1. Obliczanie całek (wskaźniki do funkcji)

1 Założenia wstępne

1.1 Całka a kwadratura.

Obliczanie całki zastępujemy obliczaniem kwadratury – numerycznego przybliżenia wartości całki Riemanna. Do najbardziej elementarnych metod obliczenia przybliżenia Q całki $\int_a^b f(x)dx$ należą kwadratury (wzory):

1. prostokątów
$$Q_R = (b-a)f(c), \quad c \in [a,b],$$
   w tym
   - prostokątów w przód (lewostronna), gdy $c = a$,
   - prostokątów wstecz (prawostronna), gdy $c = b$,
   - prostokątów punktu środkowego (centralna), gdy $c = (a+b)/2$.
2. trapezów
$$Q_T = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)],$$
3. Simpsona
$$Q_s = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f(c) + f(b)\right], \quad c = (a+b)/2.$$

1.2 Całki jednokrotne – Kwadratury złożone

Złożona kwadratura wybranego typu polega na podziale przedziału całkowania $[a,b]$ na n równych podprzedziałów o długości $h = (b-a)/n$ i zsumowanie kwadratur prostych tego typu obliczonych dla każdego podprzedziału. Np. złożona kwadratura prostokątów w przód (leftpoint) jest sumą

$$C_{R_{left}} = h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

gdzie $x_0 = a$ i $x_i = x_{i-1} + h$ dla $i = 1, \ldots, n-1$.

1.3 Funkcje z wskaźnikiem na funkcję podcałkową

Szablon programu należy uzupełnić o:

1. definicje funkcji (procedur) obliczających wartości przykładowych funkcji podcałkowych

- `f_poly(double x)`, która zwraca wartość wielomianu $2x^5-4x^4+3.5x^2+1.35x-6.25$,
- `f_rat(double x)`, która zwraca wartość funkcji $f(x)=\frac{1}{(x-0.5)^2+0.01}$,
- `f_exp(double x)`, która zwraca wartość funkcji $f(x)=2x\,e^{-1.5x}-1$,
- `f_trig(double x)`, która zwraca wartość funkcji $f(x)=x\,\mathrm{tg}(x)$

2. definicję nazwy `typedef ...Func1vFp...;` – typu wskaźnikowego do funkcji z jednym parametrem typu `double` i zwracającą wartość typu `double`.

3. definicje funkcji obliczających złożoną kwadraturę dla funkcji `f` z podziałem przedziału całkowania $[a, b]$ na `n` podprzedziałów

   - prostokątów w przód (leftpoint) – `quad_rect_left(...)`,
   - prostokątów wstecz (rightpoint)– `quad_rect_right(...)`,
   - prostokątów punktu środkowego (midpoint) – `quad_rect_mid(...)`,
   - trapezów – `quad_trap(...)`,
   - Simpsona – `quad_simpson(...)`.

   W ostatnich dwóch kwadraturach należy unikać dwukrotnego obliczania wartości funkcji podcałkowej dla tego samego argumentu.
   Każda z tych funkcji ma 4 argumenty:

   (a) wskaźnik do funkcji obliczającej wartość funkcji podcałkowej `f`,
   (b) dolną granicę całkowania `a`,
   (c) górną granicę całkowania `b`,
   (d) liczbę podprzedziałów `n`.

4. definicję nazwy `typedef ...QuadratureFp...` – typu wskaźnikowego do funkcji obliczających wartości kwadratury.

Tablice wskaźników na funkcje

Szablon programu należy uzupełnić o definicję funkcji
`double quad_select(int quad_no, int fun_no, double a, double b, int n)`,
która w przedziale $[a, b]$ oblicza kwadraturę złożoną wskazaną indeksem `quad_no` (z podziałem na `n` podprzedziałow) dla funkcji podcałkowej wskazanej indeksem `fun_no`. Na zewnątrz funkcji `quad_select()` są zdefiniowane tablice wskaźników do funkcji odpowiednio typu `Func1vFp` oraz `QuadratureFp`. Obie tablice są inicjalizowane wskaźnikami do funkcji zdefiniowanych w punkcie 1.3.

2 Test metod całkowania

Wczytuje granice przedziału całkowanie oraz liczbę podprzedziałów i 20 razy wywołuje funkcję `quad_select()`. Dwa pierwsze argumenty tej funkcji są parą iloczynu kartezjańskiego zbioru indeksów tablicy wskaźników do kwadratur `quad_tab` i zbioru indeksów tablicy wskaźników do funkcji podcałkowych `func_tab`.

- **Wejście**
  Nr testu
  granice przedziału całkowania, liczba podprzedziałów
- **Wyjście**
  Każda linia standardowego wyjścia zawiera wartości czterech całek oznaczonych dla funkcji podcałkowych, w kolejności jak w definicji tablicy `func_tab`. Kolejne 5 linii odpowiada wybranym kwadraturom zgodnie z porządkiem z tablicy `quad_tab`.
- **Przykład:**

  Wejście:
  1
  0 0.75 25

  Wyjście:
  -3.97887 25.47947 0.14924 -0.48180
  -3.91316 25.77788 0.17020 -0.46719
  -3.94620 25.64102 0.15945 -0.47427
  -3.94602 25.62868 0.15972 -0.47450
  -3.94614 25.63690 0.15954 -0.47434

3 Algorytm adaptacyjny w wersji rekurencyjnej

W algorytmie jest stosowana jedna, elementarna kwadratura w wersji podstawowej (tzn. nie złożonej). Na każdym etapie obliczeń wyznaczamy przybliżoną wartość S całki z funkcji f w pewnym podprzedziale przedziału $[a, b]$ wg podstawowego wzoru wybranej kwadratury.

Błąd przybliżenia wartości całki kwadraturą jest mały jeżeli długość h podprzedziału, w którym jest obliczana całka, jest mała. Algorytm adaptacyjny ma na celu osiągnięcie wyniku (przybliżonej wartości całki) z błędem bezwzględnym nie większym niż zadana wartość Δ skracając długości podprzedziałów tylko tam, gdzie to jest konieczne.

Pierwsze przybliżenie całki jest obliczane dla całego przedziału $[a, b]$. Następnie ten przedział jest dzielony na połowy. Wzór podstawowy wybranej kwadratury jest teraz stosowany osobno dla lewej połówki (od a do $c = (a + b)/2$) i dla prawej (od c do b). Otrzymujemy przybliżone wartości dwóch części obliczanej całki – S_1 i S_2. Jeżeli suma $S_1 + S_2$ różni się od S nie więcej niż o Δ, to uznajemy, że otrzymany wynik jest dostatecznie dokładny i kończymy algorytm. W przeciwnym przypadku stajemy przed dwoma zadaniami - obliczyć całkę na dwóch połówkach (lewej i prawej), każdej z błędem nie większym niż $\Delta/2$. Zauważmy, że są to jakościowo dokładnie dwa takie same zadania jak zadanie pierwotne (obliczyć całkę z błędem nie większym niż zadany).

Należy tak napisać program, aby liczba obliczeń wartości zadanej funkcji była jak najmniejsza, czyli aby nie obliczać dwukrotnie funkcji dla tego samego argumentu. W tym celu obliczona na danym poziomie rekurencji wartość kwadratury jest przekazywana przez parametry na kolejny poziom.

W funkcji rekurencyjnej powinna być kontrola poziomu rekursji. Załóżmy, że jeżeli maksymalny zadany poziom rekursji został osiągnięty, a błąd nadal przekracza dopuszczalną granicę `RECURS_LEVEL_MAX` (stała zdefiniowana w programie), to wynikiem obliczeń będzie symbol nieoznaczony `NaN`.

Uwaga: Algorytm nie gwarantuje wyniku w granicach zadanego błędu - możliwe jest przekroczenie zadanego dopuszczalnego błędu. Dlatego w praktyce obliczeniowej stosuje się dodatkowe zabezpieczenia, które tu – dla uproszczenia zadania – nie są proponowane.

Wartości startowe rekurencji (wartość `S` kwadratury obliczona na całym przedziale $[a, b]$ i początkowy poziom rekurencji) są ustalane we wstępnej procedurze `init_recurs()`.

Szablon programu należy uzupełnić o definicję funkcji inicjującej
`double init_recurs(Func1vFp f, double a, double b, double delta, QuadratureFp quad)`
oraz funkcji wywoływanej rekurencyjnie
`double recurs(Func1vFp f, double a, double b, double S, double delta, QuadratureFp quad, int level)`.

Test polega na wczytaniu danych a następnie wywołaniu funkcji `double init_recurs()`. Całkowana funkcja jest wybierana z tablicy wskaźników do funkcji `func_tab`, a kwadratura z tablicy kwadratur `quad_tab`.

- **Wejście**
  Nr testu
  indeks funkcji podcałkowej, indeks kwadratury
  granice całkowania, dopuszczalny błąd bezwzględny
- **Wyjście**
  Wartość kwadratury
- **Przykład:**

  Wejście:
  2
  1 4
  0 3 0.01

  Wyjście:
  29.04248

4 Całka podwójna po powierzchni (*surface integral*)

Należy zdefiniować typ `typedef ...Func2vFp...;` jako wskaźnik do funkcji z dwoma parametrami typu `double` zwracającej wartość typu `double`.

4.1 Całka po obszarze prostokątnym

Obszar całkowania funkcji $f(x, y)$ można zapisać w postaci

$$R = \{(x, y) : x_1 \leqslant x \leqslant x_2,\ y_1 \leqslant y \leqslant y_2\},$$

Szablon programu należy uzupełnić o definicję funkcji `double dbl_integr(Func2vFp f, double x1, double x2, int nx, double y1, double y2, int ny)`, która złożoną metodą prostokątów w przód (leftpoint) oblicza przybliżoną wartość całki. Parametry `nx` i `ny` są liczbami podprzedziałów kwadratur złożonych.

$$V = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy \right) dx \tag{1}$$

Po wczytaniu danych `x1, x2, nx, y1, y2, ny` należy wywołać funkcję `dbl_integr(f, x1, x2, nx, y1, y2, ny)`. Funkcja podcałkowa `f`: `func2v_2`.

- **Wejście**
  Nr testu
  `x1, x2, nx, y1, y2, ny`
- **Wyjście**
  Wartość kwadratury
- **Przykład:**

  Wejście:
  3
  0 1 100
  0 1 100

  Wyjście:
  1.42662

4.2 Całka po obszarze normalnym

Obszar postaci

$$D = \{(x, y) : x_1 \leqslant x \leqslant x_2,\ g(x) \leqslant y \leqslant h(x)\},$$

gdzie funkcje $g(x)$ i $h(x)$ są ciągłe na odcinku $[x_1, x_2]$, oraz $g(x) < h(x)$ we wnętrzu tego odcinka, nazywamy obszarem normalnym względem osi $0x$.

Użyteczny link:
`https://pl.wikipedia.org/wiki/Ca%C5%82ka_podw%C3%B3jna`, część: Zamiana na całkę iterowaną.

Wtedy wzór (1) można zapisać w postaci

$$V_n = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Szablon programu należy uzupełnić o definicję funkcji `double dbl_integr_normal_1(Func2vFp f, double x1, double x2, int nx, double hy, Func1vFp fg, Func1vFp fh)`. Parametr `hy` jest przybliżoną długością podprzedziału kwadratury złożonej zastosowanej do całkowania wzdłuż zmiennej y. Służy do wyznaczenia liczby podprzdziałów n_y – najmniejszej liczby całkowitej, nie mniejszej od $\frac{h(x_i)-g(x_i)}{h_y}$.

Po wczytaniu danych `x1, x2, nx, hy` i wywołujemy funkcje `dbl_integr_normal_1(f, x1, x2, nx, hy, fg, fh)`.

Całkowana funkcja `f`: `func2v_2`.

Funkcje ograniczające obszar całkowania `fg` i `fh`: `lower_bound_2`, `upper_bound_2`.

- **Wejście**
  Nr testu
  `x1, x2, nx, y1, y2, ny`

- **Wyjście**
  Wartość kwadratury

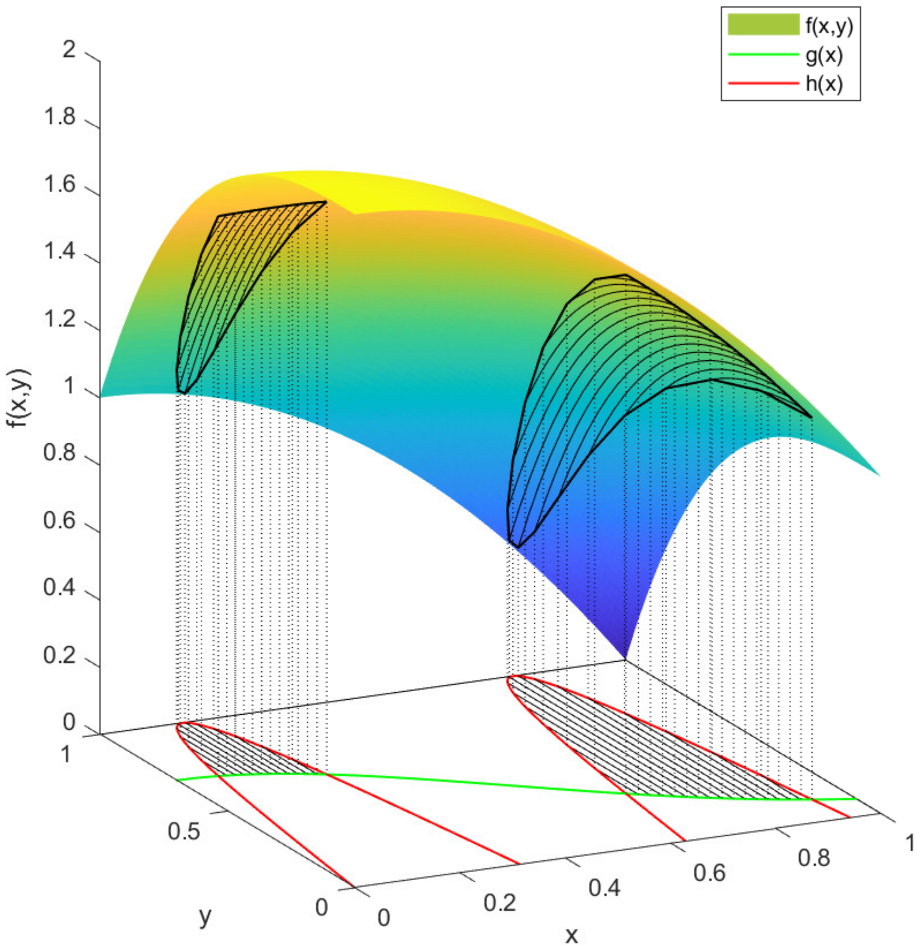
- **Przykład:**

  Wejście:
  4
  0.7 0.9 200
  1e-3

  Wyjście:
  0.14480

4.3 Całka po kilku obszarach normalnych wewnątrz prostokąta

Rozważmy przypadek obszaru całkowania bardziej ogólnego niż obszar normalny, gdy warunek $g(x) \leqslant h(x)$ nie jest spełniony dla każdego $x \in [a, b]$.



Rysunek 1: Przykład zadania całkowania po dwóch obszarach normalnych względem osi $0x$. $f(x, y) = 2 - x^2 - y^3$, $\quad g(x) = 0.7\exp(-2x^2)$, $\quad h(x) = \sin(10x)$.

Rysunek 1 jest wykresem funkcji $f(x,\, y)$ całkowanej we wszystkich (dwóch) podobszarach prostokąta

$$R = \{(x, y) : a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d\},$$

w których $g(x) < h(x)$ – obszary te są na rysunku oznaczone kreskowaniem kolorem czarnym. Każdy z nich jest obszarem normalnym względem osi $0x$. Użycie algorytmu z punktu 4.2 wymagałoby wyznaczania wszystkich pierwiastków równania $g(x) = h(x)$.

W tym zadaniu należy zastosować prostszy algorytm całkowania – całkowania po obszarze prostokątnym R z predykatem orzekającym, czy dla danej wartości x_i zachodzi nierówność $g(x_i) < y < h(x_i)$. Jeżeli tak, to należy obliczyć całkę (a dokładniej – kwadraturę)

$$Q_i(x_i) \approx \int_{\max(y_1, g(x_i))}^{\min(y_2, h(x_i))} f(x_i, y)dy$$

stosując jedną z kwadratur złożonych.

Szablon programu należy uzupełnić o definicję funkcji
`dbl_integr_normal_n(Func2vFp f, double x1, double x2, int nx, double y1, double y2, int ny, Func1vFp fg, Func1vFp fh))`,
która złożoną metodą prostokątów leftpoint oblicza przybliżoną objętość pod wykresem funkcji `f` nad obszarem normalnym ograniczonym wartościami `x1`, `x2`, i funkcjami $h(x)$ i $g(x)$ oraz prostokątem x_1, y_1, x_2, y_2.

Liczbę podprzedziałów kwadratur $Q_i(x_i)$ należy wyznaczyć podobnie jak w punkcie 4.2 przyjmując $h_y = (y_2 - y_1)/n_y$.

Po wczytaniu danych `x1, x2, nx, y1, y2, ny` wywołujemy funkcję `dbl_integr_normal_n(f, x1, x2, nx, y1, y2, ny, fg, fh)`

Całkowana funkcja `f`: `func2v_2`.

Funkcje ograniczające obszar całkowania `fg` i `fh`: `lower_bound_2`, `upper_bound_2`.

Jak widać stosujemy tutaj tę samą funkcję podcałkową i funkcje ograniczające jak w poprzednim teście, jednak rozszerzenie przedziału $[a,\, b]$ spowodowało, że teraz warunek $g(x) \leqslant h(x)$ nie jest spełniony dla całego przedziału całkowania.

- **Wejście**
  Nr testu
  `x1, x2, nx, y1, y2, ny`
- **Wyjście**
  Wartość kwadratury
- **Przykład:**

  Wejście:
  5
  0 1 1000
  0 1 1000

  Wyjście:
  0.21668

5 Całki potrójne – z predykatem wyłączającym część obszaru całkowania

5.1 Uniwersalny typ funkcji (procedury) obliczającej wartość funkcji n zmiennych

Procedura obliczająca wartości funkcji n zmiennych wymaga przekazania do niej n wartości zmiennych niezależnych. Aby stworzyć uniwersalną funkcję n zmiennych wartości zmiennych niezależnych będziemy przekazywać poprzez n-elementową tablicę.

Przykładowa funkcja podcałkowa trzech zmiennych jest zdefiniowana w szablonie programu `double func3v(const double v[], int n)`. Nazwa typu wskaźnika do takiej procedury (funkcji) jest w szablonie programu zdefiniowana jako: `typedef double (*FuncNvFp)(const double*, int);`

5.2 Predykat wykluczający dany punkt z obszaru całkowania

Zdefiniowana w szablonie funkcja `int bound3v(const double v[], int n)` jest predykatem zwracającym 1 gdy punkt o współrzędnych zapisanych w tablicy `v` leży wewnątrz obszaru całkowania.

Nazwa typu wskaźnika do procedury – predykatu – zwracającej wartość logiczną warunku określającego, czy zadany punkt w przestrzeni n-wymiarowej należy do zadanego obszaru całkowania, jest zdefiniowana jako: `typedef int (*BoundNvFp)(const double*, int)`

5.3 Całka potrójna po prostopadłościanie z predykatem *boundary* akceptującym albo wykluczającym elementarną domenę kwadratury

Szablon programu należy uzupełnić o definicję funkcji `double trpl_quad_rect(FuncNvFp f, int variable_no, const double variable_lim[][2], const int tn[], BoundNvFp boundary)`, która oblicza kwadraturę prostokątów wstecz (rightpoint) jako przybliżenie całki potrójnej po prostopadłościanie. Dolne i górne granice przedziałów całkowania wzdłuż kolejnych zmiennych są przekazywane w tablicy `variable_lim`, a liczby podprzedziałów – w tablicy `tn`. Parametr `boundary` jest adresem predykatu. Wartość `NULL` tego parametru oznacza brak predykatu, czyli brak ograniczeń w obszarze całkowania.

Po wczytanie danych `x1, x2, nx, y1, y2, ny` wywołujemy funkcję `trpl_quad_rect()`

Całkowana funkcja: `func3v`

Predykat: Funkcje ograniczające obszar całkowania `bound3v`.

- **Wejście**
  Nr testu
  `x1, x2, nx`
  `y1, y2, ny`
  `z1, z2, nz`
  flaga predykatu (0 – gdy nie ma ograniczeń obszaru całkowania, 1 – gdy istnieje predykat)
- **Wyjście**
  Wartość kwadratury

- **Przykład:**

  Wejście:
  6
  0 1 20
  0 1 20
  0 1 20
  1

  Wyjście:
  0.39666

6 Całka n-krotna z predykatem

W szablonie programu są zdefiniowane przykładowe funkcje n zmiennych:

- procedura obliczająca wartość funkcji podcałkowej n-wymiarowej `funcNv(const double v[], int n)`
- predykat `int boundNv(const double v[], int n)`.

Liczba zmiennych jest ograniczona zdefiniowaną stałą `N_MAX`.

6.1 Całka po hiperprostopadłościanie z predykatem *boundary*

Szablon programu należy uzupełnić o definicję rekurencyjnej funkcji `recur_quad_rect_mid(double *psum, FuncNvFp f, int variable_no, double tvariable[], const double variable_lim[][2], const int tn[], int level, BoundNvFp boundary)`, która oblicza przybliżenie całki z `variable_no` wymiarowej funkcji `f` po hiperprostopadłościanie określonym ograniczeniami zapisanymi w `variable_lim`. Wzdłuż i-tej zmiennej jest obliczana złożona kwadratura prostokątów punktu środkowego (midpoint) z podziałem na `tn[i]` podprzedziałów. Wartość kwadratury jest zapisywana pod adresem przekazywanym do funkcji przez jej pierwszy parametr.

Po wczytaniu danych `x1, x2, nx, y1, y2, ny` wywołujemy funkcję `recur_quad_rect()`

Całkowana funkcja: `funcNv`

Predykat: `boundNv`

- **Wejście**
  Nr testu
  Krotność całki n
  n linii z przedziałem całkowania i liczbą podprzedziałów
  flaga predykatu (0 – gdy nie ma ograniczeń obszaru całkowania, 1 – gdy istnieje predykat)
- **Wyjście**
  Wartość kwadratury
- **Przykład:**

  Wejście:
  7
  4

0 1 10
0 1 10
0 1 10
0 1 10
1

Wyjście:
0.98941