Dawid Pawliczek

Lista 5, Zadanie 2

Teza

W modelu *liniowych drzew decyzyjnych*[1] każdy algorytm obliczający otoczkę wypukłą n punktów na płaszczyźnie musi w najgorszym przypadku wykonywać $\Omega(n \log n)$ porównań.

Konstrukcja instancji

Umieszczamy $2n$ par różnobiegunowych punktów na jednostkowym okręgu, co drugiemu nadając etykietę *czarny*, a pozostałym – *biały*. Czarne punkty pozostają w ustalonych pozycjach, natomiast białe będą *permutowane* wzdłuż swoich miejsc „na zegarze" (rysunek pomijamy).

Łącznie istnieje $(n!)$ permutacji białych punktów; poniżej pokażemy, że **każda z nich prowadzi do innej otoczki wypukłej**.

Dlaczego permutacje różnią odpowiedź

Niech p, q będą dwoma kolejnymi białymi punktami na otoczce dla pewnej permutacji π. Jeśli w permutacji π' punkty te zamienimy miejscami, to w miarę zbliżania się do siebie (przy zachowaniu okręgu) krawędź pq skraca się i gdy punkty zetkną się, odcinek pq znajdzie się wewnątrz otoczki tworzonej przez pozostałe wierzchołki. Stąd po dowolnej zamianie kolejności białych punktów zestaw *wierzchołków* otoczki zmienia się, a więc procedura musi rozróżnić każdą z $(n!)$ permutacji.

Liczenie liści

W liniowym drzewie decyzyjnym każdy liść odpowiada *jednej* możliwej odpowiedzi. Skoro odpowiedzi jest $n!$, drzewo ma co najmniej $n!$ liści. Drzewo binarne o L liściach ma wysokość $\geq \lceil \log_2 L \rceil$, więc wysokość naszego drzewa to

$$\Omega\big(\log(n!)\big) \; = \; \Omega(n \log n).$$

Konkluzja

Każde liniowe drzewo decyzyjne rozwiązujące problem otoczki wypukłej musi mieć wysokość $\Omega(n \log n)$, co wyznacza dolną granicę $\Omega(n \log n)$ na liczbę niezbędnych porównań. □

Uwaga. Klasyczny dowód można też oprzeć na redukcji z sortowania (umieszczamy punkty (x_i, x_i^2) na paraboli); zaprezentowana argumentacja okręgowa nie odwołuje się do operacji nieliniowych, tym samym bezpośrednio wpisuje się w model liniowych testów.

[1] Każdy test ma postać $A_1x_1 + \cdots + A_nx_n \bowtie 0$, gdzie $\bowtie \in \{<, =, >\}$, zaś w liściach zwracane są ciągi indeksów punktów tworzących otoczkę wypukłą.