

Metoda Hooke'a - Jeevesa

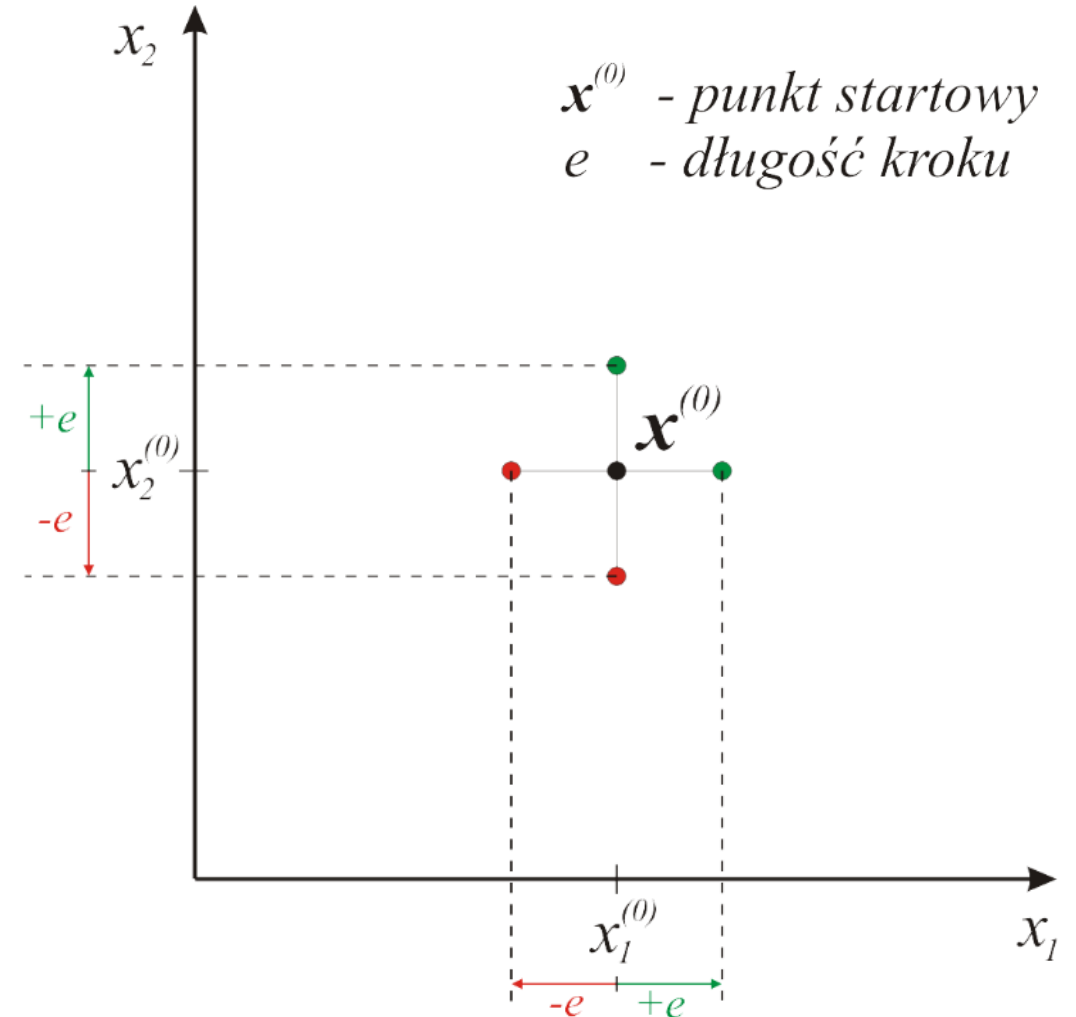
Metody optymalizacji

Opracowała: *dr Marta Kapturczak*

Schemat działania na przykładzie $f(x_1, x_2)$

W metodzie wyróżnić można dwa zasadnicze etapy: próbny oraz roboczy. Podczas etapu próbnego następuje badanie zachowania funkcji wokół punktu roboczego we wszystkich kierunkach bazy ortogonalnej. Etap roboczy następuje, gdy przynajmniej jeden z kroków etapu próbnego zakończył się sukcesem (tzn. osiągnęliśmy wartość funkcji lepszą niż w punkcie bazowym).

Jeżeli żaden z kroków etapu próbnego nie przyniósł oczekiwanego rezultatu, jest on powtarzany przy zmniejszonym kroku e . Jako kryterium stopu stosuje się długość kroku e , kończymy obliczenia w momencie gdy aktualna długość jest mniejsza od zadanej dokładności ε .



Dane

- $\mathbf{x}^{(0)}$ – punkt startowy, $\mathbf{x}^{(B0)}$, $\mathbf{x}^{(B)}$ – punkty bazowe
- $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – baza wektorów ortogonalnych:
$$\xi_1 = (1; 0; \dots; 0), \xi_2 = (0; 1; \dots; 0), \dots, \xi_n = (0; 0; \dots; 1),$$
- e – początkowa długość kroku,
- β – współczynnik zmniejszenia kroku ($0 < \beta < 1$),
- ε – dokładność obliczeń,
- n – liczba zmiennych niezależnych,
- $f(\mathbf{x}) = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ – optymalizowana funkcja

Etap próbny (poszukiwanie minimum)

1. Podstaw $j = 1$, oblicz wartości funkcji $f^{(0)} = f(\mathbf{x}^{(0)})$, $f^{(B)} = f(\mathbf{x}^{(B)})$
2. Wykonaj krok próbny w kierunku ξ_j : $\mathbf{x}^{(j)} = \mathbf{x}^{(j-1)} + e \cdot \xi_j$ oraz oblicz $f = f(\mathbf{x}^{(j)})$
3. Jeżeli $f < f^{(0)}$ to podstaw $f^{(0)} = f$ i przejdź do punktu 5,
w p. p. wykonaj krok próbny w przeciwnym kierunku: $\mathbf{x}^{(j)} = \mathbf{x}^{(j)} - 2e \cdot \xi_j$
oraz oblicz $f = f(\mathbf{x}^{(j)})$
4. Jeżeli $f < f^{(0)}$ to podstaw $f^{(0)} = f$, w p. p. $\mathbf{x}^{(j)} = \mathbf{x}^{(j)} + e \cdot \xi_j$
5. Jeżeli $j \neq n$ to $j = j + 1$ i wróć do kroku 2, w p. p. zbadaj, czy wystąpiły kroki pomyślne ($f^{(B)} > f^{(0)}$)
6. Jeżeli tak, to wykonaj etap roboczy dla $\mathbf{x}^{(j)}$, w p. p.:
7. Jeżeli $e > \varepsilon$, to przy pierwszej iteracji zmień punkt startowy, a przy następnych zmniejsz długość kroku $e = \beta e$, podstaw $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}^{(B)}$ i wróć do kroku 1

Etap próbny (poszukiwanie maksimum)

1. Podstaw $j = 1$, oblicz wartości funkcji $f^{(0)} = f(\mathbf{x}^{(0)})$, $f^{(B)} = f(\mathbf{x}^{(B)})$
2. Wykonaj krok próbny w kierunku ξ_j : $\mathbf{x}^{(j)} = \mathbf{x}^{(j-1)} + e \cdot \xi_j$ oraz oblicz $f = f(\mathbf{x}^{(j)})$
3. Jeżeli $f > f^{(0)}$ to podstaw $f^{(0)} = f$ i przejdź do punktu 5,
w p. p. wykonaj krok próbny w przeciwnym kierunku: $\mathbf{x}^{(j)} = \mathbf{x}^{(j)} - 2e \cdot \xi_j$
oraz oblicz $f = f(\mathbf{x}^{(j)})$
4. Jeżeli $f > f^{(0)}$ to podstaw $f^{(0)} = f$, w p. p. $\mathbf{x}^{(j)} = \mathbf{x}^{(j)} + e \cdot \xi_j$
5. Jeżeli $j \neq n$ to $j = j + 1$ i wróć do kroku 2, w p. p. zbadaj, czy wystąpiły kroki pomyślne ($f^{(B)} < f^{(0)}$)
6. Jeżeli tak, to wykonaj etap roboczy dla $\mathbf{x}^{(j)}$, w p. p.:
7. Jeżeli $e > \varepsilon$, to przy pierwszej iteracji zmień punkt startowy, a przy następnych zmniejsz długość kroku $e = \beta e$, podstaw $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}^{(B)}$ i wróć do kroku 1

Etap roboczy

1. Podstaw $\mathbf{x}^{(B0)} = \mathbf{x}^{(B)}$ oraz $\mathbf{x}^{(B)} = \mathbf{x}^{(j)}$
2. Wykonaj krok roboczy:

$$\mathbf{x}^{(l)} = \mathbf{x}^{(B)} + (\mathbf{x}^{(B)} - \mathbf{x}^{(B0)}) = 2\mathbf{x}^{(B)} - \mathbf{x}^{(B0)}$$

3. wróć do etapu próbnego.

Przykład (Dane)

- $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = 2.5(x_1^2 - x_2)^2 + (1 - x_1)^2$
- $\mathbf{x}^{(B)} = \mathbf{x}^{(B0)} = \mathbf{x}^{(0)} = (-0.5; 1)$,
- $\xi_1 = (1; 0)$, $\xi_2 = (0; 1)$,
- $e = 0.5$,
- $\beta = 0.5$,
- $\varepsilon = 0.01$,
- $n = 2$,
- poszukiwane minimum $(1; 1)$

Przykład (I etap próbny)

1. Podstaw $j = 1$, oblicz wartości funkcji $f^{(0)} = f(\mathbf{x}^{(0)}) = 3,65625$

$$f^{(B)} = f(\mathbf{x}^{(B)}) = 3,65625,$$

2. Wykonaj krok próbny w kierunku ξ_j : $\mathbf{x}^{(j)} = \mathbf{x}^{(j-1)} + e \cdot \xi_j$ oraz oblicz $f = f(\mathbf{x}^{(j)})$,

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + e \cdot \xi_1 = (-0,5; 1) + 0,5 \cdot (1; 0) = (0; 1) \quad f = f(0; 1) = 3,5$$

3. Jeżeli $f < f^{(0)}$ ($3,5 < 3,65625$) to podstaw $f^{(0)} = f = 3,5$ i przejdź do punktu 5,

5. Jeżeli $j \neq n$ ($1 \neq 2$) to $j = j + 1 = 2$ i wróć do kroku 2.

Przykład (I etap próbny)

2. Wykonaj krok próbny w kierunku ξ_j : $\mathbf{x}^{(j)} = \mathbf{x}^{(j-1)} + e \cdot \xi_j$
oraz oblicz $f = f(\mathbf{x}^{(j)})$

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} + e \cdot \xi_2 = (0; 1) + 0,5 \cdot (0; 1) = (0; 1,5) \quad f = f(0; 1,5) = 6,625$$

3. Jeżeli $f < f^{(0)}$ ($6,625 < 3,5$ – NIE!), w p. p. wykonaj krok próbny w przeciwnym kierunku: $\mathbf{x}^{(j)} = \mathbf{x}^{(j)} - 2e \cdot \xi_j$ oraz oblicz $f = f(\mathbf{x}^{(j)})$

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(2)} - 2e \cdot \xi_2 = (0; 1,5) - 2 \cdot 0,5 \cdot (0; 1) = (0; 0,5) \quad f = f(0; 0,5) = 1,625$$

4. Jeżeli $f < f^{(0)}$ ($1,625 < 3,5$) to podstaw $f^{(0)} = f = 1,625$,

5. Jeżeli $j \neq n$ ($2 = 2$), w p. p. zbadaj, czy wystąpiły kroki pomyślne
 $f^{(B)} > f^{(0)}$ ($3,65625 > 1,625$)

6. Jeżeli tak, to wykonaj etap roboczy

Przykład (I etap roboczy)

1. Podstaw:

$$\mathbf{x}^{(B0)} = \mathbf{x}^{(B)} = (-0,5; 1)$$

$$\mathbf{x}^{(B)} = \mathbf{x}^{(j)} = (0; 0,5)$$

2. Wykonaj krok roboczy:

$$\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}^{(B)} + (\mathbf{x}^{(B)} - \mathbf{x}^{(B0)}) = 2\mathbf{x}^{(B)} - \mathbf{x}^{(B0)}$$

$$\mathbf{x}^{(0)} = 2 \cdot (0; 0,5) - (-0,5; 1) = (0,5; 0)$$

3. wróć do etapu próbnego.

Przykład (II etap próbny)

1. Podstaw $j=1$, oblicz wartości funkcji $f^{(0)} = f(\mathbf{x}^{(0)}) = 0,40625$,
 $f^{(B)} = f(\mathbf{x}^{(B)}) = 1,625$
2. Wykonaj krok próbny w kierunku ξ_j : $\mathbf{x}^{(j)} = \mathbf{x}^{(j-1)} + e \cdot \xi_j$ oraz oblicz $f = f(\mathbf{x}^{(j)})$
 $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + e \cdot \xi_1 = (0,5; 0) + 0,5 \cdot (1; 0) = (1; 0) \quad f = f(1; 0) = 2,5$
3. Jeżeli $f < f^{(0)}$ ($2,5 > 0,40625$), w p. p. wykonaj krok próbny w przeciwnym kierunku: $\mathbf{x}^{(j)} = \mathbf{x}^{(j)} - 2e \cdot \xi_j$ oraz oblicz $f = f(\mathbf{x}^{(j)})$
 $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(1)} - 2e \cdot \xi_1 = (1; 0) - 2 \cdot 0,5 \cdot (1; 0) = (0; 0) \quad f = f(0; 0) = 1$
4. Jeżeli $f < f^{(0)}$ ($1 > 0,40625$), w p. p. $\mathbf{x}^{(j)} = \mathbf{x}^{(j)} + e \cdot \xi_j$
 $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(1)} + e \cdot \xi_1 = (0; 0) + 0,5 \cdot (1; 0) = (0,5; 0) \quad f = f(0,5; 0) = 0,40625$
5. Jeżeli $j \neq n$ ($1 \neq 2$) to $j = j + 1 = 2$ i wróć do kroku 2,

Przykład (II etap próbny)

2. Wykonaj krok próbny w kierunku ξ_j : $\mathbf{x}^{(j)} = \mathbf{x}^{(j-1)} + e \cdot \xi_j$ oraz oblicz $f = f(\mathbf{x}^{(j)})$
 $\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} + e \cdot \xi_2 = (0,5; 0) + 0,5 \cdot (0; 1) = (0,5; 0,5) \quad f = f(0,5; 0,5) = 0,40625$
3. Jeżeli $f < f^{(0)}$ ($0,40625 = 0,40625$), w p. p. wykonaj krok próbny w kierunku przeciwnym: $\mathbf{x}^{(j)} = \mathbf{x}^{(j)} - 2e \cdot \xi_j$ oraz oblicz $f = f(\mathbf{x}^{(j)})$
 $\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(2)} - 2e \cdot \xi_2 = (0,5; 0,5) - 2 \cdot 0,5 \cdot (0; 1) = (0,5; -0,5) \quad f = f(0,5; -0,5) = 1,65625$
4. Jeżeli $f < f^{(0)}$ ($1,65625 > 0,40625$), w p. p. $\mathbf{x}^{(j)} = \mathbf{x}^{(j)} + e \cdot \xi_j$
 $\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(2)} + e \cdot \xi_2 = (0,5; -0,5) + 0,5 \cdot (0; 1) = (0,5; 0) \quad f = f(0,5; 0) = 0,40625$
5. Jeżeli $j \neq n$ ($2 = 2$), w p. p. zbadaj, czy wystąpiły kroki pomyślne
 $f^{(B)} > f^{(0)} \quad (1,625 > 0,40625)$
6. Jeżeli tak, to wykonaj etap roboczy

Przykład (II etap roboczy)

1. Podstaw:

$$\mathbf{x}^{(B0)} = \mathbf{x}^{(B)} = (0; 0,5)$$

$$\mathbf{x}^{(B)} = \mathbf{x}^{(j)} = (0,5; 0)$$

2. Wykonaj krok roboczy:

$$\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}^{(B)} + (\mathbf{x}^{(B)} - \mathbf{x}^{(B0)}) = 2\mathbf{x}^{(B)} - \mathbf{x}^{(B0)}$$

$$\mathbf{x}^{(0)} = 2 \cdot (0,5; 0) - (0; 0,5) = (1; -0,5)$$

3. wróć do etapu próbnego.

Przykład (III etap próbny)

1. Podstaw $j=1$, oblicz wartości funkcji $f^{(0)} = f(\mathbf{x}^{(0)}) = 5,625$,
 $f^{(B)} = f(\mathbf{x}^{(B)}) = 0,40625$
2. Wykonaj krok próbny w kierunku ξ_j : $\mathbf{x}^{(j)} = \mathbf{x}^{(j-1)} + e \cdot \xi_j$ oraz oblicz $f = f(\mathbf{x}^{(j)})$
 $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + e \cdot \xi_1 = (1; -0,5) + 0,5 \cdot (1; 0) = (1,5; -0,5) \quad f = f(1,5; -0,5) = 19,15625$
3. Jeżeli $f < f^{(0)}$ ($19,15625 > 5,625$), w p. p. wykonaj krok próbny w przeciwnym kierunku: $\mathbf{x}^{(j)} = \mathbf{x}^{(j)} - 2e \cdot \xi_j$ oraz oblicz $f = f(\mathbf{x}^{(j)})$
 $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(1)} - 2e \cdot \xi_1 = (1,5; -0,5) - 2 \cdot 0,5 \cdot (1; 0) = (0,5; -0,5) \quad f = f(0,5; -0,5) = 1,515625$
4. Jeżeli $f < f^{(0)}$ ($1,515625 < 5,625$) to podstaw $f^{(0)} = f = 1,515625$,
5. Jeżeli $j \neq n$ ($1 \neq 2$) to $j = j + 1 = 2$ i wróć do kroku 2,

Przykład (III etap próbny)

2. Wykonaj krok próbny w kierunku ξ_j : $\mathbf{x}^{(j)} = \mathbf{x}^{(j-1)} + e \cdot \xi_j$ oraz oblicz $f = f(\mathbf{x}^{(j)})$
 $\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} + e \cdot \xi_2 = (0,5; -0,5) + 0,5 \cdot (0; 1) = (0,5; 0) \quad f = f(0,5; 0) = 0,40625$
3. Jeżeli $f < f^{(0)}$ ($0,40625 < 1,515625$), to podstaw
 $f^{(0)} = f = 0,40625$ i przejdź do punktu 5
5. Jeżeli $j \neq n$ ($2 \neq 2$), w p. p. zbadaj, czy wystąpiły kroki pomyślne
 $f^{(B)} > f^{(0)} \quad (0,40625 = 0,40625)$
6. w p.p.
7. Jeżeli $e > \varepsilon$ ($0,5 > 0,01$), zmniejsz długość kroku $e = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25$, podstaw
 $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}^{(B)} = (0,5; 0)$ i wróć do kroku 1

Przykład (IV etap próbny)

1. Podstaw $j = 1$, oblicz wartości funkcji $f^{(0)} = f(\mathbf{x}^{(0)}) = 0,40625$,
 $f^{(B)} = f(\mathbf{x}^{(B)}) = 0,40625$

2. Wykonaj krok próbny w kierunku ξ_j : $\mathbf{x}^{(j)} = \mathbf{x}^{(j-1)} + e \cdot \xi_j$ oraz
oblicz $f = f(\mathbf{x}^{(j)})$,

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + e \cdot \xi_1 = (0,5; 0) + 0,25 \cdot (1; 0) = (0,75; 0) \quad f = f(0,75; 0) = 0,8535$$

3. Jeżeli $f < f^{(0)}$ ($0,8535 > 0,40625$) w p. p. wykonaj krok próbny w przeciwnym
kierunku: $\mathbf{x}^{(j)} = \mathbf{x}^{(j)} - 2e \cdot \xi_j$ oraz oblicz $f = f(\mathbf{x}^{(j)})$

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(1)} - 2e \cdot \xi_1 = (0,75; 0) - 2 \cdot 0,25 \cdot (1; 0) = (0,25; 0) \quad f = f(0,25; 0) = 0,5723$$

4. Jeżeli $f < f^{(0)}$ ($0,5723 < 0,40625$), w p. p. $\mathbf{x}^{(j)} = \mathbf{x}^{(j)} + e \cdot \xi_j$

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(2)} + e \cdot \xi_2 = (0,25; 0) + 0,25 \cdot (1; 0) = (0,5; 0) \quad f = f(0,5; 0) = 0,40625$$

5. Jeżeli $j \neq n$ ($1 \neq 2$) to $j = j + 1 = 2$ i wróć do kroku 2,

Przykład (IV etap próbny)

2. Wykonaj krok próbny w kierunku ξ_j : $\mathbf{x}^{(j)} = \mathbf{x}^{(j-1)} + e \cdot \xi_j$ oraz oblicz $f = f(\mathbf{x}^{(j)})$

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} + e \cdot \xi_2 = (0,5; 0) + 0,25 \cdot (0; 1) = (0,5; 0,25) \quad f = f(0,5; 0,25) = 0,25$$

3. Jeżeli $f < f^{(0)}$ ($0,25 < 0,40625$), to podstaw $f^{(0)} = f = 0,25$
i przejdź do punktu 5

5. Jeżeli $j \neq n$ ($2 = 2$), w p. p. zbadaj, czy wystąpiły kroki pomyślne
 $f^{(B)} > f^{(0)}$ ($0,40625 > 0,25$)

6. Jeżeli tak, to wykonaj etap roboczy

Przykład (III etap roboczy)

1. Podstaw:

$$\mathbf{x}^{(B0)} = \mathbf{x}^{(B)} = (0,5; 0)$$

$$\mathbf{x}^{(B)} = \mathbf{x}^{(j)} = (0,5; 0,25)$$

2. Wykonaj krok roboczy:

$$\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}^{(B)} + (\mathbf{x}^{(B)} - \mathbf{x}^{(B0)}) = 2\mathbf{x}^{(B)} - \mathbf{x}^{(B0)}$$

$$\mathbf{x}^{(0)} = 2 \cdot (0,5; 0,25) - (0,5; 0) = (0,5; 0,5)$$

3. wróć do etapu próbnego.

Przykład (V etap próbny)

1. Podstaw $j = 1$, oblicz wartości funkcji $f^{(0)} = f(\mathbf{x}^{(0)}) = 0,40625$,

$$f^{(B)} = f(\mathbf{x}^{(B)}) = 0,25$$

2. Wykonaj krok próbny w kierunku ξ_j : $\mathbf{x}^{(j)} = \mathbf{x}^{(j-1)} + e \cdot \xi_j$ oraz oblicz $f = f(\mathbf{x}^{(j)})$,

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + e \cdot \xi_1 = (0,5; 0,5) + 0,25 \cdot (1; 0) = (0,75; 0,5) \quad f = f(0,75; 0,5) = 0,0723$$

3. Jeżeli $f < f^{(0)}$ ($0,0723 < 0,40625$) to podstaw $f^{(0)} = f = 0,0723$ i przejdź do punktu 5,

5. Jeżeli $j \neq n$ ($1 \neq 2$) to $j = j + 1 = 2$ i wróć do kroku 2.

Przykład (V etap próbny)

2. Wykonaj krok próbny w kierunku ξ_j : $\mathbf{x}^{(j)} = \mathbf{x}^{(j-1)} + e \cdot \xi_j$ oraz oblicz $f = f(\mathbf{x}^{(j)})$

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} + e \cdot \xi_2 = (0,75; 0,5) + 0,25 \cdot (0; 1) = (0,75; 0,75) \quad f = f(0,75; 0,75) = 0,1504$$

3. Jeżeli $f < f^{(0)}$ ($0,1504 > 0,0723$), w p. p. wykonaj krok próbny w kierunku przeciwnym: $\mathbf{x}^{(j)} = \mathbf{x}^{(j)} - 2e \cdot \xi_j$ oraz oblicz $f = f(\mathbf{x}^{(j)})$

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(2)} - 2e \cdot \xi_2 = (0,75; 0,75) - 2 \cdot 0,25 \cdot (0; 1) = (0,75; 0,25) \quad f = f(0,75; 0,25) = 0,3065$$

4. Jeżeli $f < f^{(0)}$ ($0,3065 > 0,0723$), w p. p. $\mathbf{x}^{(j)} = \mathbf{x}^{(j)} + e \cdot \xi_j$

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(2)} + e \cdot \xi_2 = (0,75; 0,25) + 0,25 \cdot (0; 1) = (0,75; 0,5) \quad f = f(0,5; 0) = 0,0723$$

5. Jeżeli $j \neq n$ ($2 = 2$), w p. p. zbadaj, czy wystąpiły kroki pomyślne

$$f^{(B)} > f^{(0)} \quad (0,25 > 0,0723)$$

6. Jeżeli tak, to wykonaj etap roboczy itd...