

Dawid Pawliczek
Lista 5, Zadanie 8

Teza

Aby wyznaczyć największy i drugi co do wielkości element w n -elementowym zbiorze, w modelu drzew decyzyjnych

$$n + \lceil \log_2 n \rceil - 2$$

porównań *wystarcza i jest konieczne*.

1 Górna granica — $n + \lceil \log n \rceil - 2$ wystarcza

Algorytm turniejowy

1. Parujemy elementy i porównujemy je. Zwycięzcy przechodzą do następnej rundy, przegrani wypadają.
2. Powtarzamy turniej, aż zostanie jeden **maksymalny** — wymaga to $n - 1$ porównań.
3. Największy element pokonał bezpośrednio dokładnie tyle elementów, ile wynosi wysokość drzewa turnieju: $h = \lceil \log_2 n \rceil$.
4. Drugi wynik znajdujemy, porównując między sobą pokonanych przez maksimum — potrzeba $h - 1 = \lceil \log_2 n \rceil - 1$ dodatkowych testów.

$$(n - 1) + (\lceil \log_2 n \rceil - 1) = n + \lceil \log_2 n \rceil - 2.$$

2 Dolna granica — $n + \lceil \log n \rceil - 2$ jest konieczne

Gra z adwersarzem

Dla każdego elementu x adwersarz prowadzi listę „wiadomo, że $x >$ te elementy”.

Reguła odpowiedzi. Na zapytanie „ $x ? y$ ” adwersarz porównuje długości list $L(x)$ i $L(y)$ i zawsze ogłasza większym ten, którego lista jest dłuższa (remis rozstrzygany dowolnie). Po odpowiedzi listę zwycięzcy rozszerza o przegranego oraz wszystkie jego zapisane elementy.

Konsekwencje

- Każde porównanie może co najwyżej *podwoić* rozmiar listy zwycięzcy.
- Aby jakiś element wskazać jako *największy*, jego lista musi urosnąć do n pozycji, czyli potrzeba co najmniej $\lceil \log_2 n \rceil$ zwycięstw ($\geq n - 1$ porównań na całym zbiorze).
- Elementy zapisane w liście maksimum to *jedyni kandydaci na drugie miejsce*. Tych kandydatów jest co najmniej $\lceil \log_2 n \rceil$, więc rozróżnienie ich wymaga dodatkowo co najmniej $\lceil \log_2 n \rceil - 1$ porównań.

$$(n - 1) + (\lceil \log_2 n \rceil - 1) = n + \lceil \log_2 n \rceil - 2$$

— mniej się nie da.

Wniosek

Zarówno górna, jak i dolna granica pokrywają się z wartością $n + \lceil \log_2 n \rceil - 2$, więc jest to dokładna liczba porównań potrzebnych i wystarczających do wyznaczenia największego oraz drugiego największego elementu. \square