Zastosowanie metod rozwiązywania równań nieliniowych

Ekstremum można wyznaczyć poprzez wyznaczenie miejsca zerowego pochodnej. W związku z tym będziemy poszukiwali miejsca zerowego pochodnej funkcji w przedziale $[a, b]$ w przybliżeniu zgodnie z zadaną wartością błędu ε. Należy zrealizować trzy metody przedstawione poniżej.

WARUNEK KONIECZNY: $f'(a) \cdot f'(b) < 0$

WSKAZÓWKA: Warunek ten należy sprawdzić dla wszystkich metod. W przypadku, kiedy warunek jest spełniony wykonujemy metodę, w przeciwnym przypadku należy wypisać informację „warunek konieczny nie jest spełniony".

1. Metoda bisekcji (połowienia przedziałów)

Kolejne kroki metody:

1. Dzielimy aktualny przedział $[a, b]$ na połowę
$$x_{\mathrm{sr}} = \frac{1}{2}(a + b)$$
2. Jeżeli $f'(x_{\mathrm{sr}}) = 0$, to koniec działania metody i x_{sr} jest naszym rozwiązaniem, w przeciwnym przypadku: jeśli $f'(x_{\mathrm{sr}}) \cdot f'(a) < 0$ (czyli warunek konieczny jest spełniony pomiędzy a oraz x_{sr}), wtedy wybieramy nowy przedział $[a, x_{\mathrm{sr}}]$, w przeciwnym przypadku $[x_{\mathrm{sr}}, b]$.
3. Jeżeli $|f'(x_{\mathrm{sr}})| < \varepsilon$, to rozwiązaniem jest x_{sr}, w przeciwnym przypadku wracamy do punktu 1.

Przykład: Znaleźć z dokładnością do $\varepsilon = 0.05$ w przedziale $[1, 2]$ ekstremum funkcji:

$$f(x) = \frac{1}{3}\mathrm{x}^3 + \frac{1}{2}\mathrm{x}^2 - 5x + 2$$

Rozwiązanie analityczne:

$f'(x) = \mathrm{x}^2 + x - 5$ $\qquad$ $\mathrm{x}^2 + x - 5 = 0$

$\Delta = 1 - 4 \cdot (-5) = 21$ $\qquad$ $\sqrt{\Delta} = 4{,}58257569$

$x_1 = \frac{-1-4{,}58257569}{2\cdot 1} = -2{,}79128785$ $\qquad$ $x_2 = \frac{-1+4{,}58257569}{2\cdot 1} = 1{,}79128785$

Rozwiązanie:

$$a = 1\,; \qquad b = 2$$

$$f'(1) = -3\,; \qquad f'(2) = 1$$

Warunek konieczny spełniony:

$$f'(a) \cdot f'(b) = f'(1) \cdot f'(2) = (-3) \cdot 1 = -3 < 0$$

Iteracja 1:

$$x_{\text{sr}} = \frac{a+b}{2} = \frac{1+2}{2} = 1.5$$

$$f'(x_{\text{sr}}) = f'(1.5) = -1.25$$

W związku z tym, że znak funkcji zmienia się na przedziale od x_{sr} do b, dlatego nowym przedziałem będzie [1.5, 2].

Iteracja 2:

$$x_{\text{sr}} = \frac{1.5+2}{2} = 1.75 \qquad f'(1.75) = -0.1875$$

Zmiana znaku na przedziale x_{sr} do b, więc [1.75, 2]

Warunek stopu: $|f'(x_{\text{sr}})| < \varepsilon \quad |-0.1875| > 0.05$

Iteracja 3:

$$x_{\text{sr}} = \frac{1.75+2}{2} = 1.875 \qquad f'(1.875) = 0.3906$$

Zmiana znaku na przedziale a do x_{sr}, więc [1.75, 1.875]

Warunek stopu: $|f'(x_{\text{sr}})| < \varepsilon \quad |0.3906| > 0.05$

Iteracja 4:

$$x_{\text{sr}} = \frac{1.75+1.875}{2} = 1.8125 \qquad f'(1.8125) = 0.0976$$

Zmiana znaku na przedziale a do x_{sr}, więc [1.75, 1.8125]

Warunek stopu: $|f'(x_{\text{sr}})| < \varepsilon \quad |0.0976| > 0.05$

Iteracja 5:

$$x_{\text{sr}} = \frac{1.75+1.8125}{2} = 1.78125 \qquad f'(x_{\text{sr}}) = -0.0459$$

Warunek stopu: $|f'(x_{\text{sr}})| < \varepsilon \quad |-0.0459| < 0.05$

Rozwiązaniem dla $\varepsilon = 0.05$ jest $x_{\text{sr}} = 1.78125$

2. Metoda stycznych (Newtona)

Warunki zbieżności (te same znaki pierwszej i drugiej pochodnej na przedziale $[a, b]$):

$$f''(a) \cdot f''(b) \geq 0 \qquad f'''(a) \cdot f'''(b) \geq 0$$

WSKAZÓWKA: Warunki należy sprawdzić i jeśli nie są spełnione wypisać informacje: „warunki zbieżności nie są spełnione". Nie uzależniać uruchomienia metody od powyższych warunków.

Metoda stycznych określona jest następującym wzorem iteracyjnym:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}$$

gdzie pierwszą wartość x_n wyznacza się następująco:

Jeśli $f'''(a)$ oraz $f'(a)$ mają te same znaki, to punkt startowy $x_0 = a$, w przeciwnym przypadku $x_0 = b$.

Wzór iteracyjny kontynuujemy do momentu spełnienia warunku stopu: $|f'(x_{\mathrm{n+1}})| < \varepsilon$ lub $|x_{\mathrm{n+1}} - x_{\mathrm{n}}| < \varepsilon$

Jeśli warunek stopu zostanie spełniony rozwiązaniem będzie $x_{\mathrm{n+1}}$.

Przykład: Znaleźć z dokładnością do $\varepsilon = 0.01$ w przedziale $[1, 2]$ ekstremum funkcji:

$$f(x) = \frac{1}{3}\mathrm{x}^3 + \frac{1}{2}\mathrm{x}^2 - 5x + 2$$

$$f'(x) = \mathrm{x}^2 + x - 5$$

Rozwiązanie:

$$f'(x) = x^2 + x - 5 \qquad f''(x) = 2x + 1 \qquad f'''(x) = 2$$

$$a = 1\,; \qquad f'(1) = -3\,; \qquad f''(1) = 3$$

$$b = 2\,; \qquad f'(2) = 1\,; \qquad f''(2) = 5$$

Warunek konieczny spełniony:

$$f'(a) \cdot f'(b) = f'(1) \cdot f'(2) = (-3) \cdot 1 = -3 < 0$$

Warunki zbieżności spełnione:

$$f''(1) \cdot f''(2) \geq 0 \qquad f'''(1) \cdot f'''(2) \geq 0$$

Punktem startowym będzie $x_0 = b = 2$, gdyż $f'''(2)$ oraz $f'(2)$ mają ten sam znak.

$$x_1 = x_0 - \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)} = 2 - \frac{f'(2)}{f''(2)} = 2 - \frac{1}{5} = 1.8$$

$$f'(x_1) = f'(1.8) = 0.04 \qquad f''(x_1) = f''(1.8) = 4.6$$

Warunek stopu nie jest spełniony:

$$|0.04| > 0.01 \quad \text{oraz} \quad |1.8 - 2| > 0.01$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f'(x_1)}{f''(x_1)} = 1.8 - \frac{0.04}{4.6} = 1.7913$$

Warunek stopu spełniony:

$$f'(x_2) = f'(1.7913) = 0.00007 \quad < \ 0.01$$

Rozwiązaniem dla $\varepsilon = 0.01$ jest $x_2 = 1.7913$

3. Metoda siecznych

Punkt nieruchomy, to punkt w którym pierwsza i trzecia pochodna mają te same znaki. Odpowiednio w zależności od tego czy nieruchome jest a czy b rozróżniamy dwa przypadki wzoru iteracyjnego metody:

a) Jeśli nieruchome jest a, wtedy jako punkt startowy przyjmujemy $x_0 = b$ oraz stosujemy następujący wzór iteracyjny:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f'(x_n) - f'(a)}(x_n - a)$$

b) Jeśli nieruchome jest b, wtedy jako punkt startowy przyjmujemy $x_0 = a$ oraz stosujemy następujący wzór iteracyjny:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f'(b) - f'(x_n)}(b - x_n)$$

Wzór iteracyjny kontynuujemy do momentu spełnienia warunku stopu: $|f'(x_{n+1})| < \varepsilon$ lub $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$

Jeśli warunek stopu zostanie spełniony rozwiązaniem będzie x_{n+1}.

Przykład: Znaleźć z dokładnością do $\varepsilon = 0.01$ w przedziale $[1, 2]$ ekstremum funkcji:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x + 2$$

$$f'(x) = x^2 + x - 5$$

Rozwiązanie:

$$f'(x) = x^2 + x - 5 \quad f''(x) = 2x + 1 \quad f'''(x) = 2$$

$$a = 1\,; \quad f'(1) = -3\,; \quad f''(1) = 3$$

$$b = 2\,; \quad f'(2) = 1\,; \quad f''(2) = 5$$

Warunek konieczny spełniony:

$$f'(a) \cdot f'(b) = f'(1) \cdot f'(2) = (-3) \cdot 1 = -3 < 0$$

Nieruchomym punktem w tym przypadku jest b, ponieważ pierwsza oraz trzecia pochodna w tym punkcie mają ten sam znak. W związku z tym punktem startowym będzie $x_0 = a = 1$ i stosujemy wzór:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f'(b) - f'(x_n)}(b - x_n)$$

Iteracja 1:

$$x_1 = x_0 - \frac{f'(x_0)}{f'(b) - f'(x_0)}(b - x_0) = 1 - \frac{-3}{1 - (-3)}(2 - 1) = 1 + \frac{3}{4} = 1.75$$

$$f'(x_1) = f'(1.75) = -0{,}1875$$

Kryterium stopu nie spełnione:

$$|-0{,}1875| > 0.01 \quad \text{oraz} \quad |1.75 - 1| > 0.01$$

Iteracja 2:

$$x_2 = x_1 - \frac{f'(x_1)}{f'(b) - f'(x_1)}(b - x_1) = 1.75 - \frac{-0.1875}{1.75 - (-0.1875)}(2 - 1.75) = 1.7895$$

$$f'(x_2) = f'(1.7895) = -0{,}00819$$

Kryterium stopu spełnione: $|-0{,}00818975| < 0.01$

Rozwiązaniem dla $\varepsilon = 0.01$ jest $x_2 = 1.7895$