

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 9. 6. maja i później

Zadania

1. Zmienna losowa (X, Y) ma gęstość określoną wzorem $f(x, y) = xy$ na $[0, 1] \times [0, 2]$. Wyznaczyć dystrybuantę $F(s, t)$ tej zmiennej.
2. Niezależne zmienne losowe X_1, \dots, X_{10} podlegają rozkładowi Poissona z parametrem $\lambda = 2$. Znaleźć oszacowanie dla $P(\sum X_i \geq 40)$. Proszę użyć nierówności Markowa i Chebysheva. Porównać z wynikiem dokładnym.

[Z. 3–5] Zakładamy, że $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $a \geq 3$.

3. (Markov) Podać oszacowanie dla $P(X \geq a\lambda)$. (Chebyshev) Wykazać, że zachodzi nierówność $P(X \geq a\lambda) \leq \frac{1}{\lambda(a-1)^2}$.
4. (Chernoff) Wykazać, że $P(X \geq a\lambda) \leq \left(\frac{1}{a}\right)^{a\lambda} \exp[\lambda(a-1)]$.
5. (2p). Niech $\lambda = 10$, $a \in \{2, 4, 6\}$. Podać wartość dokładną $P(X \geq a\lambda)$ oraz oszacowania Markowa, Chebysheva i Chernoffa.
6. (2p). Znaleźć oszacowanie Chernoffa dla $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Jak w poprzednich zadaniach, pytamy o $P(X \geq a\mu)$.
7. Zmienna losowa (X, Y) ma gęstość określoną wzorem $f(x, y) = \frac{3}{2} \cdot xy$ na obszarze ograniczonym przez osie współrzędnych i prostą $y = 2 - x$. Wyznaczyć dystrybuantę $F(s, t)$ tej zmiennej.

[Do zadań 8–9] W pliku `z89.csv` zawarte są wyniki niezależnych obserwacji zmiennej losowej o rozkładzie $N(\mu, \sigma^2)$. Zwrot “wartość dystrybuanty $F_S(s)$ ” oznacza, że obliczyliśmy wartość s statystyki S i wiemy jaki jest rozkład statystyki S .

8. Zakładamy, że $\sigma = 3.5$. Sprawdzamy czy można uważać, że $\mu = 2$. Obliczyć wartość statystyki $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n}$ oraz wartość dystrybuanty $F_Z(z)$.
9. Nie znamy wartości σ , sprawdzamy czy można przyjąć, że $\mu = 2$. Obliczyć wartość statystyki $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S} \cdot \sqrt{n-1}$ oraz wartość dystrybuanty $F_T(t)$.

Witold Karczewski