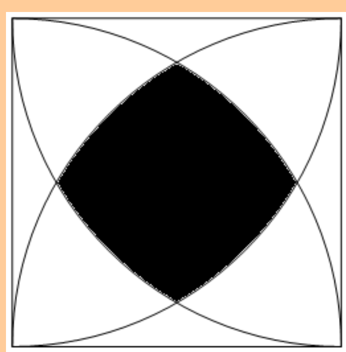
PEMBINAAN OSK
BIDANG INFORMATIKA 2010

Rully Soelaiman

Fakultas Teknologi Informasi
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Logika

- Jumlah dua digit pertama dari bilangan hasil perkalian $5^{30003} \times 8^{10004}$ adalah ?
- Jika panjang sisi bujursangkar berikut adalah s, maka luas daerah yang diarsir adalah



Logika Matematika

- Jumlah dua digit pertama dari bilangan hasil perkalian $5^{30003} \times 8^{10004}$ adalah ?

Solusi

$$5^{30003} \times 8^{10004} = \left(\frac{10}{2}\right)^{30003} \times \left(2^3\right)^{10004}$$

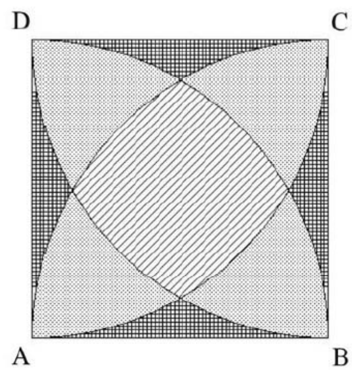
$$= \frac{2^{30012}}{2^{30003}} \times 10^{30003}$$

$$= 2^9 \times 10^{30003}$$

$$= 512 \times 10^{30003}$$

Is This Integration?

The image below shows a square $ABCD$, where $AB = BC = CD = DA = a$. Four arcs are drawn taking the four vertexes A, B, C, D as centers and a as the radius. The arc that is drawn taking A as center starts at neighboring vertex B and ends at neighboring vertex D. All other arcs are drawn in a similar fashion. Regions of three different shapes are created in this fashion. You must determine the total area of these different shaped regions.



Input

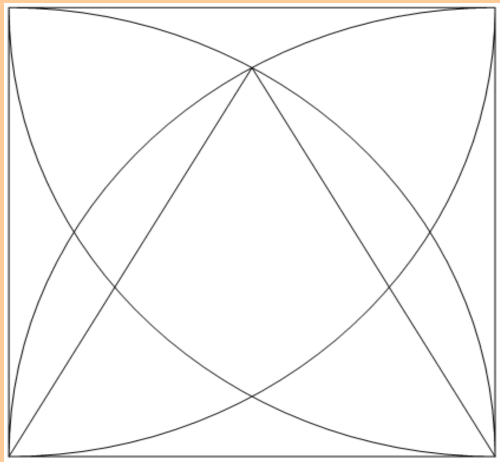
Each line of the input file contains a floating-point number a indicating the side length of the square, where $0 \leq a \leq 10,000.0$. Input is terminated by end of file.

Output

For each test case, output on a single line the area of the different region types in the image above. Each floating point number should be printed with three digits after the decimal point. The first number of each case will denote the area of the striped region, the second number will denote the total area of the dotted regions, and the third number will denote the rest of the area.

Sample Input	*Sample Output*
`0.1`	`0.003 0.005 0.002`
`0.2`	`0.013 0.020 0.007`
`0.3`	`0.028 0.046 0.016`

Logical Solution



```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

const double PI = acos(-1);

int main()
{
        double a;
        double area1,area2;
        while (scanf("%lf",&a)==1)
        {
                area1 = ( PI/3.0 - sqrt(3) + 1.0 )*a*a;
                area2 = ( PI/3.0 + 2.0*sqrt(3) -4.0 )*a*a;
                printf("%.3lf %.3lf %.3lf\n",area1,area2,a*a-area1-area2);
        }
return 0;
}
```

Deret

Tentukan rumusan untuk penjumlahan berikut

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n!$$

Solusi

Ambil satu suku pada posisi ke-r pada penjumlahan tersebut, maka dapat diperoleh

$$r.r! = r.r! + r! - r!$$
$$= r!(r+1) - r!$$
$$= (r+1)! - r!$$

Sehingga

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + (n-1) \cdot (n-1)! + n.n!$$
$$= 2! - 1! + 3! - 2! + 4! - 3! + \cdots + n! - (n-1)! + (n+1)! - n!$$
$$= (n+1)! - 1$$

Berapakah digit keempat dari kanan pada bilangan 5^{5231}?

(A) 3

(B) 5

(C) 6

(D) 8

(E) 9

- Perhatikan keteraturan yang terbentuk

Pangkat	Nilai
0	1
1	5
2	25
3	125
4	625
5	3125
6	15625
7	78125
8	390625
9	1953125

Pangkat	Nilai
10	9765625
11	48828125
12	244140625
13	1220703125
14	6103515625

- Kesimpulan dengan x adalah nilai pangkat ≥ 5 :
- Jika (x-5) mod 4 = 0, maka nilai digit ke-4 = 3
- Jika (x-5) mod 4 = 1, maka nilai digit ke-4 = 5
- Jika (x-5) mod 4 = 2, maka nilai digit ke-4 = 8
- Jika (x-5) mod 4 = 3, maka nilai digit ke-4 = 0

- Sehingga untuk x = 5231
- (5231-5) mod 4 =2, sehingga nilai digit ke-4 = 8

Berikut ini suatu permainan yang akan anda mainkan berdua dengan lawan anda. Dengan saling berhadapan, ditengah-tengah terdapat mangkuk berisi 50 kelereng. Anda dan lawan anda secara bergantian akan mengambil satu sampai dengan lima butir kelereng sekali raih dari mangkuk (tidak boleh lebih dari 5 butir, dan minimal satu butir). Pemain yang melakukan pengambilan terakhir (yang menyebabkan mangkuk kosong) adalah pemenang permainan ini. Lawan anda adalah seorang yang ahli dalam permainan ini sehingga tidak akan membuat kesalahan yang dapat menyebabkan ia menjadi kalah kecuali kondisi yang anda berikan sehingga ia tidak memiliki pilihan untuk menang.

11. Kini giliran anda untuk mengambil pertama kali. Berapakan yang anda ambil pertama kali agar anda akhirnya menang?
(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) 5

Soal 11

- Persoalan tersebut merupakan varian dari Combinatorial Game yang bernama Nim. Analisis terhadap persoalan tersebut telah diberikan oleh Charles L. Bouton (Harvard Univ. 1902). Langkah untuk *Normal Play* (The last player to move wins) adalah sebagai berikut :

1. Jika n adalah banyak kelereng dan k adalah banyak pengambilan tiap pemain yang diijinkan $\{1..p\}$, maka tentukan $m_k=(n-k) \bmod (p+1)$.
2. k yang menghasilkan $m_k = 0$ akan dipilih sebagai pengambilan awal yang selalu memberikan kemenangan pada pemain pertama.
3. Langkah nomor dua tersebut juga berlaku untuk langkah berikutnya hingga permainan selesai.

Soal 11

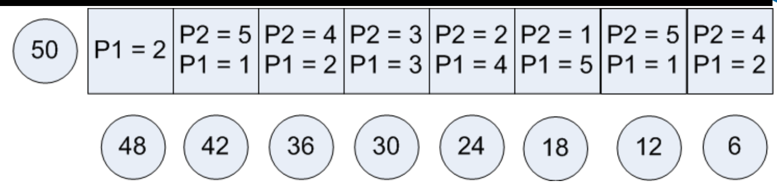
- Karena n=50 dan $k = \{1,2,3,4,5\}$, maka
- $m_1 = 49 \bmod 6 = 1$,
- $m_2 = 48 \bmod 6 = 0$,
- $m_3 = 47 \bmod 6 = 5$,
- $m_4 = 46 \bmod 6 = 4$,
- $m_5 = 45 \bmod 6 = 3$.
- Sehingga banyak pengambilan berikut yang memberikan kemenangan pada pemain pertama adalah 2.

Contoh

Langkah ke	Pemain	k	sisa	Ket
1	1	2	48	
2	2	5	43	
3	1	1	42	
4	2	4	38	
5	1	2	36	
6	2	3	33	
7	1	3	30	
8	2	2	28	
9	1	4	24	
10	2	1	23	
11	1	5	18	
12	2	5	13	
13	1	1	12	
14	2	4	8	
15	1	2	6	
16	2	3	3	
17	1	3	0	Menang

12. Anda mendapat giliran pertama untuk mengambil dan anda selama ini menjaga situasi agar anda akhirnya menang. Jika permainan berlangsung hingga lawan telah anda mengambil berturut-turut 3, 1, 5, 5, dan 4, dan berikutnya giliran anda. Berapakah jumlah kelereng yang sudah anda ambil sebelum pengambilan anda yang berikutnya (tidak termasuk yang akan anda ambil)?
(A) 7
(B) 10
(C) 12
(D) 15
(E) 20

Soal 12



- Amati pola diatas, sehingga urutan pengambilannya adalah

Langkah ke	Pemain	k	sisa
1	1	2	48
2	2	3	45
3	1	3	42
4	2	1	41
5	1	5	36
6	2	5	31
7	1	1	30
8	2	5	25
9	1	1	24
10	2	4	20
11	1		

Total yang diambil pemain pertama

2+3+5+1+1=12

13. Anda mendapat giliran pertama untuk mengambil dan anda selama ini menjaga situasi agar anda akhirnya menang. Jika selama permainan lawan selalu mengambil sebanyak-banyaknya. Berapakah jumlah kelereng yang akhirnya anda kumpulkan hingga selesai (dan anda menang tentunya)?
(A) 7
(B) 10
(C) 12
(D) 15
(E) 20

Soal 13

Langkah ke	Pemain	k	sisa	Ket
1	1	2	48	
2	2	5	43	
3	1	1	42	
4	2	5	37	
5	1	1	36	
6	2	5	31	
7	1	1	30	
8	2	5	25	
9	1	1	24	
10	2	5	19	
11	1	1	18	
12	2	5	13	
13	1	1	12	
14	2	5	7	
15	1	1	6	
16	2	5	1	
17	1	1	0	Menang

Total kelereng pemain pertama

$2 + 8\times1 = 10$

14. Jika banyaknya kelereng semula diperbanyak dan anda tetap sebagai pemain yang mendapat giliran pertama mengambilnya, berapakah jumlah awal kelereng berikut ini yang dapat menyebabkan anda kalah?
    (A) 102
    (B) 121
    (C) 77
    (D) 155
    (E) 82

Soal 14

- Pemain pertama akan kalah jika tidak terdapat k yang menghasilkan $m_k = 0$.

n	mk
101	5
100	4
99	3
98	2
97	1

n	mk
120	0
119	5
118	4
117	3
116	2

n	mk
76	4
75	3
74	2
73	1
72	0

n	mk
154	4
153	3
152	2
151	1
150	0

n	mk
81	3
80	2
79	1
78	0
77	5

Kombinatorik

- Dengan berapa carakah delapan laki-laki dan lima perempuan dapat duduk dalam satu baris, bila terdapat aturan bahwa dua perempuan tidak diperbolehkan duduk saling bersebelahan.

- Dengan berapa carakah delapan laki-laki dan lima perempuan dapat duduk dalam satu baris, bila terdapat aturan bahwa dua perempuan tidak diperbolehkan duduk saling bersebelahan.
- Bentuk susunan yang dapat memenuhi aturan bahwa dua perempuan tidak diperbolehkan duduk saling bersebelahan, sebagai berikut :

S1	L1	S2	L2	S3	L3	S4	L4	S5	L5	S6	L6	S7	L7	S8	L8	S9

- Slot L1..L8 adalah tempat duduk laki-laki
- Slot S1..S9 adalah tempat duduk yang dapat ditempati perempuan sesuai dengan aturan.

- Kedelapan laki-laki dapat menempati slot L1..L8 sebanyak 8! susunan.
- Untuk tiap **1 susunan** yang terdiri atas **delapan laki-laki** :
- Kelima perempuan dapat menempati slot S1..S9 sebanyak $P(9,5) = \frac{9!}{4!} = 9.8.7.6.5$ susunan.
- Sehingga banyak susunan untuk delapan laki-laki dan lima perempuan untuk dapat duduk dalam satu baris
  = 8!.9.8.7.6.5
  = 609.638.400

- Terdapat enam pelari di lintasan lari 100 m. Berapa banyak susunan pemberian tiga medali yang dapat terjadi jika ada kemungkinan beberapa pelari finish secara bersamaan. Medali emas akan diberikan pada pelari atau kelompok pelari yang finish dengan waktu tercepat, medali perak akan diberikan pada pelari atau kelompok pelari yang finish pada urutan setelah tepat satu pelari didepan, medali perunggu akan diberikan pada pelari atau kelompok pelari yang finish pada urutan setelah tepat dua pelari didepan.

Emas	Perak	Perunggu	Banyak Kejadian	
1	1	1	$C^6_1 C^5_1 C^4_1$	120
1	1	2	$C^6_1 C^5_1 C^4_2$	180
1	1	3	$C^6_1 C^5_1 C^4_3$	120
1	1	4	$C^6_1 C^5_1 C^4_4$	30
1	2	0	$C^6_1 C^5_2$	60
1	3	0	$C^6_1 C^5_3$	60
1	4	0	$C^6_1 C^5_4$	30
1	5	0	$C^6_1 C^5_5$	6
2	0	1	$C^6_2 C^4_1$	60
2	0	2	$C^6_2 C^4_2$	90
2	0	3	$C^6_2 C^4_3$	60
2	0	4	$C^6_2 C^4_4$	15
3	0	0	C^6_3	20
4	0	0	C^6_4	15
5	0	0	C^6_5	6
6	0	0	C^6_6	1
TOTAL				873

Tentukan penyelesaian 3^{2003} mod 99 dengan menggunakan Algoritme Modular Exponentiation berikut

```
procedure modular exponentiation (b:integer,n=(ak-1ak-2...a1a0)2,
m:positive integer)
x := 1
power := b mod m
for i := 0 to k-1
begin
   if ai = 1 then x := (x.power) mod m
   power := (power.power) mod m
end
{x equals bn mod m }
```

$2003 = (11111010011)_2$

i	a_i	x	$power$
0	1	3 mod 99 = 3	9 mod 99 = 9
1	1	27 mod 99 = 27	81 mod 99 = 81
2	0	27	6561 mod 99 = 27
3	0	27	729 mod 99 = 36
4	1	972 mod 99 = 81	1296 mod 99 = 9
5	0	81	81 mod 99 = 81
6	1	6561 mod 99 = 27	6561 mod 99 = 27
7	1	729 mod 99 = 36	729 mod 99 = 36
8	1	1296 mod 99 = 9	1296 mod 99 = 9
9	1	81 mod 99 = 81	81 mod 99 = 81
10	1	6561 mod 99 = 27	6561 mod 99 = 27

Relasi Rekurensi

ITS Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Potongan algoritma berikut untuk menjawab pertanyaan 46 -48

```
jdata := n;
jml := 1;
for i := 0 to jdata-1 do begin
    jml := 3*jml-1;
end;
writeln(jml);
```

46. Jika sebelumnya n berharga 3 berapakah yang dicetak oleh potongan program itu.
    (A) 58
    (B) 42
    (C) 14
    (D) 26
    (E) 15

47. Jika sebelumnya n berharga 1 berapakah yang dicetak oleh potongan program itu.
    (A) 1
    (B) 2
    (C) 3
    (D) 4
    (E) 5

48. Secara umum, dengan n bulat positif apakah harga yang dicetak oleh program itu sebagai fungsi dalam a.
    (A) $5n - 2$
    (B) $3^n - 3^{n-1} - \dots - 3^1 - 3^0$
    (C) $3^{n-1} + 5$
    (D) $n^2 + 5$
    (E) $3^{n-1} + 3^{n-2} \dots + 3^1 + 1$

FUNGSI PEMBANGKITAN

Fakultas Teknologi Informasi
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Fungsi Numerik Diskrit dan Fungsi Pembangkitan

- Fungsi Numerik Diskrit adalah fungsi yang domainnya adalah himpunan bilangan natural dan rangenya adalah himpunan bilangan real.
- Sebuah fungsi a digunakan $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_r$ untuk menyatakan nilai-nilai fungsi pada $0,1,2,\ldots,r$.
- Untuk menyatakan sebuah fungsi dapat dilakukan dengan mendaftarkan seluruh nilai-nilainya atau dengan suatu reperesentasi seperti $a_r = 7r^2 + 1, r \geq 0$
- Terdapat fungsi numerik **a** dan bilangan integer positif *i*. Notasi $S^i\mathbf{a}$ digunakan untuk menyatakan fungsi numerik sedemikian sehingga nilainya pada r adalah 0 untuk r = $0,1,2,\ldots, i-1$ dan $\mathbf{a}_{r-i}$ untuk $r \geq i$

Contoh 1

$$a_r = \begin{cases} 1, 0 \le r \le 10 \\ 2, r \ge 11 \end{cases}$$

$$b \Rightarrow S^5 a$$

$$b_r = \begin{cases} 0, 0 \le r \le 4 \\ 1, 5 \le r \le 15 \\ 2, r \ge 16 \end{cases}$$

Konvolusi

- Terdapat duan fungsi numerik **a** dan **b**. Konvolusi dari **a** dan **b**, yang dinyatakan dengan **a*b** adalah sebuah fungsi numerik **c** sedemikian sehingga

$$c_r = a_0 b_r + a_1 b_{r-1} + \ldots + a_{r-1} b_1 + a_r b_0$$

$$= \sum_{i=0}^{r} a_i b_{r-i}$$

Fungsi Pembangkitan

- Fungsi Pembangkitan atau ***Generating Functions*** merupakan cara alternatif untuk merepresentasikan sebuah fungsi numerik.
- Contoh terhadap sebuah fungsi numerik (a_0,a_1,a_2,…,a_r) dapat didefinisikan dengan sebuah deret infinite

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots a_r z^r + \ldots$$

- Deret tersebut dinamakan fungsi pembangkitan dari fungsi numerik **a**. Fungsi pembangkitan dapat ditulis dengan notasi A(z).
- Contoh fungsi pembangkitan untuk fungsi numerik (3^0,3^1,…3^r,…) adalah $3^0 + 3z + 3^2 z^2 + \ldots 3^r z^r + \ldots$

Fungsi Pembangkitan

- Fungsi pembangkitan $3^0 + 3z + 3^2 z^2 + \ldots 3^r z^r + \ldots$
- Dapat dinyatakan dengan bentuk tertutup (***closed form***) sebagai berikut $\dfrac{1}{1-3z}$
- Bentuk tertutup tersebut dikembangkan berdasarkan pengaplikasian teorema binomial sebagai berikut

$$(1+z)^n = 1 + \sum_{r=1} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!} z^r$$

- dengan upper limit pada ***summation*** adalah n jika n adalah bilangan positif integer dan ∞ untuk n yang lain.

Closed Form Fungsi Pembangkitan

$$\frac{1}{1-3z} = (1-3z)^{-1}$$

$$(1-3z)^{-1} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{-1(-1-1)(-1-2)\cdots(-1-r+1)}{r!}(-3z)^r$$

$$= 1 + \frac{-1}{1!}(-3z)^1 + \frac{-1(-1-1)}{2!}(-3z)^2 + \cdots + \frac{-1(-1-1)(-1-2)\cdots(-1-r+1)}{r!}(-3z)^r$$

$$= 1 + 3z + 3^2 z^2 + \cdots + \frac{-1-2\cdots-r}{r!}(-1)^r 3^r z^r$$

$$= 1 + 3z + 3^2 z^2 + \cdots + 3^r z^r$$

Manipulasi pada Fungsi Pembangkitan

$$b = \alpha a \Leftrightarrow B(z) = \alpha A(z)$$

$$c = a + b \Leftrightarrow C(z) = A(z) + B(z)$$

$$b_r = \alpha^r a_r \Leftrightarrow B(z) = A(\alpha z)$$

$$S^i a \Leftrightarrow z^i A(z)$$

$$c = a * b \Leftrightarrow C(z) = A(z)B(z)$$

$$c_r = \sum_{i=0}^{r} a_i \Leftrightarrow C(z) = \frac{1}{1-z} A(z)$$

Contoh Soal (1)

- **Tentukan jumlah dari $1^2+2^2+3^2+\ldots+r^2$ dengan menggunakan fungsi pembangkitan.**
- Pertama-tama tentukanlah fungsi pembangkitan dari fungsi numerik $(0^2,1^2,2^2,3^2,\ldots,r^2,\ldots)$.
- Terdapat fungsi numerik $(1,1,1\ldots,1,\ldots)$, maka fungsi pembangkitannya adalah $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^r + \cdots$
- Selanjutnya, kedua ruas didiferensialkan terhadap z sehingga didapatkan $\frac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots + rz^{r-1} + \cdots$
- Selanjutnya kedua ruas dikalikan dengan z

Contoh Soal (2)

$$\frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots + rz^r + \cdots$$

- Kedua ruas selanjutnya didiferensialkan kembali terhadap z

$$\frac{d}{dz}\frac{z}{(1-z)^2} = 1^2 + 2^2 z + 3^2 z^2 + \cdots + r^2 z^{r-1} + \cdots$$

- Selanjutnya kedua ruas dikalikan dengan z

$$z\frac{d}{dz}\frac{z}{(1-z)^2} = 0^2 + 1^2.z + 2^2 z^2 + 3^2 z^3 + \cdots + r^2 z^r + \cdots$$

- Sehingga fungsi pembangkitan untuk fungsi numerik $(0^2,1^2,2^2,\ldots,r^2,\ldots)$ adalah $z\frac{d}{dz}\frac{z}{(1-z)^2}$

Contoh Soal (3)

- Jika *f* dan *g* bersifat ***differentiable***, maka

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]-f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

- Sehingga

$$z\frac{d}{dz}\frac{z}{(1-z)^2}=z\frac{(1-z)^2-z.2.(1-z).-1}{(1-z)^4}$$

$$=z\frac{(1-z)[1-z+2z]}{(1-z)^4}$$

$$=\frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$$

Contoh Soal (4)

- Selanjutnya fungsi pembangkitan yang menyatakan jumlah akumulasi fungsi numerik $(0^2,1^2,2^2,\ldots,r^2,\ldots)$ yang dapat dinyatakan sebagai $(0^2,0^2+1^2,0^2+1^2+2^2,\ldots,0^2+1^2+\ldots+r^2,\ldots)$ adalah $\frac{z(1+z)}{(1-z)^4}$
- Jika A(z) menyatakan fungsi $\frac{1}{(1-z)^4}$, maka koefisien z^r dapat ditentukan berdasarkan teorema binomial sebagai berikut

Contoh Soal (5)

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

$$= \frac{-4(-4-1)(-4-2)\cdots(-4-r+1)}{r!}(-1)^r$$

$$= \frac{4\times5\times6\times\cdots r\times(r+1)\times(r+2)\times(r+3)}{r!}$$

$$= \frac{(r+1)\times(r+2)\times(r+3)}{1\times2\times3}$$

Contoh Soal (6)

$$C(z) = \frac{z(1+z)}{(1-z)^4}$$

$$C(z) = zA(z) + z^2A(z)$$

- Sehingga koefisien z^r untuk C(z) adalah S^1**a**+S^2**a**

$$= \frac{((r-1)+1)((r-1)+2)((r-1)+3)}{1\times2\times3} + \frac{((r-2)+1)((r-2)+2)((r-2)+3)}{1\times2\times3}$$

$$= r(r+1)(2r+1)/6$$

Penyelesaian relasi rekurensi dengan fungsi pembangkitan

- Terdapat relasi rekurensi sebagai berikut $a_r = 3a_{r-1} + 2, r \geq 1$
- dengan kondisi batas $a_0 = 1$
- Penyelesaian dengan melibatkan fungsi pembangkitan dapat dilakukan dengan mengalikan kedua ruas dengan z^r sebagai berikut

$$a_r z^r = 3a_{r-1} z^r + 2z^r, r \geq 1$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} a_r z^r = 3\sum_{r=1}^{\infty} a_{r-1} z^r + 2\sum_{r=1}^{\infty} z^r$$

Catatan

$$\sum_{r=1}^{\infty} a_r z^r = A(z) - a_0$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} a_{r-1} z^r = z\sum_{r=1}^{\infty} a_{r-1} z^{r-1} = zA(z)$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} z^r = \frac{z}{1-z}$$

Penyelesaian relasi rekurensi dengan fungsi pembangkitan

$$A(z) - a_0 = 3zA(z) + \frac{2z}{1-z}$$

$$(1-3z)A(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

$$A(z) = {}^{1+z}\!\Big/_{(1-3z)(1-z)}$$

$$= \frac{2}{1-3z} - \frac{1}{1-z}$$

$$a_r = 2.3^r - 1, r \geq 0$$

Latihan 1

- Tentukan fungsi pembangkitan untuk tiap-tiap fungsi numerik diskrit berikut :

a) 1, -2, 3, -4, 5, -6, …

b) 1, 2/3, 3/9, 4/27, …

c) 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, …

d) $0\times5^0, 1\times5^1, 2\times5^2, 3\times5^3, \ldots$

Latihan 1.a

$$\frac{1}{1+z} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1 \times -2 \times \ldots \times -k}{k!} (1z)^k$$

$$= 1z^0 - 1z^1 + 1z^2 - 1z^3 + \ldots + (-1)^k z^k$$

$$A(z) = \frac{1}{1+z} \leftrightarrow a_r = 1,-1,1,-1,\ldots$$

- Misalkan terdapat : $b_r = 1,-1,1,-1,...$

$$c_r = a_r * b_r$$
$$c_0 = 1$$
$$c_1 = -1 - 1 = -2$$
$$c_3 = 1 + 1 + 1 = 3$$
$$c_4 = -1 - 1 - 1 - 1 = -4$$

$$C(z) = A(z)B(z)$$

$$\therefore C(z) = \frac{1}{(1+z)^2}$$

Latihan 1.b

$$\frac{1}{1 - 1/3\,z} = (1/3)^0 z^0 + (1/3)^1 z^1 + (1/3)^2 z^2 + \ldots + (1/3)^r z^r$$

$$A(z) = \frac{1}{1 - 1/3\,z} \leftrightarrow a_r = 1, 1/3, 1/9, 1/27, 1/81, \ldots$$

- Misalkan terdapat : $b_r = 1, 1/3, 1/9, 1/27, 1/81, \ldots$

$$c_r = a_r * b_r$$
$$c_0 = 1$$
$$c_1 = 1/3 + 1/3 = 2/3$$
$$c_3 = 1/9 + 1/9 + 1/9 = 3/9$$
$$c_4 = 1/27 + 1/27 + 1/27 + 1/27 = 4/27$$

$$C(z) = A(z)B(z)$$

$$\therefore C(z) = \frac{1}{(1 - 1/3\,z)^2}$$

Latihan 1.c

$$\frac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \ldots$$

$$A(z) = \frac{1}{(1-z)^2} \leftrightarrow a_r = 1,2,3,4,5,\cdots$$

$$B(z) = \frac{1}{1+z} \leftrightarrow b_r = 1,-1,1,-1,1,\cdots$$

$$c_r = a_r * b_r$$
$$c_0 = 1$$
$$c_1 = -1 + 2 = 1$$
$$c_3 = 1 - 2 + 3 = 2$$
$$c_4 = -1 + 2 - 3 + 4 = 2$$
$$c_5 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 = 3$$
$$c_6 = -1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 = 3$$

$$C(z) = A(z)B(z)$$
$$C(z) = \frac{1}{(1-z)^2(1+z)}$$
$$C(z) = \frac{1}{(1-z^2)(1-z)}$$

Latihan 1.d

$$\frac{1}{1-5z} = 5^0 z^0 + 5^1 z^1 + 5^2 z^2 + 5^3 z^3 + \cdots$$

$$\frac{d}{dz}\frac{1}{1-5z} = 1\times 5^1 z^0 + 2\times 5^2 z^1 + 3\times 5^3 z^2 + 4\times 5^4 z^3 + \cdots$$

$$z\frac{d}{dz}\frac{1}{1-5z} = 0\times 5^0 z^0 + 1\times 5^1 z^1 + 2\times 5^2 z^2 + 3\times 5^3 z^3 + 4\times 5^4 z^4 + \cdots$$

$$A(z) = z\frac{d}{dz}\frac{1}{1-5z} = \frac{5z}{(1-5z)^2}$$

Latihan 2

Perhatikan definisi rekursif mengenai penghitungan bilangan Fibonacci ke-n berikut

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2$$

$$F_0 = 0 \quad F_1 = 1$$

Terdapat C_n yang menyatakan banyaknya penggunaan F_1 dalam menghitung F_n, dan Z_n yang menyatakan banyaknya penggunaan F_0 dalam menghitung F_n. Contoh untuk F_3 diperoleh $C_3 = 2$ dan $Z_3 = 1$.

Buktikanlah bahwa

a. $C_n = F_n$

b. $Z_n = F_{n-1}$

Latihan 2.a

- Untuk membuktikan ini, perlu dibuktikan bahwa $C_n = \dfrac{\Phi^n - \hat{\Phi}^n}{\sqrt{5}}$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 2 \longrightarrow a_0 = 0, a_1 = 1$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} z^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} z^n$$

$$\triangleright \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n = a(z) - a_0 z^0 - a_1 z^1 = a(z) - 0 - z = a(z) - z$$

$$\triangleright \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} z^n = z \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} z^{n-1} = z\left(a(z) - a_0\right)$$

$$\triangleright \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} z^n = z^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} z^{n-2} = z^2 a(z)$$

Latihan 2.a

$$\therefore a(z) - 1 = za(z) + z^2 a(z)$$

$$a(z)(1 - z - z^2) = z$$

$$a(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}$$

$$a(z) = \frac{A}{1 - Bz} + \frac{C}{1 + Dz}$$

$$= \frac{A + ADz + C - BCz}{1 + (D - B)z - BDz^2}$$

$$A + C = 0; AD - BC = 1; D - B = -1; BD = 1$$

$$B = \frac{1}{D}; -\frac{1}{D} + D = -1; D^2 + D - 1 = 0$$

$$D_{12} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2.1} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}; D = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; B = \frac{1}{D} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$A = -C; (-C)D + -C = 1; (-C)\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)C = 1$$

$$C = -\frac{\sqrt{5}}{5} = -\frac{1}{\sqrt{5}}; A = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Latihan 2.a

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$= \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} = F_n$$

maka terbukti bila $C_n = F_n$

Latihan 2.b

- Untuk membuktikan ini, perlu dibuktikan bahwa $Z_n = \dfrac{\Phi^{n-1} - \hat{\Phi}^{n-1}}{\sqrt{5}}$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 2 \longrightarrow a_0 = 1, a_1 = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} z^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} z^n$$

$$\triangleright \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n = a(z) - a_0 z^0 - a_1 z^1 = a(z) - 1 - 0 = a(z) - 1$$

$$\triangleright \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} z^n = z \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} z^{n-1} = z(a(z) - 1)$$

$$\triangleright \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} z^n = z^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} z^{n-2} = z^2 a(z)$$

$$\therefore a(z) - 1 = z(a(z) - 1) + z^2 a(z)$$

$$a(z)(1 - z - z^2) = 1 - z$$

$$a(z) = \frac{1 - z}{1 - z - z^2}$$

Latihan 2.b

$$a(z) = \frac{A}{1 - Bz} + \frac{C}{1 - Dz}$$

$$= \frac{A - ADz + C - BCz}{1 - (B + D)z + BDz^2}$$

$$A + C = 1; AD + BC = 1; B + D = 1; BD = -1$$

$$B = -\frac{1}{D}; -\frac{1}{D} + D = 1; D^2 - D - 1 = 0$$

$$D_{12} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2.1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$D = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; B = -\frac{1}{D} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$A = 1 - C; (1 - C)D + BC = 1; (1 - C)\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)C = 1$$

$$C = \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}}, A = \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}}$$

Latihan 2.b

$$\therefore \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}\right) + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+1\right)}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{2}{\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-1\right)}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}} = F_{n-1}$$

Soal

- Berikan solusi terhadap relasi rekurensi berikut dengan menggunakan teknik Generating Function $a_r = a_{r-1} + 6a_{r-2} + 1, r \geq 2$

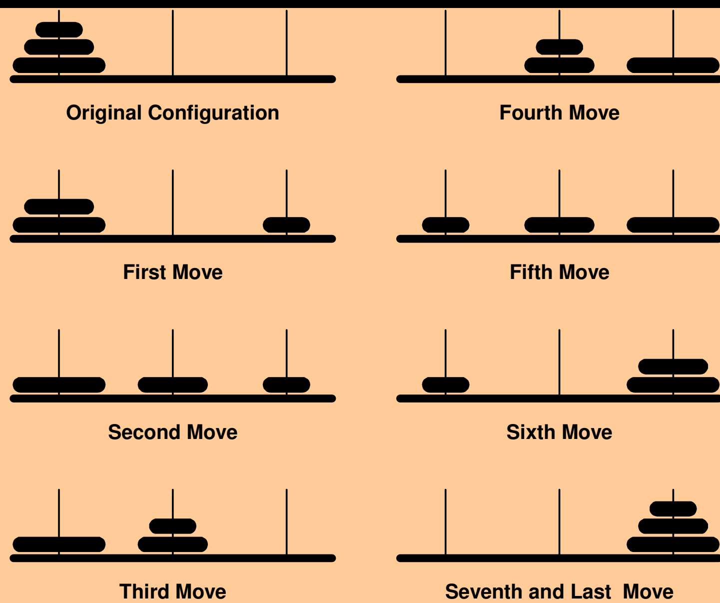
  $a_0 = 1, a_1 = 1$

$$A(z) = \frac{1 - z + z^2}{(1-z)(1-z-6z^2)}$$

$$A(z) = -\frac{1}{6(1-z)} + \frac{7}{15(1+2z)} + \frac{7}{10(1-3z)}$$

$$\therefore a_r = -\frac{1}{6} + \frac{7}{15}(-2)^r + \frac{7}{10}3^r$$

Towers of Hanoi



Towers of Hanoi

Recursive Solution (N disks) (three steps)

- Move the topmost N - 1 disks from the original peg to the spare
- Move the largest disk from the original peg to the destination peg
- Move the N - 1 disks from the spare peg to the destination peg

How many moves?

- We can use the *recurrence relation* for the Tower problem to obtain the number of moves for any N disks
- **Recurrence Relation**: The *specification* of a sequence of values in terms of **earlier values** in the sequence and **base values**.
- We see that each value can be described in terms of previous values, with two base cases
- The Towers of Hanoi problem has a recurrence relation (indeed it must in order for a recursive solution)

Towers of Hanoi Recurrence Relation

First, the base case,

if N = 1, there is only one move… From the source peg to the destination.

Let F(N) ≡ The number of moves for N disks

So,

F(1) = 1 (one move, from src to dest)

Towers of Hanoi Recurrence Relation (cont.)

Next, the recursive case,
When N > 1,
We have the number of moves for N -1 disks,
then one move,
then again the number for N-1 disks. So,

$$\mathbf{F(N) = F(N-1) + 1 + F(N-1);\ \ N > 1}$$

This reduces to:

$$\mathbf{F(N) = 2 * F(N-1) + 1;\ \ N > 1}$$

Towers of Hanoi Recurrence Relation (cont.)

- We normally would like a *closed-form* (an algebraic expression) solution to a recurrence relation so we can simply plug in 'N' and get the answer

- Using Generating Functions Techniques, the closed - form solution of the Towers relation is:

  $F(N) = 2^N - 1,\ \ N \geq 1$

  ex. $F(3) = 2^3 - 1 \rightarrow 7$

DESAIN ALGORITME & PEMROGRAMAN

Fakultas Teknologi Informasi
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Soal 1

Turnamen Tinju (IPSC08A)

Untuk menyemarakkan acara ulang tahun kemerdekaan RI, SMP Merdeka dan SMA Mulia mengadakan pertandingan tinju persahabatan. Masing-masing sekolah (SMP Merdeka dan SMA Mulia) diwakili oleh 1 tim yang terdiri atas beberapa siswa yang memiliki berat badan berbeda-beda. (Berat badang masing-masing siswa dapat dinyatakan dengan sebuah bilangan bulat positif, makin besar bilangan berarti makin berat.)

Pertandingan ini dilakukan dalam cara yang sedikit berbeda dari pertandingan tinju biasa. Pada pertandingan ini, semua peserta langsung memasuki arena tinju bersama-sama dan dapat melawan petinju manapun dari pihak lawan. Untuk tiap rondenya, petinju yang paling banyak menerima pukulan pada ronde itu dikeluarkan dari arena.

Jika ada lebih dari satu petinju dengan banyak pukulan maksimal, petinju yang dikeluarkan adalah: jika semuanya berasal dari sekolah yang sama, akan dipilih salah satu secara acak; jika berasal dari sekolah berbeda, yang dikeluarkan adalah salah satu petinju SMA Mulia (dipilih secara acak).

Pertandingan selesai jika salah satu tim telah kehabisan petinju di arena. Tim yang masih memiliki petinju di arena menang, sedangkan tim lawannya kalah.

Dari hasil pengamatan tahun-tahun sebelumnya, ditemukan bahwa jumlah pukulan yang diterima seorang petinju pada tiap rondenya berbanding terbalik secara proporsional dengan berat badannya (dengan kata lain, petinju dengan berat badan terbesar akan menerima pukulan paling sedikit, dan sebaliknya.)

Dengan melihat data berat badan anggota kedua tim, tentukan tim mana yang akan memenangi pertandingan.

Soal 1

Spesifikasi masukan

Masukan diawali dengan dua buah bilangan bulat NP – banyaknya anggota tim SMP Merdeka – dan NA – banyaknya anggota tim SMA Mulia. Dua baris berikutnya berisikan data berat badan masing-masing petinju. Baris yang pertama terdiri atas NP buah bilangan bulat positif yang menyatakan berat badan petinju-petinju dari SMP Merdeka. Sedangkan baris kedua berisi NA buah bilangan bulat positif yang menyatakan berat badan petinju-petinju SMA Mulia.

Spesifikasi keluaran

Jika SMP Merdeka yang menang, tuliskan string "MERDEKA" (seluruhnya berupa huruf kapital, tanpa tanda kutip).

Jika SMA Mulia yang menang, tuliskan string "MULIA" (seluruhnya berupa huruf kapital, tanpa tanda kutip).

Jika bukan keduanya, tuliskan string "ENTAH" (seluruhnya berupa huruf kapital, tanpa tanda kutip).

Contoh Masukan

```
1 1
1
1
```

Contoh Keluaran

```
MERDEKA
```

Soal 1 - Solusi

```
var
 np, na, maxmerdeka, maxmulia, i, s : integer;

begin
 readln(np, na);
 maxmerdeka := 0;
 maxmulia := 0;

 for i:= 1 to np do
  begin
      read(s);
      if s > maxmerdeka then
      maxmerdeka := s;
  end;
```

Soal 1 - Solusi

```
for i:= 1 to na do
 begin
  read(s);
  if s > maxmulia then
   maxmulia := s;
 end;

 if maxmerdeka >= maxmulia then
  writeln('MERDEKA')
 else
  writeln('MULIA');

end.
```

Soal 2

Diberikan n buah bilangan bulat: x1, x2, ..., xn, dimana n adalah bilangan genap. Andaikan kita hendak mengelompokkan n bilangan ini menjadi n/2 pasangan dan kemudian menjumlahkan kedua bilangan pada masing-masing pasangan. Nilai dari sebuah pengelompokan adalah nilai maksimum dari penjumlahan-penjumlahan tiap pasangan tersebut.

Sebagai contoh, jika bilangan yang menjadi masukan adalah 5, 7, 8, -2, 6, 4, 5, 2 dan dikelompokkan menjadi (5,-2), (7,4), (5,6), (2,8), maka nilai hasil penjumlahan tiap-tiap pasang adalah 3, 11, 11, dan 10. Dengan demikian, nilai pengelompokan ini adalah nilai maksimum dari {3, 11, 11, 10} yaitu 11.

Untuk tiap himpunan bilangan yang disediakan, tentukan pengelompokan yang harus dilakukan sehingga nilai pengelompokan menjadi seminimal mungkin.

Soal 2 - Solusi

```
const MAXDATA = 100;
var
 data        : array[1..MAXDATA] of integer;
 ndata, i, j, temp, sum, maxsum : integer;

begin

readln(ndata);
 for i:= 1 to ndata do
  readln(data[i]);

for i:= 1 to ndata-1 do
 begin
  for j:= i+1 to ndata do
   if data[i] > data[j] then
    begin
     temp    := data[i];
     data[i] := data[j];
     data[j] := temp;
    end;
 end;
```

Soal 2 - Solusi

```
 maxsum := 0;

for i:= 1 to ndata div 2 do
  begin
   sum := data[i] + data[ndata-i+1];
   if sum > maxsum then
    maxsum := sum;
  end;

 writeln('Hasil : ', maxsum);

end.
```

Soal 3

Bola dan Gelas

Menuju acara 17-an, Pak Dengklek mempersiapkan permainan untuk perlombaan di desanya. Permainan tersebut adalah permainan yang klasik dan kini Pak Dengklek ingin mengujinya kepada Anda. Terdapat N buah gelas yang diletakkan terbalik lalu dijejerkan di atas meja dan diberi nomor berbeda-beda antara 1 sampai N. Di dalam salah satu gelas terbalik tersebut diletakkan sebuah bola. Lalu dua buah gelas dipilih secara acak dan ditukar posisi dan nomornya. Pemilihan dan pertukaran tersebut dilakukan sebanyak M kali. Setelah itu, semua gelas dibuka dan bola pastilah ditemukan di bawah salah satu gelas, misalnya gelas X. Pak Dengklek ingin agar Anda menebak di gelas nomor berapakah bola tersebut berada pada awalnya. Tidak hanya sekali, Pak Dengklek ingin Anda menebak berkali-kali untuk beberapa kemungkinan X.

Soal 3

FORMAT MASUKAN

Baris pertama berisi bilangan bulat N dan M (1 ≤ N, M ≤ 100000). M baris berikutnya masing-masing berisi dua angka X1 dan X2, yang berarti gelas bernomor X1 ditukar nomor dan posisinya dengan gelas bernomor X2 (1 ≤ X1, X2 ≤ N). Baris berikutnya berisi bilangan Q, yang merupakan jumlah pertanyaan untuk kasus bersangkutan (1 ≤ Q ≤ 100000). Q baris berikutnya masing-masing berisi sebuah bilangan yang merupakan nomor gelas X (1 ≤ X ≤ N) tempat bola berada setelah permainan berakhir.

FORMAT KELUARAN

Q buah baris yang merupakan jawaban untuk tiap pertanyaan yang diberikan di masukan.

CONTOH MASUKAN

```
5 6
1 3
4 2
5 2
4 5
3 2
4 1
3
2
3
4
```

CONTOH KELUARAN

```
1
5
3
```

Soal 3 - Solusi

```
const maxN = 100000 ;
var
 N, M, Q, X1, X2, X, temp, i : longint;
 arrN : array[1..maxN] of longint;

begin
 readln(N, M);
 for i:= 1 to N do
  arrN[i] := i;

 for i:= 1 to M do
 begin
  readln (X1, X2);
  temp := arrN[X1];
  arrN[X1] := arrN[X2];
  arrN[X2] := temp;
 end;
```

Soal 3 - Solusi

```
  readln(Q);
  for i:= 1 to Q do
  begin
   readln (X) ;
   writeln(arrN[X]);
  end;

 end.
```

Soal 4

Selular Automata (LIFE)

Permainan ini adalah permainan yang mensimulasikan kehidupan. Tempat permainannya berupa persegi dengan panjang sisi 100. Setiap sel dinyatakan dalam koordinat integer di persegi itu dan dapat bernilai "mati" atau "hidup". Keadaan awal dari papan itu diberikan di input. Sebuah sel berhubungan dengan 8 sel di sekitarnya, kecuali untuk sel – sel di pinggir papan.

Cara bermainnya adalah melakukan langkah berikut :

1. Sebuah sel mati, yang dikelilingi tepat oleh 3 sel hidup, akan menjadi sel hidup.
2. Sebuah sel hidup yang memiliki 2 atau 3 orang kawan, akan tetap hidup
3. Selain kasus di atas, sel itu akan mati

Catatan : penggantian keadaan sebuah sel harus dilakukan serentak untuk setiap langkahnya.

Bila langkah ini diulang – ulang, akan terjadi pola yang menarik yang berbeda – beda untuk setiap keadaan awal. Anda diminta membuat program yang diberikan input dan jumlah langkahnya, memberikan keadaan akhir dari papan itu.

INPUT

Baris pertama dari input berisi 2 bilangan, N (1 <= N <= 2000) dan M, di mana N adalah jumlah langkah yang dilakukan, dan M adalah jumlah sel hidup awal. M baris berikutnya berisi dua bilangan R dan C, di mana R adalah nomor baris, dan C adalah nomor kolom. 1 <= R,C <= 100

Soal 4

OUTPUT

Berisi beberapa baris yang masing – masing baris terdiri dari 2 angka, R dan C, yang mencetak semua posisi sel hidup. Output harus diberikan dalam keadaan terurut menurut baris lalu menurut kolom.

Contoh Input 1

200 10	**10 45**
10 40	**10 46**
10 41	**10 47**
10 42	**10 48**
10 43	**10 49**
10 44	

Contoh output 1

8 41	**10 48**	**9 49**	**11 48**
8 48	**10 49**	**10 39**	**11 49**
9 40	**10 50**	**10 40**	**12 41**
9 41	**11 40**	**10 41**	**12 48**
9 48	**11 41**		

Soal 4 - Solusi

```
const Max = 100;
var i,j,k,n,m,r,c,x : longint;
map1,map2 : array [0..max+1,0..max+1] of boolean;
begin

      readln(n,m);
      for i := 1 to m do
      begin
            readln(r,c);
            map1[r,c] := true;
      end;
      for k := 1 to n do
      begin
            for i := 1 to max do
            begin
                  for j := 1 to max do
                  begin
                        x := 0;
```

Soal 4 - Solusi

```
                 if map1[i-1,j-1] then inc(x);
                 if map1[i-1,j]   then inc(x);
                 if map1[i-1,j+1] then inc(x);
                 if map1[i,j-1]   then inc(x);
                 if map1[i,j+1]   then inc(x);
                 if map1[i+1,j-1] then inc(x);
                 if map1[i+1,j]   then inc(x);
                 if map1[i+1,j+1] then inc(x);
                 if (x = 3 ) or (map1[i,j] and (x=2)) then
                             map2[i,j] := true else
                             map2[i,j] := false;
                 end;
           end;
           map1 := map2;
     end;
```

Soal 4 - Solusi

```
      for i := 1 to 100 do
      begin
            for j := 1 to 100 do
            begin
                  if map1[i,j] then writeln(i,' ',j);
            end;
      end;
end.
```

Nama Soal : **Parade Lampu**

Deretan lampu warna-warni dipasang untuk memeriahkan acara penutupan **geMasTIK**. Jumlah lampu yang dipasang sebanyak **N** yang diberi nomor 1 sampai dengan **N**. Lampu-lampu tersebut terhubung pada rangkaian pengendali yang mempunyai 4 buah tombol. Masing-masing tombol tersebut berfungsi sebagai berikut :

Tombol 1	:	Jika tombol ini ditekan, maka semua lampu yang terhubung akan berubah statusnya. Artinya, lampu yang semula MENYALA akan PADAM, sedang lampu yang semula PADAM akan MENYALA.
Tombol 2	:	Jika tombol ini ditekan, maka semua lampu yang bernomor ganjil akan berubah statusnya.
Tombol 3	:	Jika tombol ini ditekan, maka semua lampu yang bernomor genap akan berubah statusnya.
Tombol 4	:	Jika tombol ini ditekan, maka semua lampu yang bernomor 3K+1 akan berubah statusnya. K adalah bilangan bulat ≥ 0.

Pada rangkaian pengendali, terdapat counter **C** yang mencatat banyaknya penekanan tombol yang telah dilakukan. Ketika acara dimulai, kondisi semua lampu MENYALA dan counter **C** diset **0 (nol)**. Untuk menyatakan status lampu yang MENYALA, digunakan nilai **1 (satu)**. Sedangkan untuk lampu yang PADAM, digunakan nilai **0 (nol)**.
Buatlah program untuk menentukan ***semua konfigurasi akhir yang mungkin*** dari status semua lampu sebanyak **N** tersebut berdasarkan informasi yang diberikan. Informasi yang diberikan meliputi nilai akhir counter **C** serta status akhir dari ***sebagian*** lampu. Semua konfigurasi akhir yang mungkin tersebut tidak diperbolehkan berulang.

INPUT
File input terdiri atas 4 baris. Baris pertama menyatakan banyaknya **N** buah lampu. Baris kedua menyatakan nilai akhir counter **C**. Batasan nilai **N** dan **C** adalah sebagai berikut : 10 ≤ **N** ≤ 100, 1 ≤ **C** ≤ 10000. Baris ketiga, berisi daftar nomor lampu yang **MENYALA** pada akhir acara. Setiap nomor dipisah-kan oleh spasi dan diakhir baris diberikan nilai **-1**. Baris keempat, berisi daftar nomor lampu yang **PADAM** pada akhir acara. Setiap nomor dipisahkan oleh spasi dan diakhir baris diberikan nilai **-1**.

OUPUT
File output berisi semua konfigurasi akhir yang mungkin dari status semua lampu sebanyak N tersebut berdasarkan informasi yang diberikan. Tidak diperbolehkan adanya konfigurasi yang berulang. Tiap konfigurasi yang mungkin harus dituliskan pada baris yang berbeda. Urutan konfigurasi boleh sebarang.

CONTOH INPUT

```
10
1
-1
7 -1
```

Pada kasus diatas, terdapat 10 lampu dan hanya sekali terjadi penekanan tombol. Hanya diketahui informasi bahwa, lampu nomor 7 statusnya PADAM diakhir acara.

CONTOH OUTPUT

```
0000000000
0110110110
0101010101
```

Pada kasus diatas, ada 3 kemungkinan konfigurasi lampu diakhir acara, yaitu :

- Semua lampu PADAM.
- Lampu nomor 1, 4, 7 dan 10 PADAM; sedangkan LAMPU 2, 3, 5, 6, 8 dan 9 MENYALA.
- Lampu nomor 1, 3, 5, 7 dan 9 PADAM, sedangkan LAMPU 2, 4, 6, 8 dan 10 MENYALA.

- Untuk mengetahui pola lampu, dimisalkan terdapat 15 buah lampu. Kondisi awal serta keluaran setelah masing – masing tombol ditekan satu kali dapat dilihat pada tabel berikut

1 ON 0 OFF

Posisi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Awal	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
2	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0
3	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1
4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

- kesimpulan yang dapat diambil adalah banyak lampu yang perlu di-perhatikan hanya 6 buah lampu saja, sedangkan sisanya selalu meru-pakan perulangan dari kondisi 6 lampu tersebut.

- Selanjutnya dapat disimpulkan pula bahwa :
  - Jika sebuah tombol ditekan dua kali, maka kondisi lampu akan kembali pada keadaan sebelum tombol tersebut ditekan. Sehingga sebuah tombol hanya mungkin ditekan satu kali atau tidak pernah ditekan sama sekali.
  - Urutan penekanan antar tombol tidak berpengaruh. Contoh : urutan penekanan tombol 1-3-2 akan memberikan kondisi akhir yang sama dengan urutan 2-1-3.
- Berdasarkan fakta diatas, kombinasi keluaran yang mungkin adalah sebanyak $2^4 = 16$ kemungkinan. Seperti pada tabel berikut.

TOMBOL				Jumlah Penekanan	OUTPUT					
1	2	3	4		1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	2	0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	2	1	1	0	0	0	1
0	1	1	0	2	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	3	1	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	2	1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	2	0	1	0	1	0	1
1	0	1	1	3	1	1	0	0	0	1
1	1	0	0	2	1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	3	0	0	1	1	1	0
1	1	1	0	3	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	4	0	1	1	0	1	1

- Kesimpulan :

  Terdapat 8 kemungkinan pola keluaran yang ada.

- Kemungkinan pola tersebut adalah sebagai berikut.

Pola	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	1	0	1	1
3	1	0	1	0	1	0
4	0	0	1	1	1	0
5	0	1	0	1	0	1
6	1	1	0	0	0	1
7	0	0	0	0	0	0
8	1	0	0	1	0	0

- Jika tombol hanya ditekan satu kali, maka kemungkinan pola yang dihasilkan adalah : pola 2, pola 3, pola 5 dan pola 7.
- Jika tombol ditekan dua kali, maka ada dua kemungkinan yaitu :
  - Kedua tombol sama : pola 1.
  - Kedua tombol berbeda : pola 3, pola 4, pola 5, pola 6, pola 7 dan pola 8.
- Jika tombol ditekan tiga kali, maka ada dua kemungkinan yaitu :
  - Ketiga tombol sama : pola 2, pola 3, pola 5 dan pola 7.
  - Ketiga tombol berbeda : pola 8, pola 6, pola 4 dan pola 1.
- Jika tombol ditekan empat kali, maka ada tiga kemungkinan yaitu :
  - Keempat tombol sama : pola 1.
  - Keempat tombol berbeda : pola 2.
  - Dua tombol berbeda (misal 1-2-3-3) : pola 3, pola 4, pola 5, pola 6, pola 7 dan pola 8.

- Jika tombol ditekan lima kali, maka ada dua kemungkinan yaitu :
  - Kelima tombol sama :pola 2, pola 3, pola 5 dan pola 7.
  - Ketiga tombol berbeda : pola 8, pola 6, pola 4 dan pola 1.
- Jika tombol ditekan enam kali, maka ada tiga kemungkinan yaitu :
  - Keenam tombol sama : pola 1.
  - Keempat tombol berbeda (misal 1-2-3-4-2-2): pola 2.
  - Dua tombol berbeda (misal 1-2-3-3-4-4) : pola 3, pola 4, pola 5, pola 6, pola 7 dan pola 8.
- Kesimpulan : jika tombol ditekan tiga kali atau lebih, maka ke-8 pola tersebut mungkin muncul.

The Knights of the Round Table

King Arthur is planning to build the round table in a room which has a triangular window in the ceiling. He wants the sun to shine on his round table. In particular, he wants the table to be totally in the sunlight when the sun is directly overhead at noon.

Thus the table must be built in a particular triangular region of the room. Of course, the king wants to build the largest possible table under the circumstances.

As Merlin is out to lunch, write a program which finds the radius of the largest circular table that fits in the sunlit area.

Input

There will be an arbitrary number of test cases, each represented by three real numbers (a, b, and c), which stand for the side lengths of the triangular region. No side length will be greater than 1,000,000, and you may assume that $\max(a, b, c) \leq (a + b + c)/2$.

You must read until you reach the end of the file.

Output

For each room configuration read, you must print the following line:

`The radius of the round table is:` r

where r is the radius of the largest round table that fits in the sunlit area, rounded to three decimal digits.

Sample Input

```
12.0 12.0 8.0
```

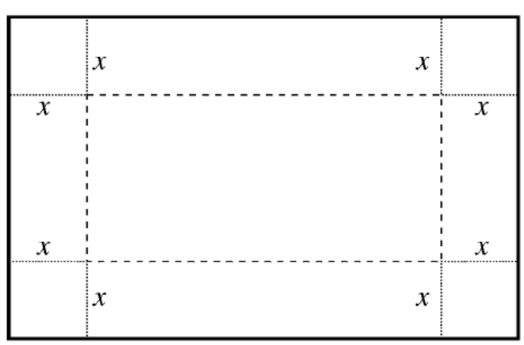
Sample Output

```
The radius of the round table is: 2.828
```

```c
/*
 Problem : The Knight
 @ Rully Soelaiman, 26 September 2009
*/

#include<stdio.h>
#include<math.h>

double a, b, c, s, r;

int main() {

   while(scanf("%lf%lf%lf",&a,&b,&c) == 3) {
        if(a == 0 || b == 0 || c == 0) {
                printf("The radius of the round table is: 0.000\n");
                continue;
        }
        s = (a+b+c)/2;
        r = ((s-a)*(s-b)*(s-c)/s);
        printf("The radius of the round table is: %.3lf\n",sqrt(r));
   }

}
```

The Largest/Smallest Box ...

The following figure shows a rectangular card of width W, length L, and thickness 0. Four $x \times x$ squares are cut from the four corners of the card shown by the dotted lines. The card is then folded along the dashed lines to make a box without a cover.



Given the width and height of the box, find the values of x for which the box has maximum and minimum volume.

Input

The input file contains several lines of input. Each line contains two positive floating point numbers L $(0 < L < 10,000)$ and W $(0 < W < 10,000)$, which indicate the length and width of the card, respectively.

Output

For each line of input, give one line of output containing two or more floating point numbers separated by a single space. Each floating point number should contain three digits after the decimal point. The first number indicates the value which maximizes the volume of the box, while the subsequent values (sorted in ascending order) indicate the cut values which minimize the volume of the box.

Sample Input

```
1 1
2 2
3 3
```

Sample Output

```
0.167 0.000 0.500
0.333 0.000 1.000
0.500 0.000 1.500
```

```
#include <iostream>
#include <cstdlib>
#include <math.h>
#include <stdio.h>
#define EPS pow(10, -9)

using namespace std;

int main()
{
    double L, W;

    while(cin >> L >> W)
        printf("%.3f %.3f %.3f\n", EPS + (L + W - sqrt(L*L - L*W + W*W)) / 6.0, 0.0, EPS +
          ((L > W)? W : L) / 2.0);

    return 0;
}
```

Kalkulator

Kode soal:	kalkulator
Batas *Run-time*:	1 detik / test-case
Batas Memori:	16 MB

Mas Arka tiba-tiba menyadari bahwa jumlah digit pada kalkulator biasanya hanya dapat ditampilkan sampai dengan 40 digit. Oleh sebab itu, kalkulator biasanya memiliki kelemahan dalam memproses angka-angka yang besar, terutama pada operasi perkalian bilangan faktorial. Dan Mas Arka mengetahui jika untuk bilangan yang relatif kecil, kalkulator masih dapat menghitung dengan tepat, misal : 5! * 9! * 10! = 158018273280000 (terdiri dari 15 digit, dan 4 buah angka nol paling kanan)

Namun untuk angka yang relatif besar, kalkulator tidak dapat menampilkan bagian belakang dari operasi yang diproses : 124! = 1.5061417415111408797950141619933 e+207 (terdiri dari 208 digit, namun jumlah angka nol yang paling kanan tidak diketahui)

Lalu Mas Arka pun kepikiran untuk menghabiskan waktu luangnya saat itu dengan membuat program mencari jumlah digit dan jumlah angka nol paling kanan dari operasi bilangan faktorial, namun akhirnya Mas Arka kebingungan juga, oleh karena itu, bantulah Mas Arka membuat program tersebut !

FORMAT MASUKAN

Baris pertama adalah 1 buah bilangan N ($0 < N \leq 60000$) yang menyatakan jumlah bilangan faktorial yang akan dikalikan. N baris berikutnya adalah bilangan non-negatif (kurang dari atau sama dengan 10000) yang menyatakan bilangan faktorial.

FORMAT KELUARAN

2 buah bilangan yaitu jumlah digit dan jumlah angka nol paling kanan, dipisahkan oleh sebuah spasi

CONTOH MASUKAN

3

5

9

10

CONTOH KELUARAN

15 4

```
uses crt, math;
var ndig            : real;
    count5          : longint;
    n, i, j, k, max : integer;
    fakt  : array [1..60000] of integer;
    digit : array [0..10000] of real;
begin
 clrscr;
 max := 0; count5 := 0; ndig := 0.0;
 readln(n);
 for i:= 1 to n do
 begin
  readln(fakt[i]);
  if (fakt[i] > max) then max := fakt[i];
 end;
 for i:= 1 to max do
  digit[i] := digit[i-1] + log10(i);
```

```
for i:= 1 to n do
 begin
  k:=1;
  while k <= fakt[i] do
   begin
   j := k; // menghitung berapa banyak kemunculan faktor 5 dalam
   // fakt[i]
   if (j mod 5) = 0 then
    begin
     while ( j mod 5) = 0 do begin
       j := j div 5;
       inc(count5);
     end;
    end;
   inc(k);
   end;
  ndig := ndig + digit[fakt[i]];
  end;
 writeln(floor(ndig + 1.0), '  ', count5);
 readkey;
end.
```

TAMBAHAN

7. Bila z bilangan bulat positif terkecil yang memberikan sisa 5 jika dibagi dengan 13 dan memberikan sisa 3 jika dibagi dengan 18, berapa sisanya jika dibagi dengan 7 ?
   (A) 8
   (B) 5
   (C) 11
   (D) 3
   (E) 1

Soal 7

$$x \equiv 5(\text{mod}\,13)$$
$$x \equiv 3(\text{mod}\,18)$$

1. $m = 13.18 = 234$
   $M_1 = m/m_1 = 234/13 = 18$
2. $M_2 = m/m_2 = 13$
3. $M_1 y_1 \equiv 1(\text{mod}13)$

Langkahnya dengan menggunakan Algoritma Euclid

$18 = 1.13 + 5$

$13 = 2.5 + 3$

$5 = 1.3 + 2$

$3 = 1.2 + 1$

$2 = 2.1$

Kesimpulan : GCD(18,13) = 1 (merupakan sisa hasil bagi terakhir yang tidak nol).

Selanjutnya GCD tersebut dibentuk sebagai kombinasi linear dari 18 dan 13.

$1 = 3 - 1.2$

$1 = 3 - 1.(5 - 1.3) = 2.3 - 1.5$

$1 = 2.(13 - 2.5) - 1.5 = 2.13 - 5.5$

$1 = 2.13 - 5.(18 - 1.13) = 7.13 - 5.18$

Kesimpulan : $y1 \equiv -5(\text{mod}13),\ y2 \equiv 7(\text{mod}18)$

Soal 7

- Selanjutnya dihitung

$$x = a_1 M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2 (\text{mod}\, m)$$
$$= 5.18. -5 + 3.13.7(\text{mod}\,234)$$
$$= -177(\text{mod}\,234) = 57(\text{mod}\,234)$$

Soal

- Selesaikanlah persoalan sistem congruence berikut

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{2} \\ x &\equiv 2 \pmod{3} \\ x &\equiv 3 \pmod{5} \\ x &\equiv 5 \pmod{11} \end{aligned}$$

Jawaban

- Selesaikanlah persoalan sistem congruence berikut

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{2} \\ x &\equiv 2 \pmod{3} \\ x &\equiv 3 \pmod{5} \\ x &\equiv 5 \pmod{11} \end{aligned}$$

- m_1=2, m_2=3, m_3 =5 dan m_4=11, pairwise relatively prime.

$$\begin{aligned} &m = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 11 = 330 \\ &M_1 = 3\cdot 5\cdot 11 = 165; \quad y_1 = 1 \\ &M_2 = 2\cdot 5\cdot 11 = 110; \quad y_2 = 2 \\ &M_3 = 2\cdot 3\cdot 11 = 66; \quad y_3 = 1 \\ &M_4 = 2\cdot 3\cdot 5 = 30; \quad y_4 = 7 \\ &x \equiv a_1M_1y_1 + a_2M_2y_2 + a_3M_3y_3 + a_4M_4y_4 \\ &x \equiv 1\cdot 165\cdot 1 + 2\cdot 110\cdot 2 + 3\cdot 66\cdot 1 + 5\cdot 30\cdot 7 = 1853 \\ &x \equiv 203 \pmod{330} \end{aligned}$$