Metoda Simplex

Metody optymalizacji

Opracowała: *dr Marta Kapturczak*

WZORY I ZASADY

- Warunki przekształcenia (nierówności w równanie):
  - $\leq$ – dodajemy nową zmienną x_i
  - $\geq$ – odejmujemy nową zmienną x_i
- Kryterium wejścia:
  - MIN – do bazy wejdzie zmienna dla której wartość $c_j - z_j$ jest najmniejsza
  - MAX – do bazy wejdzie zmienna dla której wartość $c_j - z_j$ jest największa
- Kryterium wyjścia – z bazy wyjdzie zmienna dla której wartość b_i / a_i jest najmniejsza (nie bierzemy pod uwagę wartości ujemnych)
- Przekształcenie macierzy:
  - wiersz z kryterium wyjścia dzielimy przez wartość leżącą na skrzyżowaniu kryterium wejścia oraz wyjścia.
  - pozostałe wiersze: od *i*-tego wiersza odejmujemy wiersz z kryterium wyjścia (z nowej macierzy) pomnożony przez wartość z i-tego wiersza leżącą w kolumnie z kryterium wejścia.
- Kryterium stopu:
  - MIN – gdy wszystkie wartości z wiersza $c_j - z_j$ są nieujemne
  - MAX – gdy wszystkie wartości z wiersza $c_j - z_j$ są niedodatnie

PRZYKŁAD

- Maximum funkcji: $f(x) = x_1 + 2x_2$
- Ograniczenia:
  - $x_1 + x_2 \leq 10$
  - $-2x_1 + x_2 \leq 4$
- Warunki nieujemności: $x_1, x_2 \geq 0$

Warunki przekształcenia (nierówności w równanie):

$\leq$ – dodajemy nową zmienną x_i

$\geq$ – odejmujemy nową zmienną x_i

Przekształcamy ograniczenia według powyższych zasad. Ograniczenia w przykładzie są typu $\leq$, w związku z tym dodajemy nowe zmienne x_3 oraz x_4 i przekształcamy nierówność w równanie:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

$$-2x_1 + x_2 + x_4 = 4$$

PRZYKŁAD

Uzupełniamy pierwszą macierz Simplex. W pierwszym wierszu uzupełniamy współczynniki z funkcji $f(x)$ stojące przy kolejnych zmiennych x_i (odpowiednio wpisanych w 2 wierszu). Analogicznie w wierszach 3 i 4 wpisujemy współczynniki przy kolejnych ograniczeniach. W kolumnie b_i wpisujemy wartości po znaku równości. W kolumnie pierwszej wstawiane są współczynniki w funkcji stojące przy zmiennych wstawionych w kolumnie drugiej.

- Maximum funkcji: $f(x) = x_1 + 2x_2$
- Przekształcone ograniczenia:
  - $x_1 + x_2 + x_3 = 10$
  - $-2x_1 + x_2 + x_4 = 4$
- Warunki nieujemności: $x_1, x_2 \geq 0$

c_i \ c_j		1	2	0	0		
	x_i \ x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	b_i / a_i
0	x_3	1	1	1	0	10	
0	x_4	-2	1	0	1	4	
$z_j = \sum_{i=0}^{K} c_i x_i$							
$c_j - z_j$							

Zależne od K - ilości ograniczeń

PRZYKŁAD

Uzupełniamy pierwszą macierz Simplex.
Wyliczamy wartości z dwóch ostatnich wierszy zgodnie z przedstawionym wzorem.

- Maximum funkcji: $f(x) = x_1 + 2x_2$
- Przekształcone ograniczenia:
  - $x_1 + x_2 + x_3 = 10$
  - $-2x_1 + x_2 + x_4 = 4$
- Warunki nieujemności: $x_1, x_2 \geq 0$

Zależne od K - ilości ograniczeń

c_i \ c_j		**1**	2	0	0		
	x_i \ x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	b_i / a_i
0	x_3	1	1	1	0	10	
0	x_4	-2	1	0	1	4	
$z_j = \sum_{i=0}^{K} c_i x_i$		0*1+0*(-2) = **0**	0*1+0*1	0*1+0*0	0*0+0*1		
$c_j - z_j$		**1-0**	2-0	0-0	0-0		

PRZYKŁAD

- Maximum funkcji: $f(x) = x_1 + 2x_2$
- Przekształcone ograniczenia:
  - $x_1 + x_2 + x_3 = 10$
  - $-2x_1 + x_2 + x_4 = 4$
- Warunki nieujemności: $x_1, x_2 \geq 0$

Określamy kryterium wejścia:
Kryterium wejścia: MAX – do bazy wejdzie zmienna dla której wartość $c_j - z_j$ jest największa

Największa wartość $c_j - z_j$ to 2, czyli kryterium wejścia, to x_2

$c_i \backslash c_j$		1	2	0	0		
	$x_i \backslash x_j$	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	b_i / a_i
0	x_3	1	1	1	0	10	10
0	x_4	-2	1	0	1	4	4
$z_j = \sum_{i=0}^{K} c_i x_i$		0	0	0	0		
$c_j - z_j$		1	2	0	0		

Zależne od K - ilości ograniczeń

Kryterium wejścia - x_2

PRZYKŁAD

- Maximum funkcji: $f(x) = x_1 + 2x_2$
- Przekształcone ograniczenia:
  - $x_1 + x_2 + x_3 = 10$
  - $-2x_1 + x_2 + x_4 = 4$
- Warunki nieujemności: $x_1, x_2 \geq 0$

Określamy kryterium wyjścia:
Kryterium wyjścia: z bazy wyjdzie zmienna dla której wartość b_i / a_i jest najmniejsza (nie bierzemy pod uwagę wartości ujemnych)

Najmniejszą nieujemną wartością jest 4, czyli kryterium wyjścia jest x_4.

$c_i \backslash c_j$		1	2	0	0		
	$x_i \backslash x_j$	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	b_i / a_i
0	x_3	1	1	1	0	10	10
0	x_4	-2	1	0	1	4	4
$z_j = \sum_{i=0}^{K} c_i x_i$		0	0	0	0		
$c_j - z_j$		1	2	0	0		

Zależne od K - ilości ograniczeń

Kryterium wyjścia

Kryterium wejścia

- Kolejnym krokiem jest przekształcenie macierzy:
  - wiersz z kryterium wyjścia dzielimy przez wartość leżącą na skrzyżowaniu kryterium wejścia oraz wyjścia – zaznaczoną na zielono.
  - pozostałe wiersze: od *i*-tego wiersza odejmujemy wiersz z kryterium wyjścia (już z nowej macierzy) pomnożony przez wartość z i-tego wiersza leżącą w kolumnie z kryterium wejścia.
  - Dodatkowo zmienną kryterium wejścia wstawiamy zamiast tej z kryterium wyjścia.

$c_i \backslash c_j$		1	2	0	0			
	$x_i \backslash x_j$	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	b_i / a_i	
0	x_3	1	1	1	0	10	10	
0	x_4	-2	1	0	1	4	4	**Kryterium wyjścia**
$z_j = \sum_{i=0}^{K} c_i x_i$		0	0	0	0			
$c_j - z_j$		1	2	0	0			

Kryterium wejścia

c_i \ c_j		1	2	0	0		
	x_i \ x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	b_i / a_i
0	x_3	1	1	1	0	10	10
0	x_4	-2	1	0	1	4	4
$z_j = \sum_{i=0}^{K} c_i x_i$		0	0	0	0		
$c_j - z_j$		1	2	0	0		

Kryterium wyjścia

Kryterium wejścia

c_i \ c_j		1	2	0	0		
	x_i \ x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	b_i / a_i
0	x_3	1-1*(-2)	1-1*1	1-1*0	0-1*1	10-1*4	
2	x_2	-2	1	0	1	4	
$z_j = \sum_{i=0}^{K} c_i x_i$							
$c_j - z_j$							

Na skrzyżowaniu jest 1, więc wiersz kryterium wyjścia się nie zmienił

c_i \ c_j		1	2	0	0		
	x_i \ x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	b_i / a_i
0	x_3	3	0	1	-1	6	
2	x_2	-2	1	0	1	4	
$z_j = \sum_{i=0}^{K} c_i x_i$							
$c_j - z_j$							

c_i \ c_j		1	2	0	0		
	x_i \ x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	b_i / a_i
0	x_3	3	0	1	-1	6	
2	x_2	-2	1	0	1	4	
$z_j = \sum_{i=0}^{K} c_i x_i$		-4	2	0	2		
$c_j - z_j$		5	0	0	-2		

Kryterium stopu nie jest spełnione, więc przechodzimy do kolejnej iteracji:

MIN – gdy wszystkie wartości z wiersza $c_j - z_j$ są nieujemne

MAX – gdy wszystkie wartości z wiersza $c_j - z_j$ są niedodatnie

Kryterium wejścia: MAX – do bazy wejdzie zmienna dla której wartość $c_j - z_j$ jest największa

$c_i \backslash c_j$		1	2	0	0		
	$x_i \backslash x_j$	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	b_i / a_i
0	x_3	3	0	1	-1	6	
2	x_2	-2	1	0	1	4	
$z_j = \sum_{i=0}^{K} c_i x_i$		-4	2	0	2		
$c_j - z_j$		5	0	0	-2		

Kryterium wejścia

Kryterium wyjścia: z bazy wyjdzie zmienna dla której wartość b_i / a_i jest najmniejsza (nie bierzemy pod uwagę wartości ujemnych)

$c_i \setminus c_j$		1	2	0	0		
	$x_i \setminus x_j$	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	b_i / a_i
0	x_3	3	0	1	-1	6	2
2	x_2	-2	1	0	1	4	-2
$z_j = \sum_{i=0}^{K} c_i x_i$		-4	2	0	2		
$c_j - z_j$		5	0	0	-2		

Kryterium wejścia

c_i \ c_j		1	2	0	0		
	x_i \ x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	b_i / a_i
0	x_3	3	0	1	-1	6	2
2	x_2	-2	1	0	1	4	-2
$z_j = \sum_{i=0}^{K} c_i x_i$		-4	2	0	2		
$c_j - z_j$		5	0	0	-2		

Kryterium wyjścia

Kryterium wejścia

- Przekształcenie macierzy:
  - wiersz z kryterium wyjścia dzielimy przez wartość leżącą na skrzyżowaniu kryterium wejścia oraz wyjścia.
  - pozostałe wiersze: od *i*-tego wiersza odejmujemy wiersz z kryterium wyjścia (z nowej macierzy) pomnożony przez wartość z i-tego wiersza leżącą w kolumnie z kryterium wejścia.

$c_i \backslash c_j$		1	2	0	0		
	$x_i \backslash x_j$	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	b_i / a_i
0	x_3	3	0	1	-1	6	2
2	x_2	-2	1	0	1	4	-2
$z_j = \sum_{i=0}^{K} c_i x_i$		-4	2	0	2		
$c_j - z_j$		5	0	0	-2		

$c_i \backslash c_j$		1	2	0	0		
	$x_i \backslash x_j$	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	b_i / a_i
1	x_1	1	0	1/3	-1/3	2	
2	x_2						
$z_j = \sum_{i=0}^{K} c_i x_i$							
$c_j - z_j$							

c_i \ c_j		1	2	0	0		
	x_i \ x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	b_i / a_i
0	x_3	3	0	1	-1	6	2
2	x_2	-2	1	0	1	4	-2
$z_j = \sum_{i=0}^{K} c_i x_i$		-4	2	0	2		
$c_j - z_j$		5	0	0	-2		

c_i \ c_j		1	2	0	0		
	x_i \ x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	b_i / a_i
1	x_1	1	0	1/3	-1/3	2	
2	x_2	-2-1*(-2)	1-0*(-2)	0-1/3*(-2)	1-(-1/3)*(-2)	4-2*(-2)	
$z_j = \sum_{i=0}^{K} c_i x_i$							
$c_j - z_j$							

c_i \ c_j		1	2	0	0		
	x_i \ x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	b_i / a_i
1	x_1	1	0	1/3	-1/3	2	
2	x_2	0	1	2/3	1/3	8	
$z_j = \sum_{i=0}^{K} c_i x_i$							
$c_j - z_j$							

c_i \ c_j		1	2	0	0		
	x_i \ x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	b_i / a_i
1	x_1	1	0	1/3	-1/3	2	
2	x_2	0	1	2/3	1/3	8	
$z_j = \sum_{i=0}^{K} c_i x_i$		1	2	5/3	1/3		
$c_j - z_j$		0	0	-5/3	-1/3		

Kryterium stopu spełnione:

MIN – gdy wszystkie wartości z wiersza $c_j - z_j$ są nieujemne

MAX – gdy wszystkie wartości z wiersza $c_j - z_j$ są niedodatnie

Rozwiązanie (zielone pole): $\boldsymbol{x_1=2}$**,** $\boldsymbol{x_2=8}$ **$f(x)$ =18**