

Bab 1

Gugus dan Kombinatorika

1.1 Gugus

Gugus, atau juga disebut himpunan adalah kumpulan objek. Objek dalam sebuah himpunan disebut anggota atau unsur. Penulisan himpunan dapat dilakukan dengan dua cara, yaitu senarai (*listing*) dan deskripsi. Contoh himpunan yang ditulis dengan bentuk senarai adalah $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, sedangkan dalam bentuk deskripsi adalah $A = \{x; 1 \leq x \leq 6, x \text{ adalah bilangan bulat}\}$.

Beberapa hal atau definisi yang perlu diperhatikan dalam suatu himpunan:

- Notasi \in digunakan untuk menyatakan *anggota himpunan*, sedangkan notasi \notin untuk menyatakan *bukan anggota himpunan*.
- Himpunan yang tidak mengandung anggota dinamakan himpunan kosong, dilambangkan dengan \emptyset atau $\{\}$.
- Himpunan bagian (subset): A disebut sebagai himpunan bagian dari B , atau dilambangkan sebagai $A \subseteq B$ jika setiap anggota himpunan A adalah juga anggota himpunan B .
- Himpunan $A = B$ jika dan hanya jika $A \subseteq B$ dan juga $B \subseteq A$.
- Jika A dan B adalah dua himpunan sedemikian sehingga $A \subseteq B$ tetapi $A \neq B$, maka dikatakan A sebagai **proper subset** dari B , dilambangkan dengan $A \subset B$.
- Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari setiap himpunan.

Operasi dasar himpunan adalah gabungan (*union*), irisan (*intersection*), dan komplemen.

- Himpunan A gabung B , dituliskan $A \cup B = \{x; x \in A \text{ atau } x \in B \text{ atau keduanya}\}$.

- Himpunan A irisan B , dituliskan $A \cap B = \{x; x \in A \text{ dan juga } x \in B\}$.
- Komplemen dari A , dituliskan $A^c = \{x; x \in S, x \notin A\}$, S adalah himpunan semesta.
- Hukum deMorgan:
 - $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
 - $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

1.2 Kombinatorika

1.2.1 Pencacahan

Perhatikan contoh kasus berikut. Ali membeli sebuah lampu pijar dari suatu toko. Sebelum membayar, lampu itu dicobanya dahulu apakah dapat menyala atau mati. Apa saja kemungkinan yang akan terjadi?

Kegiatan mencoba lampu pijar dinamakan **percobaan**. Setiap lampu yang akan dicoba hanya memiliki dua kemungkinan hasil, yaitu nyala atau mati, misalkan dilambangkan sebagai A (nyala) atau M (mati). Maka hasil percobaan yang mungkin terjadi, dapat dinotasikan sebagai himpunan $P = \{A, M\}$. Bagaimana hasil percobaan jika Ali membeli dua lampu pijar?

Kaidah pencacahan mencoba menemukan berapa banyaknya hasil yang mungkin muncul pada berbagai macam percobaan. Misalnya, pada lomba lari cepat 100m, empat orang pelari lolos ke putaran final, yaitu A , B , C , dan D . Pada pertandingan itu tersedia hadiah untuk juara I dan II. Pertanyaan yang mungkin muncul, *berapa macam susunan pemenang yang akan muncul di akhir pertandingan?* Hasil susunan pemenang yang mungkin adalah $P = \{AB, AC, AD, BA, BC, BD, CA, CB, CD, DA, DB, DC\}$ atau sebanyak $4(4-1)=12$ kemungkinan.

Latihan

Seseorang asal Jakarta akan melakukan perjalanan berawal di Bandung, kemudian ke Yogyakarta, dan berakhir di Surabaya. Saat ini dia harus memutuskan jenis transportasi yang akan digunakan. Dari Jakarta ke Bandung, dia bisa memilih bus atau pesawat, dari Bandung ke Yogya bisa memilih bus, pesawat, atau kereta api, dan dari Yogya ke Surabaya bisa memilih naik bus atau kereta api. Berapa macam jenis transportasi yang dapat dipilih?

Tidak ada aturan yang pasti untuk menjawab pertanyaan berapa banyak hasil yang mungkin muncul dari suatu percobaan. Secara umum, biasanya dipakai salah satu atau gabungan dari pendekatan-pendekatan yang disebut **permutasi** dan **kombinasi**.

1.2.2 Permutasi

Misalkan terdapat dua percobaan. Jika percobaan 1 menghasilkan m kemungkinan kejadian, dan percobaan 2 menghasilkan n kemungkinan kejadian, maka akan ada mn kemungkinan kejadian dari percobaan bersama 1 dan 2.

Contoh 1.1

Dalam suatu kelas terdapat 3 mahasiswa laki-laki dan 2 perempuan. Mereka diberi ujian dan diperingkat berdasarkan nilai ujian. Asumsikan tidak ada dua mahasiswa memperoleh nilai ujian yang sama.

1. Berapa banyak susunan peringkat berbeda yang mungkin dihasilkan?
2. Jika mahasiswa laki-laki diperingkat sendiri, dan demikian juga mahasiswa perempuan, berapa banyak susunan peringkat berbeda yang mungkin?

Contoh 1.2

Ali memiliki 10 buku, yaitu 4 Matematika, 3 Kimia, 2 Sejarah, dan 1 Bahasa. Ia ingin menyusun buku dimana yang sejenis mengelompok menjadi satu. Berapa banyak susunan buku yang mungkin?

Contoh 1.3

Berapa banyak susunan yang dapat dihasilkan dari huruf-huruf $P E P P E R$?

Contoh 1.4

Berapa banyak susunan bendera yang mungkin jika terdapat 4 bendera biru, 3 bendera merah, dan 2 bendera kuning?

1.2.3 Kombinasi

Kita sering dihadapkan pada persoalan menentukan sejumlah r objek yang dapat disusun dari total n objek. Misalkan berapa banyak kemungkinan 3 objek dapat dipilih dari 5 objek A, B, C, D, dan E? Persoalan ini sama saja dengan memilih satu per satu objek berturut-turut. Pemilihan pertama menghasilkan 5 kemungkinan, pemilihan kedua menghasilkan 4 kemungkinan, dan terakhir ada 3 kemungkinan. Oleh karena itu, secara bersama akan ada $5.4.3$ kemungkinan.

Misalkan yang terpilih adalah A, B, dan C, maka susunan yang mungkin terjadi ada $3!=6$ kemungkinan, yaitu ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, dan CBA. Karena urutan pemilihan tidak diperhatikan, maka untuk masalah ini diperoleh banyaknya kemungkinan:

$$\frac{5.4.3}{3.2.1} = 10$$

Secara umum, jika dipilih r objek dari n objek dimana urutan terpilih tidak diperhatikan, maka diperoleh banyaknya kemungkinan:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \binom{n}{r}$$

Nilai $\binom{n}{r}$ disebut sebagai **koefisien binomial**.

Contoh 1.5

Suatu panitia terdiri dari 3 orang dipilih dari 20 orang. Berapa banyak kemungkinan anggota panitia dapat terpilih?

Contoh 1.6

Dari 5 perempuan dan 7 laki-laki, berapa kemungkinan yang terjadi jika dipilih anggota panitia yang terdiri dari 2 perempuan dan 3 laki-laki? Bagaimana jika 2 dari laki-laki bermusuhan dan menolak ada dalam panitia secara bersama?

Teorema Binomial

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

1.2.4 Koefisien Multinomial

Terdapat n objek berbeda dibagi ke dalam r kelompok yang berbeda masing-masing berukuran n_1, n_2, \dots, n_r , dimana $\sum_{i=1}^r n_i = n$. Maka banyaknya kemungkinan yang terjadi adalah

$$\begin{aligned} \binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \dots \binom{n-n_1-n_2-\dots-n_{r-1}}{n_r} \\ = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_r!} \end{aligned}$$

Contoh 1.7

Suatu Kantor Polsek memiliki anggota 10 polisi. Jika 5 polisi adalah petugas patroli di jalan, 2 polisi pos jaga, dan 3 polisi administrasi, berapa banyak susunan yang mungkin?

Contoh 1.8

Ada 10 orang pemain basket dibagi ke dalam tim A dan B, masing-masing 5 orang. Tim A bermain di satu liga, dan tim B bermain di liga lainnya. Berapa banyak pembagian tim yang mungkin terjadi?

Contoh 1.9

Dalam permainan basket, 10 orang dibagi ke dalam dua tim, masing-masing beranggotakan 5 orang. Berapa banyak pembagian tim yang mungkin terjadi?

1.2.5 Sebaran Bola dalam Keranjang

Peristiwa menempatkan r bola yang sama ke dalam n wadah yang berbeda. Misal x_i adalah banyaknya bola yang berhasil ditempatkan pada wadah ke- i sehingga $x_1 + x_2 + \dots + x_n = r$. Maka banyaknya kemungkinan susunan x_i adalah

$$\binom{r-1}{n-1}, x_i > 0 \text{ dan } \sum_{i=1}^r x_i = n$$

Jika diketahui $y_i = x_i + 1$ untuk $i = 1, 2, \dots, r$ maka $y_1 + y_2 + \dots + y_n = n + r$. Dengan demikian, diperoleh juga banyaknya kemungkinan susunan menjadi

$$\binom{n+r-1}{n-1} = \binom{n+r-1}{r}, \sum_{i=1}^r x_i = n$$

Contoh 1.10

Berapa banyak bilangan non-negatif berbeda sebagai jawaban persamaan $x_1 + x_2 = 3$ yang mungkin?

Contoh 1.11

Seorang investor mempunyai uang 20 ribu dollar, ingin menginvestasikan uang tersebut ke dalam 4 jenis investasi yang berbeda. Setiap investasi harus dalam satuan seribu dollar. Jika total uang 20 ribu dollar diinvestasikan semua, ada berapa kemungkinan strategi investasi yang bisa dilakukan? Bagaimana jika tidak semua uang tersebut diinvestasikan (artinya ada uang yang disimpan)?

1.3 Kesimpulan

Teorema Pembilangan

Jika tindakan $1, 2, \dots, k$ dilaksanakan berurutan dan masing-masing tindakan dapat menimbulkan n_1, n_2, \dots, n_k peristiwa, serta tindakan-tindakan tersebut tidak berkaitan satu sama lain, maka banyaknya rangkaian peristiwa yang mungkin timbul ada $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k = \prod_{i=1}^k n_i$.

Permasalahan kombinatorial dapat dirumuskan sebagai pengambilan r objek dari n objek yang berbeda. Pengambilan dapat dilakukan dengan dua cara:

1. Tanpa pemulihan (*without replacement*), $r \leq n$
2. Dengan pemulihan (*with replacement*), r dapat $<$, $=$, atau $>$ dari n

Pengambilan tanpa pemulihan maupun dengan pemulihan, dapat bersifat:

1. Tidak tertata (*unordered*) jika urutan objek yang terambil tidak diperhatikan
2. Tertata (*ordered*) jika urutan objek yang terambil diperhatikan

Dengan demikian, permasalahan kombinatorial tersebut dapat disimpulkan seperti pada tabel berikut:

Urutan objek yang terambil	Cara pengambilan Tanpa pemulihan	Cara pengambilan Dengan pemulihan
Tertata	Permutasi r dari n objek yang berbeda $nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$	Permutasi r bola yang berbeda ke dalam n wadah n^r
Tidak Tertata	Kombinasi r objek dari n objek $nCr = \binom{n}{r}$	Penempatan r bola yang sama ke dalam n wadah $\binom{n+r-1}{r}$

1.4 Latihan Soal

1. (a) Berapa banyak kemungkinan 7 karakter kode yang mungkin jika 2 karakter pertama berupa huruf besar, dan 5 lainnya berupa angka?
- (b) Jika tidak boleh ada huruf atau angka yang sama dalam satu kode, berapa banyak kemungkinan yang dapat disusun?

2. Berapa banyak urutan hasil yang mungkin ketika dadu bersisi 6 dilempar empat kali, dan diperoleh sisi, misalnya (ini hanya contoh): 3, 4, 3, 1, jika sisi yang muncul pertama kali adalah 3, yang kedua adalah 4, yang ketiga adalah 3, dan keempat adalah 1?
3. (a) Berapa banyak susunan 3 laki-laki dan 3 perempuan duduk sebaris?
(b) Berapa banyak susunannya jika laki-laki dan perempuan masing-masing duduk berdampingan?
4. Seorang anak memiliki 12 kotak: 6 hitam, 4 merah, 1 putih, dan 1 biru. Jika anak tersebut menyusun kotak dalam satu baris, berapa banyak susunan yang mungkin?
5. Satu kelas tari terdapat 22 siswa: 10 perempuan dan 12 laki-laki. Jika dipilih 5 laki-laki dan 5 perempuan kemudian dipasangkan, ada berapa banyak kemungkinannya?
6. Jika 12 orang dibagi ke dalam 3 tim, masing-masing terdiri dari 3, 4, dan 5 orang, ada berapa banyak kemungkinan pembagiannya?
7. Buktikan bahwa

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$