Lista zadań. Nr 8. 6 czerwca 2025

Algorytmy i Struktury Danych

IIUWr. II rok informatyki.

1. (2pkt) Niech $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ będzie zbiorem kluczy, (takim, że $\forall_{i=1,\ldots,n-1} a_i < a_{i+1}$), które chcemy pamiętać w słowniku stałym. Znamy także ciąg $p_1, \ldots, p_n$ prawdopodobieństw zapytania o poszczególne klucze. Przyjmujemy, że $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$, a więc do słownika nie będą kierowane zapytania o klucze spoza słownika. Chcemy zaimplementować słownik jako drzewo BST.

   Ułóż algorytm znajdujący takie drzewo, które minimalizuje oczekiwany czas wykonywania operacji na słowniku.

   - Algorytm ma działać w czasie $O(n^3)$.
   - (**Z**) Algorytm ma działać w czasie $O(n^2)$.

2. (2pkt) Ułóż algorytm rozwiązujący problem znajdowania najbliżej położonej pary punktów na płaszczyźnie oparty na następującej idei. Niech d będzie odległością pomiędzy parą najbliżej położonych punktów spośród punktów $p_1, p_2, \ldots, p_{i-1}$. Sprawdzamy, czy p_i leży w odległości mniejszej niż d, od któregoś z poprzednich punktów. W tym celu dzielimy płaszczyznę na odpowiednio małe kwadraty, tak by w każdym z nich znajdował się nie więcej niż jeden punkt. Te "zajęte" kwadraty pamiętamy w słowniku.

   Twój algorytm powinien działać w oczekiwanym czasie liniowym. Jeśli nie potrafisz zbudować algorytmu opartego na powyższej idei, możesz opracować algorytm oparty na innej (ale spełniający te same wymagania czasowe).

3. (1pkt) Oblicz jaka jest oczekiwana liczba pustych list po umieszczeniu n kluczy w tablicy haszowanej o n elementach.

4. (1pkt) Przeprowadź analizę zamortyzowanego kosztu ciągu operacji *insert, deletemin, decrease-key, meld, findmin* wykonywanych na kopcach Fibonacciego, w których kaskadowe wykonanie operacji *cut* wykonywane jest dopiero wtedy, gdy wierzchołek traci trzeciego syna.

5. (1pkt) Oszacuj oczekiwany czas tworzenia słownika stałego (metodą podaną na wykładzie).

6. (1pkt) Rozważamy słownik utworzony metodą adresowania otwartego. Niech n będzie rozmiarem słownika a m - rozmiarem tablicy. Udowodnij, że przy założeniu, że

   > ciąg $\langle h(k,0), \ldots, h(k,m-1)\rangle$ jest z równym prawdopodobieństwem dowolną permutacją zbioru $\{0, \ldots, m-1\}$,

   oczekiwana liczba prób w poszukiwaniu zakończonym sukcesem jest $\leq \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{1-\alpha}$, gdzie $\alpha = \frac{n}{m} < 1$.