Équations quartiques et cubiques, et duels mathématiques

FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ D'ANGERS

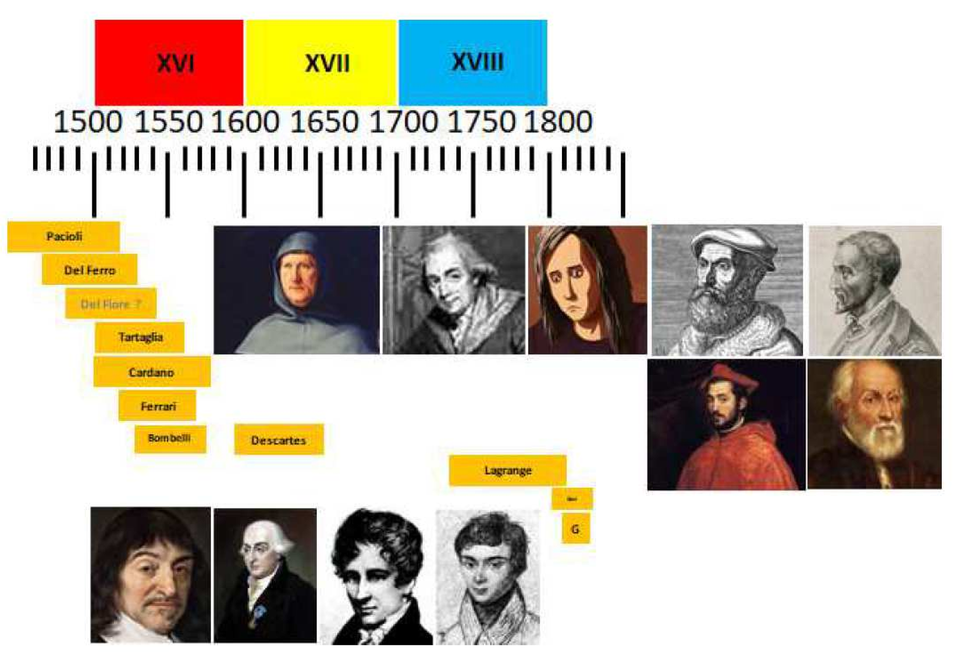
Réseau Figure
CURSUS MASTER EN INGÉNIERIE
Cursus Master en Ingénierie

Dawoud Roger[1], Héloïse Pinsard[1], Ethan Hienard[1], Michel Chrysos[2]

[1] Étudiant L2 CMI PSI – UFR Sciences – Université d'Angers
[2] Enseignant-chercheur, département de physique – Université d'Angers

La résolution des équations quartiques et cubiques remonte au XVe et se poursuit jusqu'aux XVIe et XVIIe siècles. Elle débute par une pratique qui était monnaie courante à l'époque : les duels mathématiques. L'épopée démarre en Italie avec la résolution, par Fontana-Tartaglia puis par Cardano, des polynômes cubiques. Puis, ce dernier et son disciple, Ludovico Ferrari, enchainent sur les polynômes quartiques, avant que Ferrari mène à son insu à la découverte par Bombelli des nombres complexes.

L'épopée italienne



L'histoire de la découverte des solutions des équations cubiques et quartiques remonte à la Renaissance italienne et nous montre ce que signifiait d'être mathématicien aux XVe et XVIe siècles. À cette époque, les mathématiciens avaient l'habitude de s'affronter publiquement dans des duels mathématiques. Ce sont notamment les Italiens Scipione del Ferro, Niccolò Fontana-Tartaglia,. Gerolamo Cardano, et, Ludovico Ferrari qui s'y sont distingués, et dont les exploits attireront notre attention. Leurs travaux sur les équations cubiques s'étendent sur les équations quartiques, et constituent des percées majeures. Plus intéressant encore, elles ont jeté les bases de la découverte des nombres imaginaires, grâce notamment aux balbutiements de Ludovico Ferrari, et surtout par suite des travaux de Raphaël Bombelli qui fut le découvreur des nombres complexes.

Une équation cubique déprimée ?

Une équation cubique complète se présente comme suit :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

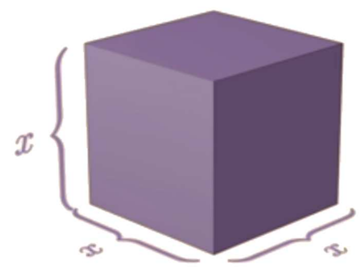
Accéder à la solution n'est pas tâche aisée. Scipione del Ferro a pu formuler les solutions des équations cubiques en les transformant en des équations dites déprimées, à savoir, des polynômes d'ordre trois dont le terme quadratique est manquant : $a'x^3 + c'x + d' = 0$

Le passage de la forme classique à la forme déprimée est réalisé en prenant :

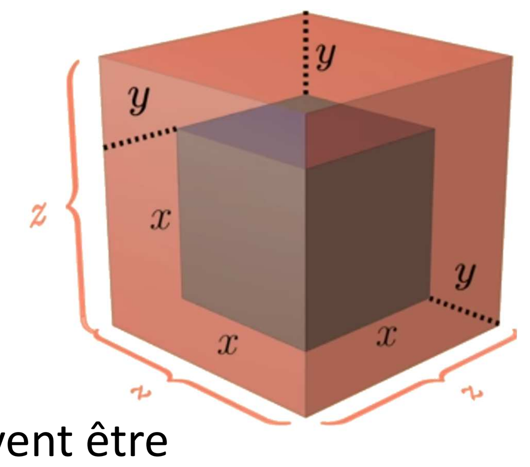
$$x = x' - \frac{b}{3a}$$

Exemple d'une équation cubique déprimée

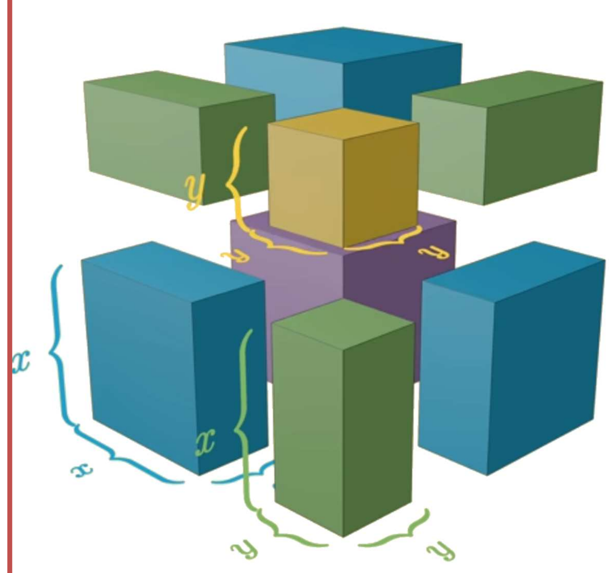
Soit l'équation cubique déprimée suivante : $x^3 + 9x = 26$



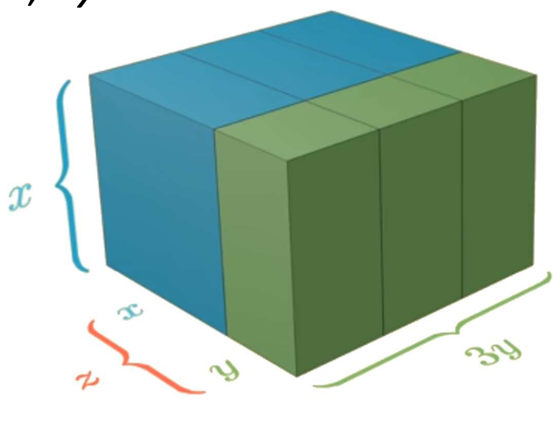
A l'époque, les mathématiciens cherchaient à résoudre les équations à l'aide des démarches géométriques . Ainsi, x^3 peut être représenté par le volume du cube ci-contre.



Soit à présent un cube de côté z=x+y (fig. ci-contre). Son volume est x^3+$3xy(x+y)$+y^3. Ainsi, $3xy(x+y)+y^3$ représente le volume de six parallélépipèdes, dont trois de volume x^2y, trois autres de volume xy^2, et un cube de volume y^3. Ces formes géométriques sont montrées ci-dessous.



Ces parallélépipèdes peuvent être arrangés de sorte à n'en former qu'un seul, qui sera de côtés x, $3y$ et z comme montré ci-contre.



Le volume du cube de côté x additionné à celui du nouveau parallélépipède est égal à 26 à condition que: $9\cancel{x} = 3\cancel{x}yz$

Ainsi, on a l'équation initiale, qui devient : $x^3 + 3xyz + y^3 = 26 + y^3$

$$z^3 = 26 + y^3$$
$$26 + y^3 = \frac{27}{y^3}$$
$$26y^3 + (y^3)^2 = 27$$

On arrive à une équation bicarrée dont l'inconnue est y^3 .
On trouve ainsi : y = 1, puis z = 3, et x = 2.
C'est ainsi que l'équation cubique peut être résolue géométriquement. Bien que cette méthode soit très utile et ludique, elle cesse de fonctionner en cas de coefficients négatifs : des volumes négatifs (voire complexes) pouvant apparaître, la méthode devient incohérente.

Équations quartiques

Afin de résoudre une équation quartique générale de la forme :

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

nous devons d'abord effectuer la substitution pour éliminer le terme cubique bx^3. L'équation quartique prend alors la forme déprimée suivante : $x^4 + px^2 + qx + r = 0$

avec: $p = \frac{c}{a} - \frac{3b^2}{8a^2}$ $\quad r = \frac{e}{a} - \frac{bd}{4a^2} - \frac{3b^4}{256a^4}$ $\quad q = \frac{d}{a} - \frac{bc}{2a^2} + \frac{b^3}{8a^3}$

Remplaçons $x^4=(x^2-\lambda)^2+2\lambda x^2-\lambda^2$ dans l'équation déprimée. Il vient :

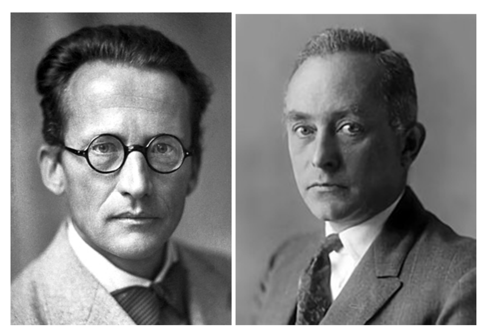
$$(x^2-\lambda)^2 + 2\lambda x^2 - \lambda^2 + px^2 + qx + m = (x^2-\lambda)^2 - (\lambda^2 - m - px^2 - 2\lambda x^2 - qx) = 0$$

Cette équation est factorisable si $(\lambda^2 - m - px^2 - 2\lambda x^2 - qx)$ admet une racine double, c'est à dire si son discriminant est nul : $\Delta = 0$. Il vient alors $\Delta = q^2 - 4(-2\lambda - p)(\lambda^2 - m) = 8\lambda^3 + 4p\lambda^2 - 8m\lambda + q^2 - 4mp = 0$

On doit donc résoudre une équation cubique. A la suite de cette résolution, on en déduit les valeurs de λ, puis, en factorisant, les valeurs de x. En conclusion, résoudre une équation quartique revient finalement à résoudre une équation cubique par suite d'un jeu de manipulations savantes.

Nombres complexes: un nouveau monde

Les nombres complexes furent pendant un temps une simple étape intermédiaire. Leur découverte est très importante pour la physique en tant qu'outil. Ces nombres servent en effet dans la simplification des problèmes et calculs de la physique classique : pour calculer des circuits électriques, on recourt à des impédances qui sont des quantités complexes; pour décrire des ondes planes, on utilise des exponentielles complexes, etc. L'apport des nombres complexes est donc précieux : en utilisant des valeurs complexes, il est possible de simplifier les problèmes bien que la physique classique soit entièrement décrite par des valeurs réelles, et qu'elle soit intrinsèquement mathématiquement réelle.



Totalement à l'opposée, la physique quantique, fruit d'une poignée de savants du XXe siècle (Planck, Bohr, Heisenberg, ou encore Born et Schrödinger - portraits ci-contre), nécessite l'utilisation des nombres complexes. En effet, l'unité imaginaire i figure explicitement dans l'équation de Schrödinger : $\hat{H}\Psi(x,y,z,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,y,z,t)$

En découle une fonction d'onde Ψ qui se doit d'être complexe, décrivant des particules aux caractéristiques intrinsèquement complexes.

Par-delà le degré 3 et 4

Après avoir vu comment résoudre analytiquement les équations cubiques et quartiques, on peut se demander ce qu'il en est pour les équations quintiques ou celles de degrés supérieurs. D'après le théorème d'Abel-Ruffini, il n'est pas possible d'exprimer les racines d'une équation quintique par voie analytique; et même encore plus surprenant, il n'est pas possible d'exprimer les racines pour toutes les équations de degré supérieur ou égal à 5.

Pour de telles équations, seule la voie numérique peut fournir des solutions.

Pour s'en convaincre, prenons une équation quintique avec des racines choisies au préalable : $x^5 - 2x^4 - 30x^3 + 180x^2 - 331x + 182 = 0$

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -7, x_4 = 3+2i, x_5 = 3-2i$$

Pour résoudre cette équation numériquement, la méthode de Newton-Raphson est un outil très fiable et pratique :

Guess | Valeurs convergées

n	$n=0$	$n=1$	...	$n=5$	...	$n=9$
$x_{1,n}$	0	0.5498		0.9999		1
$x_{2,n}$	5	4.1429		2.0179		2
$x_{3,n}$	−10	−8.4799		−7.0000		−7
$x_{4,n}$	$5+5i$	$4.2978+3.9642i$		$3.0373+2.0475i$		$3+2i$
$x_{5,n}$	$5-5i$	$4.2978-3.9642i$		$3.0373-2.0475i$		$3-2i$

L'épopée de la résolution analytique des polynômes de degré 3 et 4 a été semée d'embûches, mais a néanmoins permis de réaliser de grandes découvertes. La résolution en soi est déjà une percée mathématique majeure. Mais les portes qu'elle a ouvertes, en dévoilant au monde des concepts d'une immense importance, sont encore plus majestueuses. Les nombres complexes qui en ont découlé est devenu un outil omniprésent, indispensable pour la physique, que ce soit pour les étudiants ou les chercheurs. Au cours du XXe siècle ces nombres ont acquis un rôle fondamental : ils apparaissent au cœur même de la structure de la matière et ses mathématiques intrinsèquement.

Sources: https://www.youtube.com/watch?v=cUzklzVXJwo, M.Chrysos