Dawid Pawliczek
Lista 5, Zadanie 7

Teza

W modelu drzew decyzyjnych każde scalanie *dwóch* posortowanych ciągów długości n wymaga w najgorszym przypadku co najmniej $2n-1$ porównań.

Gra z adwersarzem

Oznaczmy elementy pierwszego ciągu $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, drugiego $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$.

Adwersarz ogranicza przestrzeń wejść do

$$\mathcal{X} = \{X_0, X_1, \ldots, X_{2n-1}\},$$

gdzie

$$\begin{aligned} X_0 &= a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \\ X_{2k-1} &= X_0 \text{ z zamianą } b_k \leftrightarrow a_k, \\ X_{2k} &= X_0 \text{ z zamianą } b_k \leftrightarrow a_{k+1} \quad (1 \leq k \leq n-1). \end{aligned}$$

Każdy X_i jest poprawnym wynikiem scalania i wszystkie są różne, więc algorytm musi ostatecznie rozróżnić wszystkie $2n$ kandydatów.

Odpowiedzi adwersarza. Algorytm pyta tylko o relacje $a_i \,\text{vs}\, b_j$.

- $|i-j| > 1$: adwersarz odpowiada $a_i < b_j$ (nie eliminuje żadnego X_k).
- $i = j$: adwersarz odpowiada $b_i < a_i$, eliminując wyłącznie X_{2i-1}.
- $i = j+1$: odpowiada $a_i < b_j$, eliminując wyłącznie X_{2j}.

Każde pytanie usuwa z $\mathcal{X}$ *co najwyżej jeden* ciąg; aby pozostał jeden, potrzeba co najmniej $2n-1$ pytań.

Przykład dla $n = 3$

Zestaw kandydatów

$$\begin{aligned} X_0 &= a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ a_3,\ b_3, \\ X_1 &= b_1,\ a_1,\ a_2,\ b_2,\ a_3,\ b_3, \\ X_2 &= a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ a_3,\ b_3, \\ X_3 &= a_1,\ b_1,\ b_2,\ a_2,\ a_3,\ b_3, \\ X_4 &= a_1,\ b_1,\ a_2,\ a_3,\ b_2,\ b_3, \\ X_5 &= a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ b_3,\ a_3. \end{aligned}$$

Jak adwersarz odpowiada na pytania

Typ	**Przykład pytania**	**Odp.**	**Elim.** X_k	**Dlaczego**
$\lvert i-j\rvert > 1$	$a_3 \mathbin{?} b_1$	$a_3 < b_1$	—	w żadnym X_k nie ma $b_1 < a_3$
$i = j$	$a_2 \mathbin{?} b_2$	$b_2 < a_2$	X_3	bo tylko w X_3: $a_2 < b_2$
$i = j+1$	$a_2 \mathbin{?} b_1$	$a_2 < b_1$	X_2	bo tylko w X_2: $b_1 < a_2$

W każdym wierszu najwyżej *jeden* kandydat staje się sprzeczny z odpowiedzią, zgodnie z ogólnym dowodem.

Wniosek

Aby zredukować $|\mathcal{X}| = 2n$ kandydatów do jednego, algorytm musi zadać przynajmniej $2n-1$ pytań, co dowodzi dolnej granicy

$$\boxed{2n-1}$$

porównań dla scalania dwóch n-elementowych ciągów. $\square$