Metody numeryczne - NUM7

Dawid Bytys gr. 3

4 stycznia 2023

1 Wstęp

Interpolacja wielomianowa to metoda polegająca na znalezieniu wielomianu najwyższego stopnia n, który przechodzi przez $n+1$ punktów $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. Może on być użyty do aproksymacji danych lub przybliżenia wartości funkcji w punktach, w których nie została ona zmierzona.

Jednym z najczęściej stosowanych sposobów interpolacji wielomianowej jest metoda Lagrange'a. Została ona opracowana przez Josepha Louisa Lagrange'a w 1795 roku. Wzór na wielomian interpolacyjny Lagrange'a jest następujący:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot l_i(x),$$

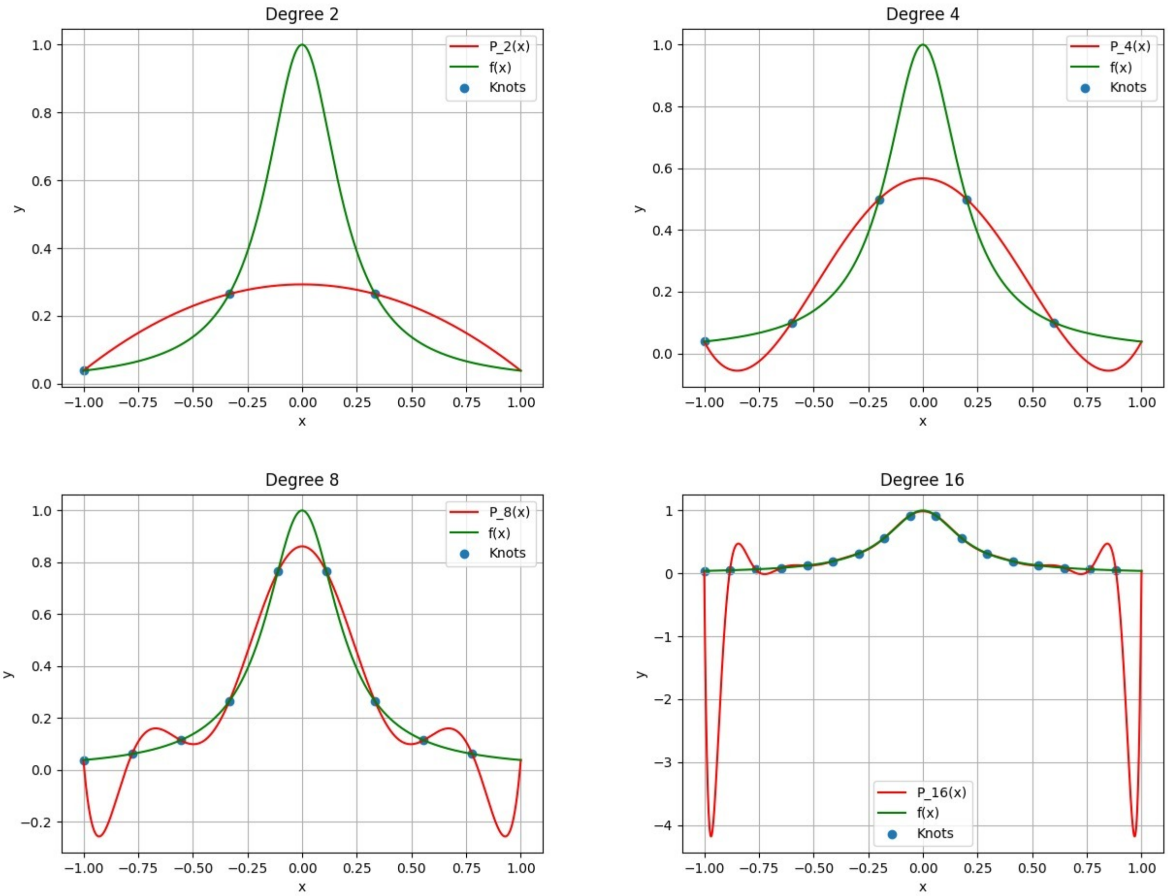
gdzie $l_i(x)$ to tzw. funkcje bazowe Lagrange'a, określone jako:

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

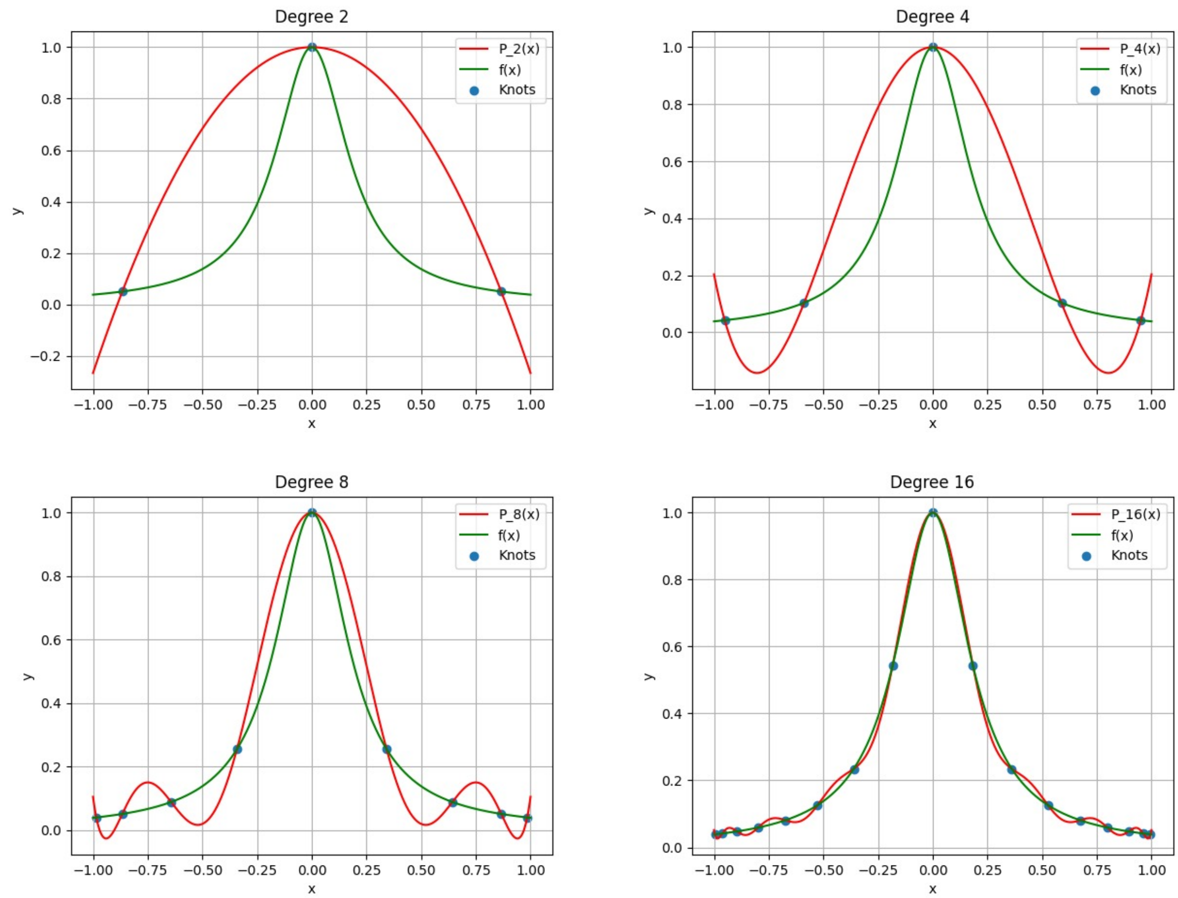
Własnością metody Lagrange'a jest to, że wielomian interpolacyjny przechodzi przez wszystkie punkty danych. Może to prowadzić do dużych błędów w innych punktach niż te, przez które przechodzi, co jest zjawiskiem znanym jako efekt Runge'a. Efekt Runge'a zachodzi, gdy wielomian interpolacyjny jest zbyt wysokiego stopnia, co prowadzi do dużych wahnięć (oscylacji) wielomianu w całym przedziale interpolacji. Aby zminimalizować ten efekt, należy zmniejszyć stopień wielomianu lub użyć innych metod interpolacji, takich jak np. interpolacja funkcjami sklejanymi.

Chcemy przedstawić metodę interpolacji wielomianowej z wykorzystaniem wzoru Lagrange'a. Mamy funkcję $y(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ na przedziale $[-1, 1]$. Naszym zadaniem jest znalezienie i przedstawienie na wykresie wielomianów interpolacyjnych dla dwóch rodzajów węzłów: $x_i = -1 + \frac{2i}{n+1}$ oraz $x_i = \cos(\frac{\pi(2i+1)}{2(n+1)})$, gdzie $i = 0, ..., n$. Ponadto, dla tych dwóch rodzajów węzłów, wybieramy kilka wartości n i porównujemy zachowanie się wielomianów interpolacyjnych dla dużych n, najlepiej na jednym wykresie. Dodatkowo, wybieram nową funkcję ... i sprawdzam jak dla niej zachowują się przybliżenia.

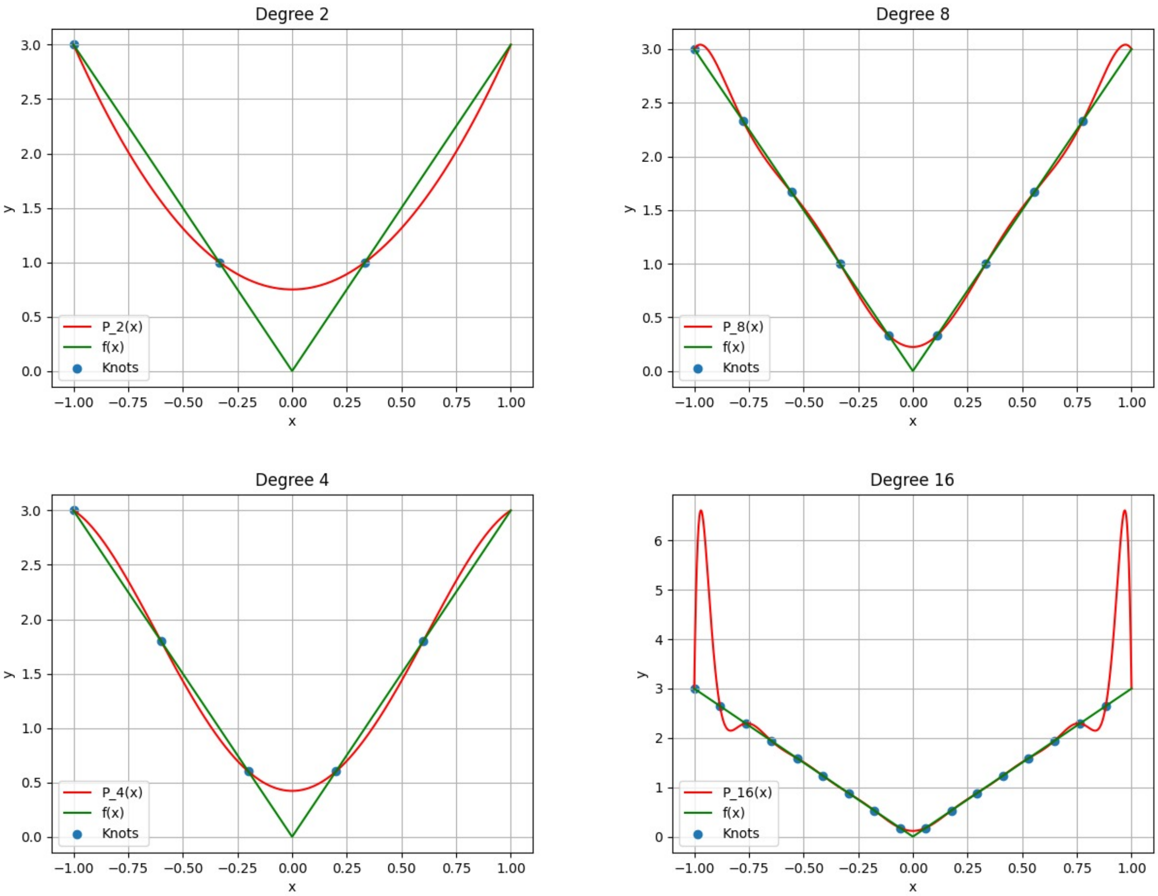
2 Wyniki



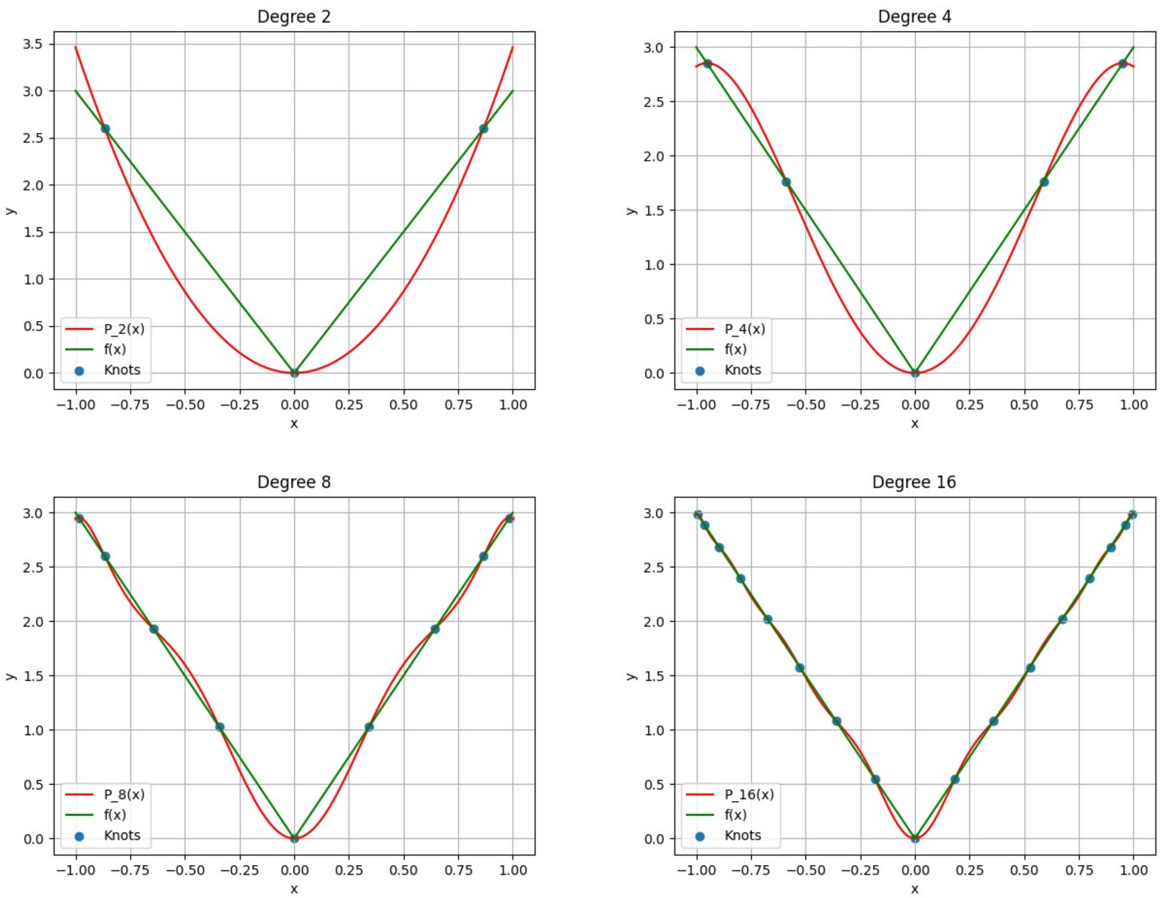
Rysunek 1: Interpolacja funkcji $y(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ dla węzłów $x_i = -1 + \frac{2i}{n+1}$, gdzie $n \in \{2, 4, 8, 16\}$.



Rysunek 2: Interpolacja funkcji $y(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ dla węzłów $x_i = \cos(\frac{\pi(2i+1)}{2(n+1)})$, gdzie $n \in \{2, 4, 8, 16\}$.



Rysunek 3: Interpolacja funkcji $y(x) = |3x|$ dla węzłów $x_i = -1 + \frac{2i}{n+1}$, gdzie $n \in \{2, 4, 8, 16\}$.



Rysunek 4: Interpolacja funkcji $y(x) = |3x|$ dla węzłów $x_i = \cos(\frac{\pi(2i+1)}{2(n+1)})$, gdzie $n \in \{2, 4, 8, 16\}$.

3 Podsumowanie

W raporcie przedstawiono metodę interpolacji wielomianowej z wykorzystaniem wzoru Lagrange'a. Zbadano zachowanie się wielomianów interpolacyjnych dla dwóch rodzajów węzłów: równoodległych oraz zbliżonych do zerowych. Dla każdego rodzaju węzłów wybrano kilka wartości n i porównano zachowanie się wielomianów interpolacyjnych dla dużych n. Okazało się, że wybór odpowiednich węzłów ma duże znaczenie dla eliminacji tzw. efektu Runge'a, czyli nieodpowiedniego zachowania się wielomianu interpolacyjnego dla wartości x bliskich krańcom przedziału interpolacji. Dla węzłów zbliżonych do zerowych uzyskano lepsze wyniki niż dla węzłów równoodległych, co sugeruje, że wybór węzłów zależnych od kształtu funkcji jest lepszym rozwiązaniem. Podsumowując, metoda interpolacji wielomianowej z wykorzystaniem wzoru Lagrange'a jest skutecznym narzędziem do aproksymacji funkcji znanych w określonym przedziale. Wybór odpowiednich węzłów ma duże znaczenie dla eliminacji efektu Runge'a i uzyskania dobrych wyników interpolacji. Warto rozważyć uwzględnienie kształtu funkcji przy doborze węzłów interpolacji.