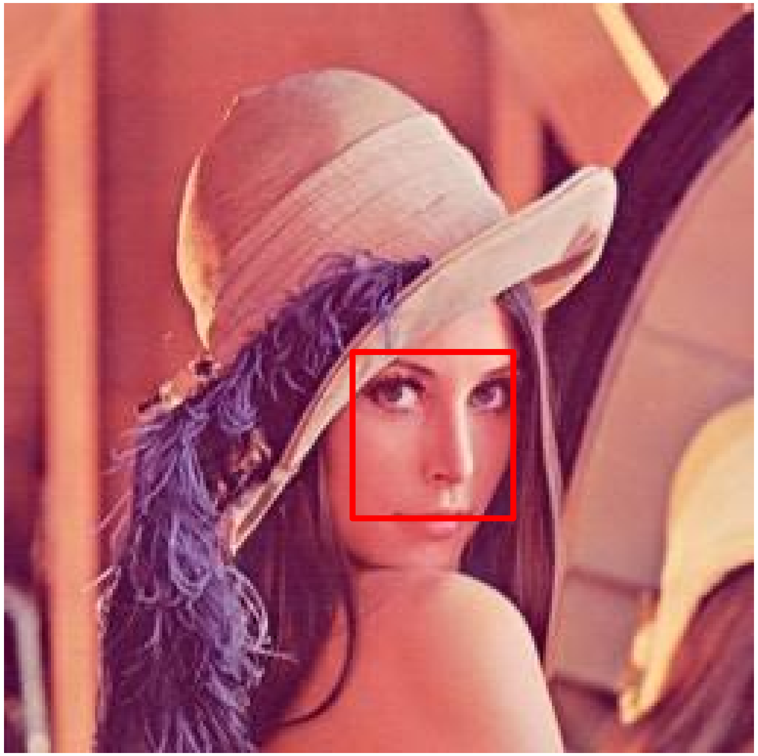
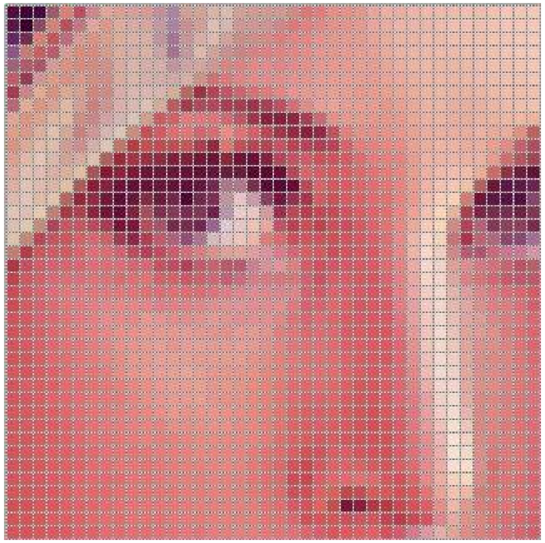
智能优化算法

第2章　数学基础知识

2.1 数字图像数据

- 数字图片，通过像机等拍摄获取，
- 数据类型： jpg, png, gif....
- 规则的格子构成的二维数据 x,y





下一页 上一页

2.1.1 数字图像的表示

$$f(x,y)=\begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) & \cdots & f(0,N-1) \\ f(1,0) & f(1,1) & \cdots & f(1,N-1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(M-1,0) & f(M-1,1) & \cdots & f(M-1,N-1) \end{bmatrix}$$

这个表达式的右侧定义 了一幅数字图像。矩阵 中的每个元素称为图像像素。

1. 大小为 M*N的图像：二维函数 f(x, y),
2. (x, y)为坐标，f(x, y)为坐标值，也即像素值

3. 灰度图：M*N, f(i, j) = c
   彩色图：M*N*3, f(i, j)＝（ r ， g ， b ）

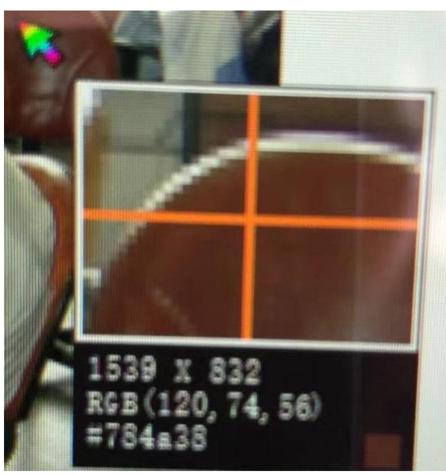
4. 其中，像素值的大小范围为[0, 255]的整数值

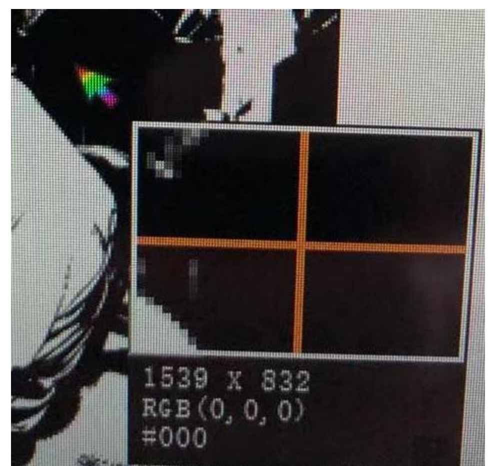
彩色图、灰度图、二值图

[r,g,b]--[0,255]

[c]--[0,255]

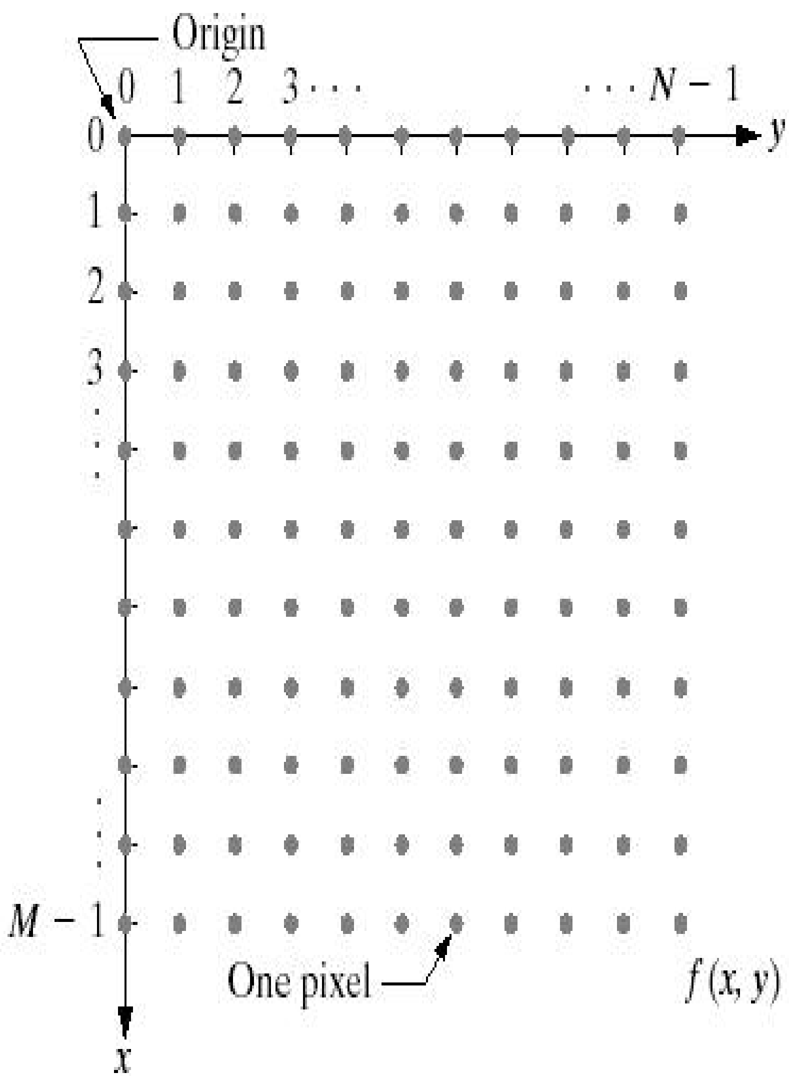
0,1





下一页 上一页

2.1.2 像素坐标系：



左图为，M*N图像的坐标系

1、坐标原点位于左上角

2、数据先沿x轴增加

3、然后再沿y轴增加

4、坐标轴为整数

5、matlab中原点为(1,1)

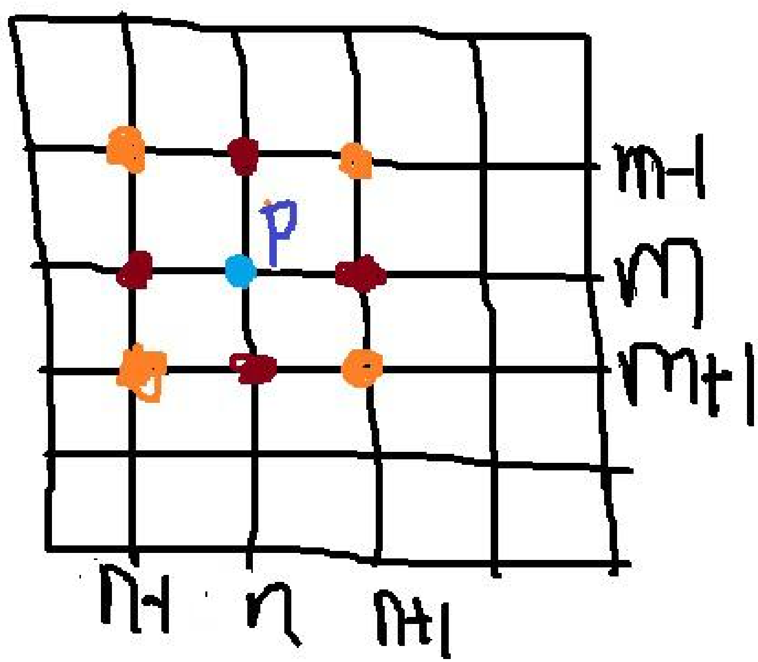
2.1.3 像素间的关系与距离

- 像素p(m,n)的相邻像素

4邻域 $N_4(p)$： (m+1, n), (m-1, n), (m, n+1), (m, n-1)

对角邻域 $N_D(p)$： (m+1, n+1), (m+1, n-1), (m-1, n+1), (m-1, n-1)

8邻域 $N_8(p)$： $N_4(p) + N_D(p)$



像素间距离的度量

像素P(x, y), Q(s, t)间的距离

- 欧氏距离：

$$D_e(p,q)=\left[(x-s)^2+(y-t)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

- D_4距离（城市街区距离）：

$$D_4(p,q)=|x-s|+|y-t|$$

- D_8距离（棋盘距离）：

$$D_8(p,q)=\max\left(|x-s|,|y-t|\right)$$

下一页　上一页

2.1.4 数字图像的 matlab命令

- 读取图像：I = imread('scene.jpg');
- 显示图像：imshow(I);
- 获取图像的大小：[m,n,r] = size(I);
- 彩图转灰度图：gray_I = rgb2gray(I);
- 图像数据类型转换：double(I);
- RGB转HSV：I_h=rgb2hsv(I);
- 彩色图转二值图像：

```
thresh_I = graythresh(I);
im2_I = im2bw(I, thresh_I);
```

下一页 上一页

2.2 图像数据的微分算子

标量定义：只有大小，没有方向，常数

向量定义：有大小，也有方向

n维向量写成行的形式，称为行向量，记为

$$\alpha^T = (a_1, a_2, \cdots, a_n),$$

写成列的形式，称为列向量，记为

$$\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

2.2.1 向量内积

向量内积：常数

$$\vec{i}=(1,0,0) \quad \vec{j}=(0,1,0) \quad \vec{k}=(0,0,1)$$

$$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k},$$

$$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$$

$$<\mathrm{a},\mathrm{b}>=\mathrm{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$$

对任意的 $x,y\in\mathbf{R}^n$，

$$\langle x,y\rangle=x^Ty=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i.$$

下一页 上一页

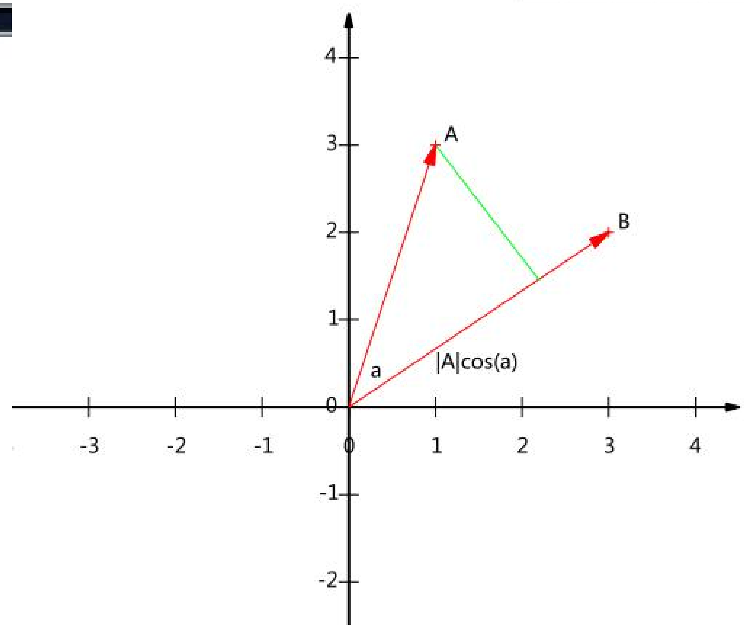
投影

- 内积：二维向量A,B内积定义

$$A \cdot B = |A||B|\cos\theta$$

- 投影：假设B为单位向量，|B|=1,

$$A \cdot B = |A|\cos\theta$$



- A与B的**内积值**等于A向B所在直线投影的矢量长度

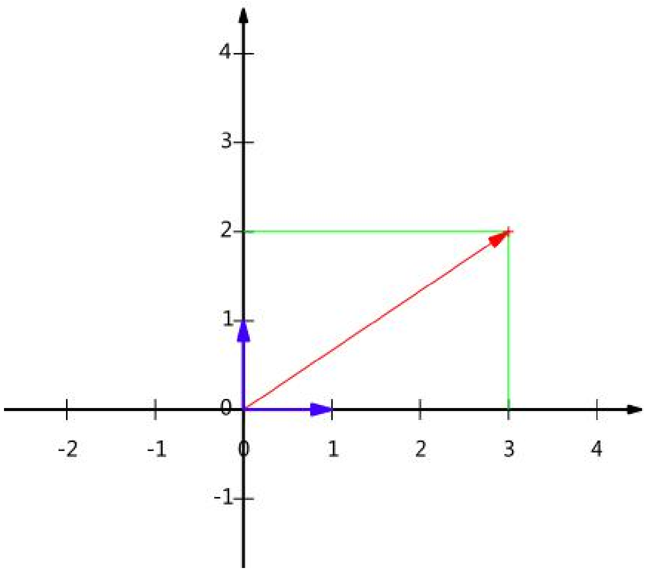
坐标系与向量

- 右图中二维坐标系的基： $\vec{e}_1 = (1,0), \vec{e}_2 = (0,1)$
- 向量(3,2)完整表示为：

$$(3,2) = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$$

- 在x轴方向的投影为3，在y轴方向的投影为2
- 上式又可写为

$$(3,2) = <(3,2), \vec{e}_1> \vec{e}_1 + <(3,2), \vec{e}_2> \vec{e}_2$$



因此，对于n维向量 $\vec{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$,

有 $$\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} < \vec{a}, e_i > e_i$$

2.2.2 矩阵

定义1 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1, 2, \cdots, m;\ j=1, 2, \cdots, n)$排成一个 m 行 n 列的矩形表称为一个 $m\times n$ 矩阵，记作

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

其中 a_{ij} 称为矩阵的第 i 行第 j 列的元素.

一般情况下，我们用大写字母 A，B，C 等表示矩阵.

$m\times n$矩阵A简记为 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 或记作 $A_{m\times n}$.

下一页 上一页

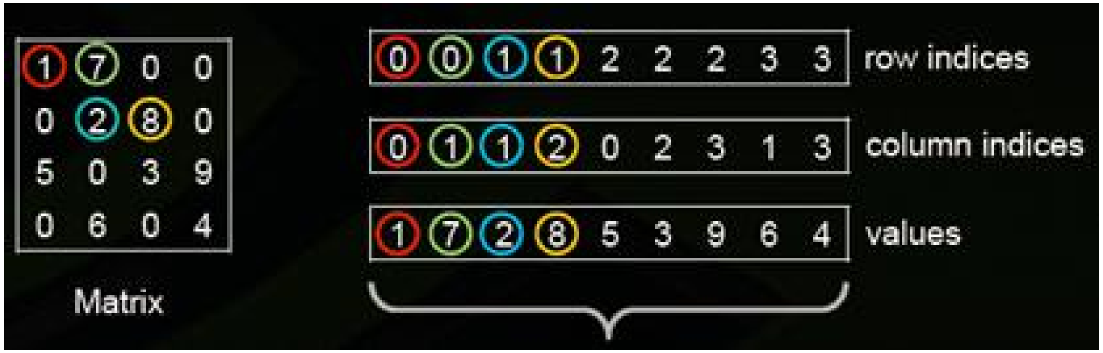
稀疏矩阵(Sparse Matrix)

定义： 矩阵中非零元素的个数远远小于矩阵元素的总数

$$M=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

稀疏矩阵示意图

存储方式： 用三元组来表示，分别是（行号，列号，数值）




```
a = [1 1 1 2 3 3 4 5 6];
b = [1 5 8 3 3 7 6 4 2];
v = [2 6 7 1 2 3 8 5 9];
A = sparse(a,b,v);
```

矩阵内积

1. 矩阵 A, B 内积定义：对应元素相乘求和

$$\mathrm{A}\bullet\mathrm{B}=\sum_{ij}a_{ij}b_{ij}$$

2. 矩阵A的迹(trace)：A的主对角线（从左上方至右下方的对角线）上各个元素的总和：

$$\mathrm{tr}A=\sum_{i=1}^{n}A_{ii}.$$

矩阵分解

- 对称特征值分解，矩阵为方阵

假设 $A \in \mathbf{S}^n$，即 A 是实对称 $n \times n$ 矩阵。那么 A 可以因式分解为

$$A = Q \Lambda Q^T,$$

其中 $Q \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是正交矩阵，即满足 $Q^T Q = I$，

而 $\Lambda = \mathbf{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ ：λ_i 是 A 的特征值

矩阵 $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 被称为正交矩阵的条件是

$$A^T A = I，即\ A^{-1} = A^T$$

- 奇异值分解：矩阵为任意阶矩阵

假设 $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$，rank $A = r$。那么 A 可以因式分解为

$$A = U\Sigma V^T,$$

其中 $U \in \mathbf{R}^{m\times r}$ 满足 $U^TU = I$， $V \in \mathbf{R}^{n\times r}$ 满足 $V^TV = I$，

$\Sigma = \mathbf{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_r)$ σ_i 则称为奇异值。

求$\boldsymbol{U},\boldsymbol{V},\boldsymbol{\Sigma}$分别是什么？

如何求出分解后的三个矩阵？ U, V, Σ

- 构造对称方阵： $\boxed{A^T A}$
- 对其进行特征分解：

$$\boxed{A^T A v_i = \lambda_i v_i \quad \text{记}\ V' = [v_1 \cdots v_n]}$$

- 同样构造对称方阵： $\boxed{A\ A^T}$
- 对其进行特征分解：

$$\boxed{A A^T u_i = \lambda_i u_i \quad \text{记}\ U' = [u_1 \cdots u_m]}$$

注：
矩阵与其转置矩阵的特征值相同

如何求出分解后的三个矩阵? U, V, Σ

- 需要证明A分解的U,V为以上定义的U,V

$$\because A = U\Sigma V^T,$$
$$\therefore A^T = V\Sigma^T U^T \Rightarrow A^T A = V\Sigma^2 V^T$$

$\therefore A^T A$的特征向量组V即是SVD中的V矩阵

同理AA^T的特征向量组U即是SVD中的U矩阵

Σ: $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$

注:
矩阵与其转置矩阵的特征值相同

奇异值分解可以写成

$$A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T,$$

其中 $u_i \in \mathbf{R}^m$ 是左奇异向量，$v_i \in \mathbf{R}^n$ 是右奇异向量。

例： 求矩阵的SVD分解：

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

首先求出$A^T A$和AA^T

$$\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

进而求出A^TA的特征值和特征向量：

$$\lambda_1 = 3; v_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}; \lambda_2 = 1; v_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

接着求AA^T的特征值和特征向量：

$$\lambda_1 = 3; u_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}; \lambda_2 = 1; u_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}; \lambda_3 = 0; u_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

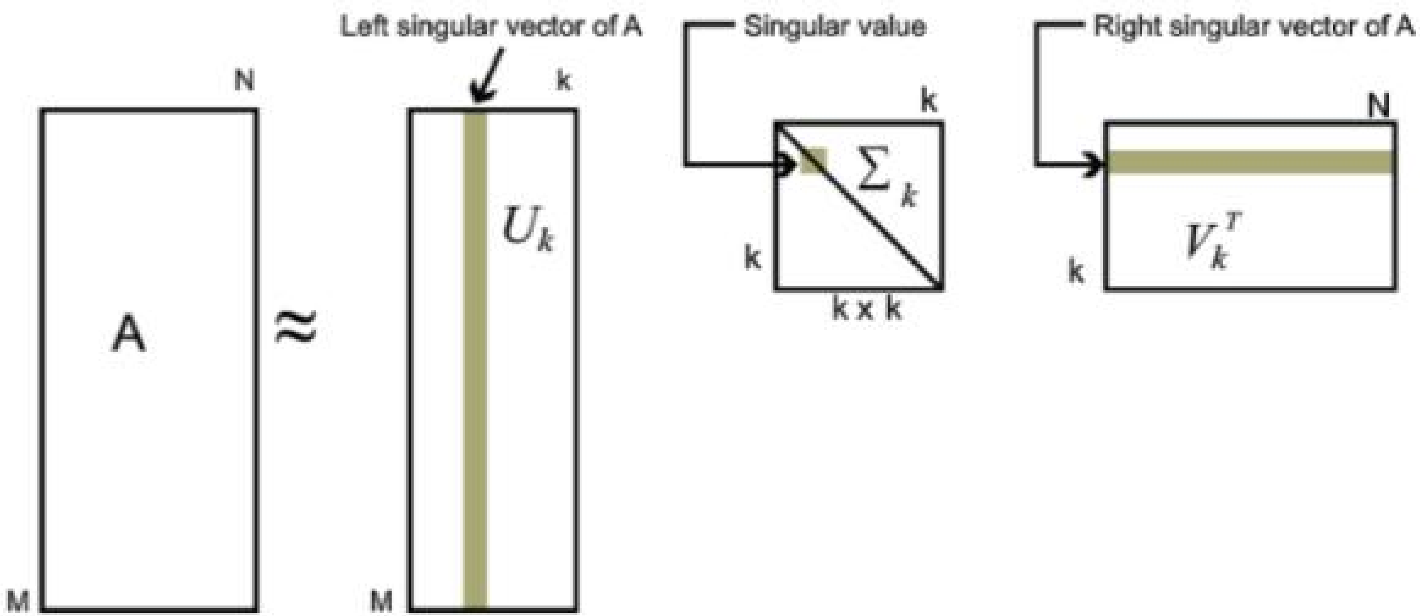
用$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$直接求出奇异值为$\sqrt{3}$和1.

$$A = U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

SVD的性质：矩阵的秩为k时

- 矩阵的奇异值个数很少，可如下逼近：

$$A_{m\times n}=U_{m\times m}\Sigma_{m\times n}V_{n\times n}^{T}\approx U_{m\times k}\Sigma_{k\times k}V_{k\times n}^{T}$$



下一页 上一页

2.2.3 导数与梯度

一阶导数定义：函数在某一点处切线的斜率

如果一个函数 $f(x)$ 在 x_0 附近有定义，而且存在极限

$$L=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

那么 $f(x)$ 在 x_0 处可导且导数 $f'(x_0)=L$.

高阶导数定义：

如果函数的导数函数仍然可导，那么导数函数的导数是二阶导数，二阶导数函数的导数是三阶导数. 一般地记为

$$f^{(n)}(x)=\frac{d}{dx}f^{(n-1)}(x)$$

或者进一步

$$f^{(n)}(x)=\frac{d^n}{dx^n}f(x)$$

下一页 上一页

- 导数的链式求导法则：

$$y = f(u(x))$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

偏导数

假设二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某个邻域中有定义．固定 $y=y_0$，使 x 在 x_0 附近变动，$f(x,y_0)$ 就成为 x 的一元函数．如果这个函数在 x_0 可导，即存在极限：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}.$$

则称这个导数为 $f(x,y)$,在(x_0,y_0)关于变元 x 的偏导数.

记为 $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$，或者 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$．或者 $f_x'(x_0,y_0)$．

梯度

梯度算子记号 ∇：

函数的梯度：向量，其偏导数构成的向量：

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_1}\vec{\boldsymbol{e}}_1 + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_2}\vec{\boldsymbol{e}}_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_n}\vec{\boldsymbol{e}}_n$$

对于可微函数 $f(x, y, z)$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

$$\nabla f(x, y, z) = (f_x, f_y, f_z)$$

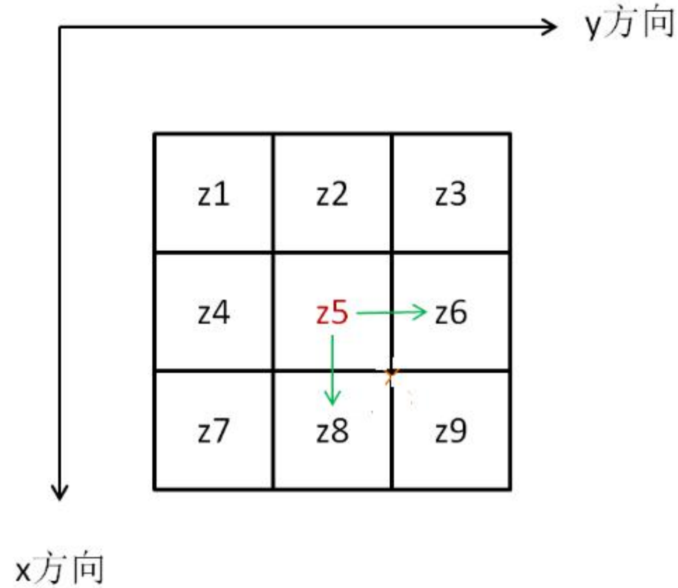
灰度图像--梯度算子离散

- 大小为M*N的灰度数字图像定义:

$$f_{ij} = f(x_i, y_j), \quad i = 1, \cdots M, j = 1, \cdots N$$

- 其梯度定义如下

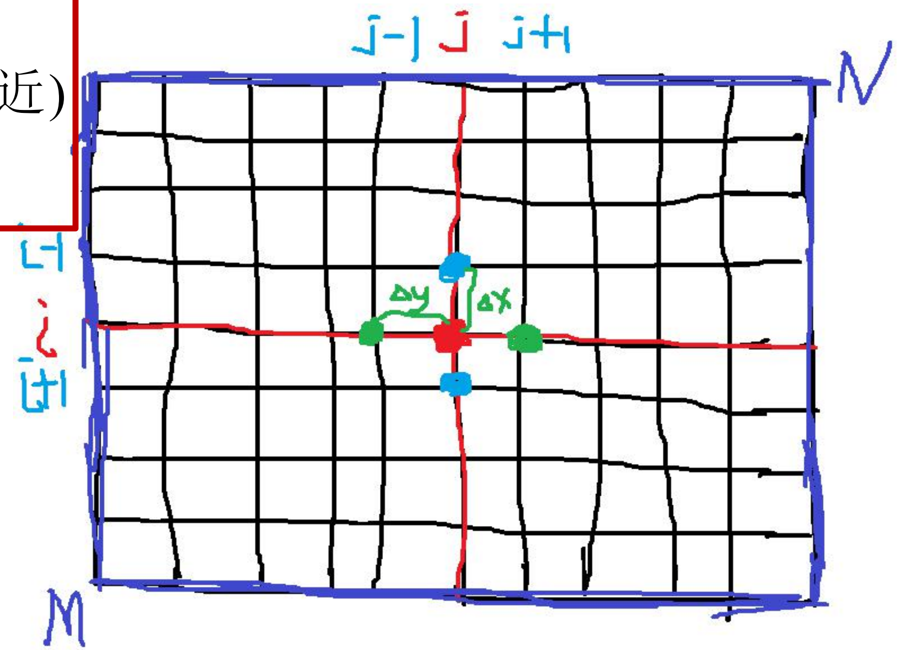
$$\nabla f = (\nabla_x f, \nabla_y f) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$$



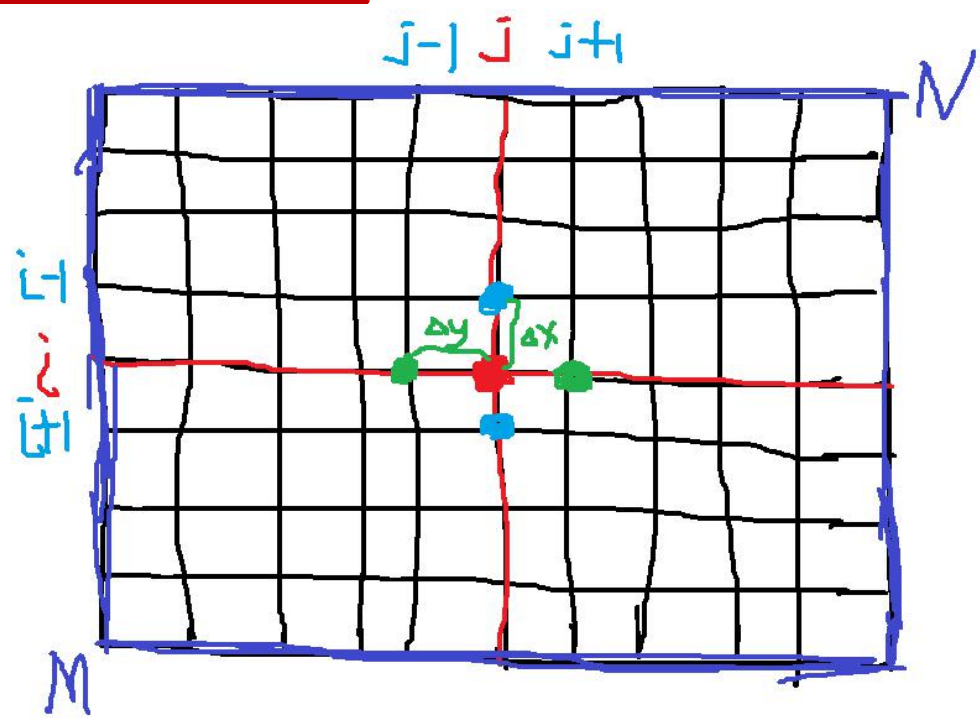
一阶向前差分或者向后差分逼近

$$
\begin{aligned}
(\frac{\partial f}{\partial x})_{ij} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\
&\approx f(x_{i+1}, y_j) - f(x_{i,}, y_j) \text{(向前差分逼近)} \\
&= f_{i+1j} - f_{ij}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\frac{\partial f}{\partial x})_{ij} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\
&\approx f(x_i, y_j) - f(x_{i-1}, y_j) \text{(向后差分逼近)} \\
&= f_{ij} - f_{i-1j}
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{ij} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \\
&\approx f(x_i, y_{j+1}) - f(x_i, y_j)\text{(向前差分逼近)} \\
&= f_{ij+1} - f_{ij} \\
&\approx f(x_i, y_j) - f(x_i, y_{j-1})\text{(向后差分逼近)} \\
&= f_{ij} - f_{ij-1}
\end{aligned}
$$



上一页

- **大小为M*N的灰度数字图像梯度定义:**

$$\nabla f = ((\nabla f)_{ij}) = ((\nabla_x f, \nabla_y f)_{ij})$$
$$= [(f_{i+1j} - f_{ij}, f_{ij+1} - f_{ij})]$$
$$i = 2, \cdots, M-1;$$
$$j = 2, \cdots, N-1;$$

- **f的维度为:M*N**

$\nabla_{\mathrm{x}} f$的维度：$M*N$，$\nabla_y f$的维度：$M*N$

∇f的维度： $M*N*2$

- **边界上的梯度:可将边界等值延拓,也可周期延拓**

下一页 上一页

2	**4**	**6**	**8**	**3**
3	1	4	7	9
7	8	6	4	2
4	9	7	3	5

5	**4**	**9**	**7**	**3**	**5**	**4**
3	2	4	6	8	3	2
9	3	1	4	7	9	3
2	7	8	6	4	2	7
5	4	9	7	3	5	4
3	2	4	6	8	3	2

周期延拓

2	**2**	**4**	**6**	**8**	**3**	**3**
2	2	4	6	8	3	3
3	3	1	4	7	9	9
7	7	8	6	4	2	2
4	4	9	7	3	5	5
4	4	9	7	3	5	5

等值延拓

下一页 上一页

2.2.4　二阶微分算子

若函数$f(x,y)$二阶可微,其一阶微分为:

$$g = \nabla f = (f_x, f_y) = (g_1, g_2);$$

对应的二阶微分为:

$$\nabla g = \begin{pmatrix} g_{1x} & g_{2x} \\ g_{1y} & g_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

又称为*Hessian*矩阵

散度算子

- 散度算子：div(f)：

$$\mathrm{div}(f) = \nabla \cdot f$$

注意f为向量，维度与梯度相同

- 给定函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)$

$$\mathrm{div}(f) = \nabla \cdot f$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}, \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}}\right) \cdot (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2) = \frac{\partial \boldsymbol{f}_1}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\partial \boldsymbol{f}_2}{\partial \boldsymbol{y}}$$

拉普拉斯算子

- 给定函数 $g(x,y)$

- Laplace算子: $\Delta = \nabla \cdot \nabla$:

$$\Delta g = \nabla \cdot \nabla g$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \cdot (g_x, g_y)$$

$$= \operatorname{div}(\nabla g) = g_{xx} + g_{yy}$$

图像$f(x,y)$ *Laplace*算子离散：向前差分–向后差分

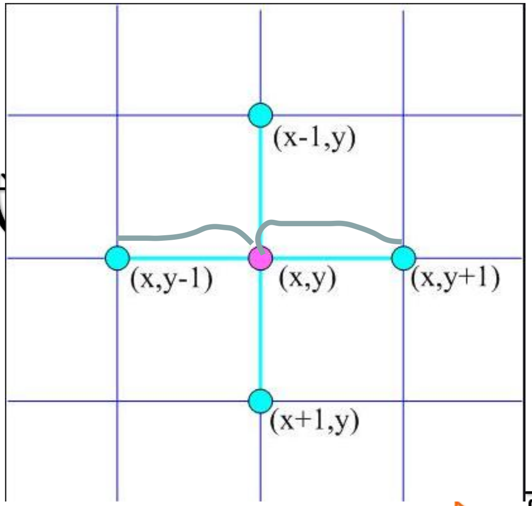
$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$$

$$= \underbrace{(f_{i+1j} - f_{ij}) - (f_{ij} - f_{i-1j})}_{xx} + \underbrace{(f_{ij+1} - f_{ij}) - (f_{ij} - f_{ij-1})}_{yy}$$

$$= f_{i+1j} - 4f_{ij} + f_{i-1j} + f_{ij+1} + f_{ij-1}$$

	1	
1	-4	1
	1	

五点差分格式



2.3 范数定义

满足以下条件的函数 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$，$\mathbf{dom}\, f=\mathbf{R}^n$ 称为范数，

- f 是非负的：对所有的 $x\in\mathbf{R}^n$ 成立 $f(x)\geqslant 0$，
- f 是正定的：仅对 $x=0$ 成立 $f(x)=0$，
- f 是齐次的：对所有的 $x\in\mathbf{R}^n$ 和 $t\in\mathbf{R}$ 成立 $f(tx)=|t|f(x)$，
- f 满足三角不等式：对所有的 $x,y\in\mathbf{R}^n$ 成立 $f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)$。

范数是对向量 x 的长度的度量；

$$\|x\|_2=(x^Tx)^{1/2}=(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{1/2}.$$

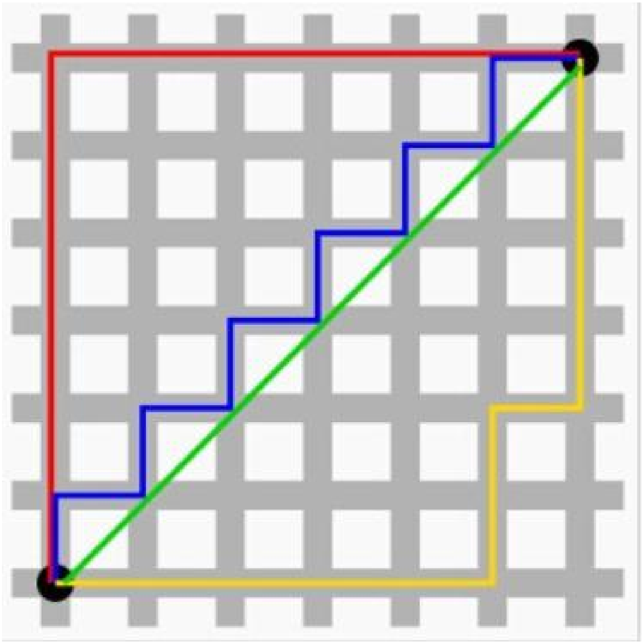
距离的多种度量

- 欧几里得距离：两点间最短的距离(绿色线)

$$S_{AB}=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$$

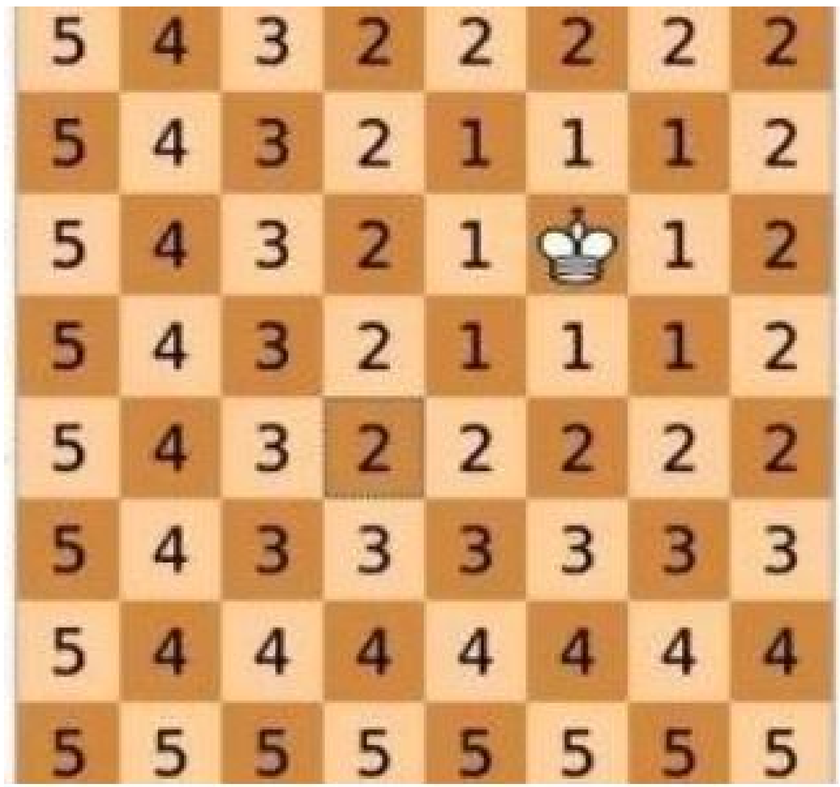
- 曼哈顿距离：(红色线)

$$S_{AB}=|x_A-x_B|+|y_A-y_B|$$



- **切比雪夫距离：**

$$S_{AB} = \max(|x_A - x_B|, |y_A - y_B|)$$



常用范数

- **L1范数：**

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$$

- **L2范数：**

$$\|x\|_2 = (x^T x)^{1/2} = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}.$$

- **无穷范数：**

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \cdots, |x_n|\}$$

- **Lp范数：**

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}.$$

- **矩阵F范数：**

$$\|X\|_F = (\mathrm{tr}(X^T X))^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}^2\right)^{1/2}.$$

下一页 上一页

例题

- 给定3*3灰度图片:

$$u=(u_{ij}), i=1,2,3; j=1,2,3$$

(1) $\boldsymbol{y(u)} = \| \nabla \mathrm{u} \|_2^2$

(2) $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{u}) = \| \nabla \mathrm{u} \|_1$

$$y = \| \nabla u \|_2^2 = \left(\sqrt{\sum_{ij} (\nabla u_{ij})^2} \right)^2 = \sum_{ij} (\nabla_x u_{ij})^2 + (\nabla_y u_{ij})^2$$

$$= \sum_{ij} (u_{i+1\,j} - u_{ij})^2 + (u_{ij+1} - u_{ij})^2$$

$$y = \| \nabla u \|_1 = \sum_{ij} | \nabla_x u_{ij} | + | \nabla_y u_{ij} |$$

$$= \sum_{ij} | u_{i+1\,j} - u_{ij} | + | u_{ij+1} - u_{ij} |$$

$$= \sum_{ij} \sqrt{(\nabla_x u_{ij})^2 + (\nabla_y u_{ij})^2}$$