ ze złożoności $O(n^2)$ (pomijając samą faktoryzację LU, której złożoność to $O(n^3)$), udało nam się zejść do $O(n)$, co jest widoczne na wykresie wyżej.