Dawid Pawliczek
Lista 2, Zadanie 5

Treść

Dany jest graf $G = (V, E)$ oraz liczba całkowita k. Znaleźć możliwie największy podzbiór $V' \subseteq V$ taki, że dla każdego $v \in V'$

$$\bigl|\{u \in V' : \{u, v\} \in E\}\bigr| \;\geq\; k \quad \text{i} \quad \bigl|\{u \in V' : \{u, v\} \notin E\}\bigr| \;\geq\; k.$$

Zapisując $d_{V'}(v)$ — stopień v wewnątrz V', warunek można skrócić do

$$k \;\leq\; d_{V'}(v) \;\leq\; (|V'| - 1) - k.$$

Algorytm „przycinania”

Algorithm 1 LargestSubset(G, k)

1: $V' \leftarrow V$; kolejka $Q \leftarrow$ wszystkie $v \in V'$
2: **while** $Q \neq \varnothing$ **do**
3: zdejmij v z Q
4: **if** $d_{V'}(v) < k$ **or** $d_{V'}(v) > |V'| - 1 - k$ **then** usuń v z V' i dołóż wszystkich sąsiadów/niesąsiadów v do Q (bo ich stopnie mogły się zmienić)
5: **end while**
6: **return** V'

Idea: *usuwamy każdą sprzeczną z warunkiem* (k, k) *końcówkę — aż do ustalenia się zbioru.*

Dowód poprawności

1. Zatrzymanie. Gdy algorytm kończy, każdy węzeł $v \in V'$ spełnia $k \leq d_{V'}(v) \leq |V'| - 1 - k$, więc V' jest *poprawne*.

2. Nietracenie kandydatów. Rozważ węzeł v usuwany w pewnym kroku, gdy aktualny zbiór ma rozmiar $s = |V'|$ i stopień $d = d_{V'}(v)$.

- Gdy $d < k$, dalsze kroki kasują *tylko* wierzchołki, więc stopień v mógłby już tylko spadać. Warunku $d \geq k$ nie da się odtworzyć.
- Gdy $d > s - 1 - k$, liczba niesąsiadów v wynosi $s - 1 - d < k$. Usuwając jakiekolwiek wierzchołki:
$$(s - 1) - d \longrightarrow (s - 2) - (d - 1) = (s - 1 - d) \;< k,$$
więc wciąż *mniej* niż k. Warunku także nie da się przywrócić.

W obu przypadkach v nie może należeć do *żadnego* poprawnego nadzbioru obecnego V'. Usuwanie jest zatem bezpieczne.

3. Maksymalność. Dowolny poprawny zbiór S jest podzbiorem zbioru operacyjnego na każdym etapie pętli, bo usuwamy wyłącznie węzły, które w S znajdować się nie mogą (punkt 2). Po zakończeniu algorytmu zachodzi $S \subseteq V'$, więc rozmiar V' jest *co najmniej* tak duży, jak największy S.

Zatem zwrócony V' jest największym możliwym podzbiorem spełniającym wymaganie. $\square$

Złożoność

Każdy wierzchołek trafia do kolejki co najwyżej tyle razy, ilu ma sąsiadów, więc łączny koszt to

$$O\big(|V| + |E|\big)$$

przy wykorzystaniu prostych liczników stopni.