METODA FIBONACCIEGO

Ciąg Fibonacciego: $F_0 = F_1 = 1,$ $F_k = F_{k-1} + F_{k-2},$ $k = 2, 3 \ldots$

Dane: $f(x)$, (a, b), ε (dokładność)

Kolejne kroki algorytmu:

1. Znajdź największe takie n, aby $\frac{b-a}{F_n} \geq 2\varepsilon$
2. Oblicz: $x_1 = b - \frac{F_{n-1}}{F_n}(b-a),$ $x_2 = a + \frac{F_{n-1}}{F_n}(b-a)$

Kroki 3-4 dla maksimum

3. Jeżeli $f(x_1) > f(x_2)$ to: $b = x_2,$ $x_2 = x_1,$ $n = n - 1$
   $x_1 = b - \frac{F_{n-1}}{F_n}(b-a),$
   W przeciwnym przypadku: $a = x_1,$ $x_1 = x_2,$ $n = n - 1$
   $x_2 = a + \frac{F_{n-1}}{F_n}(b-a),$
4. Koniec jeśli $|x_2 - x_1| < \varepsilon$ lub $n = 1$ (wynik $x_{max} = \frac{a+b}{2}$). W przeciwnym przypadku powrót do kroku 3.

Kroki 3-4 dla minimum

3. Jeżeli $f(x_1) < f(x_2)$ to: $b = x_2,$ $x_2 = x_1,$ $n = n - 1$
   $x_1 = b - \frac{F_{n-1}}{F_n}(b-a),$
   W przeciwnym przypadku: $a = x_1,$ $x_1 = x_2,$ $n = n - 1$
   $x_2 = a + \frac{F_{n-1}}{F_n}(b-a),$
4. Koniec jeśli $|x_2 - x_1| < \varepsilon$ lub $n = 1$ (wynik $x_{min} = \frac{a+b}{2}$). W przeciwnym przypadku powrót do kroku 3.

PRZYKŁAD: $f(x) = (100 - x)^2,$ $a = 60,$ $b = 150,$ $\varepsilon = 3$

Rozwiązanie analityczne:

$$f'(x) = 2(100 - x)(-1) \quad \rightarrow \quad -2(100 - x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 100$$

$f''(x) = 2$ > 0 – minimum (< 0 – maksimum)

Rozwiązanie metodą Fibonacciego:

1. Znajdź największe takie n, aby $\frac{b-a}{F_n} \geq 2\varepsilon$

$$\frac{150-60}{F_n} \geq 2 \cdot 3 \quad \rightarrow \quad \frac{90}{F_n} \geq 6$$

$$F_1 = 1, \qquad \frac{90}{1} = 90 \geq 6,$$
$$F_2 = 2, \qquad \frac{90}{2} = 45 \geq 6,$$
$$F_3 = 3, \qquad \frac{90}{3} = 30 \geq 6,$$
$$F_4 = 5, \qquad \frac{90}{5} = 18 \geq 6,$$
$$F_5 = 8, \qquad \frac{90}{8} \cong 11.3 \geq 6,$$
$$F_6 = 13, \qquad \frac{90}{13} \cong 6.9 \geq 6,$$
$$F_7 = 21, \qquad \frac{90}{21} \cong 4.3 < 6,$$

$$\boldsymbol{n = 6}$$

$x_1 = 94.615$ $\quad$ $x_2 = 115.385$ $\quad$ $f(x_1) = 28.994$ $\quad$ $f(x_2) = 236.686$

Iteracja 1:

$f(x_1) < f(x_2)$ $\quad$ $(60;\ 115.385)$ $\quad$ $x_2 = 94.615$ $\quad$ $x_1 = 80.769$

$f(x_1) = 369.822$ $\quad$ $f(x_2) = 28.994$

Iteracja 2:

$f(x_1) > f(x_2)$ $\quad$ $(80.769;\ 115.385)$ $\quad$ $x_1 = 94.615$ $\quad$ $x_2 = 101.538$

$f(x_1) = 28.994$ $\quad$ $f(x_2) = 2.367$

Iteracja 3:

$f(x_1) > f(x_2)$ $\quad$ $(94.615;\ 115.385)$ $\quad$ $x_1 = 101.538$ $\quad$ $x_2 = 108.462$

$f(x_1) = 2.367$ $\quad$ $f(x_2) = 71.598$

Iteracja 4:

$f(x_1) < f(x_2)$ $\quad$ $(94.615;\ 108.462)$ $\quad$ $x_2 = 101.538$ $\quad$ $x_1 = 101.538$

$f(x_1) = 2.367$ $\quad$ $f(x_2) = 2.367$

$|x_2 - x_1| < \varepsilon = 3$ $\quad$ rozwiązanie $\quad$ $x = 101.538$