智能优化算法

第2章　数学基础知识

2.1 数字图像数据

2.2 导数，梯度，散度

2.3 范数

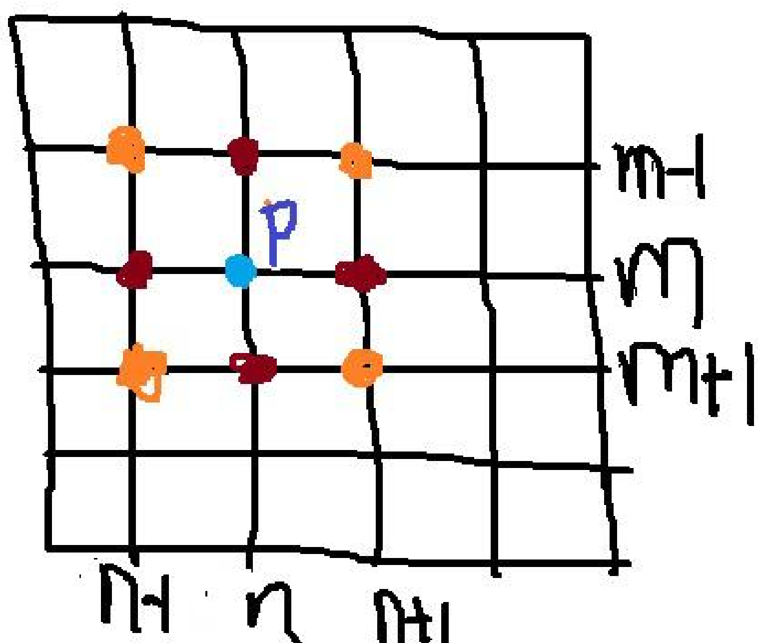
2.1.3 像素间的关系与距离

- 像素p(m,n)的相邻像素

4邻域 $N_4(p)$：(m+1, n), (m−1, n), (m, n+1), (m, n−1)

对角邻域 $N_D(p)$：(m+1, n+1), (m+1, n−1), (m−1, n+1), (m−1, n−1)

8邻域 $N_8(p)$：$N_4(p) + N_D(p)$



下一页 上一页

作业1

1. 试用三元组存储以下稀疏矩阵

$$A_{6\times7}=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&0&0\\0&2&0&0&0&0&0\\3&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&5&0&0&0\\0&0&0&0&6&0&0\\0&0&0&0&0&7&4\end{pmatrix}$$

2. 计算以下矩阵的 SVD 分解

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\0&1\end{pmatrix}$$

首先计算A^TA和AA^T

$$\mathbf{A^TA} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AA^T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

计算A^TA的特征值和特征向量

$$\lambda_1 = 6; v_1 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}; \lambda_2 = 1; v_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

计算AA^T的特征值和特征向量

$$\lambda_1 = 6; u_1 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{30} \\ 5/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{30} \end{pmatrix}; \lambda_2 = 1; u_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 0 \\ -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}; \lambda_3 = 0; u_3 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

计算奇异值:

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{6}$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 1$$

最终得到A的奇异值分解:

$$A = U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{30} & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{6} \\ 5/\sqrt{30} & 0 & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{30} & -2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

2.2.3 导数与梯度

一阶导数定义：函数在某一点处切线的斜率

如果一个函数 $f(x)$ 在 x_0 附近有定义，而且存在极限

$$L = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

那么 $f(x)$ 在 x_0 处可导且导数 $f'(x_0) = L$.

高阶导数定义：

如果函数的导数函数仍然可导，那么导数函数的导数是二阶导数，二阶导数函数的导数是三阶导数. 一般地记为

$$f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(n-1)}(x)$$

或者进一步

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x)$$

梯度

梯度算子记号 ∇：

函数的梯度：向量，其偏导数构成的向量：

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_1}\vec{\boldsymbol{e}}_1+\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_2}\vec{\boldsymbol{e}}_2+\cdots+\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_n}\vec{\boldsymbol{e}}_n$$

对于可微函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

$$\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{f}_x,\boldsymbol{f}_y,\boldsymbol{f}_z)$$

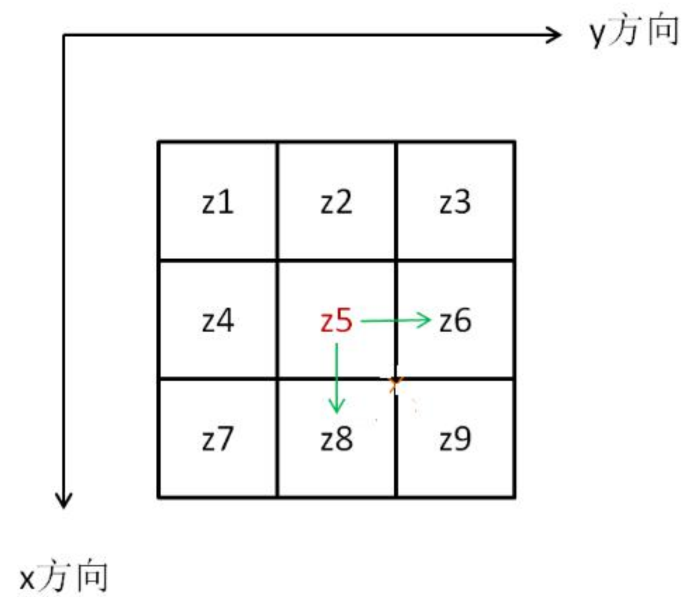
灰度图像--梯度算子离散

- 大小为M*N的灰度数字图像定义:

$$f_{ij} = f(x_i, y_j), \quad i = 1, \cdots M, j = 1, \cdots N$$

- 其梯度定义如下

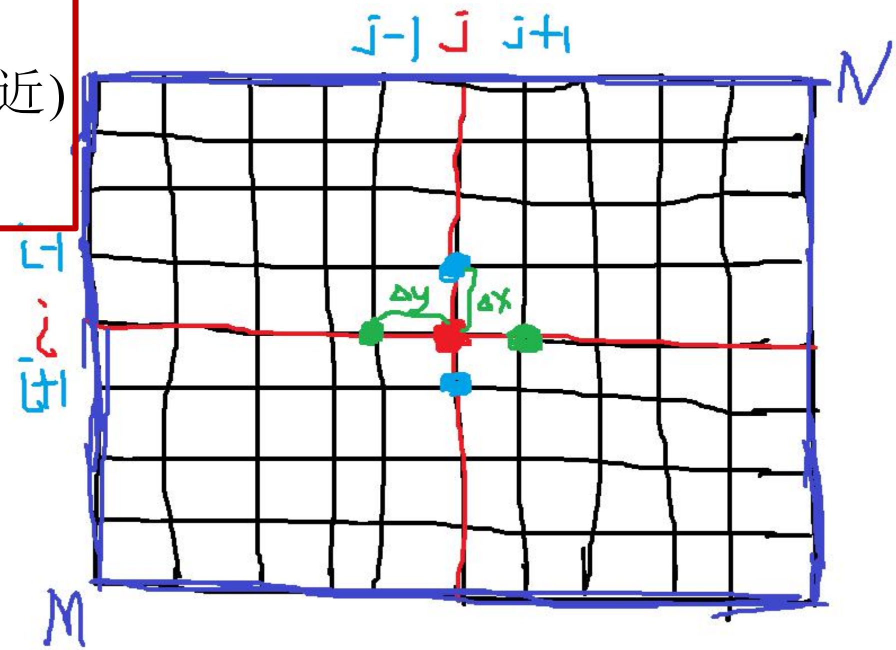
$$\nabla f = (\nabla_x f, \nabla_y f) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$$



一阶向前差分或者向后差分逼近

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{ij} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\
&\approx f(x_{i+1}, y_j) - f(x_{i,}, y_j)\text{(向前差分逼近)} \\
&= f_{i+1j} - f_{ij}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{ij} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\
&\approx f(x_i, y_j) - f(x_{i-1}, y_j)\text{(向后差分逼近)} \\
&= f_{ij} - f_{i-1j}
\end{aligned}
$$



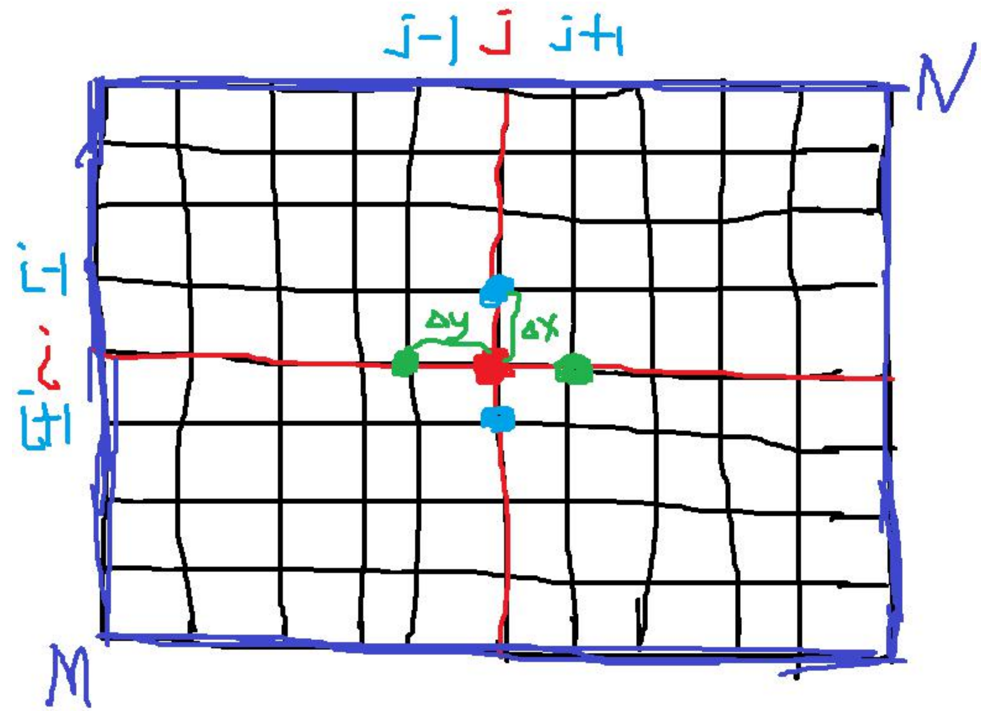
$$
\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{ij} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}
$$

$$
\approx f(x_i, y_{j+1}) - f(x_i, y_j) \text{(向前差分逼近)}
$$

$$
= f_{ij+1} - f_{ij}
$$

$$
\approx f(x_i, y_j) - f(x_i, y_{j-1}) \text{(向后差分逼近)}
$$

$$
= f_{ij} - f_{ij-1}
$$



上一页

- 大小为**M*N**的灰度数字图像梯度定义:

$$\nabla f = ((\nabla f)_{ij}) = ((\nabla_x f, \nabla_y f)_{ij})$$

$$= [(f_{i+1j} - f_{ij}, f_{ij+1} - f_{ij})]$$

$$i = 2, \cdots, M-1;$$

$$j = 2, \cdots, N-1;$$

- **f**的维度为:**M*N**

$\nabla_x f$的维度：$M*N$，$\nabla_y f$的维度：$M*N$

∇f的维度： $M*N*2$

- 边界上的梯度:可将边界等值延拓,也可周期延拓

2	**4**	**6**	**8**	**3**
3	1	4	7	9
7	8	6	4	2
4	9	7	3	5

5	**4**	**9**	**7**	**3**	**5**	**4**
3	2	4	6	8	3	2
9	3	1	4	7	9	3
2	7	8	6	4	2	7
5	4	9	7	3	5	4
3	2	4	6	8	3	2

周期延拓

2	**2**	**4**	**6**	**8**	**3**	**3**
2	2	4	6	8	3	3
3	3	1	4	7	9	9
7	7	8	6	4	2	2
4	4	9	7	3	5	5
4	4	9	7	3	5	5

等值延拓

2.2.4 二阶微分算子

若函数$f(x,y)$二阶可微,其一阶微分为:

$$\boldsymbol{g}=\nabla \boldsymbol{f}=(\boldsymbol{f}_x,\boldsymbol{f}_y)=(\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2);$$

对应的二阶微分为:

$$\nabla \boldsymbol{g}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{g}_{1x} & \boldsymbol{g}_{2x} \\ \boldsymbol{g}_{1y} & \boldsymbol{g}_{2y} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \boldsymbol{f}_{xx} & \boldsymbol{f}_{xy} \\ \boldsymbol{f}_{yx} & \boldsymbol{f}_{yy} \end{pmatrix}$$

又称为***Hessian***矩阵

散度算子

- 散度算子：div(f)：

$$\mathrm{div}(f) = \nabla \cdot f$$

注意f为向量，维度与梯度相同

- 给定函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)$

$$\mathrm{div}(f) = \nabla \cdot f$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}, \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}}\right) \cdot (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2) \quad = \frac{\partial \boldsymbol{f}_1}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\partial \boldsymbol{f}_2}{\partial \boldsymbol{y}}$$

拉普拉斯算子

- 给定函数 $g(x,y)$

- Laplace算子: $\Delta = \nabla \cdot \nabla$:

$$\Delta g = \nabla \cdot \nabla g$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \cdot (g_x, g_y)$$

$$= \operatorname{div}(\nabla g) = g_{xx} + g_{yy}$$

图像$f(x,y)$ Laplace算子离散：向前差分–向后差分

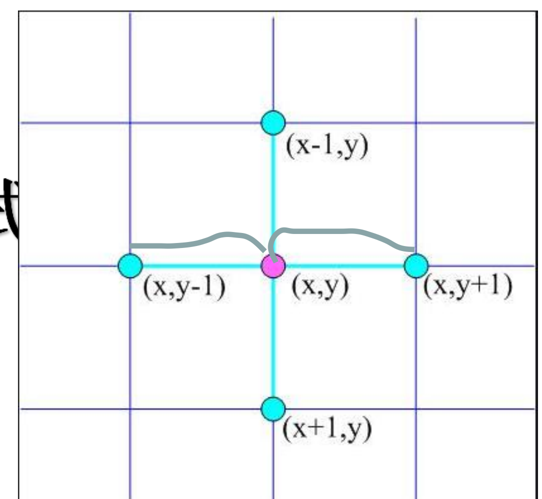
$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$$

$$= \underbrace{(f_{i+1j} - f_{ij}) - (f_{ij} - f_{i-1j})}_{xx} + \underbrace{(f_{ij+1} - f_{ij}) - (f_{ij} - f_{ij-1})}_{yy}$$

$$= f_{i+1j} - 4f_{ij} + f_{i-1j} + f_{ij+1} + f_{ij-1}$$

	1	
1	-4	1
	1	

五点差分格式



2.3 范数定义

满足以下条件的函数 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$，$\mathbf{dom}\, f=\mathbf{R}^n$ 称为范数，

- f 是非负的：对所有的 $x\in\mathbf{R}^n$ 成立 $f(x)\geqslant 0$，
- f 是正定的：仅对 $x=0$ 成立 $f(x)=0$，
- f 是齐次的：对所有的 $x\in\mathbf{R}^n$ 和 $t\in\mathbf{R}$ 成立 $f(tx)=|t|f(x)$，
- f 满足三角不等式：对所有的 $x,y\in\mathbf{R}^n$ 成立 $f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)$。

范数是对向量 x 的长度的度量；

$$\|x\|_2=(x^Tx)^{1/2}=(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{1/2}.$$

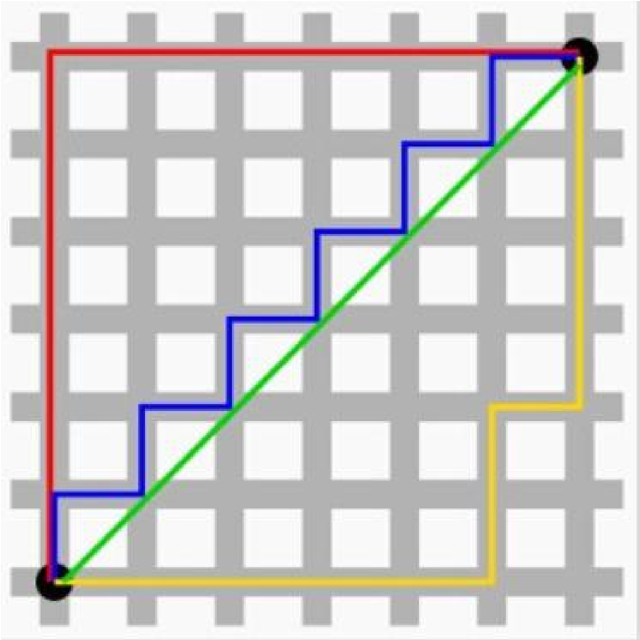
距离的多种度量

- 欧几里得距离：两点间最短的距离(绿色线)

$$S_{AB}=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$$

- 曼哈顿距离：(红色线)

$$S_{AB}=|x_A-x_B|+|y_A-y_B|$$



- ## 切比雪夫距离：

$$S_{AB} = \max(|x_A - x_B|, |y_A - y_B|)$$

下一页 上一页

常用范数

- **L1范数：**

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$$

- **L2范数：**

$$\|x\|_2 = (x^T x)^{1/2} = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}.$$

- 无穷范数：

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \cdots, |x_n|\}$$

- **Lp范数：**

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}.$$

- 矩阵**F**范数：

$$\|X\|_F = (\mathrm{tr}(X^T X))^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} X_{ij}^2 \right)^{1/2}.$$

下一页 上一页

例题

- 给定3*3灰度图片:

$$u = (u_{ij}), i = 1,2,3; j = 1,2,3$$

(1) $\boldsymbol{y(u)} = \| \nabla \mathrm{u} \|_2^2$

(2) $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{u}) = \| \nabla \mathrm{u} \|_1$

$$y=\|\nabla u\|_2^2=\left(\sqrt{\sum_{ij}(\nabla u_{ij})^2}\right)^2=\sum_{ij}(\nabla_x u_{ij})^2+(\nabla_y u_{ij})^2$$

$$=\sum_{ij}(u_{i+1\,j}-u_{ij})^2+(u_{ij+1}-u_{ij})^2$$

$$y=\|\nabla u\|_1=\sum_{ij}|\nabla_x u_{ij}|+|\nabla_y u_{ij}|$$

$$=\sum_{ij}|u_{i+1\,j}-u_{ij}|+|u_{ij+1}-u_{ij}|$$

$$=\sum_{ij}\sqrt{(\nabla_x u_{ij})^2+(\nabla_y u_{ij})^2}$$